S. THOMAS i S. NIEMYSKI

RACHUNKI

DLA

SZKÓŁ POWSZECHNYCH SIEDMIOKLASOWYCH

CZĘŚĆ VI.

KURS SZÓSTEJ i SIÓDMEJ KLASY SZKÓŁ POWSZECHNYCH

WYDANIE DRUGIE

Nakładem Towarzystwa Wydawniczego Nauczycielstwa
Województwa Łódzkiego, Sp. z ogr. odp., Łódź, Piotrkowska 11

Odbito w drukarni Państwowej w Łodzi, Piotrkowska 85.

Liczby ogólne.

1. a) Zmieszano dwa gatunki towaru, przyczem pierwszego gatunku wzięto 18 kg, drugiego zaś 15 kg. Ile kg zawierała mieszanina?

b) Zmieszano dwa gatunki towaru, przyczem pierwszego gatunku wzięto 24 kg, drugiego zaś $3\frac{3}{4}$ kg. Ile kg zawierała mieszanina?

c) Zmieszano dwa gatunki towaru, przyczem pierwszego gatunku wzięto $17\frac{2}{3}$ kg, drugiego zaś $12\frac{1}{4}$ kg. Ile kg zawierała mieszanina?

d) Zmieszano dwa gatunki towaru, przyczem pierwszego gatunku wzięto 29,06 kg, drugiego zaś $56\frac{7}{8}$ kg. Ile kg zawierała mieszanina?

e) Jakie działanie należało wykonać na ilościach 2 gatunków towaru, użytych na przygotowanie mieszaniny, ażeby otrzymać ogólną ilość mieszaniny?

Zamiast mówić, że waga całej mieszaniny równa się sumie ilości poszczególnych gatunków towaru, użytych na przygotowanie mieszaniny, zależność tę wyrażamy, pisząc:

$$w = b + a,$$

przytem w oznacza ilość (kg) mieszaniny, a a i b ilości poszczególnych gatunków, użytych na przygotowanie mieszaniny.

Litery, zazwyczaj małe, zastępujące liczby szczegółowe, nazywamy *liczbami ogólnemi*, gdyż one zastępują nie jedną liczbę, lecz cały ciąg liczb szczegółowych całkowitych lub ułamkowych.

Liczby ogólne używane są w zastępstwie liczb szczegółowych wtedy, gdy głównie chodzi o sformułowanie zależności między wielkościami, nie zaś o liczbowy wynik zagadnienia.

Działania na liczbach ogólnych, podobnie, jak i na liczbach szczegółowych, zaznaczamy, łącząc liczby znakami: $+$, $-$, $\times$ (lub $\cdot$), $:$ (lub —).

Znak $+$, położony przed liczbą, oznacza, że ta liczba ma być dodana. Tak nprz. $a+b$ wskazuje, że liczba, oznaczona przez b, ma być dodana do liczby, oznaczonej przez a. Jeżeli a oznacza 15, a b oznacza 12, wtedy $a+b$ oznacza $15+12$. Znak $+$ czyta się *więcej;* tym sposobem $a+b$ przeczytamy: a więcej b.

Znak —, położony przed liczbą, wskazuje, że liczba ta ma być *odjęta*. Tak więc $a-b$ oznacza, że liczba, oznaczona przez b, ma być odjętą od liczby, oznaczonej przez a. Jeżeli a oznacza 13, b zaś oznacza $2\frac{1}{2}$, wtedy $a-b$ oznacza $13-2\frac{1}{2}$. Znak — czyta się *mniej;* tym sposobem $a-b$ przeczytamy: a mniej b.

Znak $\times$ oznacza, że liczby, połączone zapomocą tego znaku, mają być przez siebie *pomnożone*. Tak nprz. $a\times b$ oznacza, że liczba, którą przedstawia a, ma być pomnożona przez liczbę, którą przedstawia b. Znak $\times$ nazywa się *znakiem mnożenia* i $a\times b$ czyta się: a pomnożone przez b, lub krócej a przez b. Jeżeli a oznacza 2, b zaś 0,5, wtedy $a\times b$ oznacza $2\times 0{,}5$.

Dla krótkości znak mnożenia bardzo często opuszcza się; pisze się więc ab zamiast $a\times b$ i ma to samo znaczenie.

Znak mnożenia nie może być opuszczony, gdy liczby są wyrażone zapomocą cyfr. Tak nprz. chcąc zaznaczyć iloczyn 5 przez 8, piszemy 5×8, nigdy zaś 58, gdyż 58 ma inne znaczenie, mianowicie: pięćdziesiąt osiem.

Częstokroć w miejsce znaku $\times$ używany bywa punkt (.). Możemy więc napisać w miejsce 5×8 — 5.8, $a.b$ zamiast $a\times b$.

Zazwyczaj znaków mnożenia $\times$ lub . nie piszemy pomiędzy liczbą, wyrażoną zapomocą cyfr, a liczbą wyrażoną zapomocą liter; tak np. zamiast $7\times m$ lub $7.m$ pisze się $7m$ i ma toż samo znaczenie.

Znak : oznacza, że liczba, która się przed nim znajduje ma być podzielona przez liczbę, znajdującą się za nim, nprz. $a:b$ oznacza, że liczba, oznaczona przez a, ma być podzielona przez liczbę, oznaczoną przez b. Chcąc zaznaczyć, że jedna liczba ma być podzielona przez drugą, nprz. m przez n, piszemy $\frac{m}{n}$, co ma toż samo znaczenie, co i $m:n$.

Chcąc zaznaczyć, że liczby są równe, używamy znaku $=$, zwanego *znakiem równości*. Nprz. $c=d$ czyta się: „c równa się d" lub też „c jest równe d".

Połączenie liczb (ogólnych lub szczegółowych) zapomocą znaków działań nazywamy *wyrażeniem algebraicznem*.

Wartość szczegółową wyrażenia algebraicznego, jaką otrzymamy, gdy literom, wchodzącym w skład wyrażenia algebraicznego, nadamy wartości szczegółowe i wykonamy wskazane działanie, nazywamy *wartością liczebną.*

2. a) Wykaż zależności pomiędzy liczbą uczniów obecnych w klasie, liczbą nieobecnych i liczbą wszystkich uczniów klasy, oznaczając liczbę obecnych przez m, liczbę nieobecnych przez n i liczbę wszystkich przez p.

Wartości szczegołowe:

$$m = 20;\ 30,\ 41$$
$$n = 0;\ 5;\ 3.$$

b) czy liczby m i n mogą mieć w tym wypadku wartości szczegółowe ułamkowe?

3. W jednej wiosce jest k koni, a w drugiej o a koni więcej. Ile (x) jest koni w drugiej wiosce?

Wartości szczegółowe.

4. Gospodarz kupił na jarmarku sukna za a zł., mydła za b zł. i nafty za b zł. Ile (y) zł. wszystkiego zapłacił?

5. Kupiono towar za p zł., a sprzedano go z zyskiem m zł. Za ile (x) zł. sprzedano towar?

$$p = 120;\quad 424{,}25;\ 80{,}8$$
$$m = 12\tfrac{1}{2};\quad 96\tfrac{3}{4};\quad 7{,}05.$$

6. Oznaczając cenę kupna towaru przez t, cenę sprzedaży przez s, a zysk przez z, wyraź zależność pomiędzy t, s i z, przyjmując kolejno każdą z nich za poszukiwaną (niewiadomą), a pozostałe za wiadome (dane). Ułóż odpowiednie zagadnienie.

7. Jeżeli c wyraża pewną liczbę całkowitą, to jak należy wyrazić bezpośrednio następującą po c liczbę całkowitą? Jak należy wyrazić liczbę całkowitą, bezpośrednio poprzedzającą liczbę c? Jak należy wyrazić trzy następujące po c liczby całkowite i cztery liczby całkowite, poprzedzające liczbę c?

8. Ktoś ma obecnie a lat; ile (y) lat miała ta osoba b lat temu? po upływie jakiego czasu osoba ta będzie miała c lat?

$$a = 14;\ 14\tfrac{1}{2};\ b = 10;\ 1\tfrac{3}{4};\ c = 5\tfrac{1}{2};\ 12{,}4$$

9. Z Lublina do Warszawy wzdłuż linji kolejowej jest a km; z Lublina do Dęblina wzdłuż tej samej linji kolejowej b km. Ile (z) km jest wzdłuż linji kolejowej z Dęblina do Warszawy?

Zmierz na mapie odległość a i b i oblicz wartość liczebną.

10. Za towar, którego cena wynosi a zł. i na którym ustąpiono b zł. rabatu, wypłacono zadatku c zł. Ile (x) zł. należy dopłacić?

$$a = 865;\ b = 28{,}7;\ c = 35{,}8.$$

11. Przy jednej drodze znajdują się 2 wsie i miasto. Z miasta do piewszej wsi jest k km, do drugiej zaś p km. Z pierwszej wsi do drugiej jest m km. Ułóż zagadnienie, oznaczając kolejno przez k, p, m, wielkość poszukiwaną.

12. Wykaż zapomocą wzoru:

a) do liczby a dodać różnicę pomiędzy liczbami b i c;

b) od liczby c odjąć sumę liczb a i b;

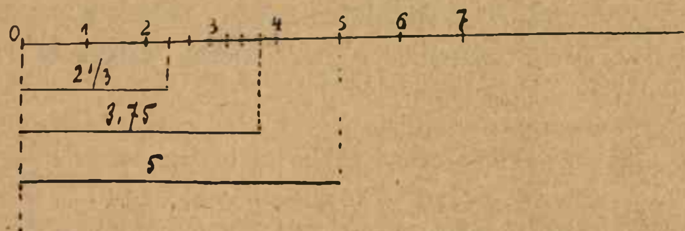
c) różnicę pomiędzy liczbami a i c pomnożyć przez d;

d) liczbę a podzielić przez sumę liczb b i e;

e) różnicę pomiędzy liczbami a i b podzielić przez d.

13. Każdą z liczb, bądź to używaną dotąd w arytmetyce elementarnej, zarówno całkowitą, jako też ułamkową, bądź to liczbę ogólną, możemy unaocznić zapomocą odcinków. Unaocznienie takie inaczej mówiąc, *graficzne* wyobrażenie liczb, da nam możność *potwierdzić* graficznie wyniki działań na liczbach, oraz prawa, które rządzą działaniami na nich. Celem unaocznienia liczb postępujemy w następujący sposób:

Na linji prostej (rys. 1), poczynając od pewnego jej punktu albo *przekroju* 0, zwanego *zerowym*, odmierzamy na prawo dowolny odcinek, wymierzony według odpowiedniej skali (np. odcinek 1 mm lub 1 cm i t. p.) i oznaczamy każdy z otrzymanych punktów liczbami wskazującemi, o ile jednostek jest ten punkt odległy od punktu (przekroju) początkowego (zerowego). W ten sposób na prostej, nieograniczenie rozciągającej się od punktu 0, możemy otrzymać obraz, przedstawiający nieograniczony ciąg liczb całkowitych.



Rys. 1.

Dzieląc na powyższej prostej odcinki, przyjęte za jednostkę, na równe części, moglibyśmy otrzymać szereg nowych punktów (przekrojów), wyobrażających liczby ułamkowe (rys. 1). *Widzimy więc, iż na prostej, którą w tym wypadku zowiemy prostą liczbą* lub *osią liczbową,* mogą być wyobrażone *graficznie wszystkie liczby całkowite i ułamkowe.*

Liczby ogólne wyobrażamy na prostej liczbowej, odmierzając na niej podług danej skali odcinki, odpowiadające danym liczbom ogólnym.

Zaznacza się przytem, iż celem graficznego wyobrażenia liczb, dotychczas wam znanych, przyjęty jest sposób odmierzania odcinków *na prawo* od punktu zerowego.

14. Wyobraź graficznie na prostej liczbowej:

a) ciąg liczb całkowitych od 0 do 10;

b) liczby: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{5}$, $2\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{8}$;

c) liczby: 0,5; 1,3; 2,75; 3,8; 5,6.

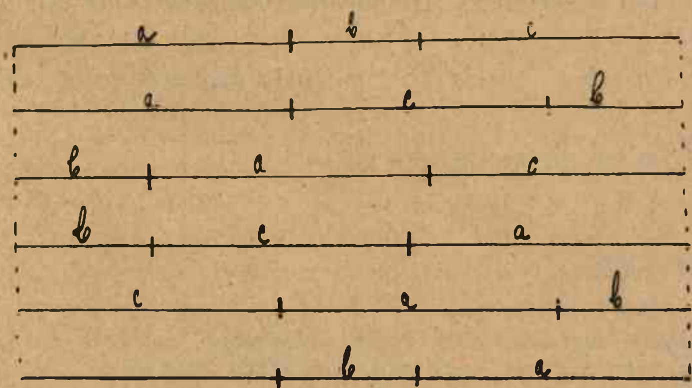
Dodawanie.

15. a) Co oznacza wzór: $s = a + b + c$

b) Jak nazywają się liczby, które dodajemy (a, b, c)?

c) Jak nazywamy wynik dodawania (s)?

d) Przedstaw graficznie sumę s liczb a, b i c.



Rys. 2.

W tym celu odmierzamy kolejno na prostej liczbowej 3 odcinki, których długości, podług danej skali, odpowiadają danym składnikom sumy i tak je ustawiamy, aby lewy koniec drugiego odcinka stykał się z prawym bokiem pierwszego, lewy koniec trzeciego odcinka z prawym drugiego.

e) Co zauważysz, odmierzając kolejno na prostej liczbowej w coraz to innym porządku odcinki, odpowiadające danym składnikom (a, b, c,) sumy?

Czy odcinki, wyobrażające poszczególne sumy, będą równemi? (Rys. 2).

Zauważoną własność sumy nazywamy *prawem przemienności* składników.

Treść prawa przemienności wyrażamy, mówiąc: *suma nie zależy od porządku składników* albo też: *składniki są przemienne.*

Treść prawa przemienności 3 składników zapomocą wzoru wyrażamy, pisząc:

$$s = a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = \\ = c + b + a$$

f) Czy prawo przemienności składników dotyczy tych przypadków, w których mamy więcej, niż 2 lub 3 składniki?

g) Wykaż zapomocą wzoru prawo przemienności 2, 4 składników.

h) Nadając liczbom a, b i c wartości szczegółowe: 1) tylko całkowite; 2) tylko ułamkowe; 3) liczbie a całkowitą, liczbom zaś b i c ułamkowe, sprawdź, czy prawo przemienności jest słuszne w poszczególnych przypadkach.

16. Do każdego z następujących wzorów ułóż zagadnienie:

a) $s = a + b + a$
b) $s = a + a + b$
c) $s = \quad c + 4$
d) $s = d + d + d$ (d oznacza liczbę całkowitą),
e) $s = 5 + g + h$ (g oznacza liczbę całkowitą, h ułamkową).

17. a) Co oznaczają wzory:

$$s = a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b = (b + c) + \\ + a = c + (a + b) \text{ i t. p.}$$

b) Przedstaw graficznie każdą z powyższych sum.

Co zauważasz?

Ażeby dodać do siebie kilka składników, możemy to wykonać, łącząc dowolnie z sobą składniki w grupy, a wynik nie ulegnie zmianie. Zauważoną własność nazywamy *prawem łączności.*

c) Nadając a, b i c wartości szczegółowe, bądź to tylko całkowite, bądź to tylko ułamkowe, jako też niektórym z nich całkowite, innym zaś ułamkowe, sprawdź, czy prawo łączności jest słuszne w poszczególnych przypadkach.

Prawo łączności jest słuszne zarówno dla składników całkowitych jak i ułamkowych, a więc i ogólnych.

d) Stosując prawo przemienności i łączności składników, wykaż zapomocą wzorów różne sposoby dodania do siebie czterech składników.

Wartości szczegółowe.

e) Grupując jak najdogodniej składniki, oblicz sumy:

1) $25 + 36 + 112 + 75$ 3) $2{,}05 + 0{,}15 + 4{,}65 + 0{,}3$

2) $8\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} + 7\frac{1}{4}$ 4) $3\frac{1}{3} + 5{,}6 + 7\frac{1}{6} + 4{,}5$

f) Następujące wyrażenia zastąp przez równoznaczne sumy, opuszczając nawiasy:

1) $(f + g) + h =$
2) $c + (d + 5) =$
3) $a + (b + c + d) =$
4) $(m + n) + (p + q) =$
5) $v + (s + 3) + t =$
6) $(x + y) + z + (o + q) =$
7) $a + (b + c) + (d + f) =$
8) $(p + q + v) + 5 + (t + 2) =$
9) $(a + b + c) =$

g) Następujące wyrażenia zastąp przez równoznaczne sumy dowolnie ujmując poszczególne składniki w nawiasy:

1) $a + b + c + d$
2) $p + q + 5 + v$
3) $3{,}5 + b + 4 + c + d$

18. Każdą z następujących sum zastąp krótszem wyrażeniem:

1) $a + a =$
2) $a + a + a =$
3) $b + b + b$
4) $b + b + a + a + a =$
5) $c + c + d + d + c + d$
6) $x + y + y + x + x + x =$
7) $p + p + 5 + p + r + r + 7 =$
8) $\frac{m + m}{3} =$
9) $\frac{a}{7} + \frac{a}{7} + \frac{a}{7} + \frac{a}{7} + \frac{a}{7} =$
10) $\frac{b}{10} + \frac{b}{10} + \frac{b}{10} + c =$
11) $x + y + y + \frac{z + z + z}{2}$

Jeżeli w sumie pewna liczba ogólna powtarza się jako składnik kilka razy, wówczas sumę taką zastępuje się krótszem wyrażeniem, stawiając przed liczbą ogólną liczbę szczegółową, wskazującą, ile razy liczba ogólna powtarza się jako składnik, np. zamiast $a + a + a$ piszemy $3a$.

Powyższą liczbę szczegółową, w danym przypadku 3, nazywamy *spółczynnikiem* liczby ogólnej. Ponieważ liczby a, b, c, możemy napisać: $1a$, $1b$, $1c$, przeto mówimy, że spółczynnikami liczb $a, b, c,$ jest jedność.

Spółczynnik może być również liczbą ułamkową lub też liczbą ogólną. Np. wyrażenie $\frac{2}{3}$ x oznacza, że trzecią część liczby x wzięto, jako składnik dwa razy:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}=\frac{2}{3}x$$

Iloczyny, które albo niczem się nie różnią od siebie, albo też, które różnią się tylko swojemi spółczynnikami, nazywamy *wyrazami podobnemi* nprz. a, $4a$, $6a$, są wyrazami podobnemi.

Graficznie wyraz, nprz. $4a$, możemy wyobrazić, odmierzając w pewnej skali odcinek, odpowiadający liczbie a cztery razy.

Ponieważ, jak wynika z określenia wyrazów podobnych, oraz na podstawie Nr. 17, mamy:

$$2x+3x=(x+x)+(x+x+x)=x+x+x+x+x=5x$$

przeto możemy powiedzieć:

Aby dodać do siebie wyrazy podobne należy dodać ich spółczynniki i obok otrzymanej sumy pozostawić liczbę ogólną.

Nprz. $5a+4a=9a$; $3x+4x+10x=17x$

19. 1) $b+2b=?$; 7) $3a+4b+7a=?$;
2) $3x+x=?$; 8) $34a+43b+6a+7b=?$;
3) $2z+5z=?$; 9) $24k+17m+17k+24k=?$;
4) $a+a+a=?$; 10) $75x+12y+15x+24y+17x=?$;
5) $c+c+3c=?$; 11) $2{,}14+3{,}14=?$;
6) $2p+3p+q=?$; 12) $9{,}232+232=?$;

20. Gdy wyrażenie algebraiczne składa się z kilku wyrazów, połączonych znakami $+$, przyczem wśród tych wyrazów są wyrazy podobne, wówczas na podstawie reguły dodawania wyrazów (Nr. 18) podobnych, można wyrazy takie zebrać w jeden, mówiąc inaczej, można wykonać *redukcję wyrazów podobnych.*

Np. 1) $5a+7b+2b+c+b=5a+10b+c$

2) $4a+5b+7c+(3a+b+2c)=4a+5b+7c+3a+b+2c=7a+6b+9c$

3) $x+4a+b+(3x+2b)+(a+x+5b)=x+4a+b+3x+2b+a+$
$+x+5b=5x+5a+8b$

4) $7m+3n+p+(3m+2q)+(2p+5n)=7m+3n+p+3m+2q+$
$+2p+5n=10m+8n+3p+2q.$

Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

1) $4x + 5y + x + 3y = ?$;

2) $7m + 2n + 7n + p + 6p + 3p = ?$;

3) $6a + b + 3 + 9b + 7c + 5c + b + 11 = ?$;

4) $2x + 4x + 5y + 7x = ?$;

5) $4a + (5a + 6b) = ?$; $9c + 2d + (d + 5c) = ?$;

6) $17x + 14y + (8x + 2y) = ?$; $9m + (2n + 6m + 7p) = ?$;

7) $14a + (19a + 15b) + (18b + 9a) = ?$; $20a + 13b + 11d + (6d + 5b) = ?$;

8) $13x + 4y + 16z + (16y + 7z) + (5x + 9z) = ?$

9) $p + 4\frac{1}{2}q + \frac{2}{3}r + (3{,}5p + 2{,}5r) + (3{,}4q + 7{,}8r) = ?$;

10) $3r + r + 2x + 3s + 7 + 12r + 4 + 3s + 1 = ?$;

11) $7x + 6y + 2z + 3t + 6y + 10 + 4z + 10 = ?$;

12) $\frac{3}{4}d + e + 14 + 0{,}2e + \frac{7}{8}d + 17 + 0{,}8e + \frac{1}{2}d + 15 = ?$;

13) $3a + 4b + 3b + \frac{1}{4}c + 1{,}1 + 1\frac{1}{2}c + 7a + \frac{5}{6}c + 5b + 1{,}07 = ?$;

14) $m + 0{,}5n + 0{,}123m + p + 0{,}35 + 6p + \frac{2}{3}n + 0{,}08m + 7p + \frac{2}{15} = ?$;

15) $k + 8m + 4m + 4x + 1 + x + 2m + \frac{3}{8}k + 0{,}6m + k = ?$.

21. Pewien gospodarz zebrał z pola *a* q żyta, inny zebrał o *b* q więcej, niż pierwszy. Ile (x) q żyta zebrał trzeci gospodarz, jeżeli wiadomo, że zebrał tyleż q żyta, co dwaj pierwsi razem?

22. Na przebudowę domu wydano: pierwszego miesiąca *a* zł., drugiego o 2000 zł. więcej, trzeciego — 2 razy i czwartego — 4 razy więcej, niż pierwszego miesiąca. Ile (y) zł. wydano w ciągu 4 miesięcy?

23. Kupiono 2,5 kg herbaty pierwszego gatunku po *a* zł. za 1 kg, 7 kg drugiego gatunku po *n* zł. i 4 kg kawy, za którą płacono tyleż, co i za herbatę pierwszego gatunku. Ile (z) złotych zapłacono za wszystko?

24. W równoległoboku jeden bok ma *a* m, a drugi jest o *b* m większy. Ile (x) m ma obwód równoległoboku?

25. Ile (v) cm ma obwód ukośnika, którego bok ma *a* dm?

26. Ile wynosi obwód ośmiokąta foremnego, mającego bok równy *m* cm?

27. Rozdzielono pewną sumę pieniędzy pomiędzy 4 osoby tak, że pierwsza otrzymała *a* zł., druga — o *b* zł. więcej, niż pierwsza, trzecia — o *c* zł. więcej, niż druga i czwarta — tyleż, co dwie pierwsze osoby razem. 1) Ile (x) otrzymała każda osoba? 2) Jaką (y) kwotę rozdzielono?

28. Krawędź sześcianu ma *b* m. Ile (x) m wynosi suma wszystkich krawędzi sześcianu?

29. Niech *m* oznacza pewną liczbę całkowitą. Znajdź sumę czterech kolejnych liczb całkowitych, następujących po *m*.

Odejmowanie.

30. a) Co oznacza wzór:

$$r = a - b$$

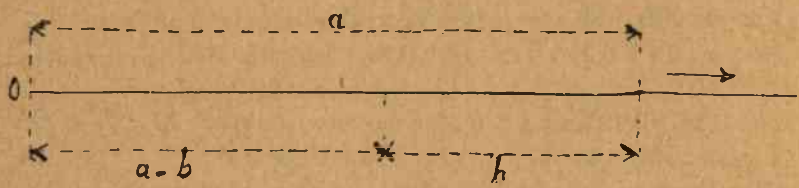
Odjąć od liczby a liczbę b, znaczy znaleźć taką liczbę, która, dodana do b, dałaby w sumie a.

b) Jak nazywamy tę liczbę, od której odejmujemy?

c) Jak nazywamy liczbę, którą odejmujemy?

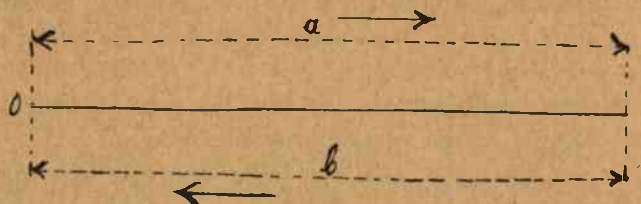
d) Jak nazywamy wynik odejmowania?

e) Przedstaw graficznie odjęcie liczby b od liczby a.



Rys. 3

W tym celu na prostej liczbowej (rys. 3) odmierzamy naprawo od punktu zerowego odcinek, odpowiadający odjemnej, następnie od punktu, wyobrażającego liczbę a, odmierzamy w kierunku przeciwnym (nalewo) odcinek, odpowiadający odjemnikowi b.



Rys. 4.

Przy odejmowaniu dwu liczb, zwraca uwagę przypadek szczególny, gdy odjemna równa się odjemnikowi ($a = b$) (rys. 4), wtedy bowiem końce odcinka, odpowiadającego odjemnikowi b, pokrywa punkt zerowy 0 (początek) odcinka, odpowiadającego odjemnej a.

Gdy odjemna = odjemnikowi, wówczas różnicę oznaczamy zerem:

$$a - b = 0.$$

Dlatego też punkt początkowy na prostej liczbowej oznaczamy przez 0.

Więc 0 jest liczbą, którą otrzymujemy, odejmując od dowolnej liczby nprz. a taką samą liczbę a

$$a - a = 0.$$

g) Ponieważ odjąć od liczby a liczbę b, znaczy znaleźć taką liczbę, która, dodana do b, dałaby w sumie a, przeto mamy:

$$a - b + b = a.$$

Z tej równości wynika, że wielkość (a) nie zmieni się, gdy do niej kolejno dodamy i odejmiemy tę samą wielkość (b).

Dodawanie więc i odejmowanie są to działania odwrotne.

31. a) Znaleźć różnicę:

$$12x - 7x.$$

Ponieważ znaleźć powyższą różnicę, znaczy znaleźć taką liczbę, która, dodana do liczby $7x$, dałaby $12x$, przeto różnica poszukiwana będzie $5x$, gdyż

$$7x + 5x = 12x.$$

Stąd wynika następująca reguła odejmowania wyrazów podobnych:

Ażeby odjąć wyrazy podobne jeden od drugiego, należy od spółczynnika odjemnej odjąć spółczynnik odjemnika, dopisując następnie obok otrzymanej różnicy liczbę ogólną.

b) $7a - 4a = ?$; $14b - 10b = ?$; $6a - 2a = ?$; $3c - c = ?$

c) $y - y = ?$; $2x - 2x = ?$; $2x - x = ?$; $3z - 2z = ?$

d) $3m - 2\frac{1}{5}m = ?$; $n - \frac{1}{3}n = ?$; $3\frac{1}{2}p - 2\frac{1}{4}p = ?$; $5\frac{5}{7}s - 2{,}8s = ?$

e) $4{,}8a - 1{,}2a = ?$; $6{,}5b - 3{,}8b = ?$; $2{,}04x - 1{,}9x = ?$; $0{,}584p - 0{,}245p = ?$

f) $0{,}001c - 0{,}001c = ?$; $7x - 0{,}16x = ?$; $50m - 43{,}07m = ?$; $y - 0{,}067y = ?$

g) $6x - \frac{2}{3}x = ?$; $12\frac{3}{4}y - 9y = ?$; $7\frac{3}{5}z - 4z = ?$; $7t - \frac{2}{6}\frac{5}{4}t = ?$

h) $9\frac{2}{3}a - 6{,}5a = ?$; $10\frac{5}{18}x - 3{,}4x = ?$; $4\frac{2}{5}y - 2{,}2y = ?$

i) $3\frac{4}{5}m - 2{,}45m = ?$; $5\frac{7}{8}n - 3{,}375n = ?$; $4\frac{7}{8}z - 1{,}475z = ?$

j) $r - 0{,}56r = ?$; $s - 0{,}037s = ?$; $4p - 3{,}07p = ?$

k) $12\frac{2}{3}x - 3{,}75x = ?$; $6\frac{3}{25}y - 2{,}03y = ?$; $18{,}25z - 6\frac{3}{4}z = ?$

l) $3{,}423a - 0{,}75a = ?$; $0{,}092b - 0{,}083b = ?$; $c - 0{,}04c = ?$

m) $5.0{,}4 - 3.0{,}4 = ?$; $2\frac{3}{7}.2{,}1 - 1\frac{2}{7}.2{,}1 = ?$; $4{,}75.\frac{4}{7} - 3\frac{3}{4}.\frac{4}{7} = ?$.

32. *Wyrażenia, składające się z 2 lub więcej wyrazów, połączonych znakami dodawania (+) lub odejmowania (—), nazywamy wielomianami.* Wielomiany, zależne od liczby wyrazów, wchodzących w ich skład, noszą nazwy: *dwumianu, trójmianu, czworomianu* i t. d.

Znaki, postawione przed poszczególnemi wyrazami wielomianu, wskazują, czy dany wyraz ma być dodany, czy też odjęty.

Wskazane działania na wyrazach podobnych można zarówno wykonywać w tym porządku, w jakim po sobie następują wyrazy podobne, lub też można obliczyć zosobna sumę wyrazów podobnych, które mają znak dodawania; następnie obliczyć sumę takichże wyrazów podobnych, przed któremi znajduje się znak mniej, i w końcu od pierwszej sumy odjąć drugą. Należy jednak pamiętać, że wskazanemi powyżej sposobami można zbierać (wykonywać redukcję) tylko wyrazy podobne.

Przykłady:

1) $25x - 9x + 4x - 8x - 5x = 16x + 4x - 8x - 5x = 20x - 8x - 5x =$
$$= 12x - 5x = 7x.$$

2) $37y + 3y - 12y + 5y - 13y - 9y - y = ?$

Redukcję wyrazów podobnych możemy wykonać również w następujący sposób:

$$37y + 3y + 5y = 45y$$
$$12y + 13y + 9y + y = 35y$$
$$35y = 10y$$

3) $x + 4a + 3x - x + 5a - 2x - 7a + 6x - a = ?$

Obliczamy w następujący sposób:

$$x + 3x - x - 2x + 6x = 10x - 3x = 7x;$$
$$4a + 5a - 7a - a = 9a - 8a = a$$

Dany więc wielomian można wyrazić:

$$7x + a$$

4) Oblicz:

$$75 + 25 - 50 + 5 - 10 - 1 - 14 = ?$$

Obliczamy tak:

a) $75 + 25 + 5 = 105$

b) $50 + 10 + 1 + 14 = 75$

c) $105 - 75 = 30,$

wiec $75 + 25 - 50 + 5 - 10 - 1 - 14 = 30.$

33. Wykonaj redukcję:

a) $13a + 7a - 14a = ?$; $25b - b - 23b = ?$; $17c - 12c - 5c = ?$

b) $12\frac{5}{12}x - 5\frac{5}{6}x + 13\frac{4}{5}x = ?$; $12y + 6\frac{1}{2}y - 8\frac{2}{3}y = ?$; $5\frac{3}{14}z - z - 2\frac{15}{21}z = ?$

c) $7{,}05m - 2{,}3m + 3{,}18m = ?$; $4{,}75n + 2{,}25n - 3{,}04n = ?$
$$3{,}6p - 2{,}4p - 0{,}08p = ?$$

d) $15d - 2\frac{3}{5}d - 10{,}07d = ?$; $r - \frac{2}{3}r + 1{,}3r = ?$; $12{,}07s + \frac{5}{6}s - 3{,}27s = ?$

e) $4x + 2x - x - 2x + 5y - 3y + 4y - y = ?$
f) $3p + 3q + 7r - 2r - q = ?$; $5x + 12y - 8y = ?$
g) $7a + 6b + 4c + 10 - 6b - 2c - 10 = ?$
h) $6c + 6d + b + 6 - 0{,}2c - 5d + 4c + d - 0{,}03c = ?$
i) $\frac{3}{4}a + 7{,}28b + 18\frac{4}{9} - 0{,}62b - 6\frac{9}{20} - 2{,}2b - 5\frac{7}{12} - 9{,}1a = ?$

34. a) Wyjaśnij na prostej liczbowej słuszność następującej równości:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

b) Sprawdź słuszność powyższej równości, nadając liczbom ogólnym, w jej skład wchodzącym, wartości szczegółowe.

c) Jaką regułę wyraża powyższa równość?

Aby dodać różnicę, należy dodać odjemną i odjąć odjemnik.

Nprz. $5a + (6a - 3b) = 5a + 6a - 3b = 11a - 3b$:

35. a) $a + (b - a) = ?$; $7a + (4a - 3b) = ?$; $9b + (5b - 4b) = ?$
b) $18x + (19x - x) = ?$; $25y + (13y - 30z) = ?$; $75t + (14z - 51t) = ?$
c) $7{,}28p + (4 - 0{,}62p) = ?$; $5{,}34q + (4{,}4q - 2p) = ?$;
$7{,}3r + (18{,}04r - 10{,}74) = ?$
d) $\frac{3}{4}a + (2 - 0{,}1a) = ?$; $6{,}3b + (4\frac{2}{15}b - 2c) = ?$; $7\frac{5}{8}c + (0{,}02c - d) = ?$
e) $m + 4n + (7m - 4n) = ?$; $3p + 12q + (p - 5q) = ?$
f) $7\frac{5}{8}x + 0{,}2 + (0{,}02 - 0{,}2x) = ?$; $3{,}3y + 6\frac{9}{20}z + (0{,}62y - 5\frac{7}{12}z) = ?$
g) $2\frac{2}{3}p + 3{,}7q + (4{,}05p - 1\frac{3}{4}q) = ?$; $24\frac{1}{3}k + 5\frac{5}{6}l + (2{,}3l - 12{,}7k) = ?$
h) $3\frac{3}{5}n + 2{,}7r + (1\frac{1}{7}r - 3{,}6n) = ?$; $5{,}75x + 3{,}3y + (4\frac{5}{6}x - 2\frac{3}{4}y) = ?$
i) $14 + (25 - 16) = ?$; $2{,}75 + (3\frac{1}{4} - 2) = ?$; $3\frac{1}{6} + (2{,}5 - 1) = ?$

36. a) Wyjaśnij na prostej liczbowej słuszność następującej równości:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

b) Sprawdź słuszność powyższej równości, nadając liczbom ogólnym, w jej skład wchodzącym, wartości szczegółowe.

c) Jaką regułę wyraża powyższa równość?

Aby odjąć sumę, należy odjąć kolejno jej składniki.

Nprz. a) $4a - (2a + b) = 4a - 2a - b = 2a - b$,
b) $17p + 5q - (12p + 3q) = 17p + 5q - 12p - 3q = 5p + 2q$.

37. a) $6a - (2a + b) = ?$; $5k - (2k + l) = ?$; $15x - (1 + x) = ?$
b) $7a + 14b - (4a + 10b) = ?$; $(5p + a) - (4p + a) = ?$
c) $2x + 2y - (x + y) = ?$; $7z + 4t - (3t + z) = ?$
d) $3\frac{3}{8}d + 2\frac{2}{5}l - (2\frac{1}{4}d + \frac{2}{15}l) = ?$; $6\frac{1}{2}p + 5\frac{3}{4}q - (5\frac{3}{4}p + 2\frac{3}{4}q) = ?$
e) $4{,}25m + 0{,}3n - (3\frac{3}{4}m + \frac{1}{5}n) = ?$; $12\frac{5}{8}s + 3{,}08r - (3{,}75s + 2\frac{2}{3}r) = ?$
f) $3\frac{3}{40}k + 0{,}2 - (0{,}02 + 0{,}2k) = ?$; $5{,}34l + 5\frac{7}{12} - (4{,}4l - 0{,}1) = ?$
g) $34 - (15 + 12) = ?$; $5{,}1 + 3{,}4 - (2{,}75 + 3\frac{2}{3}) = ?$

38. a) Wyjaśnij na prostej liczbowej słuszność następującej równości:

$$a-(b-c)=a-b+c=a+c-b$$

b) Sprawdź słuszność powyższej równości, nadając liczbom ogólnym, w jej skład wchodzącym, wartości szczegółowe;

c) Jaką regułę wyraża powyższa równość?

Aby odjąć różnicę, należy odjąć odjemną i dodać odjemnik, lub też: *Aby odjąć różnicę, należy dodać odjemnik i odjąć odjemną.*

Nprz. a) $12x-(7x-3x)=12x-7x+3x=8x$
lub $12x-(7x-3x)=12x+3x-7x=8x$
b) $4a+b-(a-3b)=4a+b-a+3b=3a+4b$.

39. a) $7a-(3a-2a)=?$; $27m-(12m-5m)=?$
b) $42p-(14p-5)=?$; $34c-(25c-7d)=?$
c) $7\frac{5}{8}x-(3\frac{3}{40}x-0{,}2)=?$; $\frac{3}{4}y-(1-2\frac{3}{5}y)=?$
d) $7{,}28r-(0{,}62r-0{,}1)=?$; $5{,}03m-(3{,}5-7{,}4m)=?$
e) $x+4y-(y-3x)=?$; $2z+7t-(2z-3t)=?$
f) $a+14b+(5\frac{2}{9}+2b)-(3b+3\frac{2}{3})=?$
g) $(0{,}7x+7\frac{5}{8})-(0{,}3x-3\frac{11}{12})+(5x-y)=?$
h) $12{,}07x+4\frac{7}{8}-(3{,}6x-7{,}5y)+(0{,}8y-5{,}04x)-0{,}03x=?$.

40. Nie zmieniając wartości wyrażenia:

$$x+y-z-t,$$

przedstaw je w postaci sumy 2 składników, z których jeden zawierałby pierwszy i trzeci wyrazy.

41. Nie zmieniając wartości wyrażenia:

$$a-x+1,$$

przedstaw je w postaci różnicy 2 wyrażeń, z których pierwsze $= a$.

42. Nie zmieniając wartości wyrażenia:

$$a-b+c-d$$

przedstaw je w różnych postaciach:

a) ujmując w nawias trzy ostatnie wyrazy,
b) ujmując w nawias trzy pierwsze wyrazy,
c) ujmując w nawias dwa środkowe wyrazy,
d) ujmując w nawias dwa ostatnie wyrazy.

43. Zmień postać wyrażenia:

$$p(x-1)-(1-x)$$

tak, by wyrażenia, zawarte w nawiasach, stały się równemi.

44. Zmień postać wyrażenia:

$$2(c - b) + (b - c)$$

tak, by wyrażenia, zawarte w nawiasach, stały się równemi.

45. Zaznacz zapomocą użycia nawiasów, że wyrażenie:

$$p - 3q + 5r$$

jest różnicą pomiędzy $5r$ i wyrażeniem, składającem się z pozostałych wyrazów.

46. Pozostawłając bez zmiany wartość wyrażenia:

$$a + 3b - 2c - 5d$$

przedstaw je w postaci sumy i różnicy dwu wyrażeń.

47. Suma 3 składników $= s$; jeden ze składników $= a$, drugi zaś b. Oblicz trzeci składnik.

48. Suma 2 liczb $= a$; Oblicz różnicę pomiędzy temi liczbami, jeżeli większa z tych liczb $= b$.

$$a = 10;\ 3{,}21;\ 2\tfrac{7}{18};\ b = 6;\ 2{,}1;\ \tfrac{11}{12}$$

49. Waga brutto towaru wynosi m kg; oblicz wagę netto, jeżeli tara wynosi $(b - 5)$ kg.

50. Ktoś, mający przy sobie a zł., wydał na kupno gazet b groszy, a na kupno książki c zł. Ile mu pozostało złotych?

51. Ile (x) cm wynosi obwód równoległoboku, mającego podstawę równą a cm i bok mniejszy od podstawy o b cm?

52. Oblicz sumę trzech kolejnych liczb całkowitych, bezpośrednio poprzedzających liczbę całkowitą m.

53. Cztery sztuki sukna zawierają razem m m; w pierwszej było a m, w drugiej o 3 m mniej, niż w 1-ej, a w trzeciej było tyleż, co i w drugiej. Ile (y) m było w czwartej sztuce?

$$m = 90;\ 104;\ a = 24;\ 30{,}5$$

Mnożenie.

54. a) Co oznacza wzór:

$$i = a \times b = a \,.\, b = ab,$$

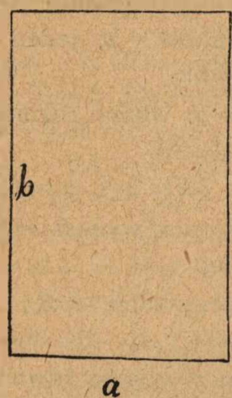
1) gdy b jest symbolem liczby całkowitej?
2) „ b „ „ „ ułamkowej?
Wyjaśnij powyższe na wartościach szczegółowych liczb ogólnych.
b) Jak nazywamy liczbę, którą mnożymy?
c) „ „ „ przez którą mnożymy?
d) „ „ wynik mnożenia?

e) Jak nazywamy razem liczby, które mnożymy? (czynnikami).

f) Wyznacz na prostej liczbowej punkty, odpowiadające następującym iloczynom:

$5 . 3$; $5 . \frac{2}{3}$; $4 . \frac{3}{5}$; $1\frac{2}{3} . \frac{2}{4}$; $3{,}5 . \frac{2}{3}$; $a . 3$; $a . \frac{2}{5}$; $a . 2\frac{3}{5}$; $a . 3{,}4$;

55. a) Przedstawiając czynniki danego iloczynu w postaci odcinków, możemy nadać iloczynowi 2 czynników następujące znaczenie geometryczne. Mianowicie, budując prostokąt, którego wymiary podług danej skali, odpowiadają danym czynnikom, możemy przedstawić iloczyn ab, jako pole prostokąta, mającego boki równe a i b jednostkom długości (rys. 5).



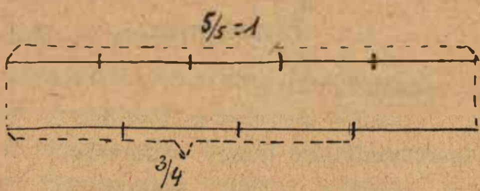
Rys. 5.

Pole prostokąta zawiera ab jednostek kwadratowych.

b) Przedstaw geometrycznie iloczyn czynników;

$5 . 4$; $3 . 1\frac{2}{3}$; $4 . 2\frac{3}{5}$; $1\frac{2}{3} . \frac{3}{4}$; $3.75 . \frac{4}{5}$

Iloczyn $1\frac{2}{5} . \frac{3}{4} = \frac{7}{5} . \frac{3}{4} = \frac{21}{20}$; możemy przedstawić, jako pole prostokąta, mającego boki równe $\frac{7}{5}$ pewnej jednostki długości i $\frac{3}{4}$ tejże jednostki długości (rys. 6).



Rys. 6.

Pole prostokąta zawiera 21 pól prostokątnych z których każde stanowi $\frac{1}{20}$ jednostki kwadratowej; iloczyn więc $\frac{7}{5} . \frac{3}{4}$ przedstawi pole prostokąta zawierające $\frac{21}{20}$ części jednostki kwadratowej (rys. 7).

56. 1) Jaka istnieje zależność między polem prostokąta (p) i jego bokami a i b. Wartości szczegółowe.

2) Kupiono a m towaru, płacąc po b zł. za metr. Ile (z) zł. zapłacono za towar?

3) Ile (y) należy zapłacić a robotnikom, jeżeli każdy zarobił c złotych?

4) Ile (z) należy zapłacić za t tuzinów ołówków, płacąc po b gr. za 1 ołówek?

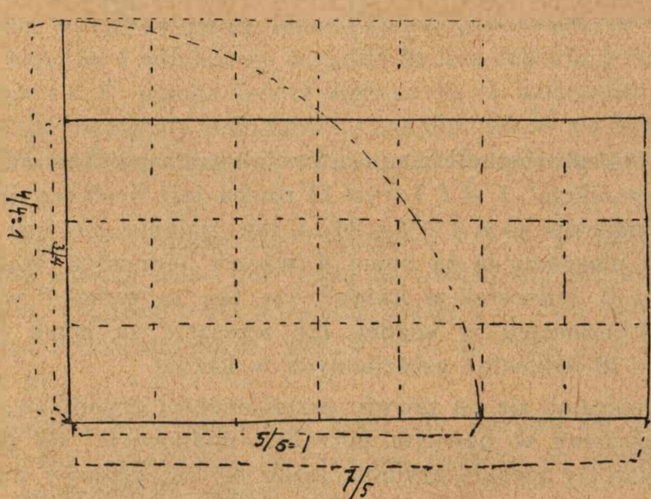
57. a) Wyjaśnij graficznie zapomocą prostokąta słuszność równości:

$$ab = ba$$

b) Nadając liczbom b i a wartości szczegółowe: 1) tylko całkowite, 2) tylko ułamkowe, 3) liczbie a — wartość całkowitą, zaś b ułamkową, 4) liczbie a — wartość ułamkową, zaś b całkowitą; sprawdź, czy równość $ab = ba$ jest słuszną, w każdym z poszczególnych wypadków.

c) Jaką własność iloczynu wykaże równość;

$$ab = ba$$



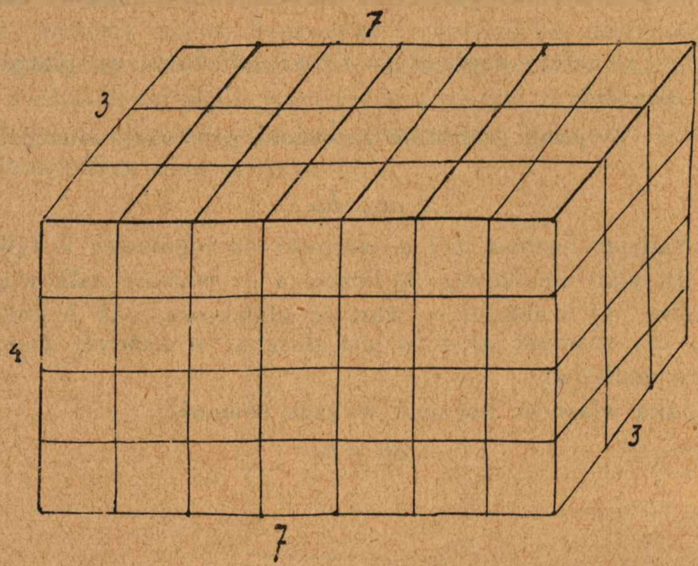
Rys. 7.

W iloczynie 2 czynników można zmieniać porządek tych czynników, czyli, że *mnożenie podlega prawu przemienności czynników.*

d) Wyjaśnij geometrycznie zapomocą prostopadłościanu słuszność równości:

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$

Uwaga: Podobnie jak iloczyn 2 czynników, można przedstawić geometrycznie jako pole prostokąta o wymiarach np. a i b, tak również iloczyn 3 czynników a, b i c możemy przedstawić geometrycznie, jako objętość prostopadłościanu o wymiarach a, b i c.



Rys. 8.

Objętość prostopadłościanu, którego wymiary odpowiadają trzem danym czynnikom: 3, 4 i 7 (rys. 8) równa jest liczbowo iloczynowi trzech wymiarów ($3 \times 4 \times 7 = 84$) i nie zmienia się bez względu na to, czy uważamy ją za sumę 4 warstw jednostek sześciennych po $3 \times 7 = 21$ jednostek w każdej, czy też za sumę 7 warstw po $4 \times 3 = 12$ jednostek w każdej, lub wreszcie za sumę 3 warstw po $4 \times 7 = 28$ jednostek sześciennych w każdej.

e) Opierając się na prawie przemienności czynników, czynniki iloczynu piszemy w pewnym porządku mianowicie: na pierwszem miejscu piszemy zwykle czynnik, jeżeli jest szczegółowy, a następnie pozostałe czynniki w porządku alfabetycznym.

Nprz. $b.a.2{,}5 = 2{,}5ab$

f) Z rysunku 8 możemy się również przekonać, iż *czynniki iloczynu* $3.4.7$ *mogą być łączone z sobą w dowolne grupy, bez zmiany wyniku działania*, inaczej mówiąc, *mnożenie podlega prawu łączności* t. j.

$$3.4.7 = 3.(4.7) = 4.(3.7) = 7.(4.3) = \text{ i t. d.}$$

g) Grupując jak najdogodniej czynniki, oblicz następujące iloczyny:

1) $6 . 7 . 5 = ?$; $1 . 2 . 25 . 3 = ?$; $50 . 16 . 19 = ?$;
2) $4 . 8 . 7 . 25 . 5 = ?$; $21 . 30 . 28 . 50 = ?$

h) Wyraź zapomocą wzoru prawo łączności 4 czynników.

i) Oblicz następujące iloczyny i wyjaśnij geometryczne ich znaczenie.

$3 . 1 = ?$; $a . 1 = ?$; $\frac{5}{6} . 1 = ?$; $0{,}75 . 1 = ?$

j) Kiedy iloczyn 2 lub więcej czynników będzie zerem? Wyjaśnij na przykładzie.

58. Oblicz iloczyny:

1) $7 . 1 = ?$; $m . 1 = ?$; $24 . 0 = ?$; $n . 0 = ?$; $5{,}8 . 0 = ?$
2) $p\ 5 = ?$; $2a . 6 — ?$; $0{,}8c . 7 = ?$; $\frac{7}{8}k . \frac{4}{21} = ?$; $\frac{5}{16} . 8x = ?$
3) $0{,}4bc . \frac{2}{7}a = ?$; $3\frac{3}{4}y . \frac{7}{45}pq = ?$; $2\frac{5}{7} . 0{,}95mn = ?$
4) $1{,}5bd . 4ak = ?$; $0{,}5a . 0{,}8x = ?$; $1{,}2x . 0{,}05ky = ?$

59. *Iloczyn 2 lub więcej jednakowych czynników nazywamy potęgą*, przyczem druga potęga nprz. *a*, t. j. *aa* nazywa się zwykle *kwadratem a;* potęga trzecia *a*, t. j. *aaa* nazywa się zwykle *sześcianem a;* dla wyższych potęg niema podobnych osobnych wyrazów; mówimy więc, że 4 jednakowe czynniki tworzą czwartą potęgę, pięć... piątą potęgę i t. d.; potęga krócej oznacza się w następujący sposób: zamiast pisać wszystkie jednakowe czynniki, pisze się ten czynnik raz jeden i nad nim liczbę, wskazującą, ile razy ten czynnik się podwtarza.

Tak nprz. a^2 oznacza *aa;* 7^3 oznacza $7 . 7 . 7$; x^4 oznacza *xxxx* i t. d. Zaś nprz. *b* może być użyte do oznaczenia pierwszej potęgi *b*, to jest, do oznaczenia tej samej liczby *b*. Tym sposobem b^1 ma to samo znaczenie, co *b;* więc $b^1 = b$; $m^1 = m$, $3^1 = 3$; $(0{,}5)^1 = 0{,}5$ i t. p.

Czynnik, który przez siebie mnożymy, nazywa się *zasadą potęgi*, zaś liczba wskazująca, ile razy ten czynnik się powtarza, nazywa się *wykładnikiem potęgi*.

Tak nprz. w a^7 — wykładnikiem jest 7; w b^n — wykładnikiem jest *n*.

Uwaga. Należy odróżniać *spółczynnik* od *wykładnika*.

Nprz. $3x = x + x + x$; tu 3 jest spółczynnikiem;

$x^3 = xxx$; tu 3 jest wykładnikiem.

60. Wyraź w postaci potęg następujące iloczyny:
1) $bb = ?$; 2) $xxx = ?$; 3) $2.2 = ?$; 4) $3.3.3 = ?$; 5) $1\frac{1}{2}.1\frac{1}{2}.1\frac{1}{2} = ?$ 6) $0{,}05.0{,}05.0{,}05.0{,}05 = ?$; 7) $pppp \ldots\ldots p$ (n razy); 8) $6.6.6 \ldots\ldots 6$ (m razy).

61. Oblicz następujące potęgi:

1) 1^2, 2^2, 3^2 i t. d. do 10^2;

2) 1^3, 2^3, 3^3 i t. d. do 10^3;

3) $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{1}{2})^3$, $(\frac{2}{3})^2$, $(\frac{2}{3})^3$, $(\frac{3}{2})^2$, $(\frac{3}{2})^3$;

4) $(1\frac{1}{2})^2$, $(2\frac{1}{5})^2$, $(1\frac{3}{4})^3$, $(1\frac{1}{7})^3$;

5) $(0{,}1)^2$, $(0{,}1)^3$, $(0{,}01)^2$, $(0{,}2)^3$, $(0{,}5)^2$, $(2{,}5)^2$, $(1{,}01)^3$.

62. Oblicz wartości liczebne następujących wyrażeń:

1) $2n$, n^2, 2^n, gdy $n = 4$;

2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, gdy $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$;

3) $e^3 - d^3 + c^3 - b^3 + a^3$, gdy $e = 5$; $d = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $b = 2$, $a = \frac{1}{4}$;

4) $3 + m$, $3m$; m^3; 3^m, gdy $m = 5$.

63. a) Ponieważ $a^3 = aaa$ i $a^4 = aaaa$,

więc $a^3 . a^4 = aaa . aaaa = a^{3+4} = a^7$.

Aby pomnożyć przez siebie potęgi o jednakowej zasadzie, należy wykładniki potęg dodać i podnieść zasadę do potęgi, równej otrzymanej sumie.

Nprz.: 1) $2^3 . 2 = 2^{3+1} = 2^4$; 2) $a^4 . a^5 = a^{4+5} = a^9$, 3) $b^c . b^p = b^{c+p}$; 4) $a^2 . b^3 = a^2b^3$, gdyż czynniki dane są potęgami o różnych zasadach.

5) $m^x m^y = m^{x+y}$.

b) Oblicz iloczyny:

1) $3^2 . 3 = ?$; 2) $3^2 . 4^3 = ?$; 3) $x^5 . x^7 = ?$; 4) $y^3 . z^2 = ?$; 5) $a^{2p} . a^p = ?$; 6) $x^m . x^{2n} = ?$; 7) $y^{m+n} . y^{m-n} = ?$; 8) $z^p . z^{q-p} = ?$; 9) $a^{2x} . a^{3+x} = ?$; 10) $b^5 . c^3 = ?$; 11) $10^1 = ?$; $10 . 10 = ?$; $10^2 . 10 = ?$; $(0{,}1)^2 . (0{,}1)^2 = ?$.

64. a) Wyrażenie, będące iloczynem czynnika szczegółowego i czynników ogólnych, które mogą być również potęgami, nazywamy *jednomianem*.

Nprz. $5x^2y^3g^8$; $1\frac{1}{3}p^2q$; $0{,}5ab^2c^3$; a^3b^2c (spółczynnik 1). Są to jednomiany.

Jednomiany, zawierające te same czynniki ogólne, nazywamy *podobnemi*. W jednomianach podobnych spółczynniki mogą być różne.

Nprz. jednomiany: $4a^2b$, a^2b, $\frac{2}{3}a^2b$, $0{,}05a^2b$ są podobne, natomiast jednomiany: $3x^2y$, $2xy^2$ nie są podobne.

Wyrażenie, zawierające 2 lub więcej jednomianów, połączonych z sobą znakami dodawania (+) lub odejmowania (—), nazywamy *wielomianem.* Zależnie od ilości jednomianów, wchodzących w skład wielomianu, nazywamy wielomiany: dwumianem, trójmianem, czworomianem i t. d. Jednomiany, z których składa się wielomian, nazywamy również *wyrazami wielomianu.*

b) Wykonaj redukcję wyrazów podobnych (zbierz wyrazy podobne) w następujących wielomianach:

1) $3x^2y + 4xy^2 + x^2y + 2xy$
2) $5k^3 + 7kx^3 - 2kx^3 - k^3x - kx^3$
3) $8py^2 - 9mp^3 + 12mp^3$
4) $3ab^2 + 3a^2b - 2a^2b^2 + 7a^2b^2 - a^2b$
5) $a^mb^n + 0.5a^n b^m - 0,123a^mb^n + 0,35 - 0,08b^ma^n - 0,13.$

c) Wyraź w postaci potęg i zbierz wyrazy podobne:

1) $aa + aa + aa = ?$
2) $bbbb + bbbb = ?$
3) $pp + pp + pp + pp = ?$
4) $ccc + ccc + ccc + ccc - dd = ?$
5) $xyyzz + xyyzz = ?$
6) $\frac{pqq + pqq + pqq}{4} = ?$
7) $a - bcc + \frac{aaab + aaab}{3} = ?$
8) $pqqrrr + pqqrrr - \frac{xxxyzz + xxxyzz}{3} = ?$

d) Zastąp następujące wyrażenia przez równoznaczne bez spółczynników i wykładników:

1) $2a$, 2) a^2, 3) $2a^2$, 4) $3b$, 5) b^3, 6) $3p^2$, 7) $2p^3$, 8) xy^3, 9) x^3y,

10) $2a^3b^2$, 11) $4mn^4x^2$, 12) $\frac{1}{2}a^4$,

65. a) Oblicz iloczyny: 1) $5x.3x^3$, 2) $2a^2.7ab^4$, 3) $3xy^m.2x^py^n$.
Opierając się na prawach przemienności i łączności czynników, mamy:

1) $5x.3x^3 = 5.3.x.x^3 = 15x^4$
2) $2a^2.7ab^4 = 2.7a^2.a.b^4 = 14a^3b^4$
3) $3xy^m.2x^py^n = 3.2xx^py^my^n = 6x^{p+1}y^{m+n}$

b) Oblicz iloczyny następujących jednomianów:

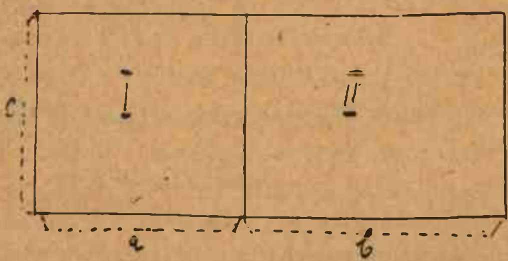
1) $b.b = ?$
2) $c.c^3 = ?$
3) $5x.3x^8 = ?$
4) $2p^2.7p^4 = ?$
5) $\frac{1}{2}c^7.\frac{1}{4}c^8 = ?$
6) $0,1d.10d = ?$
7) $k^5.3k^4.15 = ?$
8) $1\frac{1}{2}ab^3.2a^3 = ?$
9) $\frac{2}{7}a^2x.7ax^2 = ?$
10) $14p^2x.\frac{3}{7}x^3y = ?$

11) $\frac{2}{3}ab^4 \,.\, \frac{2}{3}b^2c = ?$
12) $0{,}7a^5b^6 \,.\, \frac{3}{7}a^6b^5 = ?$
13) $\frac{2}{9}m^3y^6 \,.\, 3m^3n^5 = ?$
14) $\frac{3}{4}a^3x^7 \,.\, \frac{2}{3}b^2y^2 = ?$
15) $5q^2b^7 \,.\, 2b^2 \,.\, 0{,}6 = ?$
16) $20m^5 \,.\, \frac{2}{5}m \,.\, 4m^4 = ?$
17) $0{,}5a^7 \,.\, a^2b^3c^2 \,.\, 0{,}8c = ?$
18) $(3a^3)^2 = ?$
19) $(2x^2)^3 = ?$
20) $3a^2 \,.\, (5a)^2 = ?$
21) $(\frac{1}{2}p^3q^2)^3 = ?$
22) $0{,}3xy^2 \,.\, (3y^3)^2 = ?$
23) $8a^2 \,.\, (\frac{1}{4}ad)^2 = ?$
24) $\frac{2}{15}x^6y^p \,.\, 3{,}5x^{p-1}y^{q-p} = ?$
25) $\frac{5}{12}a^p\, b^{n-1} \,.\, 0{,}8p^a\, b^{n+1}z^2 = ?$
26) $\frac{2}{9}x^2m^4n^{x+4} \,.\, \frac{3}{14}k^p + {}^4mn^{x-2} = ?$

66. a) Wyjaśnij geometrycznie słuszność następującej równości:

$$(a+b)\,c = ac + bc$$

W tym celu (rys. 9) budujemy 2 prostokąty (I i II) o wymiarach a i c, i b i c, które po dodaniu do siebie utworzą prostokąt



Rys 9.

o wymiarach $(a+b)$ i c. Więc pole całego prostokąta równa się $(a+b)\,c$ i składa się z dwu pól: $\mathrm{I} = ac$ i $\mathrm{II} = bc$, t. j.

$$(a+b)\,c = ac + bc$$

b) Sprawdź słuszność powyższej równości, nadając liczbom ogólnym, w jej skład wchodzącym, wartości szczegółowe; pomnóż nprz. 35 przez 4. Co w danym wypadku oznacza a i co b i co c? W jaki sposób mnożysz 35 przez 4?

A jak trzeba mnożyć $(a+b)$ przez c? Czy w podobny sposób?

Treść powyższej równości wyrażamy, mówiąc:

Aby pomnożyć sumę przez pewną liczbę, należy każdy ze składników pomnożyć przez tę liczbę i otrzymane iloczyny do siebie dodać. Zauważona własność iloczynu nazywa się *rozdzielnością*.

c) Wyjaśnij geometrycznie, czy reguła mnożenia sumy 2 składników przez liczbę jest słuszna dla sumy ilukolwiek składników.

d) Oblicz następujące iloczyny:

1) $(p+q)\,3=?$
2) $3\,(p+q)=?$
3) $(b+c)\,b=?$
4) $(m+n)\,3m=?$
5) $(a+7)\,.\,3b=?$
6) $(p+\frac{2}{3}q)\,6p=?$
7) $(3{,}75+\frac{4}{5}a)\,.\,1{,}25=?$
8) $(\frac{1}{3}a+5)\,.\,\frac{1}{4}=?$

e) Oblicz następujące iloczyny:

1) $(a+2b+c)\,.\,3=?$
2) $(2x+3y+1)\,.\,5=?$
3) $(3a+2b+\frac{1}{2}c)\,4=?$
4) $(1{,}6p+\frac{2}{5}q+4)\,.\,2{,}5=?$
5) $(2m+\frac{1}{3}n+0{,}2p)\,.\,1{,}5n=?$
6) $(\frac{3}{2}a+\frac{4}{5}b+\frac{2}{3}c)\,.\,\frac{2}{3}c=?$
7) $(0{,}4p+0{,}55q+0{,}075v)\,.\,0{,}8=?$
8) $(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+2{,}52)\,.\,2{,}5y=?$

f) Oblicz następujące iloczyny i wykonaj redukcję wyrazów podobnych:

1) $2x\,(5a+\frac{1}{2}b)+0{,}4a\,(20x+2{,}5b)=?$
2) $(7a+1)\,a-2a^2+(5a+4)\,3a=?$
3) $(2x+4y)\,3+(7y+1)\,4+(3+5x)\,2=?$
4) $(x+y)\,5+(y+b)4\frac{1}{2}+(z+x)\,3{,}5=?$
5) $14{,}05p+[(4p+3)\,.\,2-(3-3{,}5p)]=?$

g) Oblicz iloczyny:

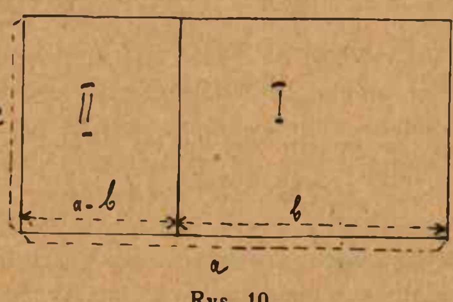
1) $(x^3+1{,}04x^2+\frac{2}{35}x)\,.\,5=?$
2) $(1{,}6ap^2+\frac{2}{5}a^4p^4c^2+1)\,.\,2{,}5c^3ab^{m-1}$
3) $(\frac{2}{3}ab^m+10a^{p-n}b^{m-p}+0{,}5a^n\,b^{p+m})\,.\,0{,}6a^mb^n=$
4) $(4a^4b^{3n+3}+0{,}2a^2b^{2n}+10b^{n-1})\,.\,0{,}15a^2x^{2n-1}=?$
5) $7b^4c(2b^8+3b^2c^2+4bc^{n-1})=?.$

67. a) Wyjaśnij geometrycznie słuszność następującej równości (rys. 10),

$$(a-b)\,c=ac-bc$$

(pole prostokąta II równa się $(a-b)c$ i jest różnicą 2 pół i całego prostokąta o wymiarach a i c i prostokąd I).

b) Sprawdź słuszność powyższej równości, nadając liczbom ogólnym wartości szczegółowe.



Rys. 10.

Treść powyższej równości wyrażamy, mówiąc, że *mnożenie jest rozdzielne względem odejmowania*, to znaczy, *aby pomnożyć różnicę przez pewną liczbę, należy pomnożyć przez tę liczbę zosobna odjemną i odjemnik i otrzymane iloczyny odjąć*,

c) Oblicz następujące iloczyny:

1. $(a-2).3=?;\ (4-b).5=?;\ (p-q)\,r=?$
2. $(a-2)\,4a=?;\ (7-b).2b=?;\ (6m-3).5c=?$
3. $[(p-1)-p]-\{3p-[4(5-2p)]\}=?$
4. $(a-1)x-[\frac{3}{8}(4-12x)]-[(x+1)a]=?$

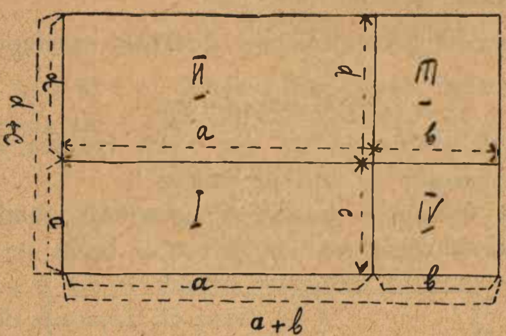
d) Oblicz:

1. $10(a+nx^2)-[9(a-n)x^2]=?$
2. $2a^2b^{m-2}(5b^3-\frac{1}{2}ab^{n+2})-[0{,}4ab^{n-1}(20ab^{m-n+2}-2{,}5a^2b^{m+1})]=?$
3. $\{\frac{1}{2}a^{2r}-[a^{m-n}.5a^{p+n-q}]\}.2a^{m-p}=?$
4. $\frac{3}{11}x^2\{0{,}66x^{2p}-[\frac{2}{5}x^{p+1}(1{,}65x^{p-1}-12{,}1x^{p-1})]\}=?$
5. $(4a^4x^{3n+3}+0{,}2a^2x^{2n+1})0{,}15a^2x^{2n+1}-[(0{,}1a^3x^{3n-1}-$
$-0{,}2ax^{2n-3})3{,}5a^3x^{2n+3}]=?$

68. Wyjaśnij geometrycznie słuszność równości:

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

W tym celu budujemy prostokąt o wymiarach $(a+b)$ i $(c+d)$ (rys. 11); następnie prowadzimy przez końce odcinków a i b



Rys. 11.

proste, równoległe do boków prostokąta. Pole całego prostokąta równa się $(a+b)(c+d)$ i składa się z 4 pól: I $=ac$, II $=ad$, III bd i IV $=bc$, czyli $(a+b)(c+d)=ac+ad+bd+bc$.

b) Sprawdź słuszność powyższej równości nadając liczbom ogólnym, w jej skład wchodzącym, wartości szczegółowe. Pomnóż nprz. 35 przez 23. Co w danym przykładzie oznaczą a, b, c i d? Jak wykonasz mnożenie 35.23? Czy tak samo, jak $(a+b)$ przez $(c+d)$.

Treść powyższej równości wyrażamy, mówiąc:
Ażeby pomnożyć sumę przez sumę, należy każdy ze składników pierwszego czynnika pomnożyć przez każdy ze składników drugiego czynnika i otrzymane iloczyny do siebie dodać.

Nprz. 1) $(a+4)(a+2)=a^2+4a+2a+8=a^2+6a+8$

2) $(2a+3b)(3c+d)=6ac+9bc+2ad+3bd$

c) Oblicz następujące iloczyny:

1. $(2a+5)(3b+a)=?$; $(3x+4y)(4x+5y)=?$
2. $(a+\frac{1}{2}b)(2a+b)=?$ $(7m+5)(3+2m)=?$
3. $(2{,}5p+3{,}7q)(\frac{3}{5}q+2)=?$; $(5m+2n)(5m+2n)=?$
4. $(15{,}4x+3{,}05y)(1\frac{1}{4}y+\frac{1}{3})=?$; $(2{,}1a+b)(2{,}1b+a)=?$
5. $(x^3+x^2)(x+1)=?$; $(a^2+b^2)(a+b)=?$

d) Oblicz następujące iloczyny:

1. $(a^2n^4+n^2)(a^4+a^6n^2)=?$; $(n^2+\frac{3}{8}nx)(n+\frac{1}{3}x)=?$
2. $(3pq+2p^2)(q^2+6qp)=?$; $(2a^2+4a)(7a^2+5a)=?$
3. $(2a^{p+4}+3a^{p+2})(0{,}5a+\frac{2}{9}a^3)=?$; $4x^{2n-1}+\frac{1}{2}x^{4n+1})(0{,}75x+0{,}5x^{1-2n})=?$
4. $(2am+\frac{1}{4}ab^4)(\frac{1}{4}ab^4+2a^m)=?$; $(7a^{n+1}+a^{n-1}c^5)(3a^{n+1}+2a^{n-1}c^5)=?$
5. $(3\frac{3}{4}x+2{,}5x^{m+n})(1\frac{4}{15}x^{m-n}+0{,}5x^{n-m})=?$; $(1\frac{2}{3}a^p x^m+5{,}7y)(2y^n+3x)=?$

69. a) Co oznacza wzór.

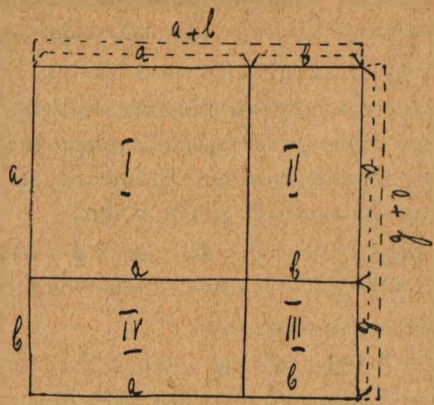
$$(a+b)^2=?$$

b) Opierając się na regule mnożenia sumy przez sumę, oblicz iloczyn:

$$(a+b)(a+b).$$

c) Z wzoru $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$ wynika, że: *kwadrat sumy dwu liczb jest sumą kwadratów tych liczb oraz podwojonego ich iloczynu.*

Wynik podnoszenia do potęgi drugiej sumy 2 liczb możemy uzmysłowić w następujący sposób: Budujemy (rys. 12) kwadrat o boku równym sumie dwu odcinków, odpowiadających liczbom a i b; następnie przez końce odcinków a i b prowadzimy proste, równoległe do boków kwadratu. Pole całego kwadratu równa się $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$, składa się z 4 części, z których I i III są kwadratami o bokach a i b, II zaś i IV są prostokątami o bokach a i b; więc będzie:



Rys. 12.

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

d) Nadając a i b wartości szczegó owe nprz.

1. $a = 20$, $b = 5$; 2) $a = 1$, $b = 0{,}2$; 3) $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{2}{3}$,

sprawdź słuszność równości:

$$(a + b(^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Przykłady:

1. $(x + 3)^2 = x^2 + 2.x.3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9;$
2. $(2a + 5b)^2 = (2a)^2 + 2.(2a).(5b) + (5b)^2 = 2a.2a + 20ab + 5b.5b = 4a^2 + $
$+ 20ab + 25b^2.$

e) Oblicz skróconym sposobem:

1. $(2x + 3y)^2 = ?$
2. $(x^2 + 6x)^2 = ?$
3. $(a^3 + 3b)^2 = ?$
4. $(4x^2 + 12xy)^2 = ?$
6. $(5a^3b^7 + 0{,}1)^2 = ?$
6. $(1{,}1a^3y^n + 0{,}4)^2 = ?$
7. $(2a^p + \frac{1}{4}ax^4)^2 = ?$
8. $(\frac{1}{2}a^2bc^3 + 0{,}6ab^3c^2d^6)^2 = ?$
9. $(0{,}8x^n + {}^3y^2 + 0{,}2x^n + {}^2b^m)^2 = ?$
10. $(0{,}1p^x q + 0{,}02q^y p)^2 = ?$

70. a) Opierając się na wzorze $(a+b)^2 = a^3 + 2ab + b^2$, oblicz $(26)^2$.
$(26)^2 = (20 + 6)^2 = 20^2 + 2.20.6 + 6^2 = 400 + 240 + 36 = 676.$

b) Oblicz potęgi:

1. $27^2 = ?$	5. $78^2 = ?$	9. $0{,}37^2 = ?$	13. $0{,}073^2 = ?$
2. $33^2 = ?$	6. $3{,}5^2 = ?$	10. $0{,}65^2 = ?$	14. $0{,}0038^2 = ?$
3. $42^2 = ?$	7. $2{,}6^2 = ?$	11. $0{,}021^2 = ?$	15. $0{,}0049^2 = ?$
4. $59^2 = ?$	8. $6{,}5^2 = ?$	12. $0{,}065^2 = ?$	16. $0{,}0055^2 = ?$

c) Oblicz $150^2 = ?$

Rozwiązanie: $(150)^2 = (15.10)^2 = 15.10.15.10 = 15^2.10^2 = 15^2.100$
$15^2 = (10+5)^2 = 10^2 + 2.10.5 + 5^2 = 225,$
wreszcie: $150^2 = 15^2.100 = 225.100 = 22500.$

d) Oblicz potęgi:

1) $170^2 = ?$ 2) $310^2 = ?$ 3) $490^2 = ?$
4) $1100^2 = ?$ 5) $5200^2 = ?$ 6) $7500^2 = ?$

e) 1) Ponieważ:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

przeto, mając już wiadomy kwadrat jakiejkolwiek liczby a, możemy obliczyć kwadrat liczby, o jedność od niej większej, przez dodanie do wiadomego kwadratu podwojonej tej liczby a i jedności.

Naprz., jeżeli $16^2 = 256$, to

$$17^2 = 16^2 + 2.16 + 1 = 256 + 32 + 1 = 289.$$

2) Wiedząc, że $17^2 = 289$, oblicz kwadraty 10 liczb całkowitych, bezpośrednio następujących po 17.

3) Oblicz 54^2 i kwadraty 5 liczb całkowitych bezpośrednio następujących po 54.

4) Oblicz 73^2 i kwadraty 5 liczb całkowitych, bezpośrednio następujących po 73.

71. a) Co oznacza wzór $(a+b)(c-d)$?

b) Ułóż kilka zagadnień do powyższego wzoru.

c) Wyjaśnij geometrycznie słuszność następującej równości:

$$(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd.$$

d) Sprawdź słuszność powyższej równości nadając liczbom ogólnym wartości szczegółowe.

e) Wypowiedz słowami treść tej równości.

f) 1) Oblicz iloczyn:

$$(b+4)(b-2)$$

Rozwiązanie: $(b+4)(b-2) = b^2 + 4b - 2b - 8 = b^2 + 2b - 8.$

Sprawdź słuszność wyniku, nadając b wartości szczegółowe:

1) $b = 6$; 2) $b = 2\frac{2}{3}$; 3) $b = 25$.

2) Oblicz iloczyn:

$$(x + \tfrac{1}{2}y)(2x - y)$$

i sprawdź słuszność wyniku, nadając x i y wartości szczegółowe:

$x = 5$, $y = 4$; $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{6}$; $x = 1{,}2$, $y = 0{,}3$.

g) Oblicz iloczyny:

1. $(2m + 1)(3n - 1) = ?$
2. $(4x + y)(y - 1) = ?$
3. $(2a + 3b)(3a - 4b) = ?$
4. $(3a^3 + 4c)(5a^3 - 3c) = ?$
5. $(x^3 - \frac{3}{8}xy)(x + \frac{1}{3}y = ?$
6. $(1{,}5pq^2 + 0{,}2p^2)(3q^4 - 0{,}4pq^2) = ?$
7. $(0{,}7a^2 + 3)(a^2 - 1) = ?$
8. $(3a^{p-1} + a^{p+2})(2a^p - 4a^{p+1}) = ?$
9. $(1\frac{1}{2}a^x c^x + 4a^{2x})(3c^{2x} - 2\frac{1}{4}a^x c^x) = ?$
10. $(2{,}75pq^m + 3\frac{1}{3}p^n)(3{,}4p^m q - 1{,}5q^m) = ?$

72. a) Co oznacza wzór:

$$(a + b)(a - b)$$

b) Ułóż kilka zagadnień do powyższego wzoru.

c) Opierając się na regule mnożenia sumy przez różnicę, oblicz iloczyn:

$$(a + b)(a - b).$$

d) Sprawdź słuszność równości:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

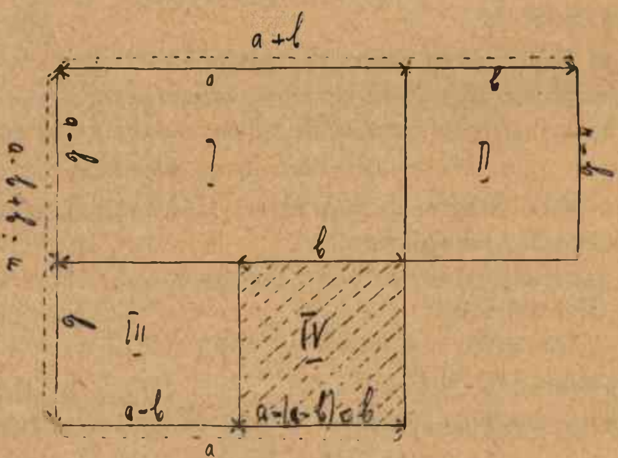
nadając liczbom ogólnym wartości szczegółowe:

1) $a = 7$ i $b = 4$; 2) $a = 0{,}9$ i $b = 0{,}3$; 3) $a = 1\frac{1}{8}$ i $b = \frac{3}{4}$.

Z wzoru:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

wynika, że: *iloczyn sumy 2 liczb* $(a + b)$ *przez ich różnicę* $(a - b)$ ***równa się różnicy kwadratów*** *tych liczb.*



Rys. 13.

e) Wyjaśnij geometrycznie słuszność równości:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

W tym celu budujemy prostokąt o wymiarach $(a + b)$ i $(a - b)$ (rys. 13) prostokąt ten składa się z 2 części: I. i II. Jeżeli jednak prostokąt II oddzielimy i umieścimy w położeniu III, wówczas otrzymane pole (I + III) będzie różnicą pomiędzy polem kwadratu o boku a i polem kwadratu IV o boku b, więc będzie

$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2.$$

1) $(a+1)\,(a-1)=a.a-1.1=a^2-1$
2) $(2p-0{,}2)\,(2p+0{,}3)=(2p)^2-(0{,}3)^2=4p^2-0{,}09$
3) $(3a^2+5b)\,(3a^2-5b)=(3a^2)^2-5b)^2=3a^2.3a^2-5b.5b=9a^4-25b^2.$

f) Oblicz następujące iloczyny skróconym sposobem:

1) $(p+2)\,(p-2)=?$
2) $(n+x)\,(n-x)=?$
3) $(3a+b)\,(3a-b)=?$
4) $(x^2+y^2)\,(x^2-y^2)=?$
5) $(6a+b^3)\,(6a-b^3)=?$
6) $(4p^3+3b^2)\,(4p^3-3b^2)=?$
7) $(4a^4+5b^2c^5)\,(4a^4-5b^2c^5)=?$
8) $(ab^2c^3+\frac{1}{2})\,(ab^2c^3-\frac{1}{2})=?$
9) $(x^2y^2-\frac{3}{5})\,(x^2y^2+\frac{3}{5})=?$
10) $(\frac{1}{3}ab^4c^3+01)\,(\frac{1}{3}ab^4c^3-0{,}1=?$
11) $(1+2x^2)\,(1-2x^2)=?$
12) $(\frac{1}{7}a^2-7x)\,(\frac{1}{7}a^2+7x)=?$
13) $(7pq^3+2\frac{1}{2})\,(pq^3-2\frac{1}{2})=?$
14) $(1{,}2a^3b^n-0{,}3)\,(1{,}2a^3b^n+0{,}3)=?.$
15) $(\frac{1}{5}x^{m+3}-0{,}04)\,(\frac{1}{5}x^{m+3}+0{,}04)=?$
16) $(\frac{3}{8}m^n+1{,}3y^mz^{2p})\,(\frac{3}{8}m^n-1{,}3y^mz^{2p})=?$
17) $(0{,}1a^{2x}-0{,}06b^{p+1})\,(0{,}1a^{2x}+0{,}06b^{p+1})=?$
18) $(\frac{8}{9}d^{m+2}x+2{,}05c^n)\,(\frac{8}{9}d^{m+2}x-2{,}05c^n)=?$
19) $(2{,}5ax^{p+3}-\frac{5}{7})\,(2{,}5ax^{p+3}+\frac{5}{7})=?$
20) $(0{,}01pr^{2p+1}+0{,}1q)\,(0{,}01pr^{2p+1}-0{,}1q)=?$

73. a) Opierając się na wzorze $(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$,

1) oblicz iloczyn 43.37.

Ponieważ $43=40+3$, zaś $37=40-3$, więc piszemy $43.37=(40+3)\,(40-3)=40^2-3^3=(1600-9=1591)$.

2) Oblicz 115^2-85^2; na podstawie wzoru mamy $115^2-85^2=(115+85)\,(115-85)=200.30=6000$.

b) Oblicz

1) $51.49=?$
2) $25.15=?$
3) $97.83=?$
4) $36.24=?$
5) $74.66-?$
6) $98.102=?$
7) $77^2.73^2=?$
8) $88^2-12^2=?$
9) $256^2-244^2=?$
10) $127^2-123^2=?$

74. Oblicz wartości liczebne:

a) $s=a+b$, gdy $a=1\frac{2}{3}$, $b=2\frac{1}{2}$,
b) $r=c-d$, gdy $c=10{,}2$, $d=0{,}19$,
c) $i=pq$, gdy $p=1{,}2$, $q=\frac{1}{4}$,
d) $q=\dfrac{d}{e}$, gdy $d=0{,}09$, $e=0{,}8$.

75. Oblicz wartości liczebne:

a) $a-b+c$, gdy $a=7$, $b=4\frac{7}{12}$, $c=1\frac{5}{6}$,
b) $p-q+r-1$, gdy $p=6{,}913$, $q=2{,}75$, $r=0{,}93$,
c) $m-n-p$, gdy $m=8\frac{5}{6}$, $n=2\frac{2}{3}$, $p=3\frac{5}{8}$,
d) $p-q-r+\frac{8}{9}$, gdy $p=1\frac{2}{3}$, $q=0{,}25$, $r=\frac{7}{18}$.

76. Oblicz wartości liczebne:

a) $7pqr$, gdy $p=5$, $q=0{,}9$, $r=2$,
b) $11{,}4abc$, gdy $a=\frac{5}{6}$, $b=\frac{3}{7}$, $c=14$,
c) $\frac{3}{11}ab$, gdy $a=5\frac{1}{2}$ $b=\frac{7}{12}$,
d) $\frac{pq}{3r}$, gdy $p=5\frac{5}{6}$, $q=0{,}6$, $r=\frac{7}{24}$,
e) $\frac{0{,}4865}{abc}$, gdy $a=2\frac{2}{3}$, $b=1{,}2$, $c=1{,}4595$.

77. Oblicz wartości liczebne:

a) $3+n$, $3n$, n^3, 3^n, gdy $n=4$,
b) m^3n^2p, gdy $m=1$, $n=2$, $p=3$,
c) $2d^3e^5x^2$, gdy $d=\frac{1}{4}$, $e=0{,}2$, $x=30$,
d) $0{,}8p^2q^4r^2$, gdy $p=0{,}5$, $q=3$, $r=\frac{1}{6}$.

78. Oblicz wartości liczebne:

a) $3p+q-3pg$, gdy $p=\frac{1}{15}$, $q=5$,
b) $10a+7b-2{,}75$, gdy $a=0{,}15$, $b=\frac{2}{5}$,
c) $4x+x^4$, gdy $x=\frac{1}{3}$,
d) $3x-x^3-10x^4$, gdy $x=0{,}4$,
e) $3a^2+5a^5b+7a^7b^2$, gdy $a=10$, $b=0{,}02$.

79. Oblicz wartości liczebne:

$\left.\begin{array}{l}\text{a) } p-(q+r)\\ \text{b) } p-q+r\end{array}\right\}$ gdy $p=10$, $q=6$, $r=1$,

$\left.\begin{array}{l}\text{c) } (p-q+r)s\\ \text{d) } p-(q+rs)\end{array}\right\}$ gdy $p=30$, $q=4$, $r=2$, $s=5$,

$\left.\begin{array}{l}\text{e) } p(q+r)s\\ \text{f) } p(q+rs)\end{array}\right\}$ gdy $p=2$, $q=3$, $r=0{,}3$, $s=0{,}05$.

80. Oblicz wartości liczebne:

a) $(a+b)(b-c)$; gdy $a=7$, $b=3$, $c=1$,

$\left.\begin{array}{l}\text{b) } (x+y)(z-xy)\\ \text{c) } (x+y)z-xy\end{array}\right\}$ gdy $a=14$, $y=0{,}4$, $z=12$,

d) $a+[ab-(c-d)]$, gdy $a=24$, $b=4$, $c=5$, $d=1$,
e) $a-[b(c-a)-a]$, gdy $a=9$, $b=2\frac{2}{3}$, $c=7$, $d=4$,
f) $p-\{q-[r-(s+t)]\}$, gdy $p=50$, $q=2{,}5$ $r=10$, $s=5$, $t=2{,}5$.

81. Oblicz wartości liczebne:

a) $11x - 7x - \{18x - [9x - (16y - 6x)]\}$, gdy $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$,

b) $[(a + b) - c] + [a - (b - c)]$, gdy $a = \frac{7}{8}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{2}$,

c) $(a + b)^2 - (a - b)^2$, gdy $a = 0{,}5$, $b = 0{,}2$,

d) $(xy^2 + 2y)5xy$, gdy $x = 1\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$,

e) $(1{,}04p^2 - 3\frac{2}{5}p)5$, gdy $p = 7$,

f) $(1{,}1p^3b + 0{,}4)(1{,}1p^3b - 0{,}4)$, gdy $p = 1{,}5$, $b = 2$.

Zależność funkcjonalna.

82. Rozwiązując zagadnienia zauważyłeś, że pomiędzy rozmaitemi wielkościami mogą zachodzić pewne zależności: nprz. między liczbą robotników i liczbą dni pracy, potrzebnych do wykonania pewnej roboty; między kosztem, a liczbą kilogramów towaru; między ceną biletu kolejowego, a przejechaną drogą i t. p. Chcąc w sposób zwięzły wyrazić zależność, pomiędzy wielkościami, zazwyczaj zauważonej zależności nadajemy postać *wzorów* albo *formuł*, w których jedne z liczb mają określone wartości (stałe), inne zaś wchodzą pod postacią liczb ogólnych, zastępujących cały ciąg liczb szczegółowych (zmienne). Zwraca się przytem uwagę, iż we wzorach, wyrażających zależność pomiędzy wielkościami, liczby stałe również możemy zastępować liczbami ogólnemi, tylko dla odróżnienia ich od liczb, będących symbolem całego ciągu liczb szczegółowych (zmiennych), w zastępstwie ich używamy początkowych liter alfabetu, zaś w zastępstwie zmiennych — końcowych liter.

83. Oznaczając przez y drogę przebytą przez pociąg, zaś czas przez x, wyraź zapomocą wzoru zależność pomiędzy drogą przebytą przez pociąg, a czasem, jeżeli pociąg szedł z szybkością 45 km. na godzinę.

Rozwiązanie:

Dla	$x = 1$	godz.	będzie	$45 . 1$	km.
„	$x = 1\frac{1}{3}$	„	„	$45 . 1\frac{1}{3}$	„
„	$x = 2$	„	„	$45 . 2$	„
„	$x = 3{,}6$	„	„	$45 . 3{,}6$	„

i t. d.

Szukaną więc zależność możemy przedstawić w postaci:

$$y = 45x$$

I wogóle, gdy droga, przebiegana przez pociąg w jednostkę czasu, jest stała (jednostajna szybkość), szukana zależność będzie:

$$y = ax$$

gdzie a oznacza stałą szybkość biegu pociągu we wzorze:

$$y = 45x$$

Liczba x jest symbolem całego ciągu *dowolnych* liczb szczegółowych, natomiast liczba y zastępuje liczby szczegółowe, z których każda jest iloczynem 45 i odnośnej wartości szczegółowej x. Widzimy więc, że y zależy od x. Wyrażamy to mówiąc: y jest w zależności *funkcjonalnej* od x lub też krócej: *„y jest funkcją x"*.

Ponieważ ze zmianą wielkości x zmienia się również i wielkość y, przeto obydwie te wielkości nazywamy wielkościami *zmiennemi* z tą jednak różnicą, że wielkość taka, jak y, której szczegółowa wartość zależy od obranej dla x szczegółowej wartości, nazywamy *zmienną zależną*, zaś wielkość taką, jak x, której nadajemy dowolne szczegółowe wartości, nazywamy *zmienną niezależną*.

84. Wyraź zależność funkcjonalną pomiędzy objętością prostopadłościanu, mającego wysokość równą 6 cm i jego długością i szerokością.

Rozwiązanie.

Oznaczając objętość prostopadłościanu przez x, zaś pozostałe wymiary przez y i z, otrzymamy:

$$x = 6yz.$$

W tym wypadku mówimy, że „x jest funkcją dwu wielkości zmiennych y i z".

Wogóle wielkości mogą być funkcjami kilku innych wielkości zmiennych.

Daj kilka przykładów funkcji: 1) jednej, 2) dwu, 3) trzech wielkości zmiennych.

85. Wyraź zapomocą wzoru zależność funkcjonalną pomiędzy:

a) Obwodem trójkąta równobocznego (x) i jego bokiem (y).

b) Obwodem kwadratu (x) i jego bokiem (y)

c) Obwodem trójkąta równoramiennego (x), mającego podstawę równą 6 cm i jego ramionami (y),

d) Obwodem równoległoboku (x), mającego za podstawę bok równy 10 cm i pozostałemi bokami (y).

e) Polem kwadratu (x) i jego bokiem (y).

f) Polem ukośnika (x), mającego wysokość = 12 cm i jego podstawą,

g) Polem trójkąta (x) i jego wysokością (y).

h) Średnicą koła (x), i jego promieniem (y).

86. Wyraź zależność funkcjonalną pomiędzy:

a) Liczbą uczniów nieobecnych w klasie (x), i liczbą obecnych w klasie (y), gdy ogólna liczba uczniów według spisu = 40.

b) Ceną kupna towaru (x), sprzedanego: 1) z zyskiem 150 zł., 2) ze stratą 25 zł. i ceną sprzedaży (y).

c) Wagą brutto pewnego towaru (x) i wagą netto (y), jeżeli tara wynosi 89 kg.

d) Pomiędzy ceną 1 m towaru (x) i liczbą metrów (y), jeżeli cena całego towaru wynosi m zł.

e) Pomiędzy liczbą robotników (x), potrzebnych do wykopania 2500 m^3 ziemi i liczbą dni pracy (y), jeżeli każdy z robotników może wykopać dziennie 10 m^3 ziemi.

87. Nadając we wzorach, otrzymanych jako rozwiązania zagadnień Nr. 86, dowolne szczegółowe wartości zmiennym niezależnym, zbadaj zmiany odpowiednich wielkości, będących ich funkcjami.

a) Przykład.

Pomiędzy obwodem trójkąta równobocznego (x) i jego bokiem (y) zależność funkcjonalna wyraża się zapomocą wzoru:

$$x = 3y.$$

Nadając zmiennej niezależnej (y) dowolne szczegółowe wartości, otrzymamy po wykonaniu wskazanego we wzorze działania, poniżej zamieszczone 2 ciągi liczb, z których pierwszy zawiera długość boku (y), a drugi odpowiadający mu obwód (x).

	Bok trójkąta		Obwód
gdy	$y = 1$ cm	wówczas	$x = 3$ cm
„	$y = 2$ cm	„	$x = 6$ cm
„	$y = 3$ cm	„	$x = 9$ cm
„	$y = \frac{1}{2}$ cm	„	$x = \frac{3}{2}$ cm
„	$y = 1{,}5$ cm	„	$x = 4{,}5$ cm

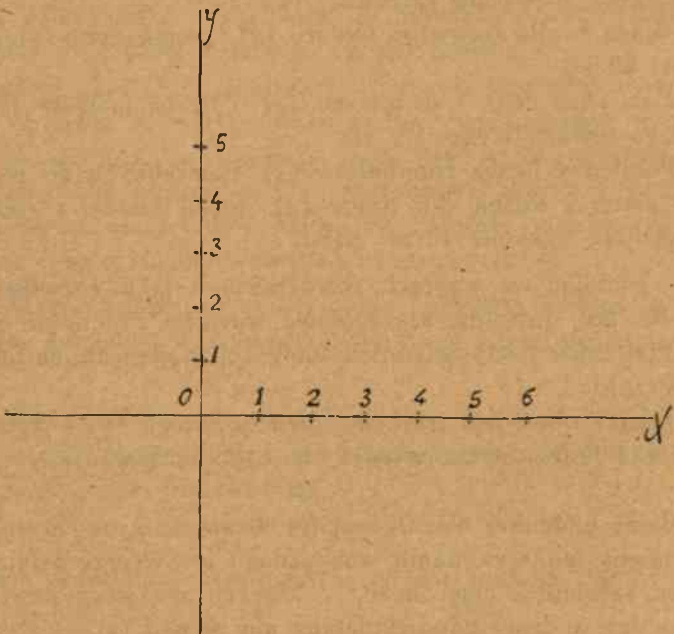
i t. d.

Badając powyższe ciągi liczb, wnosimy, że jeżeli bok trójkąta równobocznego powiększymy 2, 3, $1\frac{1}{2}$ razy i t. d., to i obwód trójkąta powiększy się tyleż razy.

b) Na podstawie tego wzoru $x = 3y$, zbadaj zmiany iloczynu (x) dwu czynników w zależności od zmiany jednego z czynników (y).

88. Zmiany funkcji możemy przedstawić graficznie, postępując w sposób:

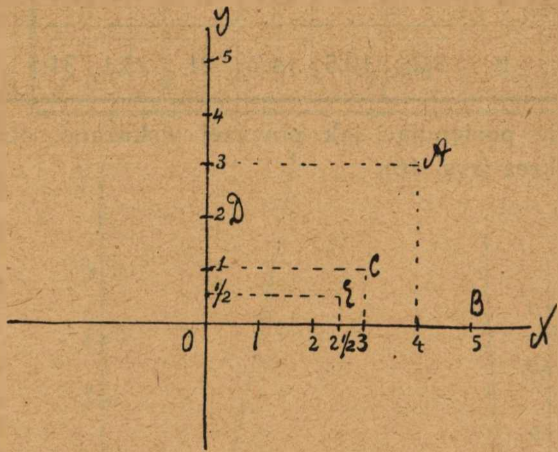
Stosownie do dwu ciągów liczb, z których jeden zawiera szczegółowe wartości zmiennej niezależnej, drugi zaś wartości szczegółowe zmiennej zależnej (funkcji), kreślimy dwie proste liczbowe pod kątem prostym. Proste te zowiemy *osiami spółrzędnych*; w szczególności zaś — prostą poziomą OX (rys. 14) *osią odciętych*, a prostą pionową OY *osią rzędnych*.



Rys. 14.

Następnie na prostej poziomej (osi odciętych) odmierzamy wartości szczegółowe zmiennej niezależnej, zaś na prostej pionowej (osi rzędnych) odpowiadające im szczegółowe wartości zmiennej zależnej (funkcji), przyczem wartości zmiennych odmierzamy od punktu 0 na właściwych osiach podług odpowiedniej skali. Do tego celu używa się papieru kratkowanego (zazwyczaj milimetrowego), na którym z łatwością można oznaczyć najodpowiedniejszą skalę dla każdej osi.

Gdy na jakichkolwiek 2 odcinkach, wyobrażających odpowiadające sobie wartości zmiennych, zbudujemy prostokąt, wówczas czwarty wierzchołek tego prostokąta da nam punkt, umieszczony pomiędzy osią OX i OY; położenie tego punktu określa się w zupełności, jeżeli wiadome są odcinki, odpowiadające wartościom zmiennych.



Rys. 15.

Naprz. Wartości zmiennych:

a) niezależnej = 4 i odpowiadającej jej funkcji = 3, określają punkt A;

b) niezależnej = 5 i odpowiadającej jej funkcji = 0, określają punkt B na osi odciętych;

c) niezależnej = 3 i odpowiadającej jej funkcji = 1, określają punkt C;

d) niezależnej = 0 i odpowiadającej jej funkcji = 2, określają punkt D na osi rzędnych;

e) niezależnej = 0 i odpowiadającej jej funkcji = 0, określają punkt C (początek spółrzędnych);

f) niezależnej = $2\frac{1}{2}$ i odpowiadającej jej funkcji = $\frac{1}{2}$, określają punkt E.

Budując w ten sam sposób prostokąty i na innych odcinkach, wyobrażających odpowiadające sobie wartości tychże zmiennych, otrzymamy między osiami OX i OY szereg punktów. Łącząc otrzymane w ten sposób sąsiednie punkty linjami, otrzymamy obraz zmienności funkcji w zależności od zmian wielkości niezależnej, który nazywamy *wykresem danej funkcji*.

a) Narysuj wykres funkcji

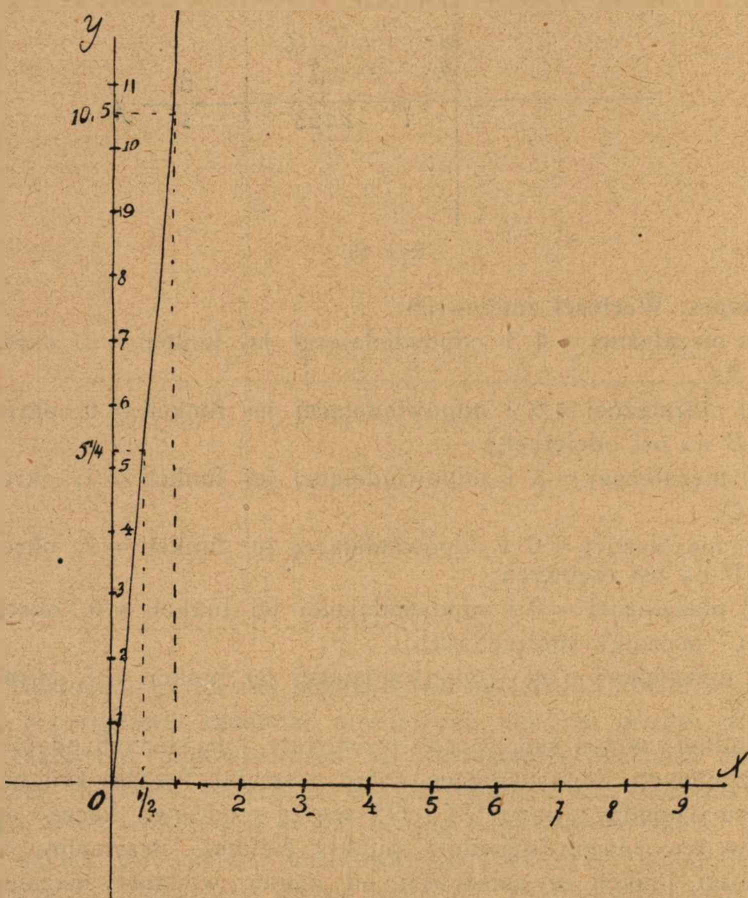
$$x = 10{,}5y$$

przyjmując za jednostkę 1 mm.

W tym celu układamy tabelkę następującą:

$y=$	0	$\frac{1}{2}$	1	1,4	2	2,2	3	4
$x=$	0	5,25	10,5	14,7	21	23,1	31,5	42

Następnie postępując, jak powyżej wskazano, otrzymamy następujący wykres (rys. 16).



Rys. 16.

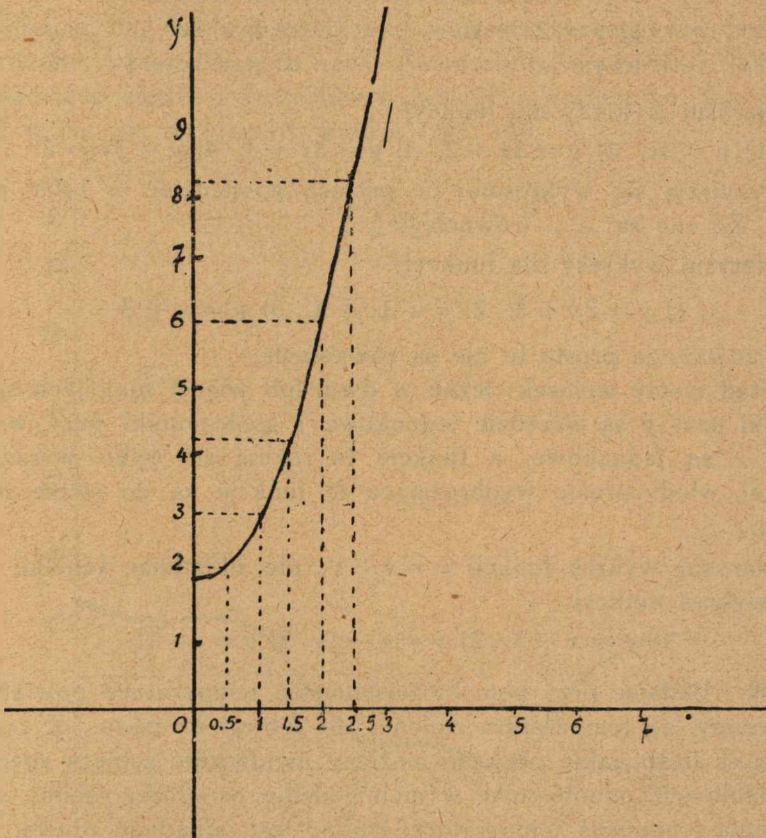
b) Narysuj wykres

$$y = x^2 + 2$$

przyjmując za jednostkę 1 cm.

Układamy tabelkę:

$x=$	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2	2,5
$y=$	2	$2\frac{1}{4}$	3	4,25	6	8,25



Rys 17.

c) Wyraź zapomocą wzoru funkcjonalną zależność pomiędzy ceną biletu kolejowego (x), przejechaną drogą (y), jeżeli za każdy km przejechany płaci się według taryfy a zł.

Narysuj wykres funkcji.

d) Wyraź zapomocą wzoru funkcjonalną zależność pomiędzy ceną biletu w pociągu kurjerskim, a przejechaną drogą, jeżeli za każdy przejechany km płaci się w/g taryfy.... zł., i prócz tego dopłaca za miejsce numerowane.... zł. bez względu na odległość.

Narysuj wykres funkcji.

e) Wyraź zapomocą wzoru fukcjonalną zależność pomiędzy należnością za depeszę (y) a ilością wyrazów (x), jeżeli za wyraz należy zapłacić 20 gr. i do każdej depeszy dopłaca się 50 gr.

f) Ułóż zagadnienia i narysuj wykresy następujących funkcyj.

a) $y = 2x + 1$ c) $y = 4x^2$

b) $y = x^2$ d) $y = 3x - \frac{1}{4}$

Narysuj wykresy dla funkcyj:

1) $y = 3x$, 2) $y = 3x + 2$, 3) $y = 3x + 4$, 4) $y = 3x - 2$.

Przyjrzyj się wykresom; co możesz powiedzieć o tych prostych? Że one są....... (równoległe).

Narysuj wykresy dla funkcyj:

1) $y = 2x + 3$, 2) $y = 3x + 3$, 3) $y = x + 3$.

Zauważ, że proste te nie są równoległe.

Stąd mamy wniosek: jeżeli w dwu, lub więcej funkcjach spółczynniki przy y są wszędzie jednakowe i spółczynniki przy wszystkich x są jednakowe, a funkcje te różnią się tylko wyrazami wolnemi, wtedy proste wyobrażające te funkcje są do siebie równoległe.

Narysuj wykres funkcji $y = x + 1$; nie układając tabelki, narysuj wykres funkcyj:

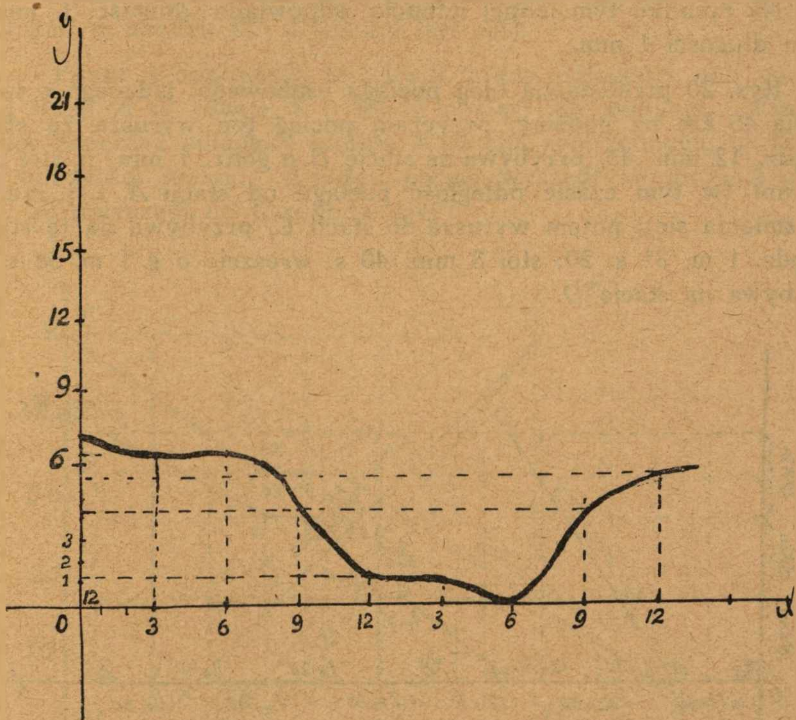
1) $y = x + 3$, 2) $y = x - 2$, 3) $y = x - 1$.

89. Badając przy pomocy termometru temperaturę powietrza, zauważamy, że temperatura zmienia się z biegiem czasu. Z szeregu jednak liczb, jakie przytem możemy uwidocznić sobie w specjalnych tablicach, odnotowując w nich godzinę, w której robimy spostrzeżenia i odnośną temperaturę, trudno jest odgadnąć prawa, podług których zmieniają się te funkcje, i wyrazić zależność pomiędzy niemi zapomocą wzoru. Natomiast można otrzymać bardzo dokładny wykres zmian temperatury za przeciąg doby. Wykres taki ze względu na swoją przejrzystość znakomicie ułatwia zorjentowanie się w zmianach funkcji; to znaczy, że z graficznego przedstawienia poznajemy natychmiast, czy liczby zmiennej zależnej (funkcji) wzrastają ze wzrostem liczb zmiennej niezależnej, czy maleją i czy szybko, czy powoli.

Na podstawie poniższej tabelki spostrzeżeń narysuj wykres zmian temperatury powietrza na przeciąg doby:

Godziny	12 poł.	3	6	9	12 noc	3	6	9	12
Temperat.	+ 7	+ 6½	+ 6½	+ 4	+ 1	+ 1	0	4	5½

przyjmując ciąg liczb górnych jako wartości szczegółowe zmiennej niezależnej (czas), dalszych zaś — (temperaturę powietrza), jako odpowiadające wartości szczegółowe funkcji, i postępując, jak wskazano w Nr. 88, otrzymamy wykres (rys. 18).



Rys 18.

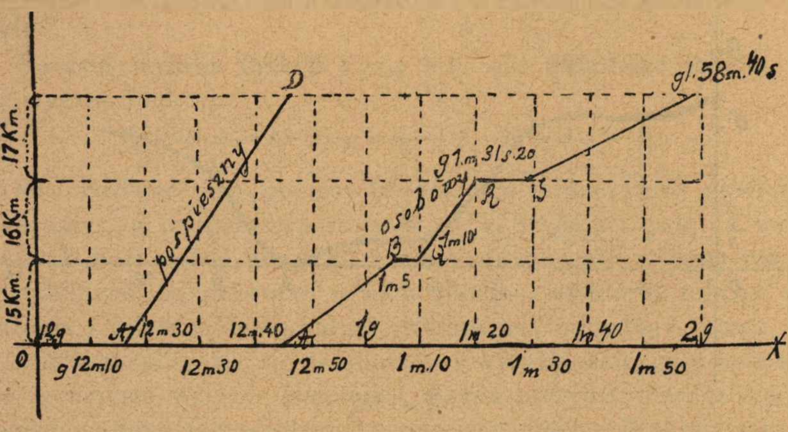
90. Ażeby uwidocznić graficznie ruch pociągu tak, aby z wykresu można było odczytać, w jakiej odległości od stacji początkowej znajdzie się pociąg, postępujemy w następujący sposób:

Wzdłuż osi odciętych wypisujemy minuty w równych odległościach, a na osi rzędnych odmierzamy według pewnej skali odcinki, oznaczające odległości w każdej chwili pociągu od stacji, z której pociąg wychodzi. Jeżeli szybkość jazdy pociągu, czyli droga, jaką pociąg przebiega w jednostkę czasu, jest stała i pociąg nigdzie się nie zatrzymuje, wówczas linja biegu pociągu będzie prosta. Ażeby ją wykreślić, dość jest wiedzieć, o której godzinie pociąg wyszedł z jednej stacji i o której przyszedł na następną.

Rysunek 19 przedstawia bieg pociągu pośpiesznego, biegnącego z szybkością 60 km na godzinę w kierunku od stacji *A* do stacji *D*, nie zatrzymując się na stacji *B* i *C*. Pociąg ten wyruszył ze stacji *A* o godz. 12 min. 15. Odległości między stacjami wynoszą: $AB = 15$ km, $BC = 16$ km, $CD = 17$ km.

Na rysunku tym jednej minucie odpowiada długość 1 mm a 1 km długości 1 mm.

Rys. 20 przedstawia bieg pociągu osobowego, jadącego z szybkością 45 km na godzinę, przyczem pociąg ten wyrusza ze stacji o godz. 12 min. 45, przybywa na stację *B* o godz. 1 min. 5, stoi tam 5 minut (w tym czasie odległość pociągu od stacji *A*, t. j. rzędna nie zmienia się); potem wyrusza do stacji *C*, przybywa na tę stację o podz. 1 m. 31 s. 20; stoi 8 min. 40 s. wreszcie o g. 1 m. 58 s. 40 przybywa na stację *D*.



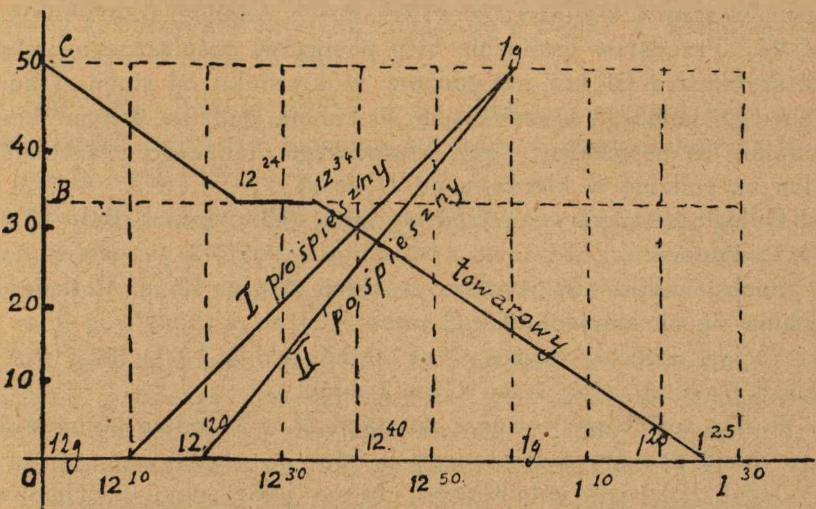
Rys 19. Rys. 20.

Uwaga: Odcinki *BQ* i *RS*, równolegle od osi odciętych *OX* odpowiadają: pięciominutowemu postojowi pociągu osobowego na stacji *B* i postojowi 8 m. 40 s. tegoż pociągu na stacji *C*. Omawiane powyżej grafiki jazdy pociągów pozwalają określać miejsce spotkania pociągów i otrzymać cały rozkład jazdy pociągów, poruszających się na pewnej przestrzeni w różnych kierunkach i z różnemi szybkościami po jednym i tym samym torze kolejowym.

Z grafiki jazdy pociągu pośpiesznego powiedz, o której godzinie pociąg przechodził przez stację *B* i *C*.

91. Pociąg pośpieszny wychodzi ze stacji *A* o godz. 12 m. 10 i przychodzi do stacji *C* o godz. 1, nie zatrzymując się na stacji *B*. Pociąg towarowy wychodzi ze stacji *C* o godz. 12 i przychodzi do *A* o godz. 1 m. 25, zatrzymawszy się na stacji *B* od godz. 12 m. 24 do godz. 12 m. 34. Oblicz graficznie, kiedy i w jakiej odległości od *A* pociągi się spotkają, jeżeli odległość między *A* i *B* wynosi 34 km., a między *B* i *C* 16 km (rys. 21).

Punkt *X* odpowiada tej chwili, kiedy odległości obu pociągów od stacji *A* są równe, t. j, kiedy pociągi się spotkają. Wystarczy więc zmierzyć odległość punktu *X* od obu spółrzędnych, (g. 12 m. 40 w odległości 30 km). A jeżeli pociąg wyszedł ze stacji *A* o g. 12 m. 20 przyszedł do *C* o godz. 1-ej?



Rys. 21.

92. Przedstaw graficznie bieg pociągów podług załączonego rozkładu, oraz oznacz czas i miejsce ich spotkania; wypełnij rubryki ze znakiem ?

Stacje	Odległości w kilom. pomiędzy stacjami		Pociąg Nr. 929 L.		Pociąg Nr. 977	
			Przyjazd	Odjazd	Przyjazd	Odjazd
Warszawa wschodnia	—	↓		5 g. 30 m.		4 g. 30 m.
Wawer	8,42		5 g. 46 m.	5 g. 48 m.	5 g. 7 m.	?
Falenica	8,24		6 g.	6 g. 2 m	?	?
Otwock	6,84		6 g. 15 m.		6 g. 39 m.	—

Na jakiej stacji pociąg Nr. 929 L winien minąć pociąg Nr. 977?

93. Przedstaw graficznie bieg pociągu, który wyszedł w przeciwnym kierunku ze stacji A o godz. 12-ej i przychodzi do stacji C o godz. 12 m. 53, zatrzymawszy się na stacji B 13 minut. Odległości między stacjami wynoszą: $AB = 12$ km. i $BC = 18$ km.

O której godzinie będzie pociąg na stacji B?

Jak daleko od B będzie pociąg o g. 12 m. 30? (odległość tę należy określić z grafiki i sprawdzić wynik zapomocą rachunku).

94. Przedstaw graficznie bieg pociągów: pośpiesznego, jadącego z szybkością 60 km na godzinę w kierunku od stacji A ku D, osobowego, jadącego z szybkością 40 km na godzinę w tym samym kierunku, co pośpieszny, oraz towarowego, jadącego z szybkością 30 km na godzinę w kierunku od D do A.

Odległości między stacjami wynoszą $AB=15$ km, $BC=12$ km, $CD=18$ km.

Pociąg pośpieszny wyrusza ze stacji A o g. 12 m. 10 i nie zatrzymuje się na stacjach B i C.

Pociąg osobowy wyrusza ze stacji A o g. 12 m. 50 i stoi na stacji B 5 minut, a na stacji C — 3 minuty.

Pociąg towarowy wyrusza ze stacji D w 20 minut po nadejściu na tę stację pociągu pośpiesznego.

Jeżeli kolej jest jednotorowa, to na jakiej stacji pociąg towarowy musi oczekiwać nadejścia pociągu osobowego i ile minut?

Kiedy przybędzie pociąg towarowy na stację A, jeżeli z miejsca spotkania się z pociągiem osobowym wyrusza w 5 minut po nadejściu pociągu osobowego i zatrzymuje się na drugiej stacji (jakiej?) 12 minut?

Zależność proporcjonalna.

95. Za 3 m pewnego materjału zapłacono 6 zł. Ile zł. należałoby zapłacić za: 1) 1 m; 2) 2 m; 3) 6 m; 4 dkm?

96. 6 m materjału kosztuje 7,2 zł. Ile kosztuje: 1) 1 m; 2) 3 m; 3) $\frac{3}{2}$ m; 4) $\frac{3}{4}$ m?

97. 2 robotników może wykonać pewną robotę w ciągu 9 dni. W jakim czasie mogliby wykonać tę samą robotę, pracując z takiem samem natężeniem: 1) 1 robotnik; 2) 3 robotników; 3) 4 robotników; 4) 6 robotników?

98. Za pewną kwotę pieniędzy możnaby nabyć 28 kg towaru w cenie 5,25 zł. za 1 kg. Ile kg tegoż towaru możnaby było kupić, gdyby towar ten: 1) podrożał 2, 3, 4, 7 razy? 2) staniał 2, 3, 4, 5 razy?

99. Pracując po 10 godzin dziennie, można wykonać pewną robotę w ciągu 6 dni. Po ile godzin dziennie należy pracować, aby wykonać tę samą robotę w ciągu 5 dni?

100. 12 kosiarzy może skosić pewną łąkę w ciągu 5 dni. Ilu trzebaby kosiarzy, aby skosić tę samą łąkę w ciągu: 1) 2 dni, 2) 3 dni, 3) 4 dni, 4) 6 dni, 5) 15 dni?

101. Na ubranie trzeba 3 m sukna, mającego 1,75 m szerokości. Jakiej szerokości powinno być sukno, jeżeli wzięto na to samo ubranie 4 m?

W zagadnieniach 95—96 mieliśmy do czynienia z wielkościami, pomiędzy któremi istniała taka zależność funkcjonalna, że ile razy jedna z nich została powiększona (względnie zmniejszona), tyleż razy powiększała się (względnie zmniejszała się) druga wielkość.

W zagadnieniach zaś 97—101 mieliśmy do czynienia z wielkościami, pomiędzy któremi istniała taka zależność funkcjonalna, że z powiększeniem się (lub zmniejszeniem) jednej 2, 3, 4 i t. d. razy, druga zmniejszała się (lub powiększała) tyleż razy.

O wielkościach, które są z sobą w takiej zależności, jak w pierwszym wypadku, mówimy, że są one w *zależności wprost proporcjonalnej.*

O wielkościach zaś, które są z sobą w zależności jak w drugim wypadku, mówimy, że są one *w zależności odwrotnie proporcjonalnej.*

Uwaga. Przytoczone powyżej zagadnienia są zagadnieniami na tak zwaną „regułę trzech". Rozwiązują się one między innemi sposobem sprowadzenia do jedności.

102. a) Daj kilka przykładów wielkości wprost proporcjonalnych.

b) Daj kilka przykładów wielkości odwrotnie proporcjonalnych.

103. Czy pomiędzy obwodem kwadratu i długością jego boku istnieje zależność proporcjonalna i jaka?

Oznaczając długość boku przez x, a obwód przez y, mamy:

gdy	$x = 1$,	wtedy	$y = 4.1$
„	$x = 2$,	„	$y = 4.2$
„	$x = 3$,	„	$y = 4.3$
„	$x = \frac{1}{4}$,	„	$y = 4.\frac{1}{4}$
„	$x = 1{,}5$,	„	$y = 4.1{,}5$

i t. d.

Z powyższej tabelki widać, że z powiększeniem (zmniejszeniem) się boku, tyleż razy powiększa (zmniejsza) się obwód. Stąd wniosek, że obwód kwadratu i jego bok są to wielkości wprost proporcjonalne.

Równocześnie z tej tabelki zauważamy, że każdorazowy iloraz z podzielenia wartości y przez odpowiadającą jej wartość x jest ta sama i równa się 4.

Zależność więc pomiędzy obwodem kwadratu i jego bokiem możemy sformułować w następujący sposób:

$$\frac{y}{x} = 4$$

lub też:

$$y = 4x.$$

Stały iloraz z podzielenia y przez x (w danym wypadku 4) nazywamy *spółczynnikiem proporcjonalności*. Taka niezmienność spółczynnika jest tylko możliwą, gdy obie wielkości zmieniają się jednakowo, to znaczy jednocześnie powiększają się, lub jednocześnie zmniejszają się tę samą liczbę razy.

104. Czy pomiędzy powierzchnią prostokąta o stałej podstawie np. 15 cm i jego wysokością istnieje zależność proporcjonalna i jaka?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie, tworzymy tabelkę, w której x oznacza powierzchnię prostokąta, zaś y — długość wysokości:

gdy $y =$	1	2	3	$\frac{1}{2}$	1,5
$x =$	15.1	15.2	15.3	$15.\frac{1}{2}$	15.1,5

Z powyższej tabelki widać, że przy stałej podstawie prostokąta, z powiększeniem się (zmniejszeniem) jego wysokości, powiększa się (zmniejsza) tyleż razy jego powierzchnia. Zatem, powierzchnia prostokąta o stałej podstawie i jego wysokości są to wielkości wprost proporcjonalne, i ogólny wzór tej zależności będzie:

$$\frac{x}{y} = 15,$$

przyczem 15 jest spółczynnikiem proporcjonalności.

Z przytoczonych powyżej 2 przykładów widzimy, że to, co było powiedziane o obwodzie i jego boku, stosuje się również i do powierzchni prostokąta o stałej podstawie i jego wysokości, czyli, że *wogóle stosuje się do wszystkich wielkości wprost proporcjonalnych*, przeto możemy sformułować zależność wprost proporcjonalną pomiędzy wielkościami x i y w następujący sposób:

$$x = ky,$$

gdzie k jest spółczynnikiem proporcjonalności.

105. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy bokiem kwadratu i jego powierzchnią?

106. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy ciężarem miedzi i jej objętością, jeżeli ciężar właściwy miedzi równa się 8,92?

107. Daj kilka przykładów wielkości wprost proporcjonalnych i wykaż zależność tę zapomocą wzoru; przytem wyznacz spółczynnik proporcjonalności.

108. Nadając wielkościom x i y szczegółowe wartości, ułóż dwa ciągi liczb tak, aby wielkości te były w zależności wprost proporcjonalnej, przyczem oblicz współczynnik proporcjonalności.

109. Które z podanych ciągów wartości szczegółowych wielkości x i y wskazują, iż wielkości te są w zależności wprost proporcjonalnej? (Oblicz spółczynnik proporcjonalności i ułóż zagadnienie.)

a)

$x =$	0	1	2	3	10	2,5
$y =$	0	1,5	3	4,5	15	3,75

b)

$x =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	4	5
$y =$	4,5	3	2,25	9	36	45

c)

$x =$	2	4	6	8	10	12
$y =$	3	7	13	27	33	49

110. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy długością drogi, którą przebywa pociąg, a czasem trwania jazdy, jeżeli szybkość jazdy jest stała?

(Wyznacz spółczynnik proporcjonalności).

111. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy czasem pracy i płacą.

(Wyznacz spółczynnik proporcjonalności).

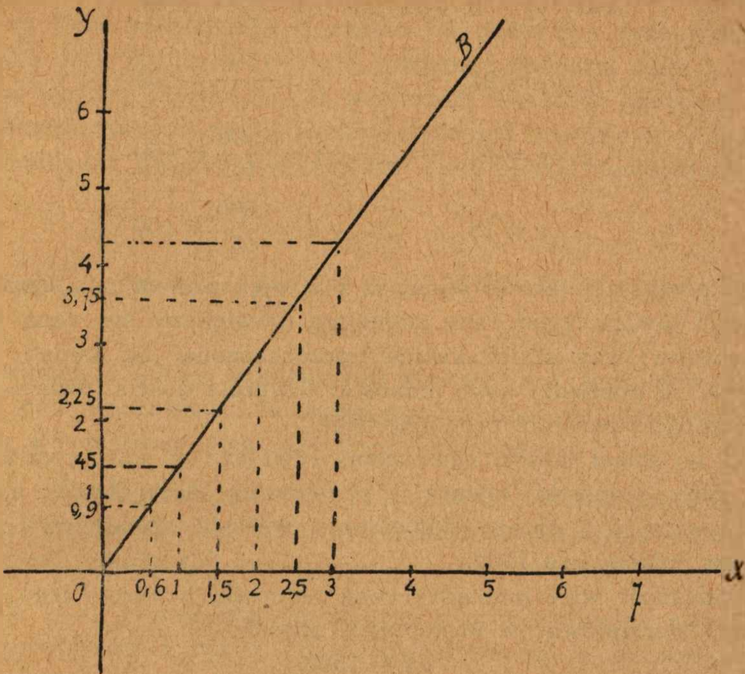
112. Ułóż kilka zagadnień, któreby zawierały wielkości wprost proporcjonalne.

113. Poniżej podany jest (rys. 22) wykres funkcji

$$x = ky$$

czyli wykres zależności wprost proporcjonalnej dla szczegółowej wartości $k = 1,5$.

$y =$	0	$\frac{3}{5}$	1	1,5	2	2,5	3
$x =$	0	0,9	1,5	2,25	3	3,75	4,5



Rys. 22.

Jak wskazuje rys. 22, wszystkie punkty, odpowiadające wartościom szczegółowym x i y, podanym w powyższej tabelce, układają się na jednej linji prostej, przechodzącej przez punkt 0 (początek spółrzędnych), przyczem zauważa się, że im większa jest wartość szczegółowa spółczynnika proporcjonalności k, tembardziej prosta ta odchyla się od kierunku osi odciętych OX.

114. Narysuj wykres funkcji

$$x = ky,$$

dla szczegółowej wartości x: 1) 2, 2) 2,5, 3) 0,4, 4) $\frac{3}{4}$, 5) 2,6, 6) 7,8, 7) 13,6, 8) 8,9, 9) 10,5, 10) 11,3.

115. Jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy ceną jednostki towaru, a jego ilością przy stałej kwocie, przeznaczonej na kupno?

Oznaczmy przez x cenę jednostki towaru, a ilość towaru — przez y i niech kwotą, przeznaczoną na kupno, będzie nprz. 1500 złotych.

$$\text{Gdy } y = 5 \text{ wówczas } x = \frac{1500}{5} = 300$$

$$\text{,, } y = 2\tfrac{1}{2} \text{ ,, } x = \frac{1500}{2{,}5} = 600$$

$$\text{,, } y = 10 \text{ ,, } x = \frac{1500}{10} = 150$$

$$\text{,, } y = 15 \text{ ,, } x = \frac{1500}{15} = 100$$

Z powyższej tabelki widać, iż z powiększeniem (zmniejszeniem) się ilości towaru, tyleż razy zmniejsza (powiększa) się cena jednostki towaru przy stałej kwocie, przeznaczonej na kupno. Stąd wniosek, że pomiędzy ceną jednostki towaru i ilością towaru, istnieje zależność odwrotnie proporcjonalna.

Z tej samej tabelki zauważamy również, że każdorazowy *iloczyn* ceny jednostki towaru, t. j. wartości szczegółowej x, przez ilość towaru, t. j. przez odpowiednią wartość szczegółową y, jest ten sam, mianowicie 1500.

Zależność więc pomiędzy ceną jednostki towaru i jego ilością możemy sformułować w następujący sposób:

$$yx = 1500.$$

116. Jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy ilością osób a czasem, na który ma wystarczyć ta sama ilość żywności, nprz. 225 kg cukru?

Oznaczmy przez x — ilość osób, a czas — przez y,

$$\text{gdy } y = 25 \text{ wówczas } x = \frac{225}{25} = 9$$

$$\text{,, } y = 12{,}5 \text{ ,, } x = \frac{225}{12{,}5} = 18$$

$$\text{,, } y = 5 \text{ ,, } x = \frac{225}{5} = 45$$

$$\text{,, } y = 75 \text{ ,, } x = \frac{225}{75} = 3$$

i t. d.

Z powyższej tabelki widać, że przy stałej ilości żywności, z powiększeniem (zmniejszeniem) się czasu, tyleż razy zmniejsza (powiększa) się ilość osób. Zatem pomiędzy ilością osób, a czasem przy tej samej ilości żywności istnieje zależność odwrotnie proporcjonalna, i ogólny wzór tej zależności będzie:

$$xy = 225.$$

Z przytoczonych powyżej (Nr. 115 i 116) przykładów wnosimy, że to, co było powiedziane o zależności pomiędzy ceną jednostki towaru, a jego ilością, stosuje się również i do ilości osób i czasu, czyli że wogóle *stosuje się do wszystkich wielkości odwrotnie proporcjonalnych*, przeto ogólny wzór zależności odwrotnie proporcjonalnej pomiędzy dwiema wielkościami x i y będzie następujący:

$$x = \frac{k}{y}$$

lub też:

$$xy = k$$

Otrzymane wzory wskazują, że niezmienność iloczynów możliwą jest pod warunkiem, że *powiększeniu* jednej ze zmiennych odpowiada *zmniejszenie* tyleż razy drugiej zmiennej.

117. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy jednostajną szybkością a czasem, potrzebnym do przebycia jednej i tej samej drogi, naprz. 450 km?

118. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy liczbą robotników i liczbą dni pracy, potrzebnych do wykonania pewnej roboty, naprz. do wykopania rowu, mającego 560 m^3?

119. Daj kilka przykładów wielkości, pomiędzy któremi istnieje zależność odwrotnie proporcjonalna; wyraź zależność tę zapomocą wzoru i wyznacz szczegółową wartość spółczynnika k.

120. Na podstawie poniżej podanych wartości szczegółowych 2 wielkości x i y zbadaj, czy te wielkości są względem siebie proporcjonalne i oblicz szczegółową wartość spółczynnika k:

a)

$y =$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	5
$x =$	48	24	12	8	4,8

b)

$y =$	1	5	0,5	0,1	0,25
$x =$	$\frac{1}{4}$	6,05	0,5	2,5	1

c)

$y =$	0,6	1	3	10	12
$x =$	5	3	1	0,3	0,25

d)

$y =$	2	5	.7	8	12
$x =$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{5}$	$2\frac{3}{4}$	0,06	0,5

e)

$y =$	$\frac{3}{4}$	2	0,6	1,5	3,75
$x =$	8	3	10	4	1,6

121. Nadając wielkościom x i y szczegółowe wartości, ułóż dwa ciągi liczb tak, aby wielkości te były w zależności odwrotnie proporcjonalnej.

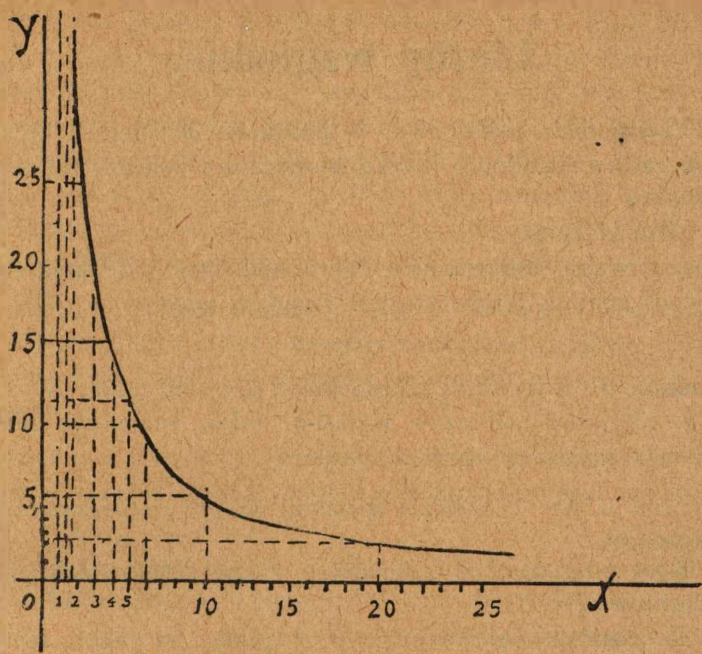
122. Ułóż kilka zagadnień, któreby zawierały wartości odwrotnie proporcjonalne.

123. Poniżej (rys. 23) podany jest wykres funkcji

$$x = \frac{k}{y}$$

czyli zależności odwrotnie proporcjonalnej; wykres ten jest zbudowany podług tabelki, obliczonej dla wartości $k = 60$.

x	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	5
y	60	40	30	20	15	12



Rys. 23.

Wykres, będący obrazem zmienności 2 wielkości odwrotnie proporcjonalnych, jest linją krzywą, która nosi nazwę *hiperboli:* krzywa ta odznacza się tem, że w miarę zwiększania się wartości szczegółowych x (odciętych), wartości szczegółowe y (rzędne) szybko maleją i w miarę zmniejszania się odciętych (x) rzędne szybko wzrastają, wskutek czego krzywa ta, zbliża się ciągle do osi, coraz to bardziej się wyprostowując.

124. Narysuj wykresy funkcyj:

1) $y = \frac{5}{x}$; 2) $y = \frac{12}{x}$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{0,8}{x}$; 5) $y = \frac{0,75}{x}$

Liczby względne.

1. Termometr wskazywał w południe a^0 ciepła; do północy zaś temperatura spadła o b^0. Jaką temperaturę wskazywał termometr o północy?

Rozwiązanie.

Poszukiwaną temperaturę (x) znajdziemy, odejmując od temperatury a^0 spadek temperatury b^0; będzie więc:

$$x = a - b$$

Nadając a i b wartości szczegółowe, przytem takie, by: 1) $a > b$, 2) $a = b$, 3) $a < b$, oblicz i wyjaśnij, jakie znaczenie ma wynik w każdym z poszczególnych wypadków.

2. Jak w Nr. 1, oblicz i wyjaśnij wyniki rozwiązań następujących zagadnień:

a) Ktoś posiada a zł. gotówki i b zł. długu. Jaki jest jego stan majątkowy?

b) Ile reszty otrzyma się z a zł., płacąc za nabyty towar b zł.?

c) Pewien gracz siadł do gry mając a zł.; po ukończeniu zaś gry miał b zł. Ile (x) zł. wygrał?

d) Kupiec zapłacił za towar m zł., a sprzedał go za n zł. Ile zł. wynosił jego zysk?

e) Pewien bankier poniósł następujące zyski i straty: 1) zyskał: 2000 zł., 7500 zł., 8000 zł., stracił zaś: 4200 zł., 6000 zł., 10000 zł., 2) zyskał: 14000 zł., 15000 zł., stracił zaś: 7000 zł. i 6000 zł. Jaki był jego stan majątkowy w każdym z tych wypadków?

f) Pewien piechur wyruszył z miejscowości A do miejscowości B, odległej od A o a km. Odpocząwszy w B, wyruszył z powrotem w kierunku ku A. Przeszedłszy b km, zatrzymał się na nocleg w miejscowości C. Oblicz odległość między A i C (w kierunku ku B). Nadając a i b wartości szczegółowe takie, by: 1) $a > b$, 2) $a = b$, 3) $a < b$, wyjaśnij znaczenie wyniku.

Badając wartości szczegółowe odpowiedzi na powyższe zagadnienia przy pewnych wartościach liczb ogólnych, w ich skład wchodzących, spotkaliśmy się z wartościami, mającemi znaczenie przeciwne. Nprz. dochód i rozchód, ciepło i zimno, zysk i strata, wygrana i przegrana.

Przeciwne wartości zazwyczaj odróżniamy zapomocą znaków + i —, które stawiamy przed odpowiednią liczbą. Znaki + i — są te same, które piszemy między dwiema liczbami, jeżeli chcemy zaznaczyć, że nad temi liczbami, ma być wykonane dodawanie lub odejmowanie. W danymząś wypadku używamy je celem odróżnienia 2 wartości, mających przeciwne znaczenie. W dalszym jednak ciągu przekonamy się, że oba znaczenia znaków + i — łatwo mogą być uzgodnione. Zatem: $+ 7^0$ i $- 7^0$ oznaczają przeciwne sobie wartości, mianowicie $+ 7^0$ oznacza temperaturę powyżej zera (ciepło), a -7^0, temperaturę poniżej zera (zimno).

Liczby, opatrzone znakami + lub — nazywamy *liczbami względnemi*, w szczególności zaś — liczby, opatrzone znakiem +, nazywamy liczbami *dodatniemi*, zaś liczby, opatrzone znakiem —, liczbami *ujemnemi*.

Natomiast wszystkie liczby, z któremi mieliśmy do czynienia poprzednio (liczby arytmetyczne) — nazywamy *liczbami bezwzględnemi*.

W każdej więc liczbie względnej odróżniamy: znak liczby i jej wartość bezwzględną. Nprz. $+7$ ma wartość bezwzględną 7 i znak +, zaś -7 ma tę samą wartość bezwzględną 7, lecz znak —. Tak więc z każdej liczby bezwzględnej można utworzyć dwie względne, wiążąc je znakami + i —.

Przez wprowadzenie liczb ujemnych umożliwiamy obliczanie różnicy

$$a - b$$

przy wszelkich szczegółowych wartościach a i b, t. j. nie tylko wtedy, gdy $a > b$ lub $a = b$, lecz i wówczas, gdy $a < b$, przyczem i w wypadku $a < b$ różnica może mieć znaczenie praktyczne.

3. Oblicz różnice:

1) $5 - 8 = ?$ 2) $1 - 3 = ?$ 3) $2\frac{3}{4} - 2{,}75 = ?$ 4) $3\frac{2}{3} - 4\frac{5}{6} = ?$

5) $\frac{2}{5} - \frac{2}{3} = ?$ 6) $\frac{1}{2} - \frac{18}{25} = ?$ 7) $4 - 7\frac{3}{5} = ?$ 8) $\frac{11}{60} - \frac{13}{24} = ?$

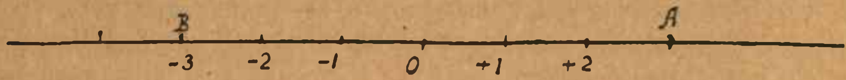
9) $\frac{8}{5} - 1 = ?$ 10) $3 - 10\frac{5}{18} = ?$ 11) $24 - 24\frac{6}{7} = ?$ 12) $6 - 9\frac{2}{3} = ?$

13) $3{,}8 - 12\frac{1}{2} = ?$ 14) $0{,}21 - 3{,}423 = ?$ 15) $2{,}03 - 6\frac{3}{25} = ?$

16) $3{,}75 - 12\frac{2}{3} = ?$ 17) $0{,}9 - 4{,}05 = ?$ 18) $3{,}75 - 4{,}9 = ?$

19) $\frac{3}{4} - 2{,}375 = ?$ 20) $0{,}01 - 0{,}1 = ?$ 21) $6{,}5 - 6\frac{1}{2} = ?$ 22) $3\frac{2}{5} - 2{,}4 = ?$

4. Wykonaj graficznie odejmowanie liczby 5 od liczby 2. W tym celu na prostej liczbowej od dowolnego punktu początkowego O należy odmierzyć na prawo (rys. 24) odcinek, OA odpowiadający odjemnej = 2, następnie zaś należy odcinek, wyrażający odjemnik = 5, odmierzyć od prawego końca odjemnej w kierunku przeciwnym.



Rys. 24.

Odcinek odpowiadający liczbie — 5 możemy rozbić na 2 odcinki: —3 i —2. Odcinek —2 zredukuje się z odcinkiem +2 (czyli dadzą w sumie zero); pozostanie odcinek odpowiadający liczbie —3. Więc rezultatem działania: 2—5 jest —3.

5. Wykończ graficznie odejmowania:

a) 2 — 2, b) 3 — 3, c) 3 — 4, d) 3 — 5, e) 3 — 6, f) $4 - 5\frac{3}{5}$, g) 5 — 7,2, h) $3\frac{3}{4} - 5\frac{3}{8}$, i) $3{,}8 - 12\frac{1}{2}$, j) $\frac{3}{4} - 2{,}37$.

6. Nakreśl na prostej liczbowej ciągi liczb:

a) —7, —6, $-5\frac{1}{4}$, —3, —1, +0,1, +1, $+1\frac{1}{2}$, +3;
b) —1, —0,9 —0,7, —0, $+\frac{1}{10}$, $+\frac{1}{8}$, $+\frac{1}{4}$, $+\frac{3}{8}$, $+\frac{5}{3}$, +1.

Czy liczba względna ma zawsze sens? Liczba ujemna niezawsze ma sens. Nie możemy powiedzieć nprz. „byłem —2 razy w kościele" lub „widziałem cię —3 razy", lecz w zadaniu: Kupiec zapłacił za towar 24 zł., a sprzedał za 21 zł., mogę powiedzieć, że kupiec stracił 3 zł., lub zarobił — 3 zł.

Z powyższych obrazów, ciągów liczb względnych, wnosimy — że:

1. Każda liczba większa znajduje się zawsze na prawo od liczby mniejszej; zaś liczba mniejsza na lewo od liczby większej.

2. Każda liczba dodatnia bez względu na jej wartość bezwzględną jest większą od wszelkiej liczby ujemnej, nprz. $0{,}00001 > -20$.

3. Z dwu liczb dodatnich ta jest większa, której bezwzględna wartość jest większa, nprz. $(+10) > (+7)$.

4. Każda liczba dodatnia jest większa od zera

$$\text{naprz. } +0{,}00001 > 0.$$

5. Każda liczba ujemna jest mniejsza od zera nprz. $(-500) < 0$.

6. Z dwu liczb ujemnych ta jest większa, której bezwzględna wartość jest mniejsza, nprz. $(-3) > (-5)$.

Łatwo się o tem przekonać. Jeżeli do liczby -5 dodam 2, to otrzymam liczbę $-5+2=-3$. Stąd widać, że $-5<-3$, bo do -5 musiałem coś dodać, aby otrzymać -3. Jednocześnie zauważamy, że -3 jest większe od -5 o $+2$.

7. Które z następujących liczb są równe, większe lub mniejsze:

1. -5 i -5,	6. $-0{,}02$ i $0{,}0123$	11. $-0{,}35$ i $-\frac{7}{8}$
2. -5 i -8,	7. $-\frac{2}{25}$ i $-\frac{1}{8}$	12. $+a$ i $-a$
3. 4 i -5,	8. 0 i $-\frac{1}{2}$	13. $-a$ i $-2a$
4. -5 i -6,	9. -1000 i $+\frac{3}{4}$	14. $-5{,}6$ i $+5{,}5$
5. -13 i -8,	10. $-3\frac{3}{5}$ i $-3\frac{3}{4}$	15. 0 i -5000.

8. Następujące liczby ułóż według ich kolejnej wielkości, poczynając od najmniejszej:

a) $-1, -\frac{1}{2}, +3, +5, -200, -0{,}01, -0{,}625, -\frac{7}{8}$;

b) $-5, -2\frac{3}{4}, -5\frac{7}{8}, 01, 0{,}01, -0{,}1, -0{,}25$.

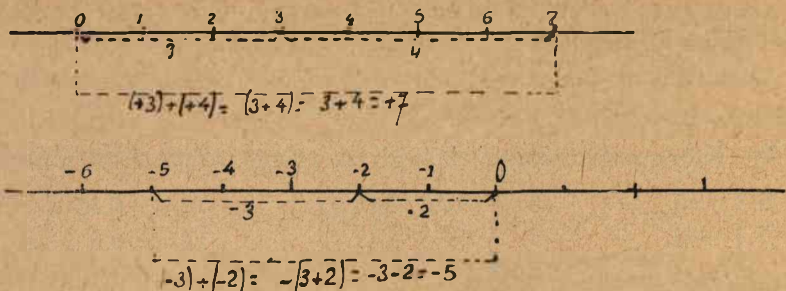
9. Napisz ułamek właściwy: a) mniejszy od $-\frac{6}{12}$, b) większy od $-\frac{7}{12}$.

10. Napisz i nakreśl na prostej liczbowej według kolejnej wielkości wszystkie liczby całkowite, zawarte między -10 i 3.

11. Mając dane liczby: $-0{,}2$ i $-0{,}21$ napisz: a) liczbę ujemną, większą od każdej z liczb danych, b) liczbę ujemną, mniejszą od każdej z nich, c) liczbę ujemną, większą od jednej z nich, a mniejszą od drugiej.

Dodawanie liczb względnych.

Umówiliśmy się przedstawiać na prostej liczbowej liczby względne w postaci odcinków, przyczem długość odcinka ma odpowiadać wartości bezwzględnej danej liczby, znak zaś + lub — określa kierunek, w którym odmierzamy te odcinki od punktu zerowego; (zazwyczaj liczby dodatnie przedstawiamy na prawo od punktu zerowego, zaś ujemne na lewo). Odmierzając na prostej liczbowej kolejno odcinki od punktu zerowego, wykonywamy graficznie dodawanie. Mogą być przytem 2 wypadki: kolejne odmierzanie odcinków na prawo od punktu zerowego i kolejno odmierzanie odcinków na lewo od punktu zerowego; w pierwszym wypadku mówimy, że wykonaliśmy graficznie *dodawanie liczb dodatnich*, w drugim zaś *ujemnych* (rys. 25).



Rys. 25.

Z powyższego wnosimy, że liczby ujemne różnią się od liczb dodatnich również i przeciwnym kierunkiem działania. To znaczy, że jeżeli według umowy liczby dodatnie odejmujemy w kierunku na lewo, to liczby ujemne należy odejmować w kierunku na prawo.

12. Sprawdź graficznie słrszność następujących równości:

a) $(+4)+(+5)=+(4+5)=+9$, b) $(-4)+(-7)=-(4+7)=-11$, c) $(+12)+(-4)=+(12-4)=+8$, d) $(+14)+(-21)=-(21-14)=-7$

z powyższych równości widzimy, że: *sumą 2 liczb względnych, mających znaki jednakowe, nazywamy liczbę, której wartość bezwględna jest sumą wartości bezwzględnych tych liczb i której znakiem jest znak wspólny tych liczb; sumą zaś 2 liczb względnych, mających znaki różne, nazywamy liczbę, której wartość bezwzględna równa się różnicy wartości bezwzględnych tych liczb i której znakiem jest znak liczby, mającej wartość bezwzględną większą.*

13. Sprawdź graficznie słuszność następujących równości:

a) $(+3)+(+2)=(+2)+(+3)=+5$
b) $(-8)+(-6)=(-6)+(-8)=-14$
c) $(-11)+(+3)=(+3)+(-11)=-8$.

Jaką własność sumy wyrażają powyższe wzory?

Uwaga. Przy dodawaniu liczb względnych należy odróżniać znaki liczb względnych od znaków działań. Nprz. w wyrażeniu $(+5)\underline{+}(+2)\underline{+}(-3)$ znaki pomiędzy nawiasami są znakami działań, zaś znaki wewnątrz nawiasów są znakami liczb.

14. Oblicz:

a) $(+4)+(+7)=?$ $(-6)+(-5)=?$ $(+\frac{2}{3})+(+\frac{5}{6})=?$ $(-0{,}75)+(-0{,}25)=?$

b) $(+0{,}9)+(-0{,}6)=?$ $(-1)+(-0{,}3)=?$ $(+3)+(\frac{5}{12})=?$ $(-1\frac{1}{11})+(-2{,}05)=?$

c) $(-0{,}11)+(+0{,}9)=?$ $(-0{,}5)+(+0{,}8)=?$ $(-\frac{2}{15})+(+\frac{7}{24})=?$
$(-\frac{3}{5})+(+1{,}01)=?$
d) $(+24)+(-13)+(-8)=?$ $(-17)+(+6)+(-5)=?$
e) $(+1\frac{2}{3})+(+3\frac{5}{6})+(-2\frac{7}{12})=?$ $(-5\frac{3}{7})+(+2\frac{5}{14})+(-\frac{4}{7})=?$
f) $4+(-1)+[(-7{,}2)+(+6{,}2)]=?$ $[(-15)+(+13)]+$
$+[(+5\frac{2}{5})+(-2\frac{1}{4})]=?$
g) $[11+(-3)+(-4)]+(-9)=?$ $(-12)+[(+3)+(-2)]=?$
h) $12{,}8+\{-3\frac{5}{8}+[-2{,}7+(-4)]\}=?$
i) $\{3{,}27+[-2{,}02+(-8{,}3)]\}+(-5{,}04)=?$

Odejmowanie liczb względnych.

15. Sprawdź graficznie słuszność następujących równości:

a) $(+8)-(+3)=+(8-3)=+5$, b) $(+7)-(+10)=-(10-7)=-3$,
c) $(+5)-(-4)=+(5+4)=+9$, d) $(+6)-(-2)=+(6+2)=+8$,
e) $(-7)-(-5=(-7+5)=-(7-5)=-2$,
f) $(-11)-(-15)=(-11+15)=+4$,
g) $(-6)-(+5)=(-6-5)=-(6+5)=-11$.

Z powyższych równości widzimy, że: *aby odjąć liczbę dodatnią należy odjąć jej wartość bezwzględną; ażeby zaś odiąć liczbę ujemną, należy dodać jej wartość bezwzględną.*

Uwaga. Zwraca się uwagę, że wyrazy dodawanie i odejmowanie obecnie po wprowadzeniu liczb względnych niezupełnie to samo mają znaczenie, co i poprzednio (w arytmetyce). Poprzednio dodawanie zawsze pociągało za sobą *powiększenie*, odejmowanie zaś — *zmniejszenie;* natomiast teraz po dodaniu nprz. -4 do 6 otrzymamy sumę algebraiczną 2; po odjęciu zaś -4 od 6 otrzymamy algebraiczną różnicę $=10$.

16. Wyjaśnij graficznie słuszność następujących równości:
a) $(-5)-0=-5$, b) $0-(+6)=-6$, c) $0-(-7)=+7$.

17. Wyjaśnij graficznie, że:
a) $(+8)-(+11)$ jest to samo, co $(+8)+(-11)=-3$,
b) $(-9)+(+5)$ jest to samo, co $(-9)-(-5)=-4$,

t. j. *że różnica może być zamieniona* na sumę, lub też suma — na różnicę, to znaczy, że odjąć nprz. $+3$ jest to samo, co dodać -3, a odjąć nprz. -15 to samo, co dodać $+15$

18. Zapomocą rachunku wyjaśnij, że:

a) $(+9)-(+11)=(+9)+(-11)$
b) $(+7)-(-1)=(+7)+(+1)$
c) $(-4)-(+5)=(-4)+(-5)$
d) $(-1)-(-9)=(-1)+(+9)$

Uwaga. Zwykle opuszcza się znaki liczb dodatnich i nawiasy, ujmujące liczbę ujemną, napisaną na pierwszem miejscu; piszemy więc, nprz. zamiast $(+7)-(-1)$; krócej $7-(-1)$, lub też zamiast $(-1)-(-9)$, krócej: $-1-(-9)$.

19. Ponieważ jak przekonaliśmy się (Nr. 17 i 18); różnica może być zamieniona na sumę, lub też suma na różnicę, przeto wszelki szereg liczb względnych, połączonych znakami dodawania (+) i odejmowania (—), może być zamieniony na sumę, zwaną sumą algebraiczną tych liczb. Nprz.
wyrażenie: $s=9-7+10-8-11+2$ można przedstawić w postaci sumy algebraicznej: $s=(+9)+(-7)+(+10)+(-8)+(-11)+(+2)=-5$.

20. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej i oblicz zapomocą rachunku i graficznie.

a) $17-8+5-6$; b) $4-5-7+8$
c) $50-25+10+5-2{,}5$; d) $43-25-14-18+3$
e) $3+0{,}04-0{,}8-0{,}6-7$.

21. Wyraź zapomocą wzoru i oblicz:

1) od 12 odjąć 7; od 9 odjąć -5; od -14 odjąć 10;
2) od $\frac{2}{7}$ odjąć $-\frac{3}{4}$; od $\frac{1}{9}$ odjąć $\frac{5}{12}$; od $-\frac{5}{6}$ odjąć $\frac{3}{4}$;
3) od $-11{,}87$ odjąć $13{,}75$; od $0{,}625$ odjąć $-\frac{7}{25}$; od $0{,}9$ odjąć -1;

22. Oblicz:

a) $(+7)-(+4)=?$ $(+7)-(-4)=?$ $(-7)-(+4)+?$
b) $0-(-2)=?$ $0-(+1)=?$ $(-5)-0=?$
c) $(+\frac{13}{25})-(-\frac{16}{25})=?$ $(-\frac{1}{2})-(+\frac{7}{15})?$ $(+\frac{9}{20})-(-\frac{9}{20})=?$
d) $(-1)-(-\frac{2}{3})=?$ $(+\frac{62}{75})-(-\frac{245}{250})=?$ $(-\frac{23}{60})-(-\frac{19}{40})=?$
e) $(-6{,}75)-(+18{,}15)=?$ $(+0{,}32)-(-1{,}68)=?$
f) $4-(-2)-(-7)=?$ $(-25)-(+18)-(-13)=?$
g) $(-13)-(-17)+(-20)=?$ $8-[-3-(+4)]=?$
h) $13-[(-4)+(3-4)]=?$ $13-[(-4)-(3-4)]=?$
i) $(-40\frac{1}{2})-\{-1\frac{3}{8}-[5\frac{5}{6}+(3\frac{3}{4}-8\frac{3}{16})]\}=?$
j) $1-(-1)+\{5-[6-(0-1)]\}$

23. O ile jedności i w jakim kierunku należy się posunąć na prostej liczbowej, aby:

a) od $+\ 2$ dojść do $+15$; od $-\ 2$ dojść do -15;
b) od $-\ 3$ dojść do $-\ 8$; od -12 dojść do $-\ 4$;
c) od -22 dojść do $-\ 1$; od -14 dojść do $+21$;
d) od $+\ 7$ dojść do $-\ 1$; od 0 dojść do -13;

24. a) Ile trzeba dodać do 5; ażeby otrzymać $+\ 8$?
b) Ile trzeba dodać do 500, ażeby otrzymać sto?

25. a) Ile trzeba odjąć od 5, ażeby otrzymać -2?
b) Ile trzeba odjąć od -20, ażeby otrzymać -30?
c) Ile trzeba odjąć od -11, ażeby otrzymać $+11$?

26. Okręt znajdował się pod 7^0 zachodniej długości geograficznej i popłynął na wschód o 15^0. Pod jakim stopniem długości geograficznej znajduje się obecnie okręt?

Uwaga: Wschodnią długość oznaczamy zwykle jako wartość dodatnią, zaś zachodnią jako wartość ujemną.

27. Ze stacji A wyruszył pociąg w kierunku ku stacji B; odległość pomiędzy stacjami wynosi a km. W jakiej (x) odległości od stacji B będzie pociąg po upływie t godzin, jeżeli szybkość jazdy wynosi 8 klm na godzinę? Wyjaśnij znaczenie odpowiedzi, gdy $a = 75$, $t = 1\frac{1}{2}$ godz.

28. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $25 - 11 - 20 = ?$

Rozwiązanie:

$$11 + 20 = 31$$
$$25 - 31 = -6$$

więc:

$$25 - 11 - 20 = -6$$

b) $30 - 4 + 6 - 48 = ?$

Rozwiązanie:

$$30 + 6 = 36$$
$$4 + 48 = 52$$
$$36 - 52 = -16.$$

29. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $29 - 4 + 7 - 50 = ?$ $42 + 3 - 4 - 11 - 16 + 2 - 51 = ?$
b) $1 - \frac{3}{4} - 5\frac{1}{2} - 5\frac{2}{7} + \frac{2}{5} + 1\frac{1}{5} = ?$
c) $4 - 0{,}25 - 1{,}5 - 0{,}44 = ?$ $3{,}01 - 2{,}6 + 8{,}75 - 21{,}27 = ?$
d) $12{,}8 + \frac{4}{15} - \frac{9}{25} - 5\frac{6}{37} - 2\frac{3}{4} = ?$

e) $12a - 8a + 9a - 10a + 7a = ?$
f) $4x - 5x + 17x - 13x - 2x + 2x = ?$
g) $x - \frac{3}{4}x + 5\frac{1}{2}x - \frac{7}{8}x - x - 6\frac{2}{5}x = ?$
h) $34{,}6x - 27{,}18x - 24{,}49x + 16{,}385x - x = ?$

30. Przedstaw wyrażenia z Nr. 29 — od a) do e) w postaci sumy algebraicznej.

31. Zbierz wyrazy podobne w następujących wielomianach:

a) $3ax^2 - 3a^2x + 2a^2x^2 - 7a^2x^2 - a^2x,$
b) $9m^3np - \frac{3}{4}m^2np - 7m^3np + 11 - 4m^2np - 12 - \frac{1}{4}m^2np,$
c) $2ab - 4a^4 - 0{,}29a^3b + \frac{2}{9}a^3b - 6a^4 - 1{,}71a^3b + 7ab,$
d) $a^yb^z + 2{,}3a^zb^y - 9{,}23a^yb^z - 5{,}3 - 0{,}7a^zb^y - \frac{2}{15},$
e) $5(x+y) - 3(x+y) - 7(x+y) + 8(x+y),$
f) $2{,}4(a-1)^3 - 2\frac{5}{32}(a-1)^2 - 2{,}4(a-1)^3 + 1\frac{7}{30}(a-1)^2 + 7\frac{11}{20}(a-1) +$
$- 0{,}5(a-1),$
g) $0{,}05 - \frac{15}{32}pq - (a-1)^m + \frac{3}{4}pq - 0{,}9 - (a-1)^m.$

Dodawanie jednomianów.

32. a) $m + (+n) = ?$ $\quad -p + (-q) = ?$ $\quad -r + (+q) = ?$
b) $a + (-a) = ?$ $\quad a + (+a) = ?$ $\quad -b + (-b) = ?$
c) $2x + (+3x) = ?$ $\quad 5y + (-6y) = ?$ $\quad -3z + (+4z) = ?$
d) $-2p + (-7p) = ?$ $\quad -11q + (+4q) = ?$ $\quad -10y + (-12y) = ?$
e) $6\frac{3}{4}a + (-7\frac{1}{2}a) = ?$ $\quad b^3 + (+4b^3) = ?$ $\quad -3\frac{1}{3}a^5 + (+2a^5) = ?$
f) $-\frac{13}{14}a^4b^3 + (-3\frac{1}{2}a^4b^3) = ?$ $\quad 3\frac{1}{3}pq^2r^3 + (-2\frac{7}{9}pq^2r^3) = ?$
g) $2{,}2a^{n+3}b^p + (+4{,}45a^{n+3}b^p) = ?$ $\quad 0{,}177ab^2c + (-0{,}823ab^2c) = ?$
h) $-13\frac{1}{4}a^{n+3} + (+11{,}875a^{n+3}) = ?$ $\quad -13\frac{1}{4}a^{n+2} + (+11{,}875a^{n+2}) = ?$
i) $-3a^mb + (+2a^mb) + (-7a^mb) = ?$
j) $7a^3b^n + (-14a^3b^n) + (+a^3b^n) + (-3a^3b^n) = ?$
k) $-9\frac{7}{15}a^4c^2 + (+\frac{11}{12}a^2c^4) + (+7{,}3a^4c^2) + (+4\frac{5}{16}a^4c^4) + (-a^2c^4) +$
$+ (-0{,}4a^2c^4) + (-1{,}9a^4c^2) = ?$

Odejmowanie jednomianów.

33. a) $x - (-y) = ?$ $\quad -x - (-y) = ?$ $\quad -x - (+y) = ?$
b) $p - (+p) = ?$ $\quad p - (-p) = ?$ $\quad -p - (+p) = ?$ $\quad -p - (-p) = ?$
c) $7a - (-5a) = ?$ $\quad 3x^2 - (+x^2) = ?$ $\quad 2y^3 - (-y^3) = ?$
d) $4a^p - (-3a^p) = ?$ $\quad 6p^2n^3 - (+p^2n^3) = ?$
e) $am^2 - (+\frac{2}{3}am^2) = ?$ $\quad -4{,}875a^n - (-3\frac{1}{12}a^n) = ?$
f) $-2\frac{3}{5}n^3x^2 - (-7{,}55n^3x^2) = ?$ $\quad 0{,}8a^mb^n - (-0{,}01a^mb^n) = ?$

g) $3x + (+7x) - [(-x) + (-6x)] = ?$

h) $-a^{m+1}b^{n+2} - \{9a^{m+1}b^{n+2} + [a^{m+}b^{n+2} - (-3a^{m+1}b^{n+2})]\} = ?$

i) $5{,}65ax^2 - \{[1{,}15ax^2 - (-0{,}5ax^2)] - [2{,}25ax^2 + (-3{,}1ax^2)]\} = ?$

j) $[1\frac{3}{8}ac - (+0{,}5ac)] - [-7{,}7ac + (-\frac{2}{2}\frac{3}{5}ac)] = ?$

k) $[1\frac{3}{8}ac - (+0{,}5ac)] + [-7{,}7ac - (+\frac{2}{2}\frac{3}{5}ac)] = ?$

Dodawanie i odejmowanie wielomianów.

34. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej i oblicz:

a) $70 + 80 + 12\frac{1}{2} - 16 + 3 - 25 - 34 + 5 = ?$

c) $12{,}5 - 6 + 1 - 4{,}2 - 3 + 17{,}04 - 5 - 6{,}5 = ?$

35. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej następujące wielomiany:

a) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,

b) $2x^m + 5am^2 - 2a^2m - 10am$,

c) $9a^2b^2 - 7b^2a - 5xy + 2z$,

d) $5\frac{3}{7}xy - y - 3{,}15x + 2a^2x$,

e) $7{,}4a^mb^p - \frac{5}{7}ax^2 - 2{,}2b^2y - 2{,}85xy + 3{,}08x^2y$.

Ponieważ każdy wielomian, jest sumą algebraiczną 2 lub więcej jednomianów (Nr. 17); stanowiących jego wyrazy, przeto, opierając się na regułach dodawania i odejmowania liczb względnych (Nr. 12, 15), oraz na prawie rozdzielności, możemy wypowiedzieć następujące reguły:

1) *aby dodać wielomian, należy dopisać wszystkie jego wyrazy z temi samemi znakami i wykonać, jeśli można, redukcję;*

2) *aby odjąć wielomian, należy dopisać do odjemnej wszystkie jego wyrazy ze znakami przeciwnemi i wykonać, jeśli można, redukcję.*

Nprz. a) $a + (a - c + d) = a + b - c + d$;

b) $a - (b - c + d) = a - b + c - d$.

Przy dodawaniu i odejmowaniu wielomianów, mających wyrazy podobne, dogodną jest rzeczą (ale nie konieczną) podpisywać je jeden pod drugim tak, by wyrazy podobne znalazły się w jednej kolumnie.

Nprz. $(x - 4a + b) + (3x + b + a) + (a - x - 5b)$.

Rozwiązujemy tak:

$$\begin{array}{rrr}
x & -4a & +b \\
3x & +a & +b \\
-x & +a & -5b \\
\hline
3x & -2a & -3b
\end{array}$$

36. a) $m + (n - p) = ?$ $m + (-n + p) = ?$ $m + (-n - p) = ?$
b) $a + b(+c) = ?$ $a + (b - 1) = ?$ $6 + (5 - a) = ?$
c) $-x^2y + (4x - x^2y) = ?$ $mn + (-2mn + p) = ?$
d) $(3p - 3q) - (3q - r) = ?$ $1\frac{3}{7}x^2 + 2y^2 + (z - 2y^2) = ?$
e) $(\frac{1}{3}az^2 + \frac{2}{3}z^2a) + (-\frac{2}{3}z^2a - \frac{1}{3}az^2) = ?$
f) $(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}n^3) + (\frac{1}{4}n^3 - \frac{1}{2}) = ?$
g) $(6x^2y - x^2) + (5x^2y + y^2) + (x^2y - y^2) = ?$
h) $(a + 4b - 3c) + (7a - 4b + c) = ?$
i) $0{,}7p + 5q - 2a - 3\frac{1}{12} + (q - 0{,}3p - a + 7\frac{5}{8}) = ?$
j) $5m^2 - \frac{3}{8}mp + 4p^2 - \frac{5}{6} + (3q^2 + \frac{1}{4}mp + m^2 + 2) +$
$+ (-5p^2 + mp - 3q^2 - \frac{2}{3}) = ?$
k) $(2a^3 + 3\frac{3}{40}an^2 - \frac{1}{2}an^3) + (-\frac{1}{3}an^3 - 7\frac{5}{8}an^2 - 0{,}02) +$
$+ (0{,}2 - 0{,}2an^2 - \frac{1}{4}an^3) = ?$
l) $2nx^2 - 3x^2n + (8nx^2 + 4x^2n) + (-7nx^2 - 5x^2n) +$
$+ (10nx^2 - 9x^2n + x^2np) = ?$
m) $2a^2b^3 - 3a^2b^2 - a^3b^2 - 10a^3b^3 + (-2a^3b^3 + 8a^2b^2 - 6a^2b^3 +$
$+ 7a^3b^3) + (5a^3b^2 - 12a^3b^3 + 4a^2b^3) = ?$.

37. a) $b - (a + 5)?$ $b - (-a - 5) = ?$ $10 - (-50 + 4) = ?$
b) $-7 - (a - 4) = ?$ $-pq - (p^2 - pq) = ?$ $24a - 35b - 23a) = ?$
c) $(\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}x + y) - (\frac{3}{2}x + y) = ?$ $p + 2\frac{2}{5} - (8p - 0{,}2) = ?$
d) $2x + 2y - (0{,}5y - 4x) = ?$ $a + 5 - (5 - a) = ?$
e) $(x - y) - (x - 2y + 2) = ?$ $-3{,}6z^2 - (az - 4\frac{2}{9}z^2) = ?$
f) $(p^2z - 3p^5z^5 - 5\frac{2}{9}) - (-4z^5p + 2p^5z^5 - 3\frac{2}{3}) = ?$
g) $12{,}7x + 4\frac{7}{8} - (3{,}6x - 0{,}8y) + (-5{,}04x - 7{,}5y) - (6\frac{1}{12} - 0{,}6x) = ?$
h) $6a^2b - [3ab^2 - (4a^2b - 7ab^2) \quad 8ab^2] = ?$
i) $a^m bx - [\frac{1}{2}a - y^m x - (0{,}8y - a^m bx)] - [3{,}1y + z - (\frac{5}{4}a + \frac{3}{7}z - y^m x)] = ?$
j) $mn^p - \{1\frac{1}{2}pr - 0{,}09 + [-mn^p - (\frac{3}{4}pr - 0{,}9)]\} = ?$

Nawiasy.

38. Dodawanie i odejmowanie wielomianów wymagają użycia nawiasów; przyczem o ile wielomian zawiera już jaki nawias, wówczas celem uniknięcia zamieszania między rozmaitemi parami nawiasów stosujemy pary nawiasów o kształtach różnych, naprz. t. zw. kwadratowe [ ] lub figurowe { }

Reguły, odnoszące się do użycia nawiasów, są następujące:

Gdy wyrażenie, ujęte w nawias, jest poprzedzone znakiem +, wówczas nawias może być bez żadnej zmiany opuszczony.

Gdy zaś wyrażenie, ujęte w nawias, jest poprzedzone znakiem —, wówczas nawias może być opuszczony, lecz z jednoczesną zmianą znaków na przeciwne przy wszystkich wyrazach, znajdujących się wewnątrz nawiasu.

Naprz. a) $x - y + (c - d + e) = x - y + c - d + e$,

b) $x - y - (c - d + e) = x - y - c + d - e$,

c) $x - y + (-c - d + e) = x - y - c - d + e$,

d) $x - y - (-c - d + e) = x - y + c + d - e$.

Reguły powyższe są to właściwie reguły na dodawanie i odejmowanie wielomianów. Gdy wyrażenie zawiera więcej, niż jedną parę nawiasów, wówczas znosimy je kolejno na podstawie powyższych reguł, zaczynając naprz. *od zniesienia nawiasu wewnętrznego.*

Naprz. a) $a + [b + (c - d)] = a + [b + c - d] = a + b + c - d$,

b) $a + [b - (c - d)] = a + [b - c + d] = a + b - c + d$,

c) $a - [b + (c - d)] = a - [b + c - d] = a - b - c + d$,

d) $a - [b - (c - d)] = a - [b - c + d] = a - b + c - d$.

Znosić nawiasy możemy również, począwszy od znoszenia nawiasów największych, t. j. od znoszenia nawiasów, zawierających wewnątrz inne wyrażenia, ujęte w nawias (mniejszy), *pamiętając jednak o tem, że w tem ostatniem wyrażeniu, znaków zmieniać nie należy,* gdyż wyrażenie to musi być uważane jako jeden wyraz.

Nprz. $a - \{b - [c - (d - e)]\} = a - b + [c - (d - e)] =$
$= a - b + c - (d - e) = a - b + c - d + e$.

39. Znieść nawiasy w następujących wyrażeniach:

a) $1 + (c - p)$, $a - (b - 1)$; $x - (-y + 1)$, $x + (-y + 1)$

b) $a - (b - c - d + f)$; $a - [b - (c - d + f)]$

c) $a - [b - c - (d + f)]$; $a - \{b - [c - (d + f)]\}$

d) $11x - 7x - \{8x - [9x - (16y - 6x)]\}$

e) $a - \{2b + [3c - 3a - (a + c)]\} - [2a - (b + 3c)]$

f) $-(1 - 2n + 5n^3 - n^4)$

g) $3{,}4 - \{\frac{5}{6}a^3 - [4{,}008 - (0{,}3a^3 - 5{,}092) + \frac{17}{15}a^3]\}$

Wielomiany można również ujmować w nawiasy, umieszczając przed temi nawiasami znak + lub —.

Reguła na ujmowanie w nawiasy wynika bezpośrednio z reguł na zniesienie nawiasów. Reguła ta jest następująca:

Jakąkolwiek liczbę wyrazów danego wielomianu możemy ująć w nawias, przed którym piszemy znak + lub —, przyczem w pierw-

szym wypadku znaki przy wyrazach wielomianu, ujętych w nawias, pozostają te same, w drugim zaś wypadku muszą być zamienione na przeciwne.

Przykłady:

a) Nie zmieniając wartości wielomianu

$$-x+a-1$$

ująć go w nawias ze znakiem —:

Rozwiązanie:

$$-(x-a+1)=-x+a-1$$

b) Nie zmieniając wartości wielomianu

$$m-n-1$$

przedstawić go w postaci sumy dwu składników, z których pierwszy ma być m.

Rozwiązanie:

$$m-n-1=m+(-n-1)$$

40. Wielomian:

$$x^3+2x^2-3x-4$$

przedstaw w postaci dwu składników, z których jeden winien zawierać wyrazy x^3 i $-3x$.

41. Przedstaw trójmian:

$$a^2-5x+10$$

w postaci różnicy, w której odjemną będzie 10.

42. Nie zmieniając wartości wyrażenia:

$$a-b+c-d$$

przedstaw go w różnych postaciach:

a) ujmując trzy ostatnie wyrazy w nawias, stawiając przed nawiasem: 1) znak mniej (—), 2) znak więcej (+);

b) ujmując dwa pierwsze wyrazy w nawias ze znakiem +, dwa zaś ostatnie ze znakiem —.

43. Nie zmieniając wartości wyrażenia:

$$x+(y-z-t)-(-m+n)+(p+q)-(-r+1)$$

zamień przed nawiasami znaki + na znaki —, i odwrotnie.

44. Trójmian:

$$4(a^3 - b^3) + b^3 - a^3$$

przedstaw w postaci dwumianu o wyrazach podobnych i wykonaj redukcję.

45. Oblicz:

$$x - y - z + t$$

jeżeli: $x = a^2 + b^2 + 2ab$, $y = a^2 - 2ab + b^2$, $z = a^2 + b^2$, $t = a^2 - b^2$.

46. Oblicz:

$$x - [t + (y - z)]$$

przy tych samych wartościach x, y, z, t, co w przykładzie poprzednim.

Mnożenie liczb względnych.

Określenie. Iloczynem 2 liczb względnych nazywamy liczbę, której wartość bezwzględna równa się iloczynowi wartości bezwzględnych tych liczb, i która jest dadatnia, jeżeli obydwa czynniki mają znaki jednakowe, ujemne zaś jeżeli mają znaki różne.

Naprz. $(+2) \,.\, (+3) = +6$
$(-3) \,.\, (-4) = +12$
$(-5) \,.\, (+4) = -20$
$(+12 \,.\, (-2) = -24$

47. Stwierdź powyższe określenie, rozwiązując następujące zagadnienie:

Piechur, idący z szybkością 5 km na godzinę, w danej chwili przechodzi koło wsi *A*.

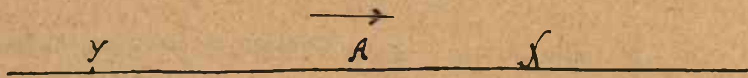
a) W jakiej odległości od *A* będzie piechur za 3 godziny?

b) W jakiej odległości od *A* był piechur przed 3 godzinamy, licząc od chwili, w której winien minąć wieś *A*?

Uwaga. Szukaną odległość znajdziemy, mnożąc liczbę kilometrów, przebywanych w ciągu godziny, przez liczbę godzin, przyczem w zależności od tego, jaką wartość ma szybkość i czas: dodatnią, czy ujemną, mogą być następujące wyniki:

a) $+10 . +3 = ?$
b) $+10 . -3 = ?$
c) $-10 . +3 = ?$
d) $-10 . -3 = ?$

Ażeby znaleźć wartość poszukiwanej odległości, należy przedewszystkiem ustalić, jaką odległość uważamy za dodatnią, a jaką za ujemną, kiedy szybkość jest dodatnia, a kiedy ujemna; to samo, co do czasu. W związku z tem będzie można określić szukaną odległość (rys. 26).



Rys. 26

48. Oblicz:

a) $(+3) . (+4) = ?$ $(-5) . (+6) = ?$ $(+7) . (-9) = ?$ $(-11) . (-3) = ?$
b) $(+12) . (-1) = ?$ $(-1) . (+14) = ?$ $(-1) . (-1) = ?$ $(-6) . (-8) = ?$
c) $(+\frac{5}{12}) . (-\frac{7}{9}) = ?$ $(-\frac{9}{10}) . (-\frac{9}{10}) = ?$ $(-\frac{4}{5}) . (+\frac{3}{8}) = ?$
$(\frac{3}{5}) . (-\frac{10}{21}) = ?$
d) $(-3\frac{1}{4}) . (-\frac{1}{2}) = ?$ $(-4\frac{1}{5}) . 0 = ?$ $(+1\frac{7}{8}) . (-\frac{16}{17}) = ?$
$(-3\frac{4}{7}) . (+\frac{5}{7}) = ?$
e) $(-3{,}5) . (-0{,}1) = ?$ $(+6{,}4) . (-0{,}6) = ?$ $(-0{,}96) . (+0{,}5) = ?$
f) $(+0{,}006) . (+0{,}7) = ?$ $(-0{,}0011) . (-0{,}2) = ?$ $(-702{,}49) . (+0{,}2) = ?$
g) $[(+12\frac{1}{2}) + (-3{,}8)] . [-10 - (+15\frac{1}{8}) + (-12{,}6)] . (+25) = ?$

Mnożenie jednomianów.

49. Wykonaj mnożenie:

$$-3a^2b \,.\, -5a^3.$$

Rozwiązanie:

$$-3a^2b . -5a^3 = -3 . -5 . a^2 a^3 . b = +15a^{2+3}b = 15a^5b.$$

Iloczyn 2 lub więcej jednomianów otrzymamy, wypisując kolejno wszystkie czynniki ogólne tych jednomianów i mnożąc spółczynniki według reguły mnożenia liczb względnych, zaś potęgi tej samej zasady według reguły mnożenia potęg.

50. Wykonaj mnożenie i oblicz wartość liczebną:

$$2a^3 \,.\, 3a^2b$$

gdy a) $a = 10$, $b = 2$, b) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{6}$, c) $a = 0{,}2$, $b = 0{,}5$.

51. a) $(+x) . (-y) = ?$ $(-m) . (-n) = ?$ $(-p) . (+q) = ?$
$(+a) . (+b) = ?$
b) $(-5) . 0 = ?$ $(-a) . (+5) = ?$ $(-m) . 0 = ?$ $0 . (-x) = ?$
c) $(a^3 . a^2 = ?$ $x . x^5 = ?$ $(-c) . c^2 = ?$ $-d^2 . d^5 = ?$

d) $m^3 . m^n = ?$ $-p . p^m = ?$ $a^{2m} . a = ?$ $x^{m-1} . x = ?$
e) $a^{2n+1} . -a^{2n-1} = ?$ $-5x^{3n} - 3x^3 = ?$ $-a^2 . -7b^4 = ?$
f) $\frac{1}{4}a^4 . ax^m = ?$ $4 . 6x^5 . \frac{2}{3} = ?$ $12 . \frac{1}{4}bc^2 = ?$
g) $(\frac{1}{2}a^2x^2)^2 = ?$ $m^3 . (5m)^2 = ?$ $n^3 . (4n^4)^3 = ?$
h) $-\frac{2}{15}a^7x^3 . 3ad^2x^4 = ?$ $-\frac{2}{15}a^m b^4 p^3 . -\frac{3}{4}ab^5 = ?$
i) $1{,}2p^m r^4 q^3 . -\frac{3}{4}pr^5 = ?$ $0{,}3xy^2 . (3y^3)^2 = ?$
j) $5m^3n^2p^m . -1{,}4n^2c^2 = ?$ $8c^2 . (-\frac{1}{4}mc^{n-1})^2 = ?$
k) $-\frac{2}{9}x^2y^4z^{m+2} . -\frac{3}{14}x^{n+m}yz^{m-2} = ?$
l) $-1{,}5d^7p^{3m+2}q^{n-p-2} . \frac{4}{5}p^{m-1}q^{p+5}r^3 = ?$
m) $0{,}2a^{m-2n}(p-1)^{r+3}(p-2)^{n+5} . -0{,}05a^{2n}(p-1)^{m-6} .$
$. -10a(p-2^{r-n-2} = ?$

Mnożenie wielomianu przez jednomian.

Opierając się na prawie rozdzielności, możemy wypowiedzieć następującą regułę:

Ażeby pomnożyć wielomian przez jednomian, należy przez ten jednomian pomnożyć kolejno wszystkie wyrazy wielomianu i otrzymane iloczyny dodać algebraicznie.

Przykład:

$$(3a - 4b + c) . 0{,}3a^2b^3c.$$

Rozwiązanie:

$$(3a - 4b + c) . 0{,}3a^2b^3c = 3a . 0{,}3a^2b^3c - 4b . 0{,}3a^2b^3c + $$
$$+ c . 0{,}3a^2b^3c = 0{,}9a^3b^3c - 1{,}2a^2b^4c + 0{,}3a^2b^3c^2.$$

52. a) $(m + n - p) . 4 = ?$ $p - q + r) . \frac{5}{6} = ?$
b) $(3x - 5y + z) . 5 = ?$ $(-2m + 4n - 5p) . -3 = ?$
c) $5 . (a^3 - 1{,}04a^2 + \frac{2}{35}a) = ?$ $-3(-xy^2 - 2y + 1) = ?$
d) $(5mn^2 + 3np - \frac{1}{2}p^2) . 8m^2n^3p^4 = ?$
e) $(5ab^2c^3 - \frac{5}{6}bc^2e^3 + a^3ce^2 - 1{,}5a^2b^3e) . \frac{2}{5}a^2be^3 = ?$
f) $-\frac{3}{4}m^2y^4(8m^6y^{n-4} - 0{,}4m^2y^{n-2} + \frac{2}{9}m^2y^{n} - y^{n+2}) = ?$
g) $[2(a + b)^m(a - b) - 3(+b)(a - b)^n] . -5(a + b)^m(a - b = ?$

Mnożenie wielomianu przez wielomian.

Przypuśćmy że mamy pomnożyć:

$$(a + b - c)(m - n + p)$$

Oznaczając $(m - n + p)$ przez x, otrzymamy:

$$(a + b - c)x = ax + bx - cx$$

Podstawiając zamiast x (mnożniki) $(m - n + p)$, otrzymamy

$$ax + bx - cx = a(m - n + p) + b(m - n + p) - c(m - n + p) =$$
$$= am - an + ap + bm - bn - + bp - cm + cn - cp.$$

Możemy więc wypowiedzieć regułę następującą:

Ażeby pomnożyć wielomian przez wielomian, należy pomnożyć każdy wyraz mnożnej przez każdy wyraz mnożnika; przytem tam, gdzie wyrazy mnożone mają znaki jednakowe, należy przed iloczynem napisać znak +, gdzie zaś wyrazy mnożone mają znaki różne, należy przed iloczynem napisać znak —, i tak otrzymane iloczyny należy dodać algebraicznie, w końcu zaś, o ile można, w iloczynie wykonać redukcję wyrazów podobnych.

Naprzykład:

$$(3an + 5n^2 - 2a^2)\ (a^2 - 6an)$$

Rozwiązanie:

$(3an + 5n^2 - 2a^2)\ (a^2 - 6an) = (3an + 5n^2 - 2a^2) \,.\, a^2 +$
$- 6an(3an + 5n^2 - 2a^2) = 3a^3n + 5a^2n^2 - 2a^4 - 18a^2n^2 +$
$- 30an^3 + 12a^3n = 15a^3n - 13a^2n^2 - 2a^4 - 30an^3$ po dokonanej redukcji.

Celem ułatwienia redukcji ustawiamy zazwyczaj wyrazy mnożnej i mnożnika w pewnym porządku. W tym celu obieramy pewną głoskę, wchodzącą do kilku wyrazów wielomianów i następnie piszemy wyrazy mnożnej i mnożnika kolejno w takim porządku, by naprz. na pierwszem miejscu znajdował się wyraz, zawierający najwyższą potęgę tej litery, poczem wyraz z następną potęgą tej litery i t. d.

W tym wypadku mówimy, że *uporządkowaliśmy mnożną i mnożnik podług malejących potęg tej litery.*

Gdybyśmy napisali wyrazy mnożnej i mnożnika w odwrotnym porządku, wówczas powiedzielibyśmy, że one są *uporządkowane według potęg rosnących tej litery.*

W każdym razie należy pamiętać, by mnożna i mnożnik były uporządkowane *w jednakowy sposób.*

Przykład:

$$(3a^2 + 1 + 2a + 2a^3 + a^4)\ (1 - 2a + a^2)$$

Po uporządkowaniu mnożnej i mnożnika podług malejących potęg a, piszemy wielomiany jak poniżej, mnożąc następnie wyrazy mnożnej przez każdy wyraz mnożnika, począwszy od najwyższych potęg litery a, i pisząc otrzymane iloczyny jeden pod drugim.

$$
\begin{array}{rl}
 & a^4+2a^3+3a^2+2a+1 \\
 & \qquad\qquad\;\; a^2-2a+1 \\
\hline
 & a^6+2a^5+3a^4+2a^3+a^2 \\
 & \quad -2a^5-4a^4-6a^3-4a^2-2a \\
 & \qquad\quad +a^4+2a^3+3a^2+2a+1 \\
\hline
\text{a po redukcji:} & a^6 \qquad\qquad -2a^3 \qquad\qquad +1
\end{array}
$$

53. a) $(a+b)(c+d)=?$ $(m+n)(p-q)=?$

b) $(a+4)(a-2)=?$ $(x+\frac{1}{2}y)(x-y)=?$

c) $(6a^2-1)(a^2-3)=?$ $(4a^3+3b)(3a^3-5b)=?$

d) $(5a^2+\frac{5}{6}b^2-\frac{2}{3}bx)(6a^5+\frac{3}{5}bx^4)=?$

e) $(0{,}5a^2x^6-0{,}6a^3x^5-7{,}5a^4x^4)(0{,}8a^3x+2{,}5a^2x^2)=?$

f) $(\frac{1}{6}m^3-6p^3-4m^2p+\frac{3}{16}mp^2)(2m^4-3m^2p^2)=?$

g) $(3x^{m-1}+x^{m+2}-2x^m-4x^{m+1})(2x^{m-4}+3x^{m-5})=?$

h) $(3x^3-4xy^2+x^2y)^2=?$

i) $(4ab^4+0{,}25a^5-3a^3b^2)(b^5+4a^4y+a^2y^3)=?$

j) $(a^2+2b^2+2c^2)(a^2-b^2+b^2)=?$

k) $(\frac{3}{2}x^2y^6-\frac{4}{5}x^4y^2+\frac{2}{3}x^5+\frac{10}{3}x^3y^4)(\frac{3}{2}y^4-x^2-\frac{1}{2}xy^2)=?$

l) $(3p^{m-2}x^2-p^{m-3}x^3+p^m)(p^2x^{n-1}-3x^{n+1}-2px^n)=?$

54. Jakie są wzory skróconego mnożenia (p. Nr. 69, 72).

a) na $(a+b)^2=?$ $(a+b)^3=?$

b) na $(a-b)^2=?$ $(a-b)^3=?$

c) na $(a+b)(a-b)=?$

55. Oblicz podług wzoru:

a) $(a^3+2a)^2=?$ $(4x^2y-7y^3)^2=?$

b) $(6a^{m+1}-a^{m-1}b^5)^2?$ $(3x+5xy)^2=?$

c) $(0.8a^{m+3}b^2+0{,}2a^{m-5}b^p)^2=?$

d) $(a+1)(a-1)=?$ $(2a-0{,}4)(2a+0{,}4)=?$

e) $(-6a^m+10b^n)(6a^m+10b^n)=?$

f) $[(a+b)+e][(a+b)-c]=?$

g) $(x+y+1)(x-y+1)=?$

h) $(a^3+2a^2-3a)(a^3-2a^2-3a)=?$

i) $(a^2x^3-2xy^3)^3=?$ $(2x^2+xy)^3=?$

j) $(2a^2n+2bn^2)^3=?$ $(8m^2+9)^3=?$

56. Łącząc czynniki w najdogodniejszy sposób, wykonaj mnożenie drogą skróconą:

a) $(a+x)(a-x)(a^2-x^2)=?$

b) $(x+1)(x-1)(x-1)(x+1)=?$

c) $(a^2x^3-2xy^3)(a^2x^3+2xy^3)(a^4x^6+4x^2y^6)=?$

d) $(x^2+0{,}5y^6)(x^2-0{,}5y^6)(x^4-0{,}25y^{12})=?$

Dzielenie liczb względnych.

Określenie. Podzielić jedną liczbę przez drugą znaczy znaleźć taką liczbę, której iloczyn przez drugą liczbę równa się pierwszej. Naprzykład iloraz z podzielenia — 15 przez + 3 jest — 5, gdyż — 5. + 3 = — 15 i t. d.

Z określenia tego wynika, że dzielenie jest działaniem odwrotnem do mnożenia.

Iloraz z podzielenia dwu liczb jest dodatni, jeżeli dzielna i dzielnik mają znaki jednakowe, ujemny zaś — jeżeli dzielna i dzielnik mają znaki różne.

Wartość bezwzględna ilorazu równa się ilorazowi bezwzględnych wartości dzielnej i dzielnika.

Naprz.

$$(+18):(+6)=+3$$
$$(-18):(+6)=-3$$
$$(+18):(-6)=-3$$
$$(-18):(-6)=+3$$

57. Oblicz:

a) $(+12):(+3)=?$ $(+8):(-4)=?$ $(-11):(+1)=?$

b) $(-18):(-3)=?$ $(+7):(+3)=?$ $(-8):(-5)=?$

c) $(-\frac{12}{13}):(-16=?$ $(-\frac{9}{10}):(+12)=?$ $(+\frac{10}{11}):(-15)=?$

d) $(+14\frac{3}{8}):(+25)=?$ $(-4\frac{1}{5}):(-3)=?$ $(+66\frac{2}{5}):(-18)=?$

e) $(-\frac{12}{13}):(-\frac{1}{13})=?$ $(+\frac{20}{21}):(-\frac{3}{7})=?$ $(-\frac{1}{2}):(+\frac{1}{6})=?$

f) $(+\frac{8}{9}):(+\frac{8}{9})=?$ $(-\frac{5}{6}):(+\frac{19}{24})=?$ $(-\frac{5}{11}):(-\frac{20}{7})=?$

g) $(-\frac{3}{4}):(-5\frac{1}{2})=?$ $(+\frac{7}{3}):(+1\frac{1}{4})=?$ $(-\frac{9}{14}):(-1\frac{5}{8})=?$

h) $(+4\frac{1}{2}):(-2\frac{1}{2})=?$ $(-6\frac{2}{3}):(+3\frac{1}{5})=?$ $(-9\frac{3}{5}):(-5\frac{2}{5})=?$

i) $(-1):(-0{,}9)=?$ $(-4):(+0{,}026)=?$ $(-5647{,}5):(-600)=?$

j) $(-4):(-10)=?$ $(-0{,}05):(+100)=?$ $(+3{,}4):(-0{,}01)=?$

k) $\{[(+13\frac{1}{4})+(-11{,}875)]:(-\frac{5}{4})\}=?$

l) $(-8\frac{7}{9}):(-2{,}4)-[(3{,}423):(-0{,}21)]=?$

m) $\{[(+1\frac{3}{4}).(-2\frac{4}{7})]:(-4{,}5)\}-\{[(-\frac{3}{8}).(+2{,}4)]:(+0{,}9)\}$

58. Wykreśl punkty, odpowiadające:

a) zmiennej	niezależnej	=	1	i zależnej	=	3,
b) „	„	=	0	„	=	2,
b) „	„	=	4	„	=	0,
d) „	„	=	0	„	=	0,
e) „	„	=	— 2	„	=	3,
f) „	„	=	0	„	=	— 2,

g) zmiennej niezależnej $= 4$ i zależnej $= -5$,
h) „ „ $= -3$ „ $= 0$,
i) „ „ $= -3$ „ $= -1$,
(p. Nr. 88).

Uwaga. Należy przedłużyć osie spółrzędnych; jako kierunek dodatni przyjmujemy: na osi odciętych na prawo, na osi rzędnych do góry od punktu 0, początku spółrzędnych; kierunek więc ujemny będzie: na osi odciętych — na lewo, na osi rzędnych na dół od początku spółrzędnych.

59. Na podstawie poniższej tabelki spostrzeżeń, narysuj wykres zmian temperatury powietrza na przeciąg doby (p. Nr. 89).

Godziny	24	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Temperatura	3^0	$2{,}5^0$	0^0	-2^0	$-0{,}5^0$	3^0	$5{,}5^0$	7^0	6^0	$5{,}3^0$	$4{,}5^0$	2^0

60. Narysuj wykresy funkcyj:

a) $y = x - 2$; b) $y = 2x - 5$; c) $y = \frac{2}{3}x + 2$; d) $y = -\frac{1}{5}x + 15$;

zbadaj na podstawie wykresu, czy funkcje powyższe wzrastają względnie maleją, gdy zmienna niezależna x przybierać będzie wartości wzrastające od -6 do $+6$.

61. a) Przez stację S przejeżdża o godz. 4-ej pociąg, jadący ze średnią szybkością $\frac{2}{3}$ km na minutę w kierunku ku A (rys. 27). Wyraź zapomocą wzoru zależność między odległością pociągu od stacji S i czasem i narysuj wykres funkcji.

b) Czy w danym przykładzie można nadawać zmiennej niezależnej wartości ujemne. Na podstawie rysunku wyjaśnij, jak należałoby rozumieć wartości ujemne funkcji i zmiennej niezależnej.

Wskazówka. Ponieważ dodatnie wartości funkcji oznaczają odległość pociągu (rys. 27) od S w kierunku ku A, więc ujemne

Rys. 27.

wartości funkcji oznaczają odległość pociągu w kierunku ku....? Co do czasu, to czas przyszły (w danym wypadku po godz. 4-ej) uważamy za dodatni, zaś ubiegły (w danym wypadku przed 4) za ujemny.

62. Narysuj wykresy funkcyj:

1) $y = \frac{1}{4}x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$.

63. Narysuj wykresy funkcyj:

1) $y = \frac{1}{2}x$; 2) $y = \frac{1}{2}x + 4$.

64. Narysuj wykresy funkcyj:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = 3x$; 3) $y = 3x + 5$.

65. Średnie miesięczne temperatury w pewnej miejscowości wynosiły, począwszy od stycznia: $-3{,}5^0$; $-2{,}4^0$; 0^0; $7{,}2^0$; 14^0; $17{,}5^0$;

19^0, $17{,}3^0$; $14{,}5^0$; $9{,}8^0$; $2{,}6^0$; $-0{,}5^0$.

Przedstaw graficznie zmienność temperatury w ciągu roku. Odczytaj z wykresu, kiedy średnia temperatura była najwyższa, a kiedy najniższa? Jaka była średnia temperatura pierwszego dnia każdego miesiąca?

66. Nakreśl wykres funkcji:

$$y = x^2 + 4$$

Przyczem ułóż tabelkę, nadając x wartości dodatnie i ujemne.

67. Daj kilka przykładów takich par wielkości, pomiędzy któremi istnieje zależność odwrotnie proporcjonalna.

Wyraź tę zależność zapomocą wzoru. Narysuj wykres tej zależności.

Niech we wzorze:

$$y = \frac{n}{x}$$

szczegółowa wartość n będzie naprz. 50. W tym celu nadając x wartości ujemne i dodatnie układamy tabelkę:

x	-50	-40	-25	-10	-5	-1	$+1$	2	5	16	25	50
y	-1	$-1^1/_4$	-2	-5	-10	-50	50	25	10	5	2	1

Wykres (rys. 28) składać się będzie z dwu niezależnych od siebie gałęzi, leżących w 2 przeciwległych kierunkach płaszczyzny, na które dzielą płaszczyznę osie spółrzędnych.

Tego rodzaju krzywa nosi nazwę *hiperboli.*

68. Nadając x wartości ujemne i dodatnie, nakreśl wykres funkcji:

$$y = \frac{n}{x}$$

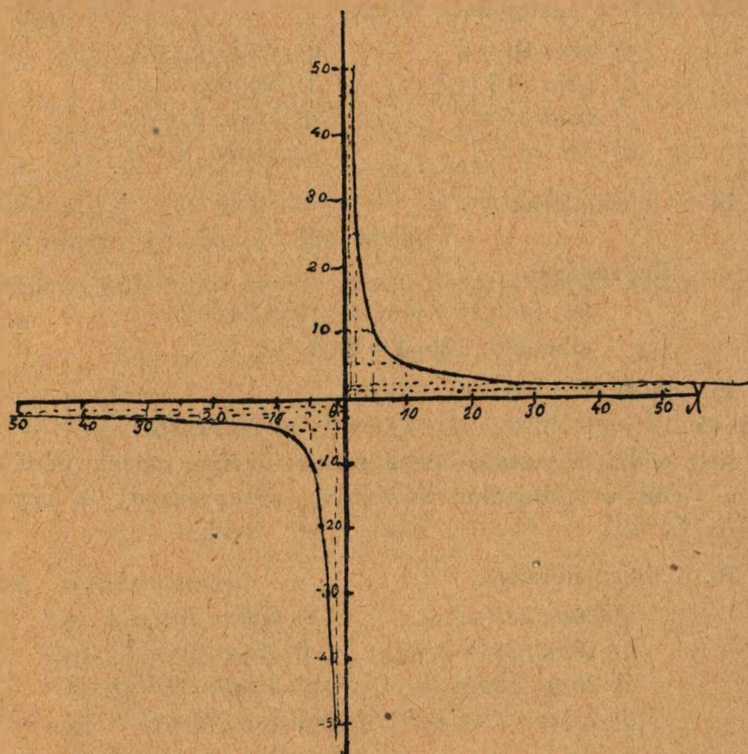
gdy $n = -10$.

69. Wyraź zapomocą wzoru funkcjonalną zależność pomiędzy ilością robotników, a czasem, potrzebnym do wykonania pewnej roboty, naprz. wykopania 20 m^3 ziemi, przyczem 1 robotnik może wykopać 1 m^3 dziennie.

Nakreśl wykres.

70. Wyraź zapomocą wzoru funkcjonalną zależność pomiędzy szybkością pociągu, a czasem, potrzebnym do przebycia nprz. 50 km.

Nakreśl wykres.



Rys. 28.

Dielenie jednomianów.

71. Podziel iloczyn 8.12.20 przez 4.

Rozwiązanie:

$$(8.12.20) : 4 = 2.12.20 = 480$$
$$\text{albo} \quad = 8.3.20 = 480$$
$$\text{albo} \quad = 8.12.5 = 480$$

72. Podziel:

1) (32.60.104) : 4; 2) $(1\frac{1}{2} . \frac{3}{4} . \frac{5}{6}) : \frac{1}{3}$; 3) (2,4.7,2.1,2) : 0,3.

Aby podzielić iloczyn przez liczbę, należy podzielić przez tę liczbę tylko jeden czynnik iloczynu, a otrzymany iloraz pomnożyć przez pozostałe czynniki:

$$abc : d = \frac{a}{d} . bc = a . \frac{b}{d} . c = ab . \frac{c}{d} .$$

73. Oblicz następujące ilorazy:

a) $64x : 16 = ?$
b) $3{,}5m : 0{,}7 = ?$
c) $2{,}5ab : 5 = ?$
d) $7m : m = ?$
e) $14ab : b = ?$
f) $5{,}6abc : bc = ?$
g) $7\frac{1}{3}xy : x = ?$
h) $5\frac{1}{4}abc : \frac{1}{4} = ?$

74. Oblicz iloraz:

$$96 : (4 . 12)$$

Rozwiązanie:

$$96 : (4 . 12) = (96 : 4) : 12 = 24 : 12 = 2$$
$$\text{albo} \ (96 : 12) : 4 = 8 : 4 = 2$$

75. Podziel:

a) $85 : (5 . 17) = ?$ b) $2\frac{7}{8} : (2\frac{1}{3} . \frac{17}{16}) = ?$ c) $20{,}52 : (5{,}7 . 17{,}1) = ?$

Aby podzielić pewną liczbę przez iloczyn, należy podzielić ją kolejno, lecz w porządku dowolnym przez każdy z czynników iloczynu.

76. Oblicz ilorazy:

a) $2an : 2a = ?$
b) $10ax : 2x = ?$
c) $2bnz : \frac{1}{4}bz = ?$
d) $2{,}5xyz : 5xy = ?$
e) $6abx : 3ax = ?$
f) $15xy : \frac{3}{5}y = ?$
g) $3{,}5abc : 0{,}7bc = ?$
h) $\frac{2}{3}xy : 2y = ?$

77. Oblicz iloraz:

$$a^5 : a^3 = .$$

Rozwiązanie:

ponieważ

$$a^5 = a.a.a.a.a$$
$$a^3 = a.a.a$$

więc będzie:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a.a.a.a.a}{a.a.a} = a^2 = a^{5-3}$$

Podobnież:

$$\frac{a^4}{a^3} = \frac{a.a.a.a}{a.a.a} = a^1 = a^{4-3} = a$$

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a.a.a}{a.a.a.a.a} = \frac{1}{a^2}$$

Iloraz z podzielenia 2 potęg tej samej zasady równa się potędze tej samej zasady o wykładniku równym różnicy wykładników danych potęg.

78. Oblicz ilorazy:

a) $a^5 : a^4 = ?$ $a : a = ?$ $a^4 : a^4 = ?$ $a^3 : a^2 = ?$
b) $8a^4x^2 : 2a^4 = ?$ $10x^{10} : 5x^3 = ?$ $12a^3c : 4a = ?$
c) $xy^2d^2 : \frac{1}{2}xy^2 = ?$ $7a^6x^4 : a^2x^4 = ?$ $mn^2x^8 : 4x^3 = ?$
d) $3p^2q^5\lambda^2 : 5p^9q^7 = ?$ $\frac{2}{3}b^2y : 2b^7y^4 = ?$ $2x^3y^2z : \frac{1}{4}x^8y^8z = ?$
e) $\frac{4}{5}m^5p^3 : \frac{2}{5}m^8p^4 = ?$ $3mnx^3 : 0{,}6mn^2x^{11} = ?$

Reguła, odnosząca się do znaku ilorazu, jest ta sama, co i dla iloczynu.

Nprz. iloraz a)	$12a^2b^4 : -4ab^3 = -3ab,$
ponieważ	$-4ab^3 \,.\, -3ab = 12a^2b^4;$
b) Iloraz	$-12a^2b^4 : -ab^3 = 3ab,$
gdyż	$-4ab^3 \,.\, 3ab = -12a^2b^4;$
c) Iloraz	$-12a^2b^4 : +4ab^3 = -3ab,$
gdyż	$4ab^3 \,.\, -3ab = -12a^2b^4.$

79. Oblicz ilorazy:

a) $4x^2yz^{10} : -8xyz^4 = ?$ $-\frac{2}{3}a^2y : -\frac{2}{3}a^7y^3 = ?$
b) $24m^4z^{p+q} : 2z^p = ?$ $18a^7b^{m-1} : 9a^3b^{m-1} = ?$
c) $2m^{10}(p-q)^3 : -1{,}6m^3(p-q)^2z^2 = ?$
d) $-42a^6b^2x^{11} : -70a^6b^5x^{13} = ?$
e) $4a^4bn^5 : -\frac{2}{5}a^4bn^5x^3 = ?$
f) $-0{,}4a^2b^mc^{n-1} : -2{,}4a^5b^mc^2 = ?$

g) $-5a^4(b-2c)^{p+2}d^m : 1\frac{2}{3}a^4(b-2c)^{p-1}d^m = ?$
h) $-\frac{2}{3}a^2x^{m-2} : -\frac{4}{9}bc^2x^{m-3} = ?$
i) $0{,}03a^{3m-2}y^3(b-1) : -2{,}7a^{2m-3}(b-1)^3 = ?$
j) $-0{,}3mp^3(a+x)^m(b+x)^{2m+3} : 0{,}6p^3(a+x)^{n-5}(b+x)^{m+2} = ?$

Dzielenie wielomianu przez jednomian.

Iloraz z podzielenia: $(a+b):m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$,

gdyż

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) . m = a + b$$

Podobnież

$$(a-b). \; m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m},$$

gdyż

$$\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right). \; m = \frac{a}{m} m . - \frac{b}{m} . \; m = a - b;$$

Możemy więc powiedzieć, że dzielenie jest rozdzielne względem dodawania i odejmowania.

Stąd wynika następująca reguła dzielenia wielomianu przez jednomian:

Aby podzielić wielomian przez jednomian, należy kolejno podzielić każdy wyraz wielomianu przez ten jednomian, a otrzymane ilorazy dodać algebraicznie.

80. Oblicz następujące ilorazy:

a) $(6a+8b):2 = ?$ $(15x-12q):3 = ?$ $(3m-4n):7\frac{1}{2} = ?$
b) $(84+72+36):12 = ?$ $(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}):\frac{1}{20} = ?$ $(2{,}314-\frac{1}{4}):0{,}02 = ?$
c) $(6a^5x - 24a^4x^2 + a^2x^2):8a^2x = ?$
d) $(0{,}8abn^4 - \frac{5}{12}b^2n^6 + 4b^3n^7):\frac{4}{9}bn^3 = ?$
e) $(0{,}8n^5x - n^6x^2 + 25n^4x^6 - 0{,}16n^2x^2):0{,}4n^2x = ?$

81. Oblicz iloraz:

$$(3ax^2 + 4ax + a^2):ax$$

i sprawdź wynik, nadając liczbom ogólnym następujące szczegółowe wartości:

a) $a = 2$, $x = 10$; b) $a = 8$, $x = 0{,}1$; c) $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$

82. Oblicz ilorazy:

a) $(3\frac{1}{3}a^2 - 2{,}3a + 5) : -5 = ?$

b) $(12x^4y^2 - 2x^3y^3 + 4xy^6) : -4xy^2 = ?$

c) $(\frac{3}{5}m^3n^6 - 6m^2n^4 + m^2n^2x^2) : \frac{3}{4}m^2n^2 = ?$

d) $(-3p^3qr^7 + 18p^4q^2r^6 - 2q^4r^2 + 12pq^5r) : -6p^2q^3r^4 = ?$

e) $-(3my^{n+1} - 0{,}72m^2y^{n-1} + 1\frac{4}{5}my^{n-3}) : -0{,}6my^{n-1} = ?$

f) $[2c^m(a-b)^5 + 3c^m(a-b)^3 - 4c^{2m}(a-b)] : -6c^m(a-b)^3 = ?$

g) $-(1{,}5a^mx^m - 3a^mx^{m+1} - 6a^{m+1}x^m) : -3a^mx^m = ?$

h) $[5(x+y)^3 - 2(x+y)^2 + (x+y) - \frac{5}{2}] : \frac{1}{2}(x+y)^5 = ?$

i) $[5(x-y)^{m+n} - 4(x-y)^{m-n} + 6(x-y)^m] : -10(x-y)^{m-n} = ?$

j) $[-8a^6b(x^2+y^2)^7 - 4ab^2(x^2+y^2)^9 + 5a^3b(x^2+{}^2)^2] : 6ab(x^2+y^2)^2$

Dzielenie wielomianów.

Aby podzielić jeden wielomian przez drugi, należy postępować w sposób podobny, jak przy podziale liczb bezwzględnych.

Reguła wyraża się w następujący sposób:

Przedewszystkiem należy uporządkować dzielną i dzielnik według potęg rosnących lub malejących jednego i tego samego symbolu.

Następnie pierwszy wyraz dzielnej należy podzielić przez pierwszy wyraz dzielnika i otrzymany iloraz będzie pierwszym wyrazem ilorazu. Następnie należy pomnożyć cały dzielnik przez ten pierwszy wyraz ilorazu i otrzymany iloczyn odjąć od dzielnej. Z otrzymaną resztą należy w dalszym ciągu postępować, jak z dzielną. Działanie powyższe należy powtarzać dotąd, dopóki na resztę nie otrzymamy zera, lub też taką resztę, której bez użycia ułamków dalej dzielić nie można.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
a^3 & +\,3a^2b & +\,3ab^2 & +\,b^3 & \;a+b \\
\mp a^3 & \mp\, a^2b & & & \overline{a^2+2ab+b^2} \\
\hline
 & +\,2a^2b & +\,3ab^2 & +\,b^2 & \\
 & \mp\, 2a^2b & \mp\, 2ab^2 & & \\
\hline
 & & ab^2 & +\,b^3 & \\
 & & \mp\, ab^2 & \mp\, b^3 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Dzielna jest iloczynem dzielnika przez iloraz; ponieważ zaś i dzielna i dzielnik są uporządkowane podług malejących potęg a, przeto pierwszy wyraz dzielnej jest iloczynem pierwszego wyrazu dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu. Znajdziemy więc pierwszy wyraz ilorazu, dzieląc pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika. W danym wypadku iloraz ten będzie a^2. Ponieważ cała dzielna jest iloczynem całego dzielnika przez wszystkie wyrazy ilorazu, przeto odejmując od dzielnej iloczyn dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu, otrzymamy jako resztę wielomian $2a^2b + 3ab^2 + b^3$, będący iloczynem dzielnika przez pozostałe wyrazy ilorazu.

O tej reszcie możemy to samo powiedzieć, co i o całej dzielnej; mianowicie, że pierwszy jej wyraz $2a^2b$ jest iloczynem pierwszego wyrazu dzielnika a przez pierwszy z pozostałych, czyli *drugi* wyraz ilorazu. W danym więc wypadku drugim wyrazem ilorazu będzie $2ab$, jako iloraz z podzielenia $2a^2b$ przez a.

Postępując w ten sam sposób dalej, otrzymamy wszystkie wyrazy ilorazu.

b) Podzielić: $(3a^4 - 8a^3 + 7a^2 - 2a) : 3a^2 - 2a)$.

Rozwiązanie.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3a^4 & -8a^3 & +7a^2 & -2a & 3a^2 - 2a \\
\cline{5-5}
\mp 3a^4 & \pm 2a^3 & & & a^2 - 2a + 1 \\
\cline{1-2}
 & -6a^3 & +7a^2 & & \\
 & \pm 6a^3 & \mp 4a^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & +3a^2 & -2a & \\
 & & \mp 3a^2 & \pm 2a & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & \\
\end{array}
$$

c) Podzielić: $(x^4 + 64) : (x^2 + 4x + 8)$

Rozwiązanie:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & & +64 & x^2 + 4x + 8 \\
\cline{6-6}
\mp x^4 & \mp 4x^3 & \mp 8x^2 & & & x^2 - 4x + 8 \\
\cline{1-3}
 & -4x^3 & -8x^2 & & & \\
 & \pm 4x^3 & \pm 16x^2 & \pm 32x & & \\
\cline{2-4}
 & & 8x^2 & +32x & +64 & \\
 & & \mp 8x^2 & \mp 32x & \mp 64 & \\
\cline{3-5}
 & & & 0 & & \\
\end{array}
$$

d) Podzielić: $(a^2 + 2ab + 2b^2) : (a + b)$

Rozwiązanie:

$$
\begin{array}{rrr|l}
a^2 & +2ab & +2b^2 & a + b \\
\cline{4-4}
\mp a^2 & \mp ab & & a + b \\
\cline{1-2}
 & ab & +2b^2 & \\
 & \mp ab & \mp b^2 & \\
\cline{2-3}
 & & b^2 & \\
\end{array}
$$

W danym wypadku dzielenie nie może być w zupełności wykonane; iloraz zaś możemy przedstawić w postaci:

$$a+b+\frac{b^2}{a+b}$$

83. Podziel: $(x^2-2x-3):(x-3)$
i sprawdź wynik, nadając x wartości:

1) $x=8$, 2) $x=2$, 3) $x=-5$.

84. Podziel: $(2m^2+6n^2+7mn):(2m+3n)$
i sprawdź wynik, nadając wartości szczegółowe: 1) $n=3, m=10$, 2) $n=\frac{1}{8}, m=-7$, 3) $n=0{,}4, m=-0{,}1$.

85. Oblicz:

a) $(2ax^2+6a^3-7a^2x):(-x+3a)=?$
b) $(m^4y+6m^5-2m^3y^2):(3m^2+2my)=?$
c) $(-19k^2x^2+3x^4+\frac{7}{2}kx^3):(\frac{1}{2}x-k)=?$
d) $(18a^2-9a^3-8a+a^4):(a^2-7a+4)=?$
e) $(4m^8n^3-9n^7):(2m^4-3n^2)$
f) $(2x^6y^2-1):(x^3y+1)=?$
g) $(5m^4x^2+4mx^5-27m^3x^3):(-5mx^2+2x^3)=?$
h) $(25a^7m^{14}+6am^2-19a^3m^6):-(3am^2-5a^3m^6)=?$
i) $-(2{,}35x^6y-0{,}4x^7+24x^4y^3-9x^5y^2):(0{,}8x^3+12xy^2-1{,}5x^2y)=?$
j) $-(9\frac{3}{8}k^2m^n-1\frac{5}{6}k^3+\frac{3}{5}m^{3n}-5{,}1km^{2n}):(-$[illegible]$m^n-$[illegible]$k)=?$
k) $(\frac{1}{8}a^4-2a+1\frac{1}{2}):(-2+a)=?$
m) $(64y+n^4y^5):(n^2y^2+8+4ny)=?$
n) $-(-3xy^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{15}{4}x^2y^2+\frac{1}{2}y^4):(\frac{1}{2}x^2-2xy+y^2)=?$
o) $(9a^4-6x^6-a^2x^4+7ay^5):(ay^2+3a^2-2y^3)=?$
p) $(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}a^{3m-6}+0{,}5a^{3m-8}):-(0{,}4a^{m-2}-\frac{1}{5}-0{,}2a^{2m-4})=?$
q) $a^6-64{,}5):(\frac{1}{2}a^2+2-a)=?$

Nadając m wartości szczegółowe; 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8: wykonaj dzielenie w każdym z poszczególnych wypadków:

a) $(x^m-y^m):(x+y)=?$ c) $(x^m+y^m):(x+y)=?$
b) $(x^m+y^m):(x-y)=?$ d) $(x^m-y^m):(x-y)=?$

Zauważ, przy jakich wartościach m dzielenie możemy wykonać bez reszty i jaką postać przybiera iloraz.

86. Na podstawie zauważonych reguł podziel:

a) $(a^2-16):(a-4)=?$ $(x^4-y^2):(x^2+y)=?$
b) $(25x^6y^4-1):(5x^3y^2-1)=?$ $(x^3+125):(x+5)=?$
c) $(x^3+1):(x+1)=?$ $(y^6-27):(y^2-3)=?$
d) $(a^3-27):(a^2+3a+9)=?$ $(a^3+1):(a^2-a+1)=?$
e) $(81-x^4):(3-x)=?$ $(x^5+32y^5):(x+2y)=?$

Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

1. $4 + x = 10$
2. $x + 6 = 10$
3. $x - 8 = 2$
4. $18 - x = 6$
5. $13 - x = 15$
6. $20 - x = 24$
7. $5x = 45$
8. $16x = 128$
9. $x : 3 = 6$
10. $24 : x = 4$
11. $7x + 5 = 26$
12. $9x - 5 = 31$
13. $7x - 8 = 41$
14. $28 + 3x = 7x$
15. $42 - 5x = 2x$
16. $16 - 2x = 2x$
17. $3y + 18 = 5y$
18. $7y - 33 = 4y$
19. $19z - 14 = 12z$
20. $17z + 33 = 20z$
21. $7x - 5 = 3x + 3$
22. $14z + 23 = 19z - 2$
23. $16x + 10 - 21x = 35 - 10x - 5$
24. $5x + 13 - 2x = 100 - 20x - 18$
25. $7u - 9 - 3u + 5 = 11u - 6 - 4u$
26. $16u - 12 + 2u - 6u = 28 + 3u - 25$
27. $2y - 10 - 7y + 9 = 8 + 8y + 4$
28. $7x - 9 - 18x + 7 = 10x + 9 - 7x - 7$
29. $3(x + 5) = 36$
30. $2(x - 1) = 6$
31. $7(y - 3) = 14$
32. $5(35 - x) = 15$
33. $8(2y + 5) = 72$
34. $8(7x - 61) = 16$
35. $15(15 - 4z) = 45$
36. $2(10 - 7y) = 28$
37. $3(x - 5) + 8 = 17$

38. $5(z-2)-9=11$
39. $7(z+3)-2z=41$
40. $3(7-u)-5=5u$
41. $5u+(7-2u)=11$
42. $8y-(2+5y)=9$
43. $8(10-x)=5(x+3)$
44. $5(x+1)+6(x+2)=9(x+3)$
45. $6(x+1)+3(8-x)=11(x+2)$
46. $7(3y-6)+5(y-3)-2(y-7)=5$
47. $8(3y-1)-9(5y-11)+2(7-2y)=30$
48. $7(6z-1)+3(2z+1)-5(12z-7)=23$
49. $3(2z+1)-4(1-3z)-5(6z-7)=16$
50. $5(8z-1)-7(4z+1)+8(7-3z)=29$
51. $10(3x-2)-3(5x+2)+5(11-4x)=25$
52. $\frac{x}{5}=2$
53. $\frac{3}{5}x=12$
54. $2\frac{1}{2}x=5$
55. $3\frac{3}{5}x=18$
56. $5\frac{3}{5}x=28$
57. $x+\frac{1}{4}x=15$
58. $2x-\frac{1}{3}x=40$
59. $3x+\frac{1}{3}x=20$
60. $8y-\frac{5}{6}y=3y+25$
61. $7z-\frac{1}{3}z=8z-4$
62. $9y+6=10(9-\frac{1}{2}y)$
63. $9(17-\frac{4}{5}y)=5(y-6)$
64. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=10$
65. $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$
66. $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=9$
67. [illegible]$x+\frac{2}{9}x=38$
68. $\frac{7}{8}x-\frac{5}{12}x=11$
69. $\frac{z}{5}+\frac{3z}{7}-\frac{z}{2}=9$
70. $2z+\frac{3}{4}z-\frac{5}{7}z=57$
71. $3y-\frac{5}{6}y+\frac{1}{2}y=32$
72. $5x-0,3x=4,5x+2$

73. $0{,}9x - 1{,}5 = x - 3{,}5$

74. $0{,}1x - 0{,}1 = 0{,}15x - 5{,}1$

75. $4{,}5x - 11{,}5x = 35 + 1{,}4x$

76. $5(5x - 1) - 2{,}7x + 0{,}2 = 6{,}6 - 0{,}5x$

77. $3x - 9 - 0{,}5x + 0{,}75 = 0{,}25\,(7 - 5x)$

78. $0{,}36x - 3{,}4 = 0{,}3\,(0{,}4x - 1{,}2)$

79. $8(0{,}12x + 0{,}02) = 6{,}1x + 0{,}02$

80. $x - 1 = \frac{2x + 1}{3}$

81. $1 + x = \frac{3x - 1}{2}$

82. $3 - 2x = \frac{1 - 3x}{5}$

83. $3x - 2 = \frac{5x + 2}{7}$

84. $\frac{2x + 1}{2} = \frac{7x + 5}{8}$

85. $\frac{3z - 1}{5} = \frac{7z - 6}{10}$

86. $\frac{3x - 2}{6} = \frac{5(7 - x)}{9}$

87. $y + \frac{12 - y}{4} = \frac{26 - y}{2}$

88. $\frac{3 - x}{4} = 1 - \frac{2x - 5}{6}$

89. $\frac{3x - 2}{3} - \frac{9 - 2x}{3} = \frac{x + 2}{2}$

90. $\frac{4y + 3}{4} - \frac{2 - 3y}{4} = y + 2\frac{1}{2}$

91. $\frac{x - 3}{4} + \frac{x - 4}{3} = \frac{x - 5}{2} + \frac{x + 1}{8}$

92. $\frac{3x - 1}{4} - \frac{5x - 4}{20} = 2\frac{3}{4} - \frac{x}{5}$

93. $\frac{3x - 11}{4} - \frac{28 - 9x}{8} = 4x - 14\frac{3}{4}$

94. $\frac{2x - 9}{27} + \frac{x}{18} - \frac{x - 3}{4} = 8\frac{1}{3} - x$

95. Dwaj robotnicy mają razem 38 zł., przyczem pierwszy ma o 6 zł. więcej, niż drugi. Ile zł. ma każdy?

96. Dwóch kupców ma razem 114 zł., przyczem pierwszy ma o 18 zł. więcej, niż drugi. Ile zł. ma każdy?

97. W jednym domu jest o 15 okien mniej, niż w drugim, w obu domach jest razem 51 okno. Ile okien jest w każdym domu?

98. W księgarni na dwóch półkach znajdują się 62 książki, przyczem na jednej półce jest o 6 książek mniej, niż na drugiej. Ile książek jest na każdej półce?

99. W dwóch woreczkach znajduje się 81 zł. W pierwszym woreczku jest dwa razy mniej, niż w drugim. Ile zł. znajduje się w każdym woreczku?

100. Ojciec kupił 2 marynarki: jedną dla siebie, drugą dla syna; za obie zapłacił 72 zł. Marynarka syna kosztowała 5 razy mniej, niż ojca. Ile ojciec zapłacił za swoją marynarkę i za marynarkę syna?

101. Ojciec jest 3 razy starszy od syna, a suma lat obydwóch wynosi 48. Ile lat ma ojciec a ile syn?

102. Syn jest młodszy od ojca 4 razy, a różnica ich lat wynosi 27. Ile lat ma każdy?

103. Syn jest młodszy od ojca 5 razy, a różnica ich lat wynosi 32. Ile lat ma każdy?

104. W trzech koszykach znajduje się 47 jabłek, przyczem w pierwszym i w drugim równo, a w trzecim o 2 jabłka więcej, niżeli w każdym z pozostałych. Ile jest jabłek w każdym koszyku?

105. W 3 koszykach znajduje się 110 jabłek, przyczem w pierwszym i trzecim równo, a w drugim o 4 jabłka mniej, niż w każdym z pozostałych. Ile jabłek jest w każdym koszyku?

106. Trzy kawałki srebra ważą razem 48 kg. Pierwszy waży o 12 kg więcej, niż drugi, a trzeci waży o 9 kg więcej, niż pierwszy. Ile kg waży każdy kawałek srebra?

107. Trzy kawałki srebra ważą razem 33 kg. Pierwszy jest lżejszy od drugiego o 5 kg, a trzeci lżejszy od pierwszego o 2 kg. Ile waży każdy kawałek srebra?

108. Syn jest młodszy od ojca o 20 lat, a starszy od swojej siostry o 5 lat. Suma lat ojca, syna i siostry wynosi 60 lat. Ile lat ma każde?

109. Matka jest starsza od syna o 21 lat, a młodsza od ojca o 7 lat. Suma lat ich trojga wynosi 64 lata. Ile lat ma każde?

110. Na trzech półkach leży 66 książek, przyczem na niższej 3 razy więcej, a na średniej 2 razy więcej, niż na wierzchniej. Ile książek leży na każdej półce?

111. Na trzech półkach leży 60 książek, przyczem na niższej 6 razy więcej, a na wierzchniej 5 razy więcej, niż na średniej. Ile książek leży na każdej półce?

112. Las, sad i łąka kosztują razem 10800 zł. Łąka droższa jest od sadu 2 razy, a las droższy od łąki 3 razy. Ile kosztuje las, sad i łąka oddzielnie?

113. Las, sad i łąka kosztują razem 17600 zł. Las droższy jest od sadu 3 razy, a łąka droższa od lasu 4 razy. Ile kosztuje las, sad i łąka oddzielnie?

114. Podziel liczbę 21 na dwie części tak, żeby stosunek pierwszej części do drugiej był, jak 3 : 4.

115. Podziel liczbę 48 na dwie części tak, żeby stosunek drugiej części do pierwszej był równy ułamkowi $\frac{5}{3}$.

116. Podziel liczbę 88 na dwie części tak, żeby stosunki z podzielenia pierwszej przez 5, a drugiej przez 6 były równe.

117. Suma dwóch liczb wynosi 85, a ich różnica 15. Znajdź te liczby.

118. Suma dwóch liczb wynosi 72, a ich różnica 8. Znajdź te liczby.

119. Różnica dwóch liczb jest 12, a stosunek tych liczb równa się $\frac{5}{3}$. Znajdź te liczby.

120. Podziel liczbę 46 na dwie części tak, żeby różnica ilorazów z podzielenia pierwszej części przez 3, a drugiej przez 7 wynosiła 2.

121. Podziel liczbę 75 na dwie części tak, żeby większa część była 3 razy większa od różnicy obu części.

122. Suma dwóch liczb wynosi 64. Jeżeli większą liczbę podzielić przez mniejszą, otrzymamy w ilorazie 3 i w reszcie 4. Znajdź obie liczby.

123. Suma dwóch liczb wynosi 45. Jeżeli podzielić większą liczbę przez mniejszą, otrzymamy w ilorazie 5 i w reszcie 3. Znajdź obie liczby.

124. Różnica dwóch liczb wynosi 35. Jeżeli podzielimy większą liczbę przez mniejszą, otrzymamy w ilorazie 4 i w reszcie 2. Znajdź obie liczby.

125. Różnica dwóch liczb wynosi 23. Jeżeli podzielimy większą liczbę przez mniejszą, otrzymamy w ilorazie 2 i w reszcie 11. Znajdź obie liczby.

126. W jednym zbiorniku jest wody 2 razy więcej, niż w drugim; jeżeli przelać z pierwszego zbiornika do drugiego 16 wiader, w obu zbiornikach będzie wody równo. Ile wiader wody jest w każdym zbiorniku?

127. W jednym zbiorniku jest wody 3 razy więcej, niż w drugim; jeżeli przelać z pierwszego zbiornika do drugiego 22 wiadra, w obu zbiornikach będzie wody równo. Ile wiader wody jest w każdym zbiorniku?

128. Dwie przekupki mają na rynku razem 220 cytryn; gdyby druga dała pierwszej 14 cytryn, obie przekupki miałyby cytryn równo. Ile cytryn miała każda przekupka do sprzedania?

129. Dwóch robotników dostało wypłatę, przyczem pierwszy z nich otrzymał za swoją pracę o 12 zł. więcej, niż drugi. Po otrzymaniu pieniędzy drugi robotnik oddał pierwszemu 2 zł. długu; wtedy pierwszy przyniósł do domu 3 razy więcej pieniędzy, niż drugi. Ile zarobił każdy?

130. Jeden chłopiec ma 30 groszy, drugi 11 groszy. Ile razy należy im dać po jednym groszu, żeby pierwszy miał pieniędzy 2 razy więcej niż drugi?

131. Jeden chłopiec ma 48 groszy, drugi 22 grosze. Ile razy powinni wydać po 1 groszu, żeby pierwszy miał 3 razy więcej pieniędzy, niż drugi?

132. Ojciec ma 40 lat, a syn 12 lat. Ile lat temu wstecz ojciec był 5 razy starszy od syna?

133. Ojciec ma 49 lat, a syn 11 lat. Za ile lat ojciec będzie 3 razy starszy od syna?

134. Jeden gospodarz [ma owiec 4 razy więcej, niż drugi. Jeżeliby obaj dokupili po 9 owiec, to pierwszy miałby 3 razy więcej owiec, niż drugi. Ile owiec miał każdy?

135. Jeden gospodarz ma owiec 3 razy mniej, niż drugi. Jeżeliby obaj sprzedali po 10 owiec, pierwszy miałby 5 razy mniej, niż drugi. Ile owiec miał każdy?

136. Suma lat ojca i syna wynosi 88, a 8 lat wstecz ojciec był 7 razy starszy od syna. Ile lat ma ojciec, a ile syn?

137. Sprzedawca sprzedał pierwszym razem $\frac{2}{7}$ wszystkich jabłek, później $\frac{3}{5}$, i wtedy zostało mu się 8 jabłek. Ile sprzedawca miał jabłek?

138. Kupiec sprzedał pierwszym razem $\frac{1}{9}$ posiadanego w sklepie sukna, później $\frac{5}{6}$ i wtedy zostało mu się 4 metry sukna. Ile metrów sukna posiadał kupiec w sklepie?

139. Ze zbiornika napełnionego wodą wypłynęło najprzód $\frac{3}{5}$ wszystkiej wody, później $\frac{3}{4}$ reszty i wtenczas zostało się w zbiorniku 5 wiader wody. Ile wiader wody mieścił zbiornik?

140. W pewnem towarzystwie było 40 osób: mężczyzn, kobiet i dzieci. Liczba kobiet wynosiła $\frac{3}{5}$ liczby mężczyzn, a liczba dzieci wynosiła $\frac{2}{3}$ liczby mężczyzn i kobiet razem. Ilu było mężczyzn, ile kobiet, ile dzieci?

141. Za 30 metrów materjału 2 gatunków zapłacono 1280 zł. metr pierwszego gatunku kosztował 45 zł., a metr drugiego gatunku 40 zł. Ile metrów materjału kupiono 1-go i 2-go gatunku oddzielnie?

142. Za 27 kg towaru 2 gatunków zapłacono 120 zł.; kg pierwszego gatunku kosztował 5 zł., a kg drugiego 3 zł. 75 gr. Ile kg towaru kupiono każdego gatunku oddzielnie?

143. W sklepie kolonjalnym sprzedano 38 kg towaru 2 gatunków; kg pierwszego gatunku kosztował 3 zł., a kg drugiego gatunku 1 zł. 60 gr., przyczem za pierwszy gatunek otrzymano o 22 zł. więcej, niż za drugi. Ile kilogramów towaru sprzedano każdego gatunku?

144. W sklepie sprzedano 110 metrów płótna dwóch gatunków: po $4\frac{1}{2}$ zł. za metr i po 2 zł. 25 gr. za metr, przyczem za pierwszy gatunek zapłacono o 45 zł. mniej, niż za drugi. Ile metrów płótna sprzedano każdego gatunku?

145. Z dwóch miast, odległych od siebie o 300 km, wyjechały jednocześnie naprzeciwko siebie 2 pociągi towarowe. Pierwszy przejeżdżał na godzinę 12 km, a drugi 13 km. Kiedy się będą mijały?

146. Z dwóch stacyj kolejowych, odległych od siebie o 77 km, wychodzą jednocześnie i w jednym kierunku dwa pociągi. Pierwszy przechodzi na godzinę $31\frac{1}{2}$ km, drugi $18\frac{2}{3}$ km, przyczem pierwszy jedzie za drugim. Kiedy pierwszy pociąg dogoni drugi?

147. Woda napełnia basen przez jedną rurę w ciągu 3 godzin, a przez drugą w ciągu 5 godzin. W ciągu ilu godzin woda napełni basen, jeżeli otworzymy jednocześnie obie rury?

148. Woda napełnia basen przez jedną rurę w ciągu $7\frac{1}{2}$ godzin, a przez drugą w ciągu 5 godzin. W ciągu jakiego czasu napełni się basen, jeżeli otworzymy jednocześnie obie rury?

149. Przez jedną rurę woda napełnia basen w ciągu 4 godzin, a przez drugą rurę wszystka woda wyleje się w ciągu 6 godzin. W ciągu jakiego czasu napełni się basen przy jednoczesnem działaniu obu rur?

150. Pociąg idąc z *A* do *B* przechodzi średnio na godzinę 30 km, a w powrotnej drodze z *B* do *A* przechodzi na godzinę 28 km. Czas potrzebny na przejazd pociągu z *A* do *B* i z powrotem wynosi $14\frac{1}{2}$ godzin. Ile kilometrów jest od *A* do *B*?

151. Ktoś, chcąc rozdać pieniądze ubogim, obliczył, że jeżeli da każdemu biednemu po 15 groszy, to mu zabraknie 10 groszy, a jeśli da po 13 groszy, to mu się zostanie 6 groszy. Ilu było ubogich i ile miał dla nich pieniędzy?

152. Ktoś, chcąc rozdać pieniądze ubogim, obliczył, że jeżeli da każdemu po 8 groszy, to zostaną mu 4 grosze, a jeżeli rozda po 9 groszy, to mu braknie 2 grosze. Ilu było ubogich i ile miał dla nich pieniędzy?

153. Inżynier miał postawić telegraficzne słupy na pewnej przestrzeni. Obliczył, że jeżeli odległość jednego słupa od drugiego będzie wynosiła 25 metrów, to braknie mu 150 słupów, a jeżeli odległość pomiędzy słupami zwiększy o 5 metrów, to mu zostanie 70 słupów. Jak długa była przestrzeń, na której miały stanąć słupy i ile przygotowano słupów?

154. Ktoś, najmując służącego, zgodził się zapłacić mu za rok służby 360 zł. i dać jeszcze ubranie. Po 7 miesiącach służby służący odszedł i otrzymał 160 zł. i ubranie. Ile złotych liczono mu ubranie? X

155. Ktoś, najmując służącego, zgodził się zapłacić mu za 7 miesięcy służby 75 zł. i 100 kg żyta. Po 5 miesiącach służby służący odszedł i otrzymał 45 zł. i 100 kg żyta. Ile złotych liczono za żyto?

Układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi.

1. $x + y = 50, \quad x - y = 20$
2. $x + y = 40, \quad x - y = 8$
3. $x + 5y = 47, \quad x + y = 15$
4. $x + 3y = 4, \quad x - y = 8$
5. $3x + 8y = 19, \quad 3x - y = 1$
6. $3x + 4y = 85, \quad 5x + 4y = 107$
7. $x + 5y = 35, \quad 3x + 2y = 27$
8. $5x + 7y = 101, \quad 7x - y = 55$
9. $3x + 8y = 59, \quad 6x + 5y = 107$
10. $15x - 8y = 29, \quad 3x + 2y = 13$
11. $14x - 9y = 24, \quad 7x - 2y = 17$
12. $5x - 5y = 55, \quad 3x - 2y = 1$
13. $3x - 5y = 13, \quad 2x + 7y = 81$
14. $3y - 7x = 4, \quad 2y + 5x = 22$
15. $2x - 7y = 8, \quad 4y - 9x = 19$
16. $2x + 5y = 91, \quad 7y - 3x = 139$
17. $3y - 4x = 1, \quad 3x + 4y = 18$
18. $2x + 7y = 34, \quad 5x + 9y = 51$
19. $6x - 4y = 5, \quad 8x - 3y = 2$
20. $12x - 5y = 6, \quad 9x + 4y = 20$
21. $12x + 15y = 8, \quad 16x + 9y = 7$
22. $9x + 8y = 7, \quad 6x + 10y = 7$
23. $5x + 14y = 24, \quad 19x - 21y = 17$
24. $15x + 7y = 37, \quad 9x - 16y = 2$
25. $8x - 33y = 19, \quad 12x + 55y = 19$
26. $42x - 25y = 47, \quad 28x + 45y = 19$
27. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7, \quad \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} = 1$
28. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 5, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 7$
29. $\frac{7x}{6} + \frac{5y}{3} = 34, \quad \frac{7x}{8} + \frac{y}{8} = 12$
30. $\frac{7x}{4} + \frac{5y}{8} = 20, \quad \frac{3x}{5} - \frac{y}{4} = 5$
31. $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 3\frac{1}{2}, \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{8} = \frac{1}{2}$
32. $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 3\frac{1}{2}, \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 6\frac{1}{3}$

33. $\frac{x+y}{3}+x=15, \quad y-\frac{y-x}{5}=6$

34. $2x-\frac{y-3}{5}=4, \quad 3y=9-\frac{x-2}{3}$

35. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \quad \frac{2x-1}{2}-\frac{3y-1}{3}=\frac{5}{6}$

36. $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=2, \quad \frac{2x+1}{3}-\frac{3y+1}{5}=3\frac{2}{15}$

37. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8, \quad \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$

38. $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5, \quad \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$

39. $\frac{3x-1}{5}+3y-4=15, \quad \frac{3y-5}{6}+2x-8=7\frac{2}{3}$

40. $2+\frac{5x-6y}{13}=4y-3x, \quad 12+\frac{5x-6y}{6}=2y+\frac{3x-2y}{4}$

41. $\frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}, \quad 8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$

42. $\frac{3x+5y}{3}+2=\frac{8x-3y}{2}, \quad 10-\frac{2x-y}{4}=2\left(\frac{2x}{7}+\frac{y}{3}\right)$

43. $\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5, \quad \frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}=18-5x$

44. $\frac{8+x}{2}-\frac{3x-2y}{5}=5y-1, \quad \frac{7x-4}{3}+\frac{28y+17}{9}=25-3x$

45. $x+2-\frac{5x+3y}{7}=y-\frac{9y+11}{14}, \quad y+2-\frac{4y-3x}{2}=x-\frac{2y-5}{5}$

46. $y+1-\frac{3x-5y}{4}=x-\frac{9y+22}{8}, \quad 8+3-\frac{5x-3y}{6}=y-\frac{3-5x}{9}$

47. $\frac{5}{x+4}=\frac{2}{y-1}, \quad \frac{3}{x+2}=\frac{4}{y+1}$

48. $2x+\frac{9}{y}=11, \quad 5x-\frac{6}{y}=18$

49. $\frac{11}{x}+2y=\frac{51}{5}, \quad 5y-\frac{3}{x}=\frac{97}{5}$

50. $\frac{x}{y+3}=\frac{x-2}{y+2}, \quad 2x-5y=9$

51. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12}$, $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$

52. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=10$, $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=20$

53. $y-\frac{3-y}{x-18}=\frac{3y+17}{3}$, $10x-9y=30$

54. $\frac{5}{x}+\frac{12}{y}=3$. $\frac{25}{x}-\frac{18}{y}=2$

55. $\frac{7+8x}{10}-\frac{3(x-2y)}{2(x-4)}=\frac{11+4x}{5}$, $10x-11y=13$

56. $\frac{5}{3x}+\frac{2}{5y}=7$, $\frac{7}{6x}-\frac{1}{10y}=3$

57. $\frac{2}{3x}+\frac{1}{2y}=3$, $\frac{5}{6x}-\frac{3}{4y}=1$

58. $\frac{5x-12}{4}-\frac{4x-6y-13}{2x-3y}=\frac{10x-53}{8}$, $6x-5y=9$

59. $\frac{18}{x-y}+\frac{20}{x+y}=5$, $\frac{24}{x-y}-\frac{30}{x+y}=1$

60. $\frac{48}{x+y}+\frac{6}{x-y}=7$, $\frac{72}{x+y}-\frac{10}{x-y}=1$

61. Suma dwóch liczb 153, a różnica tych samych liczb = 27 Znajdź te liczby.

62. Jeżeli do mniejszej liczby dołożę większą, otrzymam 75, jeżeli od mniejszej odejmę większą, otrzymam — 7. Znajdź te liczby.

63. Jedna dziewczynka kupiła 7 śliwek i 10 gruszeczek i zapłaciła 80 gr., druga kupiła 7 śliwek i 4 takie same gruszeczki i zapłaciła 52 gr. Ile płaciły za 1 śliwkę i ile za jędną gruszeczkę?

64. Kupcowa sprzedała jednej dziewczynie 5 litrów mleka i 6 bułek za 2 zł. 60 gr., a drugiej 1 litr mleka i 1 bułkę za 50 groszy. Ile kosztuje jedna bułka i ile litr mleka?

65. Gospodarz kupił od jednego sąsiada 16 ha ziemi ornej i 18 ha łąk za 27 000 zł., a od drugiego po tej samej cenie 7 ha ziemi ornej i 6 ha łąk za 10 200 zł. Po czemu płacił za 1 ha ziemi ornej i za 1 ha łąk?

66. Jedna gospodyni kupiła mendel ogórków i 20 kg pomidorów i zapłaciła 14 zł. 25 gr., druga kupiła tylko 9 ogórków i 9 kg pomidorów i zapłaciła 6 zł. 75. gr. Ile kosztuje 1 ogórek i ile 1 kg pomidorów?

67. Suma dwóch liczb wynosi 47. Jeżeli pierwszą liczbę podzielić przez drugą, to w ilorazie otrzymamy 2 i w reszcie 5. Znajdź obie liczby.

68. Suma dwóch liczb wynosi 46. Jeżeli pierwszą liczbę podzielić przez drugą, to w ilorazie otrzymamy 3 i w reszcie 2. Znajdź obie liczby.

69. W dwóch szufladach znajduje się 140 zł. Jeżeli z pierwszej szuflady przełożyć do drugiej 15 zł., w obu szufladach będą jednakowe sumy. Ile pieniędzy jest w każdej szufladzie?

70. W dwóch portfelach znajduje się 300 zł. Jeżeli z drugiego portfelu przełożyć do pierwszego 30 zł., w obu portfelach będą jednakowe sumy. Ile pieniędzy jest w każdym portfelu?

71. W dwóch beczkach jest pewna ilość wody; jeżeli przelać z pierwszej beczki do drugiej 6 wiader, w obu beczkach będą równe ilości; jeżeli zaś przelać z drugiej beczki 4 wiadra wody do pierwszej beczki, w pierwszej będzie 2 razy więcej, niż w drugiej. Ile wiader wody jest w każdej beczce?

72. W dwóch beczkach znajduje się woda; jeżeli przelać z pierwszej beczki do drugiej 10 wiader, w obu beczkach będą równe ilości wody; jeżeli zaś przelać 5 wiader z drugiej beczki do pierwszej, to w pierwszej beczce będzie wody 3 razy więcej, niż w drugiej. Ile wiader wody jest w każdej beczce?

73. Za 2 metry materjału jednego gatunku i 3 metry drugiego gatunku zapłacono 27 zł; jeśli zaś kupić 4 metry materjału pierwszego gatunku i 5 metrów materjału drugiego gatunku, to należy zapłacić 49 zł. Ile kosztuje metr materjału pierwszego i ile drugiego gatunku?

74. Za 2 metry materjału pierwszego gatunku i 5 metrów materjału drugiego gatunku zapłacono 31 zł.; jeżeli zaś kupić 3 metry materjału pierwszego gatunku i 8 metrów materjału drugiego gatunku, to należy zapłacić 49 zł. Ile kosztuje metr materjału pierwszego i ile drugiego gatunku?

75. Są 2 liczby: jeżeli do pierwszej dodać 3, to otrzymana suma będzie 3 razy większa od drugiej liczby, a jeżeli do drugiej liczby dodać 2, to otrzymana suma będzie 2 razy mniejsza od pierwszej liczby. Znajdź te liczby.

76. Są dwie liczby: jeżeli do pierwszej liczby dodać 4, to otrzymana suma będzie 3 razy większa od drugiej liczby, a jeżeli do drugiej liczby dodać 1, to otrzymana suma będzie 2 razy mniejsza od pierwszej liczby. Znajdź te liczby.

77. Ktoś ma 2 wazy i jedną do nich pokrywę, razem wartości 9 zł. Jeżeli przykryje pokrywą pierwszą wazę, to wartość jej razem z pokrywą będzie wynosiła $1\frac{1}{2}$ razy więcej, niżeli wartość drugiej wazy; jeżeii zaś przykryć pokrywą drugą wazę, to wartość jej razem z pokrywą będzie wynosiła $1\frac{1}{12}$ razy więcej, niż wartość pierwszej wazy. Jaka jest wartość każdej wazy?

78. Ktoś ma 2 wazy i jedną do nich pokrywę, razem wartości 8 zł. Jeżeli przykryje pokrywą pierwszą wazę, to wartość tej wazy razem z pokrywą będzie dwa razy mniejsza, niż wartość drugiej wazy; jeżeli zaś przykryć pokrywą drugą wazę, to wartość tej wazy razem z pokrywą będzie 3 razy większa, niż wartość pierwszej wazy. Oblicz wartość każdej wazy.

79. Gospodarz najął dwóch robotników. Za rok pracy obiecał dać każdemu 160 zł., ubranie i buty. Pierwszy za 8 miesięcy służby otrzymał 106 zł. i ubranie, drugi za $9\frac{1}{2}$ miesiąca — 142 zł. i parę butów. Jako jest wartość ubrania, a jaka butów?

80. Gospodarz najął dwóch służących. Za rok pracy obiecał dać każdemu 150 zł., ubranie i parę butów. Pierwszy za 9 miesięcy otrzymał 112 zł. i ubranie, drugi za $6\frac{2}{3}$ miesiąca — 93 zł. i parę butów. Jaka jest wartość ubrania, a jaka butów?

81. *A* i *B* byli winni po 1200 zł. *A* mógłby spłacić swój dług, gdyby otrzymał $\frac{3}{4}$ pieniędzy *B*; *B* spłaciłby swój dług, gdyby otrzymał [illegible] pieniędzy *A*. Ile pieniędzy miał każdy?

82. Dług *A* wynosił 1200 zł., dług *B* — 2550 zł. *A* mógłby spłacić swój dług, gdyby do jego pieniędzy dodać $\frac{1}{8}$ pieniędzy *B*; *B* zaś, gdyby otrzymał $\frac{1}{6}$ pieniędzy *A*. Ile pieniędzy miał każdy?

83. Uczeń wykreślił na pewnej stronicy książki po 3 litery z każdego wiersza. Po odjęciu dwóch całych wierszy okazało się, że liczba pozostałych liter wynosi 145. Gdy dodał do każdego wiersza po 4 litery i dopisał 3 takie wiersze — liczba liter wynosiła 224. Ile jest wierszy na tej stronicy i ile jest liter w każdym wierszu?

84. Dwie rury napełniają zbiornik w ciągu 16 godzin. Jeśliby w ciągu 4 godzin pracowały obie rury, to po zamknięciu pierwszej rury, druga musiałaby jeszcze być czynną 36 godzin. W ile godzin napełni zbiornik każda rura oddzielnie?

85. Dwa krany napełniają zbiornik w 15 godzin. Jeśliby w ciągu 5 godzin otwarte były oba krany, to po zamknięciu drugiego, pierwszy napełniłby zbiornik w ciągu 40 godzin. W ile godzin można napełnić zbiornik każdym kranem oddzielnie?

86. Woźnica obliczył, że jeśli sprzeda 6 koni, to starczy mu owsa na 10 dni dłużej, a jeśli dokupi 18 koni, zabraknie mu owsa na 15 dni. Ile miał koni i na ile dni kupił owsa?

87. Gdyby właściciel ziemski sprzedał 15 koni, starczyłoby mu owsa na 20 dni dłużej; gdyby dokupił 20 koni, zabrakłoby owsa na 10 dni. Na ile dni był obliczony zapas owsa i ile koni miał właściciel ziemski?

88. Do młocki zboża najęto pewną liczbę robotników. Gdyby ich było o 3 mniej, pracowaliby 2 dni dłużej; gdyby ich było o 4 więcej, skończyliby pracę 2 dni wcześniej. Ilu było robotników i ile dni pracowali?

89. Przetopiono razem złoto i srebro. W jednym stosunek metalów równy jest $2:3$, w drugim — $3:5$. Ile kg trzeba wziąć z każdego stopu, by otrzymać 13 kg nowego stopu, w którym stosunek złota do srebra byłby równy $5:8$?

90. Dwaj cykliści znajdują się w odległości 340 km jeden od drugiego. Jeśli pierwszy wyjedzie o 5 godzin wcześniej, niż drugi, spotkają się w 3 godziny po wyjeździe drugiego; jeśli drugi wyjedzie o 5 godzin wcześniej niż pierwszy, spotkają się w 3 godziny 20 min. po wyjeździe pierwszego. Z jaką szybkością jedzie każdy z nich?

91. Jeśli jedną z dwóch niewiadomych liczb powiększymy o a, to otrzymamy sumę m razy większą, niż druga liczba; jeśli drugą liczbę powiększymy o b, to nowa suma będzie n razy większa, niż pierwsza liczba. Znajdź te liczby.

92. Dwie liczby mają się do siebie jak $m:n$; jeśli do pierwszej dodać a, a do drugiej b, to stosunek między niemi będzie równy $p:q$. Znajdź te liczby.

93. Kupiec miał n kg towaru. Część towaru sprzedał po a zł., część po b zł. za kg. Okazało się, że kupiec otrzymałby taką samą sumę, gdyby cały towar sprzedał po c zł. za kg. Ile kg towaru sprzedał po jednej, a ile po drugiej cenie?

Rachunek procentów.

Procentem nazywamy jedną setną część liczby danej, tak $1\% = \frac{1}{100}$, $2\% = \frac{2}{100}$, $5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\% = \frac{1}{200}$, $\frac{1}{4}\% = \frac{1}{400}$, $2\frac{1}{2}\% = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$, $7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{200} = \frac{3}{40}$, $0{,}45\% = \frac{45}{10000} = \frac{9}{2000}$, $0{,}75\% = \frac{75}{10000} = \frac{3}{400}$, $0{,}4\% = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$.

1. Ile wynosi: 1% od 5 zł., 7 zł., 4 zł., 6 kg, 28 km, 75 ha, 80 q?

2. 5% od 60 gr., 3 zł. 20 gr., 9 zł. 40 gr., 3,4 zł., 18 zł., 35 km, 64 kg?

3. 10% od 30 gr., 30 zł., 4 kg, 28 km, 60 l, 85 ha?

4. 50% od 6 kg, 24 zł., 36 zł. 12 gr., 7 m, 13 m 40 cm?

5. 100% od 1 zł., 35 zł., 7 km, 26 kg?

6. 200% od 3 zł., 28 kg, 56 gr., 75 m?

7. $\frac{1}{2}\%$ od 20 zł., 380 zł., 400 kg, 1 km, 500 l?

8. 0,75% od 100 zł., 350 zł., 800 km?

9. Zmniejsz 80 jabłek o 25%.

10. Dodaj do 120 zł. $33\frac{1}{3}\%$ tej sumy.

11. Do 60 zł. dodaj $3\frac{1}{3}\%$ tej sumy.

12. Do szkoły uczęszcza 80 uczniów. Pewnego dnia nie przyszło do szkoły 15% uczniów. Ilu uczniów było tego dnia w szkole?

13. Ojciec miał 300 zł., z których wydał $7\frac{1}{2}\%$. Ile pieniędzy mu zostało?

14. Gospodarz miał 80 hl zboża; 20% tego zboża stanowiło żyto, 30% — owies, reszta pszenica. Ile było hl pszenicy?

15. W owczarni były 600 owiec, w tej liczbie owce młode stanowiły 8%. Ile było owiec starych?

16. W trzyoddziałowej szkole powszechnej było 160 dzieci: w pierwszym oddziele było 40%, w drugim 35% i w trzecim 25%. Ile dzieci było w każdym oddziele?

17. W jednoklasowej szkole powszechnej było 80 dzieci; dziewczynki stanowiły 45%. Ile było dziewczynek, a ilu chłopców?

18. Liczba dzieci w miasteczku, liczącem 3000 mieszkańców, wynosi 30%. Ile dzieci jest w tem miasteczku?

19. Liczba mieszkańców w miasteczku wynosiła 2400 osób i po 6 latach zwiększyła się o 25%. Ilu mieszkańców liczyło to miasteczko po 6-ciu latach?

20. W bibljotece było 1500 książek, z których wypożyczono $33\frac{1}{3}$%. Ile książek pozostało w bibljotece?

21. W szpitalu było 1400 chorych. Po pewnym czasie wyzdrowiało 12% chorych. Ilu chorych pozostało jeszcze w szpitalu?

22. W bitwie brało udział 10 000 żołnierzy; z liczby tej poległo 13% i dostało się do niewoli 17%. Ilu żołnierzy pozostało?

23. Z ogólnej liczby 240 podań o przyjęcie do klasy pierwszej złożyło egzamin tylko 40%. Ilu uczniów złożyło egzamin?

24. Do szkoły przyjęto tylko 30% składających egzamin, co stanowi 48 uczniów. Ilu uczniów składało egzamin?

25. Jeżeli do pewnej liczby dodam 8% tej liczby, wówczas dana liczba powiększy się o 120. Znajdź tę liczbę.

26. Jeżeli od pewnej liczby odejmę $7\frac{1}{2}$% tej liczby, wówczas liczba dana zmniejszy się o 90. Znajdź tę liczbę.

27. We wsi było 600 mieszkańców; w tej liczbie było 55% kobiet. Ile kobiet było w tej wsi?

28. W czteroklasowej szkole było 200 uczniów; w I klasie było 30%, w II — 25%, w III — 23%. Ilu uczniów było w IV klasie?

29. Ktoś kupił dom za 8000 zł.; remont domu wyniósł 15% wartości domu. Jaka jest obecna wartość tego domu?

30. Pewien gospodarz część drogi, jaką miał przejść do miasta, odległego o 240 km, przejechał furmanką, jadąc 10 km na godzinę. Ile godzin jechał gospodarz, jeżeli odległość, którą przejechał stanowiła $33\frac{1}{3}$% całej drogi?

31. Książka razem z oprawą kosztuje 6 zł. Wartość oprawy stanowi 20% wartości książki bez oprawy. Ile kosztuje książka bez oprawy?

32. a) $\frac{1}{2}$ kg orzechów I gatunku kosztuje 3 zł; drugi zaś gatunek jest $8\frac{1}{3}$% tańszy. Ile kosztuje 1 kg drugiego gatunku?

b) $\frac{1}{2}$ kg orzechów I gatunku kosztuje *a* złotych, drugi zaś gatunek jest o *p*% tańszy. Ile kosztuje 1 kg drugiego gatunku?

33. Do szkoły uczęszcza a dzieci, chłopców i dziewcząt; liczba dziewczynek wynosi 80% liczby chłopców. Ilu chłopców i ile dziewczynek uczęszcza do szkoły?

Na zasadzie otrzymanych wzorów oblicz wartość szczegółową, gdy $a = 90$.

34. Pewnego dnia liczba nieobecnych w klasie, liczącej 30 uczniów, wynosiła 20% liczby obecnych. Ilu uczniów nie było tego dnia w klasie?

35. Obywatel wynajął do żniwa 35 żniwiarzy. Liczba żniwiarzy, która się nie stawiła do pracy, wynosiła $16\frac{2}{3}$% liczby tych, którzy się stawili. Ilu żniwiarzy przyszło do pracy?

36. Która jest obecnie godzina, jeżeli już upłynęło 25% całej doby?

37. Która jest obecnie godzina, jeżeli do końca doby pozostało $37\frac{1}{2}$% całej doby?

38. Która jest obecnie godzina, jeżeli pozostała część doby stanowi 60% ubiegłej części doby?

39. Która jest obecnie godzina, jeżeli ubiegła część doby stanowi $12\frac{1}{2}$% pozostałej?

40. Jeżeli do pewnej liczby dodamy 10% tej liczby, wówczas otrzymamy 55. Znajdź liczbę.

41. Czynsz roczny za mieszkanie podwyższono z 840 zł. o 12%. Ile obecnie trzeba płacić za mieszkanie?

42. Z armji, liczącej 28 000 żołnierzy, zginęło podczas bitwy 12% i wzięto do niewoli 26%. Ilu żołnierzy zginęło i ilu wzięto do niewoli?

43. Pewien gospodarz kupił grunt za 8 400 zł. Budowa domu i zabudowań gospodarczych wyniosła 38% wartości ziemi. Jaka jest obecna wartość ziemi wraz z zabudowaniami?

44. Bibljoteka ma 4500 tomów książek polskich, francuskich i angielskich, przytem liczba polskich książek wynosi 60% ogólnej liczby; liczba zaś francuskich stanowi 54% liczby polskich. Ile jest książek angielskich?

45. Z buraków cukrowych otrzymujemy 7% cukru. Ile otrzymamy cukru z 450 kg buraków?

46. Liczba uczniów promowanych do klas wyższych = 540, co stanowi 90% ogólnej liczby uczniów. Ilu uczniów było w gimnazjum?

47. Liczba mieszkańców pewnego miasteczka w ciągu roku wzrosła o 3%. Jaka była liczba mieszkańców przed rokiem, jeżeli wiadomo jest, że obecnie jest o 240 osób większa?

48. Składnik stracił na towarze 1200 zł. co stanowi $12\frac{1}{2}\%$ wartości towaru. Ile kosztował towar?

49. Ile zapłacił kupiec za towar, jeżeli osiągnięty przy sprzedaży tego towaru zysk w kwocie 320,4 zł. stanowi 9% wartości towaru?

50. Jeżeli z mniejszego zbiornika przelejemy do większego 460 hl wody, to przelana woda zapełni tylko $11\frac{1}{2}\%$ objętości większego zbiornika. Ile hl wody mieści w sobie większy zbiornik?

51. Wskutek choroby uczeń opuścił 64 dni, co stanowi $26\frac{2}{3}\%$ wszystkich dni szkolnych. Ile było dni szkolnych?

52. Kupiec nie przyjął od dostawcy 45 t towaru, co stanowi $7\frac{1}{2}\%$ całej ilości towaru. Ile złotych zapłacił kupiec za przyjęty towar, jeżeli 1 q kosztuje 18 zł.?

53. Koszt budowy mostu był o $12\frac{1}{2}\%$ większy, niż przewidywano i wynosił 3240 zł. Oblicz wysokość pierwszego kosztorysu?

54. Kupiono plac, na którym wybudowano dom wartości 5100 zł. Budowa domu kosztowała o 70% więcej, niż plac. Jaka jest wartość domu i placu razem?

55. W szkole wykłada 3 nauczycieli; pensja I-go wynosi miesięcznie 360 zł., drugiego o 20% więcej, niż I-go, a trzeciego o 25% więcej, niż drugiego. Jaką pensję pobierają wszyscy razem?

56. Z powodu sprzedaży sklepu kupiec sprzedaje sukno o 15% taniej. Ile trzebaby zapłacić za 1 m sukna, jeżeli poprzednio za 12 mtr płacono 50,4 zł.?

57. Do budowy domu przywieziono 25600 cegieł. Z tej liczby $3\frac{3}{4}\%$ okazało się połamanych. Ile pozostało całych cegieł?

58. W lipcu kg owsa kosztował 0,38 zł., w sierpniu zaś cena spadła o 13%. Ile trzebaby zapłacić w sierpniu za 400 kg owsa?

59. Urzędnikowi, pobierającemu 352,5 zł. miesięcznie, obniżono płacę o 6%. Ile wynosi obecnie kwartalna płaca urzędnika?

60. Zmieszano 10 kg orzechów w cenie 4,8 zł. za kg z 15 kg lepszego gatunku. Ile kosztują wszystkie orzechy, jeżeli 1 kg lepszego gatunku kosztuje o $33\frac{1}{3}\%$ drożej, niż kg gorszego?

61. Jedna partja robotników podejmuje się wykopać rów długości 200 m w ciągu 50 dni. Druga zaś partja ma wykopać rów o 50% dłuższy, podjąwszy się wykopać go w czasie o 40% krótszym. Ile metrów dziennie może wykopać druga partja?

62. Kupiec sprzedał towar ze stratą 40 zł., co stanowi 10% wartości towaru. Za ile sprzedał towar?

63. Cena za 1 hl ziemniaków podniosła się o 50%. Ile złotych płacono poprzednio za 1 hl, jeżeli obecna cena wynosi 12 zł.?

64. Ile procent od 25 zł. stanowi:
1) 3 zł., 2) 1 zł., 3) 3 zł. 50 gr., 4) $4\frac{1}{2}$ zł.?

65. Ile procent od 7 500 zł. stanowi:
1) 300 zł., 2) 25 zł., 3) 1 500 zł., 4) 1 740 zł.?

66. Oblicz stopę procentową, jeżeli od:
1) 700 zł. procenty wynoszą 28 zł.?
2) 724,4 kg proc. wynoszą 36,22 kg?
3) 830 ha proc. wynoszą 29,5 ha?
4) 37 500 cegieł proc. wynoszą 1875 cegieł?
5) 2 zł. proc. wynoszą 16 groszy?
6) 6400 m proc. wynoszą 240 m?
7) 2180 m proc. wynoszą 81,75 cm?
8) 40 hl proc. wynoszą 2,8 l?
9) 3600 cytryn proc. wynoszą 144 cytryny?

67. Ile procent stanowi: 1) $\frac{1}{10}$, 2) $\frac{1}{20}$, 3) $\frac{1}{12}$, 4) $\frac{1}{25}$ pewnej wielkości?

68. Kupiec na sprzedaży towaru stracił $\frac{1}{5}$ wartości towaru. Ile to stanowi procent?

69. Podczas przeprowadzki stłuczono $\frac{1}{4}$ wszystkich szklanek. Ile to stanowi procent?

70. Liczba mieszkańców pewnej wioski, liczącej 600 mieszkańców, wzrosła po roku do 720. Ile procent stanowił przyrost?

71. W fabryce było na początku 400 robotników; po roku liczba robotników zmniejszyła się do 360. Ile to stanowi procent?

72. Cena towaru podniosła się z 500 zł. na 600 zł. Ile procent wynosi przyrost ceny?

73. Cena towaru spadła z 300 zł. na 258 zł. Ile procent wynosi spadek ceny?

74. Towar, kupiony za 90 zł., sprzedano za 108 zł. Ile procent stanowi zysk?

75. W gimnazjum, liczącem 500 uczniów, w ciągu roku liczba uczniów wzrosła do 700. Ile procent wynosi przyrost liczby uczniów?

76. W pewnem mieście na 12000 mieszkańców umarło w ciągu roku 360 osób. Ile procent stanowi śmiertelność?

77. W gimnazjum, liczącem 900 uczniów, promowano do klas wyższych 720. Ile procent stanowi liczba promowanych?

78. Kapitalista sprzedał dom wartości 24 000 zł., zarabiając przytem 960 zł. Ile procent wynosi zysk?

79. Cena kupna folwarku wynosi 25 200 zł.; cena zaś sprzedaży 26 460 zł. Ile procent wynosi zysk?

80. Liczba kobiet pewnego miasta, liczącego 60 000 mieszkańców, wynosi 31 200. Jaki procent ogólnej liczby mieszkańców stanowią kobiety?

81. Pewien kapitalista stracił $\frac{3}{4}$ swego majątku. Ile to stanowi procent?

82. Kupiec zapłacił za towar $\frac{1}{2}$ swego kapitału. Ile to stanowi procent?

83. a) O ile procent liczba 4754 jest mniejsza od 5039,24?

b) O ile procent liczba $9260\frac{23}{50}$ jest większa od 8574,5?

84. Kupiono towar za 540 zł. i zyskano przy sprzedaży 60 zł. Ile procent stanowi zysk?

85. Kupiono towar za 350 zł. i sprzedano go ze stratą 70 zł. Ile procent stanowi strata?

86. Kapitał 4575 zł., złożony do banku, po upływie roku wynosił wraz z odsetkami 4941 zł. Ile procent płaci bank?

87. Dochód z domu wartości 25 842 zł. wynosi rocznie 3876,3 zł. Jak procentuje dom?

88. Cena za 1 kg towaru podniosła się z 3,75 zł. na 4,65 zł. Ile procent stanowi przyrost ceny?

89. Podczas plebiscytu w gminie Brzeziny, powiatu Bytomskiego liczba osób zapisanych do głosowania wynosiła 2820; głosowało zaś 2769 osób, przytem za Polską oddano głosów 1910, za Niemcami zaś 852. Oblicz z dokładnością do 1:

1) Ile procent wynosiła liczba głosujących?

2) Jaki procent głosów oddano za Polską?

3) Jaki procent głosów oddano za Niemcami?

90. Gospodarz nabył konia za 800 zł. i sprzedał go z zyskiem, stanowiącym 5%. Za ile sprzedał konia?

91. Ile wynosi zysk i jaka jest cena sprzedaży, jeżeli cena kupna 1 metra pewnego materjału równa się 30 zł. i zysk wynosi 20%?

92. a) Ile wynosi zysk i jaka jest cena sprzedaży towaru, jeżeli cena kupna równa się 80 fr. franc. i zysk wynosi 15%?
b) Rozwiąż zadanie po przeliczeniu franka na złote według obecnego kursu.

93. Jaka jest cena sprzedaży, jeżeli cena kupna równa się 2 zł. i zysk wynosi 40%?

94. Ile wynosi zysk i jaka jest cena sprzedaży, jeżeli:
a) cena kupna wynosi 250 zł. i zysk — 5%?
b) cena kupna wynosi 656,75 zł. i zysk — 25%?
c) cena kupna wynosi 8 zł. i zysk — 15%?
d) cena kupna wynosi 19,2 zł. i zysk — 4%?

95. Handlarz nabył konia za 600 zł. Utrzymanie konia kosztowało go 5% wartości konia. Jaką cenę należy wyznaczyć na konia, jeżeli handlarz chce zyskać 6%?

96. Kupiec nabył 40 kg pewnego towaru za 500 zł. Jaka jest cena sprzedaży 1 kg, jeżeli zysk wynosi 20%?

97. Kupiec nabył 1 q herbaty za 4500 zł.; koszta przewozu wyniosły 300 zł. Ile wynosi strata i jaka jest cena sprzedaży 1 kg herbaty, jeżeli strata wynosi $12\frac{1}{2}$%?

98. Ile wynosi cena kupna towaru, jeżeli cena sprzedaży równa się 1,5 zł. i strata wynosi 25%?

99. Ile wynosi cena kupna towaru, jeżeli cena sprzedaży równa się 60 zł. i zysk wynosi 20%?

100. Gdyby kupiec sprzedawał 1 kg pewnego towaru po 12 zł., wówczas strata stanowiłaby 20%. Jakę cenę należy wyznaczyć na towar, jeżeli kupiec chce zyskać 20%?

101. Jaką część ceny kupna stanowi strata, wynosząca:
1) 2,3%; 2) 4%; 3) $\frac{1}{2}$%; 4) $12\frac{3}{4}$%?

102. Ile wynosi cena sprzedaży towaru, jeżeli:

1) Kupiono go za 582,4 zł.,	a sprzedano ze stratą	4%?
2) " " " 2938 zł.	" "	4%?
3) " " " 2686,03 zł.	" "	$5\frac{1}{2}$%?
4) " " " 3850,74 zł.	" "	8%?
5) " " " 3798 zł.	" "	$5\frac{1}{2}$%?

103. Ile procent wynosi zysk, jeżeli:
1) cena kupna wynosi 18 zł., zysk zaś 0,81 zł.?
2) „ „ „ 45 zł. „ „ 2,25 zł.?
3) „ „ „ 475,5 zł. „ „ 28,53 zł.?
4) „ „ „ 7235 zł. „ „ $723\frac{1}{3}$ zł.?

104. Ile procent wynosi strata, jeżeli:
1) cena kupna wynosi 1920 zł., strata zaś 240 zł.?
2) „ „ „ 2 zł. „ „ 16 gr?
3) „ „ „ 4480 zł. „ „ 201,6 zł.?
4) „ „ „ 1800 zł. „ „ 9 zł.?

105. Ile procent wynosi zysk, jeżeli:
1) kupiono towar za 8700 zł., sprzedano zaś za 9222 zł?
2) „ „ „ 2180 „ „ „ „ 2261,75 „
3) „ „ „ 75 „ „ „ „ 9 „
4) „ „ „ 484 „ „ „ „ 544,5 „

106. Ile procent wynosi strata, jeżeli kupiono towar:
1) za 77,5 zł., sprzedano zaś za 68,2 zł?
2) „ 1,25 „ „ „ „ 0,9 „
3) „ 400 „ „ „ „ 391 „
4) „ 18,02 „ „ „ „ 17 „

107. Ile procent wynosi zysk, jeżeli sprzedano towar:
1) za 582,4 zł. i zysk wynosił 22,4 zł.?
2) „ 40 „ „ „ 6 „
3) „ 4,65 „ „ „ 0,9 „
4) „ 28,8 „ „ „ 3,6 „

108. Ile procent wynosi strata, jeżeli sprzedano towar:
1) za 12,5 zł., i strata wynosi 3,3 zł?
2) „ 36 „ „ „ 4 „
3) „ 675,3 „ „ „ 72,5 „
4) „ 4600 „ „ „ 500 „

109. Księgarz sprzedaje książki po 6 zł. O tej ceny ustępuje jednak innym księgarzom 1,2 zł. Ile procent ustępuje od pierwotnej ceny?

110. Od sumy 477 zł., żadanej za towar, ustąpiono 27 zł. Ile procent ustąpiono od pierwotnej ceny?

111. Kupiec przy sprzedaży towaru zyskał 50 zł., co stanowi 5% wartości towaru. Za ile sprzedał towar?

112. Kupiec przy sprzedaży towaru stracił 42 zł., co stanowi 10°/o wartości towaru. Jaka jest cena kupna?

113. Przy sprzedaży towaru kupiec stracił 120 zł., co stanowi 15°/o wartości towaru. Jaka jest cena sprzedaży?

114. Włościanin przy sprzedaży gruntu za 11 592 zł., zyskał 3192 zł. Ile procent wynosi zysk?

115. Sprzedano towar za 2646,8 zł. ze stratą, wynoszącą 101,8 zł. Ile procent wynosi strata?

116. Zysk przy sprzedaży domu za 63 180 zł. wynosi 14 580 zł. Ile procent stanowi zysk?

117. Włościanin sprzedał grunt z zyskiem równym 254 złotym i stanowiącym $6\frac{2}{3}$°/o wartości gruntu. Jaka jest cena sprzedaży?

118. Zysk przy sprzedaży towaru wynosi 360 zł. Jaka jest cena kupna, jeżeli zysk wynosił 10°/o?

119. Kupiec nabył towar za 350 zł. sprzedał go zaś za 371 zł. Ile procent wynosi zysk?

120. Kupiec przy sprzedaży towaru za 288 zł. stracił 28°/o. Ile wynosi strata?

121. Przy sprzedaży 20 kg towaru za 98,1 zł. strata wynosiła 10°/o Jaka jest cena kupna?

122. Zysk przy sprzedaży 116 kg towaru za 129,92 zł. wynosi 12°/o Jaka jest cena kupna?

123. Cena kupna 216 kg towaru wynosi 301 zł. Jaką należy wyznaczyć cenę na 1 kg, aby zysk wynosił 15°/o

124. Kupiono 45 kg. pewnego towaru w cenie 7,5 zł. za 1 kg. Jaka jest cena wszystkiego towaru, jeżeli zysk wynosił 30°/o.?

125. Ile należy zapłacić za 120 zeszytów, jeżeli cena zeszytu wynosi 15 gr. i od tej ceny ustąpiono 5°/o rabatu.

126. Kupiec nabył 1197 m sukna za 53 865 zł. Ile należy zapłacić za 1 m tego sukna, jeżeli od ceny sukna ustąpiono 20°/o rabatu?

127. Przy rocznym obrachunku kupiec ustąpił kupującemu $5\frac{1}{3}$°/o rabatu. Za jaką sumę kupujący nabył w ciągu roku towaru, jeżeli rabat wynosił 32 zł.?

128. Księgarz kupił u wydawcy 360 książek po 1 zł. za książkę. Ile powinien zapłacić, jeżeli otrzymał $33\frac{1}{3}$°/o rabatu?

129. Wydawca przy sprzedaży do 50 książek ustępuje 10°/o rabatu, a przy sprzedaży od 50 do 100 książek — 25°/o. Jeden księgarz zakupił 42 książki po 1,6 zł. za książkę, drugi zaś zakupił 90 książek po 1,8 zł. Ile powinni zapłacić za książki obaj księgarze?

130. Ile należy zapłacić za towar wartości 270 zł. przy skoncie $6\frac{2}{3}\%$?

131. Ile procent wynosi skonto, jeżeli za towar wartości 320 zł. zapłacono 280 zł.?

132. Ile wyniesie komisowe:

1) od 600 zł. jeżeli pośrednik liczy sobie $\frac{1}{2}\%$ komisowego?
2) „ 1200 „ „ „ „ „ $\frac{1}{4}\%$ „
3) „ 900 „ „ „ „ „ $\frac{3}{4}\%$ „

133. Pośrednik otrzymał 6,75 zł. komisowego, jako $\frac{3}{4}\%$ od ceny sprzedaży towaru. Za ile sprzedano towar?

134. Pośrednik otrzymał 9150 zł. komisowego, co stanowi 2,5% od ceny sprzedaży majątku. Za ile sprzedano majątek?

135. Kupiec wysłał za pośrednictwem bankiera 4824 zł. jako należność za towar. Ile zapłacił bankierowi, jeżeli komisowe wynosi $\frac{3}{4}\%$?

136. Obywatel nabył za pośrednictwem domu handlowego 4200 dębów po 60 zł. Ile wyniesie rachunek, jeżeli dom handlowy liczy sobie $\frac{3}{5}\%$ komisowego?

137. Przy kupnie folwarku właściciel zapłacił pośrednikowi 350,35 zł. komisowego, co stanowi $1\frac{3}{4}\%$ od sprzedaży folwarku. Jaką sumę otrzymał właściciel za folwark?

138. Pośrednikowi polecono sprzedać dom nie taniej, jak za 45 000 zł. i przyobiecano komisowe w wysokości 2%. Jeżeliby zaś sprzedał dom drożej, to prócz przyobiecanej prowizji otrzymałby dodatkowo połowę nadwyżki. Ile złotych wyniosła prowizja, jeżeli pośrednik sprzednik sprzedał dom za 47000 zł.?

139. Opłata za przewóz towaru (fracht), kupionego w Anglji za 900 funtów sterlingów, wynosi 1,8%. Oblicz rachunek za towar i fracht?

140. Waga towaru bez opakowania (waga netto) wynosi 40 kg. Waga opakowania (tara) stanowi 20% wagi netto. Ile waży towar z opakowaniem (waga brutto)?

141. Waga towaru netto wynosi 70 kg., waga tara stanowi 10% wagi netto. Oblicz wagę brutto.

142. Dochód netto z domu wynosi 346,34 zł. Wydatki na remont domu i utrzymanie go w porządku wynoszą 135,44 zł. Oblicz wartość domu, jeżeli dochód brutto z domu stanowi $8\frac{1}{2}\%$ wartości domu?

143. Dochód brutto z domu wartości 72 000 zł. stanowi 9%; wydatki na utrzymanie domu w porządku wynoszą 480 zł. W ciągu jakiego czasu odsetki wyniosą tyleż, co i wartość domu?

144. Kupiec nabył $1\frac{1}{2}$ t pewnego towaru w cenie 8,4 zł. za 1 kg. Ponieważ zapłacił gotówką, otrzymał $2\frac{1}{2}\%$ skonta. Po czemu winien kupiec sprzedawać 1 kg tego towaru, aby zarobić 20% i jeżeli pośrednikowi zapłacił 3%, za fracht 5%, cło $3\frac{1}{3}\%$ i inne koszty handlowe 2%?

145. Kupiec sprzedał towar za 299 zł. i zarobił na nim 15%. Ile zapłacił za towar?

146. Kupiec sprzedał towar za 161 zł. i zarobił na nim $7\frac{1}{3}\%$. Ile zapłacił za towar?

147. Sprzedano towar za 429 zł.; strata wynosi $2\frac{1}{2}\%$. Ile kosztował towar?

148. Sprzedano towar za 366 zł.; strata wynosi $8\frac{1}{2}\%$. Ile kosztował towar?

Rachunek procentów z uwzględnieniem czasu.

Obliczanie odsetek.

149. Ile wynosi 1% za rok od: 100 zł., 400 zł., 270 zł., 840 zł., 35 zł., 178 zł.?

150. Ile wynosi za rok:

a) 2% od 200 zł., 500 zł., 1200 zł., 3320 zł.?
b) 3% od 400 zł., 700 zł., 5,300 zł., 475 zł.?
c) 4% od 100 zł., 900 zł., 75 zł., 125 zł.?
d) 5% od 200 zł., 250 zł., 360 zł., 920 zł.?
e) 6% od 300 zł., 450 zł., 900 zł., 918 zł.?
f) 8% od 50 zł., 175 zł., 30 zł., 450 zł.?
g) 10% od 5 zł., 40 zł., 84 zł., 2,530 zł.?
h) 20% od 100 zł., 500 zł., 350 zł., 40 zł.?
i) 25% od 32 zł., 72 zł., 140 zł., 1280 zł.?
j) $\frac{1}{2}\%$ od 200 zł., 1000 zł., 4000 zł., 12 000 zł.?
k) $1\frac{1}{2}\%$ od 100 zł., 300 zł., 50 zł., 420 zł.?
l) $2\frac{1}{2}\%$ od 400 zł., 700 zł., 1000 zł., 3600 zł.?

151. Ile powinien otrzymać po roku wierzyciel, pożyczając: a) 80 zł. na 5%, b) 200 zł. na 8%, c) 360 zł. na 7,5%, d) 436,8 zł. na 6,25%, e) 1012,5 zł. na $6\frac{2}{3}$%?

152. Włościanin pożyczył 420 zł. na 5% na rok; pożyczkę wypłacono mu po potrąceniu odsetek. Ile wypłacono?

153. Ile wynoszą odsetki za rok od:

a) 45 zł. po $7\frac{1}{2}$%?
b) 30 zł. po 7,5%?
c) 54 zł. po 3,4%?
d) 360 zł. po $5\frac{1}{2}$%?
e) 722,5 zł. po 7,2%?
f) 2545 zł. po 4%?
g) 2478,6 zł. po 4,5%?
h) 3784 zł. po 2,5%?
i) 9840 zł. po 5%?
j) 16304 zł. po 6,25%?

154. Ile wynosi 3% od 36 zł. za: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 9 miesięcy?

155. Ile wynosi: $2\frac{1}{2}$% od 48 zł., 72 zł., $8\frac{1}{2}$ zł., 168 zł., 240 zł, za: 1) 12; 2) 3; 3) 4; 4) 6; 5) 8; 6) 9 miesięcy?

156. Ile wynosi kapitał wraz z odsetkami po upływie 1 roku, jeżeli pożyczono:

a) 45 zł. na 2,5%?
b) 54 zł. na $3\frac{3}{4}$%?
c) 155 zł. na 4%?
d) 300 zł. na 3,25%?
e) 520 zł. na 2,75%?
f) 1600 zł. na 5%?

157. Ile wynoszą odsetki od:

a) 245 zł. po 5% za 2 lata?
b) 960 zł. po $8\frac{1}{2}$% za 4 lata?
c) 125 zł. po $3\frac{3}{4}$% za 5 lat?
d) 800 zł. po 2,5% za 3 lata?
e) 1250 zł. po $3\frac{1}{4}$% za 7 lat?
f) 2500 zł. po 3% za 8 lat?

158. Ile wynoszą odsetki od 400 zł. po 3% za: 1) 12; 2) 1; 3) 2; 4) 4; 5) 5 miesięcy?

159. Ile wynoszą odsetki od:

a) 450 zł. po 8% za $1\frac{1}{4}$ roku?
b) 576 zł. po 4% za $\frac{1}{4}$ roku?
c) 120 zł. po 3,5% za $\frac{7}{12}$ roku?
d) 1600 zł. po 2,6% za $2\frac{1}{4}$ roku?
e) 4000 zł. po $2\frac{3}{4}$% za 3,75 roku?
f) 4350 zł. po 3% za $1\frac{1}{2}$ roku?

160. Ile wynoszą odsetki od:

a) 840 zł. po 3% za 3 l. 9 m.?
b) 1440 zł. po 7,5% za 1 r. 9 m.?
c) 3240 zł. po 6% za 3 l. 4 m.?
d) 3438 zł. po $4\frac{1}{4}$% za 6 l. 8 m.?
e) 4200 zł. po 6% za 3 l. 2 m.?
f) 25455 zł. po 4% za 2 l. 7 m.?

161. Ile wynoszą odsetki od 800 zł po 4,5% za: 1) 360; 2) 180; 3) 30; 4) 10; 4) 1 dzień?

162. Ile wynoszą odsetki od:

a) 480 zł. po 6% za 18 dni?
b) 2520 zł. po 10% za 25 dni?
c) 450 zł. po 4,5% za 72 dni?
d) 800 zł. po 3,5% za 72 dni?
e) 1440 zł. po 3% za 84 dni?
f) 24000 zł. po 6% za 92 dni?

163. Ile wynoszą odsetki od:

a) 965 zł. po 12% za 1 m. 6 d.?
b) 860 zł. po 4½% za 2 m. 4 d.?
c) 825 zł. po 4% za 9 m. 10 d.?
d) 450 zł. po 4,5% za 2 m. 12 d.?
e) 2250 zł. po 6% za 4 m. 4 d.?
f) 2800 zł. po 6% za 8 m. 10 d.?

164. Ile wynoszą odsetki od:

a) 270 zł. po 5% za 2 lata 2 m. 20 dni?
b) 1884 zł. po 6,75% za 3 lata 6 m. 20 dni?
c) 1250 zł. po 5% za 3 lata 6 m. 15 dni?

165. Jaką część kapitału stanowią roczne odsetki od kapitału, wypożyczonego na 1) 5%, 2) 4%, 3) 3%, 4) 3,5%, 5) 2,5%?

166. Jaką część kapitału stanowią odsetki od kapitału, wypożyczonego na 5% za: 1) 12 m., 2) 6 m., 3) 10 dni, 4) 100 dni?

167. Odsetki od kapitału 3000 zł. po upływie 5 m. wynoszą 87,5 zł. Ile wyniosłyby odsetki od tegoż kapitału przy tej samej stopie procentowej za: 10 m.? 2) 1 r. 3 m.?

168. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy odsetkami i kapitałem, przy stałej stopie procentowej i tym samym czasie?

169. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy odsetkami i stopą procentową przy stałym kapitale i tym samym czasie?

170. Czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy odsetkami i czasem oprocentowania przy stałym kapitale i tej samej stopie procentowej?

171. Ile wyniesie kapitał wraz z odsetkami po upływie roku, jeżeli pożyczono:

a) 20 zł. na 4,5%?
b) 60 zł. na 3,5%?
c) 550 zł. na 2,75%?
d) 775 zł. na 12%?
e) 5742,5 zł. na 8%?
f) 4500 zł. na 4,5%?
g) 1100 zł. na 5%?
h) 7200 zł. na 3,6%?
i) 14050 zł. na 2,75?

172. Kapitalista kupił dom za 22400 zł. Po upływie 1 r. 3 m. sprzedał go za 24000 zł. Czy nie byłoby korzystniej złożyć kapitał do banku na 8 proc.?

173. Kupiec obiecał zapłacić rachunek na 578 zł. wraz z odsetkami po upływie 2 miesięcy, licząc 6%. Ile powinien zapłacić?

174. Rozwiąż zapomocą użycia nawiasów następujące zagadnienia:

a) Kapitalista podzielił 9000 zł. na dwie części tak, że jedna z tych części była $1\frac{1}{4}$ razy większa od drugiej. Następnie większą część złożył do banku na 4,5%, mniejszą zaś wypożyczył na $6\frac{3}{4}$%. Ile wyniosły odsetki od całego kapitału po upływie $1\frac{1}{3}$ roku?

b) Kapitał 7200 zł. wypożyczono na 6% na 2 lata 8 m., kapitał zaś 8000 zł. na $5\frac{1}{4}$% na 2 lata 7 m. Ile wynoszą odsetki od tych kapitałów?

c) Fabrykant sprzedał kupcowi towaru na sumę 8800 zł., przytem kupiec zamiast gotówki dał fabrykantowi kwit na powyższą sumę, płatną po upływie 3 mies. wraz z odsetkami, licząc 8%. Ile kupiec powinien zapłacić?

d) Ile wynoszą odsetki od kapitału, który zapłacono za plac, mający kształt kwadratu, jeżeli obwód kwadratu wynosi 240 m i 1 ar tego placu kosztował 120 zł. Stopa procentowa wynosi 3%.

175. Odsetki za *n* lat od pewnego kapitału wynoszą *s* zł. Ileby wyniosłyby odsetki od tego samego kapitału przy tej samej stopie procentowej za *t* lat?

Obliczanie kapitału.

176. Jaki kapitał, wypożyczony na 5%, daje po upływie roku 27,5 zł.?

Rozwiązanie:

odsetki przy 5% wynoszą 27,5 zł.
" " 1% " 5,5 zł.
kapitał (100%) wynosi 5,5 . 100 = 550 zł.

177. Jaki kapitał wypożyczony na $3\frac{3}{4}$%, daje po upływie roku 240 zł. odsetek?

Rozwiązanie:

odsetki przy $3\frac{3}{4}$% ($\frac{15}{4}$%) wynoszą 240 zł.
" " $\frac{1}{4}$% " 240 zł. : 15 = 16 zł.
" " 1% " 16 (zł.) . 4 = 64 zł.
kapitał (100% wynosi 64 . 100 = 6400 zł.

187. Jaki kapitał należy wypożyczyć na 1 rok, aby przy:

a) $5\frac{1}{3}$ proc. otrzymać 402,56 zł. odsetek?
b) $3\frac{1}{2}$ " " 29,05 zł. "
c) $4\frac{1}{2}$ " " 204,3 zł. "
d) $12\frac{1}{2}$ " " 240 zł. "

e) $4\frac{2}{3}$ proc. otrzymać 343 zł odsetek?
f) $\frac{1}{2}$ „ „ 9 zł. „
g) $6\frac{1}{4}$ „ „ 611,8 zł. „
h) $8\frac{3}{4}$ „ „ 2163 zł. „

179. Jaki kapitał wypożyczono na 4,5%, jeżeli odsetki za $2\frac{2}{3}$ roku wyniosły 42 zł.?

Rozwiązanie:

I. odsetki wynoszą 4,5 zł., jeżeli wypożyczono na 1 rok 100 zł.

„ „ 1 zł. „ „ „ 1 „ $\frac{100}{4,5}$

„ „ 1 zł. „ „ „ $2\frac{2}{3}$ „ $\frac{100.3}{4,5.8}$

„ „ 42 zł. „ „ „ $2\frac{2}{3}$ $\frac{100.3.42}{4,5.8} = 350$

II. odsetki za $2\frac{2}{3}$ r. ($\frac{8}{3}$) ... 42 zł.

„ „ $\frac{1}{3}$ r. $\frac{42}{8}$ zł.

„ „ 1 r. $\frac{42\,.\,3}{8}$ zł.

odsetki przy 4,5% ... $\frac{42\,.\,3}{8}$ zł.

„ „ 1% $\frac{42\,.\,3}{8\,.\,4,5}$ zł.

kapitał (100%) ... $\frac{42\,.\,3\,.\,100}{8\,.\,4,5} = 350$ zł.

180. Jaki kapitał przy 4 proc. daje po 2 latach: 1) 8 zł., 2) 32 zł., 3) 12 zł., 4) 60 zł., 5) 3600 zł. odsetek?

181. Jaki kapitał:

a) przy 5 proc. daje po 2 latach 620 zł. odsetek?
b) „ 4,5 „ „ „ 8 m. 1125 zł. „
c) „ 2,5 „ „ „ 72 d. 38,6 zł. „
d) „ $3\frac{1}{2}$ „ „ „ 1 r. 7 m. 15 d. 1023,75 zł. „
e) „ 3 „ „ „ 2 l. 6 m. 375 zł. „
f) „ 5,78 „ „ „ 3 l. 7 m. 6 d. 1449 zł. „

182. Jaki kapitał:

a) przy 5 proc. daje po 5 latach 75 zł. odsetek?
b) „ $4\frac{1}{2}$ „ „ „ 1 r. 8 m. 36 zł. „
c) „ $7\frac{1}{2}$ „ „ „ 2 l. 4 m. 49 zł. „
d) „ 4^1 „ „ „ 1 r. 9 m. 238 zł. „

e)	przy	$6\frac{3}{4}$	proc.	daje	po 2 l. 6 m.	540 zł. odsetek
f)	„	5	„	„	„ 3 m. 18 d.	432 zł. „
g)	„	$4\frac{3}{4}$	„	„	„ 2 m. 24 d.	133 zł. „
h)	„	$5\frac{1}{4}$	„	„	„ 2 l. 1 m.	630 zł. „
i)	„	4	„	„	„ 5 l.	509,6 zł. „
j)	„	6,4	„	„	„ 5 m.	102 zł. „
k)	„	6	„	„	„ $1\frac{1}{4}$ r.	630 zł. „
l)	„	7,8	„	„	„ 6 m.	10,14 zł. „
m)	„	$3\frac{1}{2}$	„	„	„ 9 m.	113,4 zł. „
n)	„	4,8	„	„	„ 1 r. 8 m.	37,6 zł. „
o)	„	$5\frac{1}{3}$	„	„	„ 4 m. 24 d.	1078 zł. „
p)	„	4	„	„	„ 2 l. 7 m. 15 d.	525 zł. „
q)	„	5	„	„	dziennie	15 zł. „
r)	„	$4\frac{1}{2}$	„	„	miesięcznie	720 zł. „
s)	„	5	„	„	tygodniowo	25 zł. 20 gr. „

183. a) Jaki kapitał wypożyczony na: 1) 3%; 2) 12% daje rocznie te same odsetki, co i kapitał 500 zł., wypożyczony na 1 rok przy stopie procentowej 6%?

b) czy i jaka istnieje zależność proporcjonalna pomiędzy kapitałem i stopą procentową?

184. 2 włościanie kupili do spółki posiadłość w cenie 1350 zł. za ha. Część, należąca do 1-go włościanina, daje rocznie dochodu 540 zł., część zaś drugiego — 405 zł. Ile arów zawiera cała posiadłość i ile arów należy do każdego z włościan?

185. Kapitalista od 2 kapitałów otrzymuje dziennie odsetek 7,5 zł.; jeden kapitał, wynoszący 15000 zł., złożony był do banku na 3%, drugi zaś — na 4%. Oblicz drugi kapitał.

186. Pewien kapitalista ma 2 domy. Dochód z jednego domu po upływie 1 roku 28 dni wynosił 1067 zł., licząc $3\frac{2}{3}$%, z drugiego zaś po upływie 1 roku 3 mies. wynosił 399 zł., licząc 4,2%. Jaka jest wartość obydwu domów?

187. Kupiec umieścił część swego kapitału na $3\frac{2}{3}$% i w ciągu 1 roku 28 dni z tej części miał 1067 zł. zysku; drugą część umieścił na $4\frac{1}{5}$% i w ciągu 1 roku i 3 miesięcy miał z tej części 399 zł. odsetek. Jaki kapitał kupiec umieścił na procent?

188. Jaki kapitał:

a) przy 4 proc. po 5 latach wynosi wraz z odsetkami 720 zł.?
b) „ $4\frac{1}{2}$ „ „ 8 m. „ „ „ 515 „

c) przy 4% po 1 m. wynosi wraz z odsetkami 1204 zł.?
d) „ 6 „ „ 1 m. 18 d. „ „ „ 378 „
e) „ $5\frac{1}{2}$ „ „ 2 l. 8 m. „ „ „ 5160 „
f) „ 6 „ „ 1 m. 18 d. „ „ „ 126 „
g) „ 5,5 „ „ 4 m. 24 d. „ „ „ 4599 „
h) „ $4\frac{1}{2}$ „ „ 1 m. 26 d. „ „ „ 7876 „
i) „ 5,2 „ „ 6 m. „ „ „ 513 „

189. Rozwiązać zapomocą użycia nawiasów następujące zagadnienia:

a) Kapitalista podzielił 35000 zł. na dwie części tak, że jedna z nich była $1\frac{1}{2}$ razy większa od drugiej. Mniejszą część złożył do banku na 8%, większą zaś na $6{,}5\%$. Oblicz całkowity roczny dochód.

b) Ktoś pożyczył 5700 zł. na 8% i zobowiązał się zwrócić kapitał wraz z odsetkami po 8 miesiącach. Po upływie 3 miesięcy zaciągnął drugą pożyczkę na $7{,}5\%$. W oznaczonym przy pierwszej pożyczce terminie zwrócił obie pożyczki, które wraz z odsetkami wyniosły 10954 zł. Ile pożyczono drugim razem?

c) Kapitalista złożył do 2 banków kapitał, wynoszący 6000 zł., przytem $\frac{2}{5}$ kapitału na 7%, pozostałą zaś część na $6{,}25\%$. Ile wynosił kapitał wraz z odsetkami po upływie $2\frac{1}{2}$ lat?

d) Dom daje rocznie 6545 zł. dochodu. Na remont wychodzi rocznie 725 zł., na inne zaś wydatki, związane z utrzymaniem domu, 480 zł. Jaka jest wartość domu, jeżeli daje on czystego dochodu 15%.

190. Jaki kapitał:

a) przy $6{,}4\%$ po 1 m. 20 d. wynosi wraz z odsetkami 25 zł.?
b) „ 6 „ „ 6 l. „ „ „ 10591,68 „
c) „ $7\frac{1}{7}$ „ „ 9 m. 10 d. „ „ „ 1900 „
d) „ $7\frac{1}{2}$ „ „ 2 l. 6 m. „ „ „ 593,75 „
e) „ $6\frac{2}{3}$ „ „ $3\frac{1}{4}$ l. „ „ „ 730 „
f) „ $8\frac{1}{[illegible]}$ „ „ $1\frac{1}{4}$ r. „ „ „ 552,5 „
g) „ 8,2 „ „ 2 l. 4 m. 10 d. „ „ „ 434,8 „
h) „ 6 „ „ 3 l. „ „ „ 265,5 „
i) „ 7 „ „ 6 l. „ „ „ 3619,58 „
j) „ 9 „ „ 1 r. 5 m. „ „ „ 2056,56 „
k) „ 2 „ „ 1 r. 5 m. 14 d. „ „ „ 5557,2 „
l) „ 4 „ „ 2 l. 3 m. 13 d. „ „ „ 5500,88 „
m) „ 3,75 „ „ 1 r. 10 m. „ „ „ 2907 „

191. Oblicz odsetki, jeżeli:

a) kapitał wraz odsetk. wynosi 373,5 zł. przy 5 proc. po 9 m.?
b) „ „ „ „ 400 „ „ $7\frac{1}{2}$ „ po 11 m. 6 d.?
c) „ „ „ „ 120 „ „ 6,5 „ po $1\frac{1}{4}$ r.?

Obliczanie stopy procentowej.

192. Jaka jest stopa procentowa, jeżeli roczne odsetki od kapitału 4480 zł. wynoszą 201,6 zł.?

Rozwiązanie:

od 4480 zł. otrzymam 201,6 zł. czyli 20160 gr.

„ 1 zł. „ $\frac{20160}{4480} = 4\frac{1}{2}$ gr.

Ponieważ zaś, ile wynoszą odsetki za 1 rok od 1 złotego, tyleż równa się stopa procentowa, więc kapitał 4480 zł. pożyczono na 4,5%.

193. Jaka jest stopa procentowa, jeżeli roczne odsetki od kapitału 400 zł. wynoszą: 1) 9 zł., 2) 10 zł., 3) 12 zł., 4) 16 zł.?

194. Na jaki procent wypożyczono kapitał, jeżeli odsetki od 720 zł. po upływie $1\frac{1}{4}$ roku wynoszą 45 zł.?

Rozwiązanie:

Odsetki za $1\frac{1}{4}$ r. ($\frac{5}{4}$ r.) wynoszą 45 zł.

„ „ $\frac{1}{4}$ r. „ 45 : 5 = 9 zł.

„ „ 1 r. „ 9 . 4 = 36 zł.

Kapitał 720 zł. daje 36 zł. = 3600 gr.

„ 1 zł. „ 3600 gr. : 720 = 5 gr.

więc stopa procentowa wynosi 5%.

195. Jaka jest stopa procentowa, jeżeli odsetki od kapitału 300 zł. po 2 latach wyniosą: 1) 14 zł., 2) 15 zł., 3) 18 zł., 4) 30 zł.?

196. Na ile procent wypożyczono kapitał 500 zł., jeżeli odsetki po $2\frac{1}{4}$ l. wynoszą: 1) 50 zł., 2) 37,5 zł., 3) $31\frac{1}{4}$ zł., 4) 41,25 zł.?

197. Na jaki procent wypożyczono kapitał, jeżeli:

1)	450 zł.	po 3 l.	daje	90 zł.
2)	540 „	„ 10 m.	„	27 „
3)	4320 „	„ 15 d.	„	12,6 „
4)	8548 „	„ 13 l.	„	5556,2 „
5)	7200 „	„ 1 r. 3 m.	„	360 „
6)	7800 „	„ 2 l. 20 d.	„	1443 „
7)	420 „	„ 8 m.	„	21 „

8) 3240	zł.	po $3\frac{1}{3}$ r.	daje	648 zł.
9) 3200	„	„ 10 m.	„	256 „
10) 2000	„	„ 6 m.	„	50 „
11) 1680	„	„ $3\frac{1}{2}$ m.	„	39,2 „
12) 480	„	„ 8 m.	„	14,4 „

198. Na ile procent należy wypożyczyć kapitał 2547 zł., aby po upływie 6 lat kapitał wraz z odsetkami wynosił 3158,28 zł.?

199. Kupiec był winien za towar 7200 zł.; po upływie 3 lat 1 m. spłacił dług wraz z odsetkami, razem 8310 zł. Ile procent liczono?

200. Przemysłowiec nabył 1 q pewnego towaru za 360 zł. i po upływie 5 m. sprzedał go po 3,75 zł. za 1 kg. Ile wyniosła stopa oprocentowania od kapitału?

201. Na jaki procent należy złożyć do kasy kapitał, aby odsetki po upływie 4 l. 2 m. wyniosły $\frac{5}{16}$ pierwotnego kapitału?

202. Na jaki procent należy wypożyczyć kapitał, aby odsetki po upływie $\frac{5}{6}$ r. wyniosły 0,04 pierwotnego kapitału?

203. Na jaki procent należy wypożyczyć kapitał 2440 zł., aby odsetki po upływie $1\frac{1}{2}$ r. wyniosły 164,7 zł.?

204. Na jaki procent należy złożyć do kasy kapitał, aby odsetki po upływie 20 lat równały się początkowemu kapitałowi?

205. Na jaki procent należy wypożyczyć kapitał, aby odsetki po upływie 25 lat były 2 razy większe od kapitału pierwotnego?

206. Rozwiąż następujące zadania zapomocą zestawienia nawiasów:

a) Złożono do kasy 480 zł. na 2% i po upływie 3 lat złożono dodatkowo do drugiej kasy 720 zł. na przeciąg 2 lat. Obydwa kapitały otrzymano jednocześnie wraz z odsetkami w ogólnej sumie 1291,2 zł. Jak procentował drugi kapitał?

b) Przy jakiej stopie procentowej kapitał 7200 zł. po upływie 6 l. 8 m. daje tyleż odsetek, co i kapitał 8000 zł. po upływie 5 lat przy 4,5%?

c) Odsetki od pewnego kapitału, złożonego do banku na 6%, po upływie 2 lat wyniosły 672 zł. Na jaki procent należałoby wypożyczyć ten sam kapitał, aby po upływie 3 lat odsetki wyniosły 1344 zł.?

207. Złożono do kasy jeden kapitał na pewien procent na przeciąg 9 m.; drugi zaś kapitał, większy od pierwszego o 2000 zł., do tej samej kasy na ten sam procent na przeciąg 7 m. Odsetki od obydwu kapitałów wyniosły razem 1208 zł., przytem odsetki od pierwszego kapitału były o 88 zł. większe, niż odsetki od drugiego. Jaki procent liczono w kasie i jakie kapitały złożono do kasy?

Obliczanie czasu.

208. Na jaki przeciąg czasu wypożyczono 100 zł., jeżeli przy stopie procentowej 4 % odsetki wyniosły:

1) 4 zł., 2) 8 zł., 3) 16 zł., 4) 2 zł., 5) 1 zł., 6) 13 zł.?

209. Na jaki przeciąg czasu wypożyczono:

1)	Kapitał	530	zł.	przy	4,5	proc.,	jeżeli	odsetki	wynoszą	39,75 zł.?
2)	"	360	"	"	4	"	"	"	"	30 "
3)	"	840	"	"	$7\frac{1}{2}$	"	"	"	"	63 "
4)	"	700	"	"	8	"	"	"	"	126 "
5)	"	1640	"	"	6	"	"	"	"	492 "
6)	"	570	"	"	5	"	"	"	"	95 "
7)	"	7320	"	"	$2\frac{1}{4}$	"	"	"	"	411,75 "
8)	"	5400	"	"	6	"	"	"	"	117 "
9)	"	7000	"	"	3,85	"	"	"	"	215,6 "
10)	"	640	"	"	9	"	"	"	"	$3\frac{1}{2}$ "
11)	"	1809,5	"	"	6,4	"	"	"	"	289,52 "
12)	"	270	"	"	$6\frac{2}{3}$	"	"	"	"	18 "
13)	"	1340	"	"	6	"	"	"	"	60,3 "
14)	"	459	"	"	4	"	"	"	"	12,24 "
15)	"	13000	"	"	6,25	"	"	"	"	650 "

210. Na jaki przeciąg czasu należy wypożyczyć kapitał, aby przy stopie procentowej 5% odsetki były te same, co i kapitał?

211. Na jaki przeciąg czasu należy wypożyczyć kapitał, aby przy stopie procentowej 10% odsetki były te same, co i kapitał?

212. Na jaki przeciąg czasu wypożyczono pewien kapitał, jeżeli przy stopie procentowej 8% odsetki były 2 razy większe od kapitału?

213. Na jaki przeciąg czasu wypożyczono pewien kapitał, jeżeli przy stopie procentowej $7\frac{1}{2}$% odsetki stanowiły $\frac{3}{5}$ kapitału?

214. Na jaki przeciąg czasu należy złożyć do kasy 750 zł. na 5%, aby za otrzymane odsetki można było kupić 25 m pewnej materji w cenie 9,75 zł. za $\frac{1}{2}$ dkm?

215. Odsetki od pewnego kapitału, wypożyczonego na pewien przeciąg czasu, wyniosły 3600 zł. Jeżeliby ten sam kapitał wypożyczono jeszcze na 3 lata, wówczas odsetki od tego kapitału za cały przeciąg czasu wyniosłyby 5400 zł. Na jaki przeciąg czasu kapitał wypożyczono?

216. a) W ciągu jakiego czasu pewien kapitał da 2 razy większe odsetki, niż ten sam kapitał przy tej samej stopie procentowej w ciągu 6 lat?

b) W ciągu jakiego czasu pewien kapitał da 2 razy mniejsze odsetki, niż ten sam kapitał przy tej samej stopie procentowej w ciągu $4\frac{1}{2}$ lat?

Uwaga. Poniżej podajemy zadania, w których jest wskazana data. Zadania, w których trzeba liczyć czas podług kalendarza, są oznaczone. Przy określaniu czasu pierwszej daty nie liczymy, a ostatnią liczymy, np. czas od 15/V do 18/VII tego samego roku obliczamy w następujący sposób:

w miesiącu maju	30 — 15 =	15 d.
„ czerwcu	....	30 d.
„ lipcu	....	18 d.
	Razem	63 d.

217. Ile wynoszą odsetki od kapitału:

1) 3400 zł. wypożyczonych na 4 proc. od 16/V do 1/VII tegoż roku?
2) 4500 „ „ „ $5\frac{1}{2}$ „ „ 16/IX „ 18/X „ „
3) 600 „ „ „ $3\frac{3}{4}$ „ „ 12/IV „ 2/VII „ „
4) 2000 „ „ „ 4,5 „ „ 20/XI „ 18/I następn. r.?
5) 900 „ „ „ 3 „ „ 1/III „ 19/IV tegoż roku?

218. Ile wynosi kapitał wraz z odsetkami, jeżeli wypożyczyliśmy:

1) 480 zł. na 8 proc. od 14/IV do 20/VII tegoż roku?
2) 825 „ „ $5\frac{1}{4}$ „ „ 4/IV „ 14/IX „ „
3) 1500 „ „ 7,2 „ „ 17/V 1925 r. do 17/VI 1926 r.
4) 882 „ „ $7\frac{1}{2}$ „ „ 3/II 1926 r. do 23/V 1927 r.
5) 4800 „ „ 3,75 „ „ 3/I 1926 r. do 23/XII tegoż roku?

219. Na jaki$^0/_0$ wypożyczono 2250 zł., jeżeli odsetki od kapitału za przeciąg czasu od 3/IV 1926 r. do 3/VIII 1927 r. wyniosły 480 zł.?

220. Kapitał 280 zł., wypożyczony 26/III 1923 r., wynosił wraz z odsetkami 26/II 1924 r. — 290,78 zł., Na jaki proc. wypożyczono kapitał?

221. Kapitał 520 zł., wypożyczony 14/II 1926 r., wynosił wraz z odsetkami 14/IV 1927 r. — 565,5 zł. Na jaki proc. wypożyczono kapitał?

222. Odsetki od kapitału 440 zł., wypożyczonego 15/VII 1925 r. na 6$^0/_0$, wyniosły 11 zł. Oblicz termin zwrotu.

223. Ktoś wypożyczył 14/IV 1925 r. pewną sumę pieniędzy na 6,4$^0/_0$, zwrócił zaś dług 14/I 1926 r. Jaką kwotę wypożyczono, jeżeli odsetki wyniosły 180 zł.?

224. 14/XI 1925 r. kapitał wraz z odsetkami, wypożyczony 14/III 1925 r. na 8$^0/_0$, wynosił $263\frac{1}{4}$ zł. Jaki kapitał wypożyczono?

225. 31/III 1927 r. uczeń złożył do kasy oszczędności 60 zł., następnie w ciągu tego samego roku złożył dodatkowo 80 złotych. 31/XII 1927 roku kapitał wraz z odsetkami wynosił 141,875 zł. Kiedy wpłacono do kasy 80 zł., jeżeli wiadomo, że kasa płaciła $2\frac{1}{2}{}^0/_0$?

226. Kupiec wypożyczył 9600 zł. na $6\frac{2}{3}{}^0/_0$, przytem według umowy miał zwrócić kapitał wraz z odsetkami po upływie roku. Lecz kupiec ten po upływie roku zbankrutował, wobec czego zwrócił tylko 28 gr. za 1 zł. Ile stracił wierzyciel?

227. Jaki kapitał, złożony do kasy na 5$^0/_0$, wyniesie wraz z odsetkami po upływie 3 l. 5 m. 24 d. — 5072,4 zł.?

228. Na jaki $^0/_0$ wypożyczono 8754 zł., jeżeli po 7 latach kapitał wraz z odsetkami wyniósł 13043,46 zł.?

229. Ktoś pożyczył 840 zł. na 3 lata z warunkiem, że będzie płacił w pierwszym roku 3$^0/_0$, w drugim 5$^0/_0$, w trzecim 7$^0/_0$. Ile wyniosły odsetki za 3 lata?

230. Obywatel kupił majątek wartości 108000 zł., $\frac{7}{30}$ wartości majątku zapłacił przy kupnie, pozostałą zaś sumę zobowiązał się zapłacić po upływie $1\frac{3}{4}$ r. wraz z odsetkami, licząc 7,6$^0/_0$. Ile zapłacił obywatel w oznaczonym terminie?

231. Ktoś złożył do kasy kapitał na 6$^0/_0$; po upływie 1 r. 3 m. kapitał wraz z odsetkami wynosił 967,5 zł. Ile wynosiłby kapitał wraz z odsetkami, jeżeliby procentował 5 miesięcy dłużej?

232. Złożono do kasy na 8 proc. początkowo 4600 zł., następnie zaś po upływie 2 lat dodatkowo 5800 zł. W ciągu jakiego czasu procentowałby pierwszy kapitał, gdyby odsetki od obydwu kapitałów wyniosły 2816 zł.?

233. Rozwiąż zapomocą użycia nawiasów:

Kupiec wypożyczył $\frac{3}{5}$ kapitału na 6,2%; po upływie $7\frac{1}{2}$ m. kapitał ten wraz z odsetkami wynosił 7479 zł. Jak procentowała pozostała część kapitału, jeżeli po 1 roku 3 m. dawała 465 złotych odsetek?

234. Kapitał wraz z odsetkami, wypożyczony na 10 proc., po upływie $1\frac{1}{4}$ r. wynosił 7200 zł. Ile odsetek da ten sam kapitał po upływie 1 r. 10 m. przy stopie procentowej 6%?

235. Obywatel otrzymał w spadku 10000 zł.; $\frac{2}{5}$ tego kapitału złożył do banku na $4\frac{1}{2}$%, pozostałą zaś część umieścił na hipotece domu. Kapitał, umieszczony na hipotece, wraz z odsetkami po upływie 1 r. 8 m. wynosił 6475 zł. Ile wynosiły roczne odsetki od pierwszej części kapitału i jak procentowała druga część?

236. Rozwiąż zapomocą użycia nawiasów:

Złożono do banku pierwotnie 800 zł.; następnie po upływie 3 m. 10 d. dodatkowo 500 zł.; później zaś po upływie 1 m. 20 d. jeszcze 600 zł. Ile wyniosą odsetki od całego kapitału po upływie 6 m. 20 d., licząc od dnia pierwszego wkładu, przy stopie procentowej 6%?

237. Obywatel sprzedał majątek; $\frac{1}{3}$ część umówionej sumy wypłacono mu przy sprzedaży, pozostałą zaś część pozostawiono na hipotece tego majątku; kapitał, pozostawiony na hipotece, wyniósł wraz z odsetkami po upływie 2 l. 8 m. przy stopie procentowej $5\frac{1}{4}$% — 72960 zł. Oblicz wartość sprzedanego majątku.

238. 4160 zł. podzielono na dwie części i obydwie złożono do kasy na $5\frac{1}{4}$%. Jedna z tych części po upływie 10 lat wraz z odsetkami wynosiła 3294 zł. W ciągu ilu lat druga część da 315 złotych odsetek?

239. Pewien kapitał wraz z odsetkami po upływie $1\frac{1}{2}$ r. wynosił 22500 zł. Na jaki procent wypożyczono kapitał, jeżeli odsetki stanowiły $\frac{1}{8}$ kapitału?

240. Obywatel miał 42000 zł., które podzielił na 2 części tak, że jedna z nich stanowiła $\frac{3}{4}$ drugiej. Większą część swego kapitału wypożyczył na $7\frac{3}{4}$ %, mniejszą zaś jednocześnie złożył do banku na $4\frac{1}{2}$ %. Po upływie $1\frac{1}{3}$ roku za odsetki od całego kapitału kupił łąkę, mającą kształt prostokąta o wymiarach 120 prętów i 30 prętów. Oblicz: 1) jaką wartość przedstawia mórg kupionej łąki 2) ile ha ma łąka?

241. Ojciec zapisał 2 synom pewien kapitał; kapitał młodszego, złożony do banku na $6\frac{2}{3}$ % po upływie 10 m. wraz z odsetkami wynosił 16 150 złotych; kapitał zaś starszego, wypożyczony na $7\frac{1}{2}$ %, po upływie 1 r. 2 m. przyniósł 1260 zł. odsetek. Jaki kapitał zapisał ojciec synom?

242. Przy jakiej stopie procentowej kapitał 9600 zł. po upływie 9 m. da tyleż odsetek, ile kapitał 3200 zł., wypożyczony na przeciąg czasu = 1 r. 7 m. przy stopie procentowej 9%?

243. $\frac{3}{5}$ pewnego kapitału wypożyczono na $3\frac{1}{2}$ %; pozostałą zaś część na 5 %, Po upływie 2 l. 3 m. różnica pomiędzy odsetkami wynosiła 135 zł. Oblicz całkowity kapitał.

244. $\frac{2}{5}$ pewnego kapitału wypożyczono na 3%, $\frac{1}{3}$ na 3,4%, pozostałą zaś część na 4,5. Na jaki procent należałoby wypożyczyć całkowity kapitał, aby mieć te same roczne odsetki?

245. $\frac{1}{4}$ sumy, otrzymanej ze sprzedaży 4 ha 8 a placu w cenie 1875 zł. za 1 ha, wypożyczono na 3,5%, pozostałą zaś kwotę na 4,25%. Ile wynosiły roczne odsetki?

246. Jaki kapitał należy wypożyczyć na 6%, żeby po 1 roku 2 miesiącach otrzymać 224 zł. dochodu?

247. Jaki kapitał należy wypożyczyć na 8%, żeby po 7 mies. otrzymać 182 zł. dochodu?

248. Na jaki procent należy wypożyczyć 4400 zł. kapitału, żeby po 1 rok 5 miesięcy otrzymać 280 zł. 50 gr. dochodu?

249. Na jaki procent należy wypożyczyć 1800 zł. kapitału, żeby po 11 mies. otrzymać 93 zł. 50 gr. dochodu?

250. Kapitał 15000 zł. podzielono na dwie części, z których pierwszą oddano na 6%, drugą — na 5%. Dochód roczny z kapitału wynosi 835 zł. Ile zł. wynosi każda z części kapitału?

251. Kapitał 5600 zł. podzielono na dwie części, z których pierwszą oddano na 5%, drugą na $3\frac{1}{2}$ %. Dochód roczny z kapitału wynosi 244 zł. Ile wynosi każda z części kapitału?

252. Za kg herbaty i 3 kg kawy zapłacono 26 zł. Jeśliby cena herbaty wzrosał o 25%, a cena kawy o 10%, to za ten sam sprawunek zapłaconoby 31 zł. 60 gr. Ile kosztuje kg herbaty, a ile kg kawy?

253. Za 2 kg herbaty i 5 kg kawy zapłacono 42 zł. Jeśliby cena herbaty wzrosła o $12\frac{1}{2}$% a cena kawy o 15%, to za ten sam sprawunek zapłaconoby 47 zł. 50 gr. Ile kosztuje kg herbaty, a ile kg kawy?

254. Określ kapitał i procent na jaki został oddany, jeśli po 8 miesiącach kapitał z procentami wynosi 2976 zł., a po 15 miesiącach — 3060 zł.

255. Znajdź kapitał i procent, na jaki został oddany, jeśli po 8 miesiącach kapitał wraz z procentami wynosi 3296 zł., a po 14 miesiącach — 3368 zł.

256. *A*, *B* i *C* oddali swoje kapitały na procent. *B* ma 1000 zł. więcej niż *A*, a *C* 1500 zł. więcej, niż *A*. *B* otrzymuje 1 %, a *C* 2 % więcej, niż *A*. Roczny dochód *B* jest o 80 zł., a dochód *C* o 150 zł. większy, niż roczny dochód *A*. Określ kapitały i oprocentowanie.

Dyskont.

Wekslem nazywamy zobowiązanie piśmienne, napisane na papierze stemplowym, według którego dłużnik zobowiązuje się w oznaczonym terminie zapłacić oznaczoną na wekslu sumę pieniędzy.

Na wekslu piszemy sumę pieniędzy, którą w oznaczonym czasie mamy zapłacić i datę zapłaty tej sumy; nie piszemy zaś, jaką sumę wzięliśmy, ani nie oznaczamy stopy procentowej.

Jeżeli ktoś wystawił weksel na 10 000 zł. z terminem płatności za 8 miesięcy, to on pożyczył mniej niż 10 000 zł.; w sumie 10 000 zł. jest kapitał, pożyczony przez dłużnika i odsetki od tego kapitału za 8 miesięcy. Suma, wystawiona na wekslu jest kapitałem zwiększonym.

Suma wystawiona na wekslu, nazywa się *walutą wekslu.*

Właściciel wekslu (wierzyciel, ma prawo żądać zapłaty sumy. oznaczonej na wekslu, tylko w oznaczonym na tym wekslu terminie, Lecz wystawca wekslu (dłużnik) może wykupić weksel wcześniej, lub wierzyciel, potrzebując gotówki, może odstąpić weksel osobie trzeciej. W tym razie od waluty wekslu trzeba odliczyć na korzyść kupującego odsetki za czas pozostały do dnia płatności wekslu.

Suma, którą odejmujemy od waluty wekslu, nazywa się *dyskontem*, a oznaczyć dyskont lub sumę, którą za weksel trzeba zapłacić, nazywamy *dyskontowaniem wekslu.*

Dyskont może być matematyczny i handlowy. Żeby wskazać na różnicę pomiędzy jednym i drugim, rozwiążmy zadanie:

Ile trzeba zapłacić za weksel, wystawiony na 468 zł. i zdyskontowany 8 miesięcy przed terminem, jeżeli dyskontujemy przy stopie procentowej 6%?

W walucie wekslu 468 zł. jest kapitał początkowy i odsetki; z tego wynika, że za weksel, wystawiony na 468 zł., trzeba zapłacić taką sumę, która, będąc oddana na 6%, w ciągu 8 miesięcy zamieni się razem z odsetkami na 468 zł., stąd waluta wekslu jest kapitałem zwiększonym, a suma, którą trzeba za ten weksel zapłacić, jest kapitałem początkowym.

Mając kapitał zwiększony, czas i stopę procentową, trzeba oznaczyć kapitał początkowy.

Od każdych 100 zł. za 12 miesięcy otrzymujemy 6 zł. odsetek; ile odsetek otrzymamy od tej samej sumy za 8 miesięcy?

$$\begin{array}{lll} \text{za } 12 \text{ m} & & 6 \\ \text{,, } \ 1 & — & \frac{6}{12} \\ \text{,, } \ 8 & — & \frac{6 \, . \, 8}{12} = 4. \end{array}$$

W ciągu oznaczonego w zadaniu czasu każde 100 zł. kapitału początkowego powiększają się o 4 zł., czyli każde 100 zł. zamienia się na 104 zł., stąd, ile razy 104 mieści się w walucie wekslu 468, tyle razy za ten weksel trzeba zapłacić po 100 zł.

$$\begin{array}{lll} \text{za } 104 \text{ zł.} & & 100 \\ \text{,, } \ 1 & — & \frac{100}{104} \\ \text{,, } \ 468 & — & \frac{100 \, . \, 468}{104} = 450. \end{array}$$

Za weksel trzeba zapłacić 450 zł.

Sposób, zapomocą którego rozwiązaliśmy zadanie, nazywa się *dyskontem matematycznym*. Dyskont matematyczny w praktyce nie jest stosowanym. W życiu praktycznem stosujemy tylko dyskont handlowy.

Przy rozwiązywaniu danego zadania odejmowaliśmy od każdych 104 zł. waluty 4 zł. odsetek, a przy dyskoncie handlowym odejmujemy 4 zł. odsetek od 100 zł. waluty.

Przy dyskoncie handlowym zadanie powyższe po odnalezieniu odsetek za 8 miesięcy od 100 złotych rozwiążemy tak:

zamiast 100 zł. zapłacimy 96 zł.

„ 1 „ „ $\frac{96}{100}$ „

„ 468 „ „ $\frac{96 \cdot 468}{100} = 449{,}28$ zł.

Przy dyskoncie matematycznym dyskont wynosił 18 zł., a przy handlowym 18,72 zł., z tego widać, że dyskont handlowy jest większy od matematycznego.

Przy rozwiązywaniu zadań będziemy posiłkowali się tylko dyskontem handlowym.

Dyskont handlowy.

257. Ile wyniesie dyskont po 8% od wekslu, wystawionego na 600 zł. i wykupionego 3 miesiące przed terminem?

258. Ile wyniesie dyskont po 8% od wekslu, wystawionego na 360 zł. i wykupionego 20 dni przed terminem?

259. Oznacz dyskont z wekslu, wystawionego na 3600 zł., po 6% i wykupionego 7 miesięcy przed terminem.

260. Ile wyniesie dyskont po $4\frac{1}{2}$% od wekslu, wystawionego na 7212 zł. i wykupionego $1\frac{1}{2}$ roku przed terminem?

261. Znajdź dyskont po $5\frac{3}{5}$% od wekslu, wystawionego na 1224 franki i zdyskontowanego $1\frac{1}{4}$ roku przed terminem.

262. Ile należy zapłacić za weksel, wystawiony na 2540 zł. i sprzedany dwa miesiące przed terminem, jeżeli będziemy dyskontowali po 6%?

263. Ile trzeba zapłacić za weksel, wystawiony na 10 800 zł. i sprzedany 42 dni przed terminem, dyskontując po 5%?

264. Zdyskontowano weksel na 1440 zł. po 5%; termin płatności jest za 1 rok 2 miesiące 4 dni. Ile zapłacono za ten weksel?

265. Zdyskontowano weksel, wystawiony na 6012 franków po $7\frac{1}{2}$% na $1\frac{1}{3}$ roku przed terminem. Ile otrzymano za weksel?

266. Ile zapłacono za weksel, wystawiony na 1000 złotych i płatny 9 czerwca, jeżeli dyskontowano go 15 maja po 3%?

267. Ile należy zapłacić za weksel, wystawiony na 3200 zł. i płatny 15 grudnia, dyskontując go 23 października po $4\frac{1}{2}\%$?

268. Oznacz sumę, na jaką był wystawiony weksel, jeżeli za niego zapłacono 2336 zł. 4 miesiące przed terminem płatności, dyskontując go po 8%.

269. Kupiono weksel, którego termin upływał za 1 rok 8 miesięcy i zapłacono za niego 2121 zł. Na jaką sumę był wystawiony weksel, jeżeli potrącili sobie $7\frac{1}{2}\%$ za czas pozostały do dnia płatności wekslu?

270. Kupiono weksel za 675 zł. 40 gr., płatny za 2 lata 10 miesięcy. Na jaką sumę był wystawiony ten weksel, jeżeli dyskontowali go po $6\frac{2}{5}\%$?

271. Za weksel, którego termin upływał za 1 rok 2 miesiące 5 dni, zapłacono 6562 zł. 50 gr. Na jaką sumę był wystawiony ten weksel, jeżeli potrącili sobie $7\frac{1}{2}\%$ za czas, pozostały do dnia płatności?

272. Fabrykant nabył weksel za 7577 zł. 81 gr., płatny za 1 rok 5 miesięcy. Na jaką sumę był wystawiony ten weksel, jeżeli fabrykant potrącił sobie 7% za czas, pozostały do dnia płatności?

273. Weksel, którego termin upływał za 1 rok 24 dni, wystawca wykupił za 10293 zł. 12 gr. Na jaką sumę był wystawiony ten weksel, jeżeli potrącił za czas, pozostały do dnia płatności $4\frac{2}{5}\%$?

274. Dyskont z wekslu, którego termin upływa za 6 miesięcy, wynosi 158 zł. 67 gr. Na jaką sumę wystawiony był weksel, jeżeli go dyskontowano po $8\frac{3}{5}\%$?

275. Dyskont z wekslu, wykupionego 4 miesiące przed terminem, wynosi 186,11 zł. Na jaką sumę był wystawiony ten weksel, jeżeli go dyskontowali po $7\frac{2}{5}\%$?

276. Dyskont z wekslu, wykupionego 6 lat przed terminem, wynosił 2880,24 franka. Na jaką sumę był wystawiony ten weksel, jeżeli był zdyskontowany po $8{,}8\%$?

277. Sprzedano weksel $3\frac{1}{3}$ miesiąca przed terminem płatności z dyskontem po $4\frac{1}{2}\%$. Na jaką sumę był wystawiony ten weksel, jeżeli dyskont wynosił 44 zł. $62\frac{1}{2}$ gr.?

278. Dyskont z wekslu, wystawionego na 2244 zł. i sprzedanego 5 miesięcy przed terminem, wynosił 43 zł. 1 gr. Ile procent liczono dyskont?

279. Dyskont z wekslu, wystawionego na 48240 zł. i wykupionego $5\frac{2}{5}$ miesięcy przed terminem płatności, wynosi 868,32 zł. Ile procent liczono dyskont?

280. Dyskont z wekslu, wystawionego na 7200 zł. i wykupionego 244 dni przed terminem, wynosi 380 zł. 64 gr. Ile procent liczono dyskont?

281. Przy jakim procencie dyskontowano weksel, wystawiony na 2542 zł. i wykupiony 6 miesięcy przed terminem, jeżeli dyskont wynosi 114 zł. 39 gr.?

282. Weksel, wystawiony na 800 franków, sprzedano 5 miesięcy przed terminem za 720 franków. Ile procent liczono dyskont?

283. Weksel, wystawiony na 2136 zł., sprzedano 1 rok 5 miesięcy przed terminem za 1939,31 zł. Ile procent liczono dyskont?

284. Za weksel zapłacono 3540 zł. 95 gr. zamiast 3624 zł. 5 miesięcy przed terminem płatności. Ile procent liczono dyskont?

285. Za weksel, którego termin upływał za 250 dni, zapłacono 7009 zł. $87\frac{1}{2}$ gr., zamiast 7236 zł. le procent liczono dyskont?

286. Za weksel, wystawiony na 2436 zł., zapłacono $4\frac{1}{2}$ miesiąca przed terminem 2399 zł. 46 gr. Ile procent liczono dyskont?

287. Na jaki czas przed terminem zdyskontowano weksel, wystawiony na 2544 franki, jeżeli dyskont po 6% wynosił 63,6 franka?

288. Na jaki czas przed terminem wykupiono weksel, jeżeli za niego zapłacili 7004 zł. zamiast 7200 zł., licząc dyskont po 4%?

289. Za weksel zapłacono 7127 zł. 46 gr., zamiast 7236 zł., dyskontując go po $5\frac{2}{5}$%. Na jaki czas przed terminem wykupiono weksel?

290. Ile czasu przed terminem wykupiono weksel, wystawiony na 8424 zł., jeżeli dyskont po 5% wynosi 175 zł. 50 groszy?

291. Dyskont z wekslu, wystawionego na 648 zł. po 4%, wyniósł 16 zł. 20 gr. Ile czasu przed terminem zdyskontowano ten weksel?

292. Dyskont z wekslu, wystawionego na 525 franków po 6,8%, wynosi 26,775 fr. Ile czasu przed terminem zdyskontowano ten weksel?

293. Za weksel, wystawiony na 4560 zł., zapłacono 90 dni przed terminem 4468,8 zł. Po ile procent dyskontowano weksel?

294. Kupiec musi zapłacić za weksel po 6 latach 6000 zł., kredytor zgadza się przyjąć zaraz 3600 zł. Po ile procent liczono dyskont?

295. Ktoś kupił dom i zamiast gotówki dał weksel na 4600 dolarów płatny po roku; lecz $6\frac{1}{2}$ miesiąca przed terminem wykupił weksel i zapłacił 4301 dolarów. Ile procent liczono dyskont.

296. Ktoś sprzedał weksel, wystawiony na 3500 zł., za 3430 zł. 4 miesiące przed terminem. Ile procent liczono dyskont?

297. Za weksel, wystawiony na 420 zł., zapłacono 7 miesięcy przed terminem 408 zł. 24 gr. Ile procent liczono dyskont?

298. Za weksel, wystawiony na 8544 zł., zapłacono 8 miesięcy przed terminem 8116 zł. 80 gr. Ile procent liczono dyskont?

299. Kupiec miał weksel na 11745 zł., płatny 14 października 1925 roku; 14 sierpnia tegoż roku sprzedał weksel za 11639 zł. $29\frac{1}{2}$ gr. Po ile procent dyskontowano weksel?

300. Za weksel po odliczeniu dyskonta po $5\frac{3}{5}\%$ zapłacono 2685 zł. 68 gr. na rok przed terminem. Na jaką sumę był wystawiony weksel?

301. Kupiec sprzedał na rok przed terminem weksel za 4351 zł. 50 gr. Na jaką sumę był wystawiony weksel, jeżeli dyskontowali go po $3{,}3\%$?

302. Ktoś, pożyczając 7800 zł., dał weksel na 1 rok 8 miesięcy i doliczył do wypożyczonej sumy odsetki, licząc po $\frac{3}{4}\%$ na miesiąc. Na jaką sumę był wystawiony weksel?

303. Za weksel, zdyskontowany $6\frac{3}{4}$ miesiąca przed terminem, otrzymano 4320 zł. 42 gr., dyskontując go po 8%. Oznacz walutę.

304. Kupiec dał za towar weksel na 3416 zł., płatny po roku. Po pewnym czasie wykupił weksel i zapłacił 3307 zł. $11\frac{1}{2}$ gr., licząc dyskont po $8\frac{1}{2}\%$. Po ilu miesiącach od czasu wystawienia weksel został zapłacony?

305. Termin wekslu, wystawionego na 8525 zł., przypadał 24 marca 1927 roku, lecz wykupiono weksel wcześniej i zapłacono 7450 zł. 85 gr., licząc dyskont po $8\frac{2}{5}\%$. Kiedy wykupiono ten weksel?

306. Fabrykant sprzedał 5 marca 1919 roku towaru za 9000 zł.; połowę pieniędzy otrzymał zaraz, a na resztę wziął weksel, płatny 5 września 1920 roku. Ile może otrzymać zaraz, jeżeli weksel zdyskontowano po 6%?

307. Dłużnik wykupuje od swego wierzyciela weksel, wystawiony na sumę 840 zł. na 5 miesięcy przed terminem. Ile traci na tem wierzyciel, jeżeli dyskont liczono po $6\frac{1}{2}\%$?

308. Ktoś nabył dom za 280 000 zł. i zapłacił przy kupnie tylko $\frac{4}{7}$ wartości domu, a na pozostałą sumę wydał piśmienne zobowiązanie (rewers), że sumę wraz z odsetkami po 8,4% uiści za 1 rok 5 miesięcy. Ile powinien zapłacić w oznaczonym czasie?

309. Kupiec zdyskontował 20 kwietnia 2 weksle: na 900 zł., płatny 15 maja i na 960 zł., płatny 15 czerwca. Ile otrzymał za te weksle, jeżeli z pierwszego dyskont wynosił 8%., a z drugiego 6%?

310. Sprzedano weksel za 1120 zł. 10 miesięcy przed terminem płatności, dyskont liczono po 8%. Na ile złotych był wystawiony weksel?

311. Sprzedano weksel za 839 zł. 50 gr. na 1 rok 3 miesiące przed terminem płatności; dyskont liczono po 7%. Na ile złotych był wystawiony weksel?

Geometrja.

1. Opisz sześcian i nakreśl siatkę dowolnego sześcianu. Zbadaj model sześcianu.

Sześcian jest ograniczony sześcioma równemi kwadratami, z których każde dwa przyległe są prostopadłe, każde zaś dwa przeciwległe są równoległe. Każde dwie ściany sześcianu stykają się wzdłuż linji, zwanych krawędzami. Sześcian ma 12 krawędzi (8 krawędzi, otaczających podstawy, zwanych krawędziami u podstaw i 4 krawędzie, zwane bocznemi). Wszystkie krawędzie sześcianu są sobie równe.

Każda krawędź jest prostopadła do czterech innych i równoległa do trzech innych krawędzi. Trzy ściany sześcianu, stykając się, schodzą się w jednym punkcie, zwanym wierzchołkiem. Sześcian ma 8 wierzchołków.

Wskaż przedmioty, które budową swą przypominają sześcian.

Wskaż na modelu sześcianu: 1) krawędzie boczne, 2) krawędzie u podstaw, 3) krawędzie prostopadłe, 4) krawędzie równoległe, 5) wierzchołki.

Jakie proste nazywamy prostopadłemi, a jakie równoległemi?

Zapomocą jakiego przyrządu można się przekonać, czy dwie proste są do siebie prostopadłe? przekonaj się zapomocą węgielnicy, czy ściany sześcianu zawsze są do siebie prostopadłe.

Wskaż na modelu sześcianu pary krawędzi, które chociaż nie stykają się, lecz nie są rownoległe. Jak nazywamy takie linje?

2. Nakreśl kilka niejednakowych kwadratów, w czem są podobne te kwadraty i czem się różnią.

3. Poprowadź prostopadłą do danej prostej przez dany jej punkt: 1) przy pomocy ekierki, 2) przy pomocy cyrkla i linijki.

4. Poprowadź prostopadłą do danej prostej przez punkt, zewnątrz niej leżący: 1) przy pomocy ekierki, 2) przy pomocy cyrkla i linijki.

5. a) Przez punkt, zewnątrz prostej leżący, poprowadź do tej prostej linję równoległą: 1) przy pomocy ekierki, 2) przy pomocy cyrkla i linijki, b) Jakie znasz własności kątów, utworzonych przez dwie równoległe i sieczną.

6. a) Nakreśl: 1) kilka kątów prostych, 2) kąt półpełny, 3) pełny. b) Czy mogą być różne kąty: 1) proste, 2) półpełne, 3) pełne?

Wszystkie kąty proste są równe.

7. a) Nakreśl kilka kątów: 1) ostrych, 2) rozwartych. b) Czy wielkość kąta zależy od długości ramion?

8. a) Co nazywamy stopniem kątowym? b) Ile stopni ma kąt: 1) prosty, 2) półpełny, 3) pełny. c) Utwórz zapomocą rozsuwania nóżek cyrkla: 1) kąt ostry, 2) kąt rozwarty, 3) kąt prosty, 4) półpełny, 5) pełny.

9. a) Jakie kąty nazywamy przyległemi? b) Ile stopni wynosi suma kątów przyległych.

10. a) Jakie kąty nazywamy wierzchołkiem przeciwległe? b) Jaka jest własność kątów wierzchołkiem przeciwległych?

11. Opisz graniastosłup kwadratowy prosty i nakreśl jego siatkę. Zbuduj model graniastosłupa kwadratowego prostego.

12. Opisz prostopadłościan i nakreśl jego siatkę. Zbuduj model prostopadłościanu.

13. a) Nakreśl kilka prostokątów. b) Czem się różnią prostokąty i w czem są podobne?

14. Figurę, jaką widzisz na rys. 1 nazywamy *kołem*.

Koło kreślimy zapomoą cyrkla.

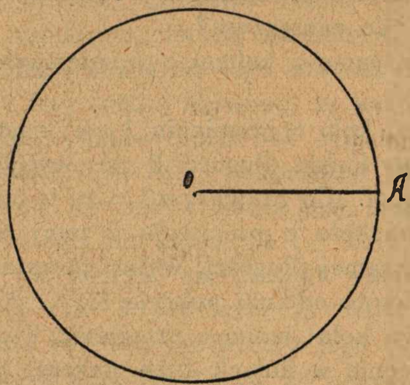
Krzywa linja, ograniczająca koło, nazywa się *okręgiem*.

Wszystkie punkty na okręgu, są jednakowo odległe od jednego punktu, zwanego *środkiem koła*.

Odcinek, łączący jakikolwiek punkt okręgu ze środkiem, nazywa się *promieniem*.

Wszystkie promienie tego samego koła są równe.

Koła o jednakowych promieniach są równe; koła o niejednakowych promieniach nie są równe.



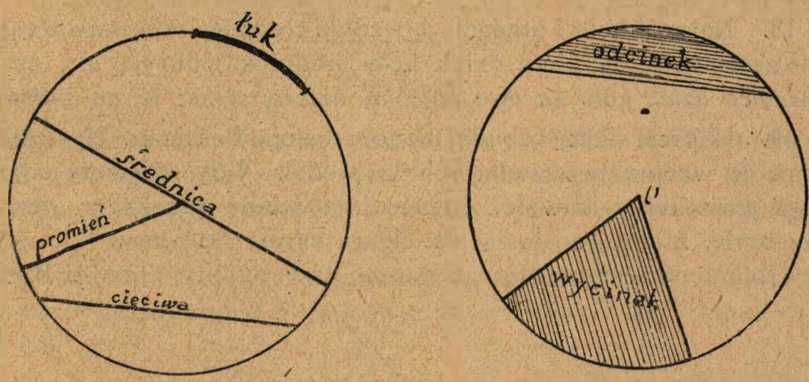
Rys. 1.

Odcinek, łączący dwa punkty okręgu, nazywa się *cięciwą*. (rys. 2).

Jeżeli cięciwa przechodzi przez środek koła, wówczas nazywa się *średnicą*.

Średnica jest to podwójny promień.

Średnica jest największą z cięciw.



Rys. 2.

Część okręgu nazywamy *łukiem*.

Część koła, ograniczoną 2 promieniami i łukiem, nazywamy *wycinkiem*.

Część koła, ograniczoną cięciwą i łukiem, nazywamy *odcinkiem*.

15. Nakreśl koło o promieniu: 1) 4 cm, 2) 35 mm i zmierz długość średnicy każdego koła.

16. Nakreśl koła, którego średnica byłaby równą: 1) 8 cm, 2) 50 mm.

a) Nakreśl 2 koła o promieniach równych; wytnij je i połóż jedno na drugiem. Co zauważysz?

b) Wykonaj to samo z kołami o promieniach różnych. Co zauważysz?

17. a) Nakreśl koło o promieniu 3 cm; następnie w kole tem nakreśl dwie cięciwy każda długości 2 cm; wytnij powstałe odcinki i nałóż jeden na drugi. Co zauważysz? Czy te odcinki pokryją się?

b) Nakreśl dwa koła o promieniu 2 mm; w każdem z nich nakreśl cięciwę tej samej długości, wytnij powstałe odcinki i nałóż jeden na drugi. Czy te odcinki pokryją się?

c) Nakreśl dwa koła: jedno o promieniu 3 cm, drugie o promieniu 4 cm; następnie w kołach tych nakreśl cięciwy tej samej długości po 2 cm; wytnij powstałe odcinki i nałóż jeden na drugi. Czy te odcinki pokryją się?

W tem samem kole, lub w kołach równych, równym cięciwom odpowiadają równe łuki.

a) Sprawdź, że *równym łukom w tem samem kole, lub w kołach równych odpowiadają równe cięciwy.*

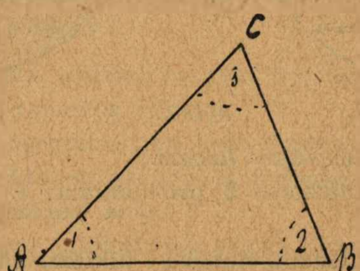
Koła o tym samym promieniu są równe, zaś koła o różnych promieniach są nierówne.

18. Nakreśl koło i przegnij je wzdłuż średnicy. Co zauważysz?

Części koła, na które dzieli koło średnica, pokryją się, czyli że *średnica dzieli koło na dwa półkola, inaczej dzieli je na połowy.*

19. Nakreśl siatkę i zbuduj model prostopadłościanu. Następnie rozetnij go wzdłuż przeciwległych krawędzi. Gdy nalepimy odpowiedni prostokątny kawałek papieru na ścianę przekroju, otrzymamy bryłę, której podstawą jest figura *zwana trójkątem.*

Trójkąt otrzymamy, łącząc parami trzy punkty, nprz. A, B i C,



Rys. 3.

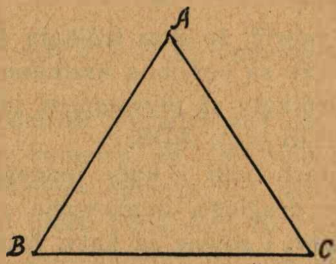
nie leżące na jednej (rys. 3) prostej; punkty A, B i C nazywamy *wierzchołkami*, odcinki AB, BC, CA — bokami trójkąta.

Zamiast wyrazu „trójkąt" używamy znaku △. Boki trójkąta tworzą linję łamaną zamkniętą, zwaną *konturem* trójkąta.

Suma boków trójkąta zowie się jego *obwodem*. Każdy trójkąt ma 3 kąty: 1, 2 i 3 i trzy boki. Mówimy, że każdy bok trójkąta leży naprzectw jednego z kątów, nprz. bok AC (rys. 3) leży naprzeciw kąta 2 (∠ ABC), bok BC — naprzeciw kąta 1 (∠ BAC) i t. d.; mówimy również, że bok trójkąta jest *przyległy* do kąta, nprz. bok AB jest przyległy do kątów: 1 (∠ BAC) i 2 (∠ ABC).

Zazwyczaj bok, na którym się trójkąt wspiera, nazywamy *podstawą* trójkąta. Na rys. 3 podstawą △ ABC jest bok AB; podstawą trójkąta może być którykolwiek z jego boków.

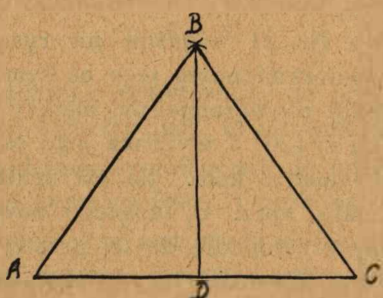
Jeżeli na ramionach kąta BAC (rys. 4), poczynając od wierzchołka jego A, odmierzymy dwa odcinki równe: AB i AC i popro-



Rys. 4.

wadzimy odcinek BC, wówczas otrzymamy △ BAC, w którym dwa boki są równe; trójkąt taki zowie się *równoramiennym*. Równe boki jego zowią się *ramionami*; a bok nierówny *podstawą tego trójkąta*.

20. Nakreśl trójkąt równoramienny, w którym: 1) podstawa równa się 4 cm, a ramię 5 cm, 2) podstawa równa się 7 cm, a ramię 9 cm.



Rys. 5

21. Nakreśl dowolny trójkąt równoramienny (rys. 5), następnie poprowadź prostą BD tak, by kąt ABD był równy kątowi DBC.

Uwaga. Prosta, poprowadzona przez wierzchołek kąta i dzieląca go na połowę, zowie się *dwusieczną kąta*.

Zegnij rysunek wzdłuż dwusiecznej BD. Co zauważysz?

a) podstawa AC w punkcie D przecięcia się z dwusieczną BD została podzielona na połowę (AD = DC).

b) Kąt BCD pokryje kąt BAD, co wyrażamy mówiąc, że kąt BCD jest równy kątowi BAD.

c) $\angle$ ADB = $\angle$ CDB, ponieważ zaś są to kąty przyległe, więc każdy z nich jest kątem prostym, inaczej prosta BD jest prostopadła do podstawy AC, co wyrażamy pisząc BD $\perp$ AC.

d) $\triangle$ CBD pokryje $\triangle$ BDA, czyli prosta BD dzieli cały trójkąt na dwie części równe.

Uwaga. Zamiast mówić, że dwa trójkąty są takie, że się wzajemnie pokrywają, albo, że są podobne kształtem i równe wielkością, mówimy, że takie trójkąty są *przystające*, lub też, że są równe.

Więc (rys. 5) $\triangle$ CDB = $\triangle$ ADB.

W równych trójkątach boki i kąty jednego są równe odpowiednim bokom i kątom drugiego, mianowicie równe boki, leżące naprzeciw równych kątów, i równe są kąty, leżące naprzeciw równych boków.

Zatem: a) dwusieczna kąta przy wierzchołku w trójkącie równoramiennym jest jednocześnie *środkową* (t. j. odcinkiem, łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku) i wysokością (t. j. prostą, poprowadzoną przez wierzchołek trójkąta prostopadle do jego podstawy) i

b) w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.

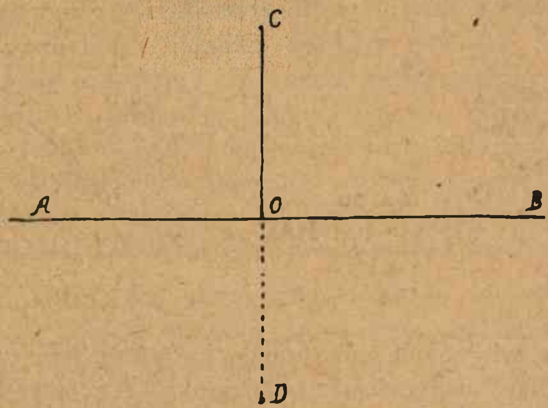
O trójkącie równoramiennym ABC mówimy również, że jest figurą symetryczną względem prostej BD, którą w tym wypadku nazywamy *osią symetrji*.

22. Na podstawie Nr. 21 wyjaśnij na rysunku, jak znaleźć w danym trójkącie równoramiennym jego oś symetrji.

23. Nakreśl trójkąt równoramienny, mający ramię równe 5 cm. i kąt przy wierzchołku = 120^0 i wyznacz jego oś symetrji.

24. Wskaż oś symetrji koła. Ile osi symetrji posiada koło?

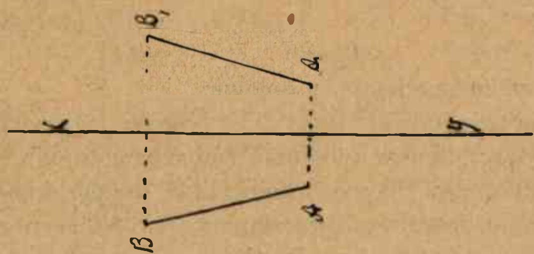
25. Jeżeli z punktu, nprz. C, leżącego zewnątrz prostej AB (rys. 6), poprowadzimy prostopadłą do tej prostej i przedłużymy ją na drugą stronę tak, by CO = OD, to gdy zegniemy rysunek wzdłuż AB, wówczas punkty C i D pokryją się.



Rys. 6.

Mówimy, że punkty C i D są *symetrycznie* położone względem osi AB.

26. Nakreśl odcinek symetryczny do danego odcinka AB względem danej osi symetrji *xy*. W tym celu szukamy punktów symetrycznych dla końców odcinka, t. j. dla punktów A i B. Punktami symetrycznemi niech będą A_1 i B_1. Łącząc punkt A_1 z punktem B_1 linją prostą, otrzymujemy odcinek A_1 B_1 jako symetryczny względem odcinka AB (rys. 7).



Rys. 7.

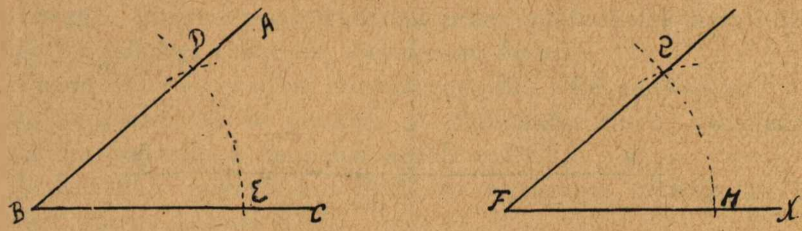
27. Nakreśl odcinek symetryczny do odcinka pochyłego, długości 4 cm, jeżeli oś symetrji jest: 1) pozioma, 2) pionowa.

28. Nakreśl odcinek symetryczny do odcinka poziomego, długości 3 cm, jeżeli oś symetrji jest: 1) pozioma, 2) pionowa.

29. Nakreśl odcinek symetryczny do odcinka pionowego, długości 5 cm, jeżeli oś symetrji jest: 1) pozioma, 2) pionowa.

30. Nakreśl przy pomocy cyrkla i linjału kąt równy kątowi danemu.

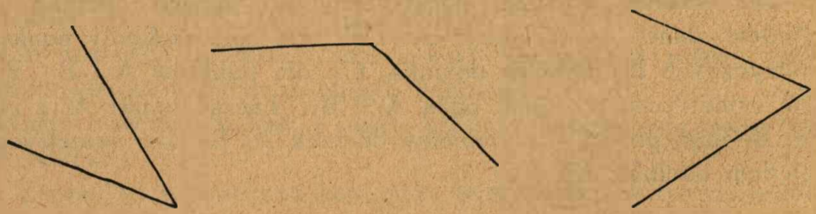
Niech będzie dany ∠ ABC (rys. 8).



Rys. 8.

Dookoła wierzchołka B danego kąta kreślimy dowolnym promieniem łuk DE, następnie dookoła punktu F prostej FX zataczamy tym samym promieniem łuk GH; wreszcie odmierzamy cyrklem równe łuki: łuk DE równy łukowi GH i punkt G łączymy z punktem F. Kąt GFH będzie równy kątowi ABC.

31. Nakreśl kąty równe kątom, poniżej podanym (rys. 9).

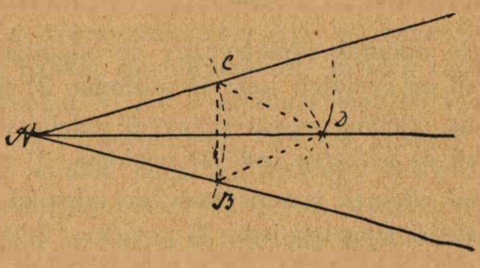


Rys. 9.

32. Dany kąt podziel na połowę.

Ażeby podzielić kąt dany na połowę, wystarczy zrobić go kątem przy wierchołku w trójkącie równoramiennym.

W tym celu (rys. 10) z wierzchołka A danego kąta przy pomocy cyrkla zataczamy dowolnym promieniem łuk, który przetnie ramiona kąta, nprz. w punktach C i B. Następnie z punktów przecięcia



Rys. 10.

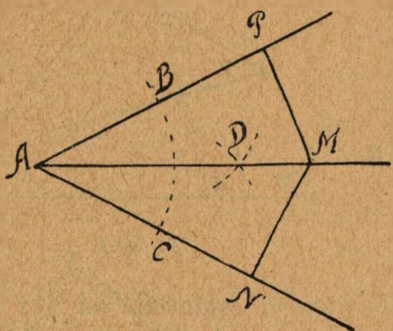
C i B opisujemy jednakowym promieniem łuki, przecinające się nprz. w punkcie D. (Jakiej długości powinien być ten promień, ażeby łuki się przecięły?). Wreszcie łączymy punkt D z punktem A.

Prosta AD dzieli dany kąt na połowę. Wyjaśnij dlaczego?

Gdy punkty C i B połączymy prostą, wówczas otrzymamy dwa trójkąty równoramienne (dlaczego równoramienne?) CAB i CDB, mające wspólną podstawę; dla obydwuch tych trójkątów prosta AD będzie wspólną osią symetrji i dwusieczną kąta A.

33. Nakreśl kąt ostry i podziel go na połowę. Następnie z dowolnego punktu nprz. M dwusiecznej AD (rys. 11) poprowadź prostopadłe MN i MP do ramion kąta.

Porównaj długość odcinków MN i MP. Wytnij całą figurę, zegnij ją wzdłuż dwusiecznej AM. Co zauważysz?



Rys. 11.

Każdy punkt dwusiecznej jest jednakowo odległy od ramion kąta i dwusieczna AM dzieli figurę PANM na dwie symetryczne części.

Z tego powodu dwusieczną kąta nazywamy osią symetrji kąta.

34. Dany kąt podziel na 4, 8, 16 równych części.

35. Nakreśl kąty przyległe i podziel każdy z nich na połowę. Jaki kąt utworzą dwusieczne tych kątów: prosty, ostry czy rozwarty? Dlaczego?

36. Nakreśl trójkąt równoramienny, który miałby podstawę równą 6 cm i kąt przy podstawie równy 35^0. Dzieląc kąt przy wierzchołku tego trójkąta na połowę, wyznacz jego oś symetrji.

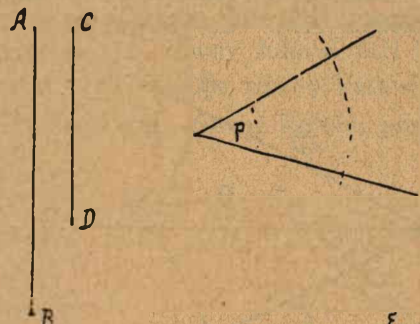
37. Nakreśl trójkąt prostokątny, mający przyprostokątne równe odpowiednio 3 cm i 4 cm; następnie nakreśl trójkąt symetryczny do niego względem jednej z przyprostokątnych, jako osi symetrji. Jaką figurę utworzą obydwa trójkąty razem?

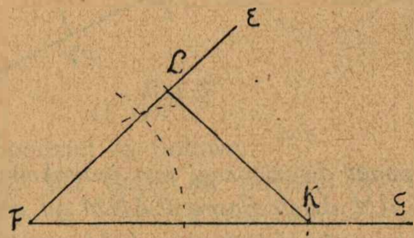
38. Nakreśl dowolny trójkąt i zewnątrz niego prostą, a następnie nakreśl trójkąt symetryczny do poprzedniego względem danej prostej, jako osi symetrji.

39. Wykonaj kilka modeli trójkątów, z których każdy miałby boki równe trzem odcinkom danym, nprz. 3 cm, 4 cm i 5 cm. Połóż następnie modele trójkątów na sobie. Co zauważysz?

Z trzech odcinków nie można zbudować różnych trójkątów, wszystkie bowiem trójkąty, z nich zbudowane, pokrywają się zupełnie, inaczej, że są przystające, czyli równe.

40. Nakreśl trójkąt, który miałby dwa boki równe dwom odcinkom danym i kąt utworzony przez te boki równy kątowi danemu.





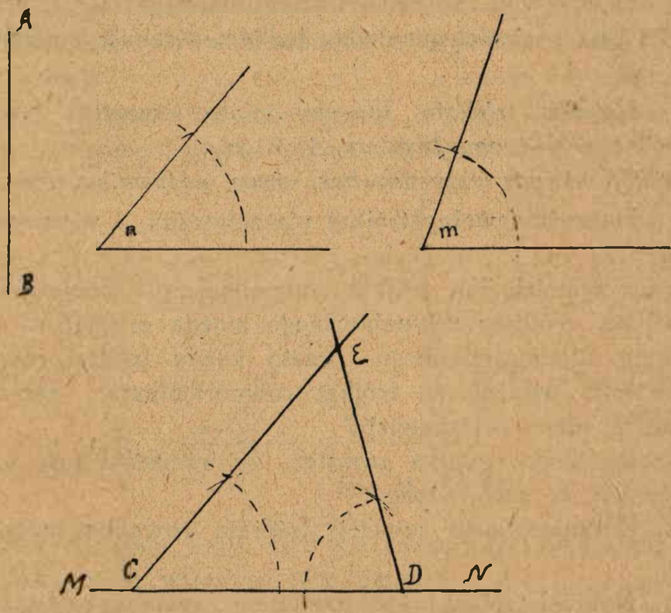
Rys. 12.

W tym celu (rys. 12) budujemy kąt EFG równy kątowi danemu p.; na ramionach ∠ EFG odmierzamy odcinki FK i FL, równe odcinkom AB i CD. Łącząc odcinkiem punkty L i K, otrzymamy żądany trójkąt.

Nakreśl jeszcze jeden trójkąt, który miałby 2 boki, równe tym samym 2 odcinkom, i ten sam kąt. Wytnij modele obydwu trójkątów i kładąc je na sobie, sprawdź, czy te trójkąty pokryją się.

Przekonywamy się, że dwa trójkąty, mające po 2 boki odpowiednio parami równe i po jednym równym kącie, zawartym pomiędzy temi bokami, są przystające, czyli równe.

41. Nakreśl trójkąt, mając dany bok i dwa kąty przyległe do tego boku.



Rys. 13.

W tym celu (rys. 13) na dowolnej prostej MN odmierzamy cyrklem odcinek CD = AB; poczem budujemy przy punktach C i D z jednej strony prostej MN kąty: $\angle$ ECD = $\angle$ n i $\angle$ EDC = $\angle$ m. Ramiona tych kątów CE i DE przetną tak w jednym punkcie E. Trójkąt CED jest żądanym trójkątem.

Wyjaśnij, czy na podstawie tych samych kątów i boku danego można zbudować trójkąt, odmienny od poprzedniego.

Dwa trójkąty, mające po jednym boku i po dwa kąty, przyległe do tego boku, parami równe, są przystające.

42. Nakreśl trójkąty, mając dane boki: 1) 4 cm, 3 cm, 2 cm; 2) 5 cm, 3 cm, 4 cm; 3) 8 cm, 3 cm, 5 cm; 4) 1 cm, 2 cm, 3 cm. Co spostrzegasz? Czy wszystkie zadania są wykonalne? Czy można wykreślić trójkąt, jeżeli suma 2 boków jest równa lub mniejsza od boku trzeciego?

Każdy chociażby największy, bok trójkąta musi być mniejszy od sumy dwu innych boków, każdy bok trójkąta musi być większy od różnicy dwu innych boków.

43. Czy można nakreślić trójkąt, którego boki wynosiłyby: 1) 10 cm, 4 cm, 9 cm; 2) 6 cm, 4 cm, 2 cm; 3) 6 cm, 1 cm, 2 cm?

44. Oblicz boki trójkąta równoramiennego, jeżeli obwód jego wynosi 25 cm, a różnica pomiędzy jednem z ramion i podstawą wynosi 1,7 cm.

45. Nakreśl trójkąty, któreby miały wszystkie boki równe, nprz. 1) 3 cm, 2) 4 cm, 3) 6 cm, 4) 2 cm.

Trójkąt, mający wszystkie boki równe, nazywa się równobocznym.

46. Nakreśl dowolny trójkąt równoboczny, i wyznacz jego osi symetrji.

Ile osi symetrji ma trójkąt równoboczny? Ponieważ każdy z wierzchołków trójkąta równobocznego można przyjąć za wierzchołek trójkąta równoramiennego, przeto każdy trójkąt równoboczny można *trojako* uważać za trójkąt równoramienny; zatem trójkąt równoboczny ma... osi symetrji?

Z powyższego wynika również, *że wszystkie kąty w trójkącie równobocznym, są sobie równe.*

47. Wyznacz osie symetrji trójkąta równobocznego o boku = 5 cm.

48. Nakreśl trójkąt równoramienny, mający podstawę równą 4 cm i ramię równe 6 cm i wyznacz jego oś symetrji.

49. Nakreśl trójkąt równoboczny o boku równym 8 cm i wyznacz jego osie symetrji.

50. Nakreśl koło i w niem cięciwę, następnie poprowadź w temże kole średnicę prostopadłą do cięciwy. Wytnij koło i model przegnij wzdłuż średnicy. Co zauważysz?

Średnica prostopadła do cięciwy dzieli ją i łuk, przez nią podparty na połowę. Dlaczego?

51. Nakreśl trójkąty, mając dane 2 boki i kąt, przyczem kąt winien być przeciwległym do jednego z tych boków. Rozważ 2 wypadki:

1) dany kąt jest przeciwległym do większego z danych boków,
2) dany kąt jest przeciwległym do mniejszego z danych boków.

Co zauważysz?

Zawsze można nakreślić trójkąt, mając dane 2 boki i kąt, leżący naprzeciwko większego boku.

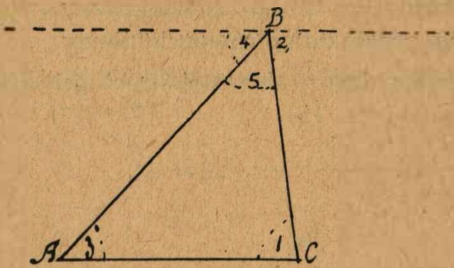
52. Nakreśl trójkąt, w którym jeden z kątów byłby rozwarty. Trójkąt taki nazywamy *rozwartokątnym.*

53. Nakreśl trójkąt, w którym jeden z kątów byłby prosty.

Trójkąt taki nazywamy *prostokątnym*, przyczem bok, leżący naprzeciw kąta prostego, nazywa się *przeciwprostokątną*, a boki, tworzące kąt prosty, *przyprostokątnemi*.

54. Nakreśl równoramienny trójkąt prostokątny i wyznacz jego oś symetrji.

55. Nakreśl dowolny trójkąt i przez jeden z wierzchołków poprowadź równoległą do przeciwległego boku (rys. 14).



Rys. 14.

Jak nazwiesz kąty: 1) 1 i 2 razem; 2) 3 i 4 razem?

Jaką znasz własność tych kątów?

Ponieważ $\angle 1 = 2$, $\angle 3 = \angle 4$, kąty zaś 2, 5, 4 razem tworzą kąt półpełny, więc *suma kątów trójkata wynosi 2d, czyli 180^0.*

56. Mając dane 2 kąty trójkąta, nakreśl kąt trzeci. Czy zadanie jest zawsze wykonalne?

57. Nakreśl dwie proste równoległe i trzecią przecinającą je i poprowapź dwusieczne 2 kątów wewnętrznych jednostronnych. Jaki kąt utworzą te dwusieczne: ostry, prosty czy rozwarty? Dlaczego?

58. Czy możnaby nakreślić takie trójkąty, które miałyby: 1) dwa kąty proste, 2) dwa kąty rozwarte? Dlaczego?

59. Jeden z kątów trójkąta ma 102^0, drugi zaś — 17^0. Oblicz kąt trzeci.

60. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych zawiera 57^0. Oblicz pozostałe kąty.

61. a) Oblicz kąty w trójkącie równobocznym. b) Podziel kąt prosty na trzy części równe.

Wskazówka. Na ramieniu kąta prostego budujemy dowolny trójkąt równoboczny, którego jednym z wierzchołków będzie wierzchołek kąta prostego.

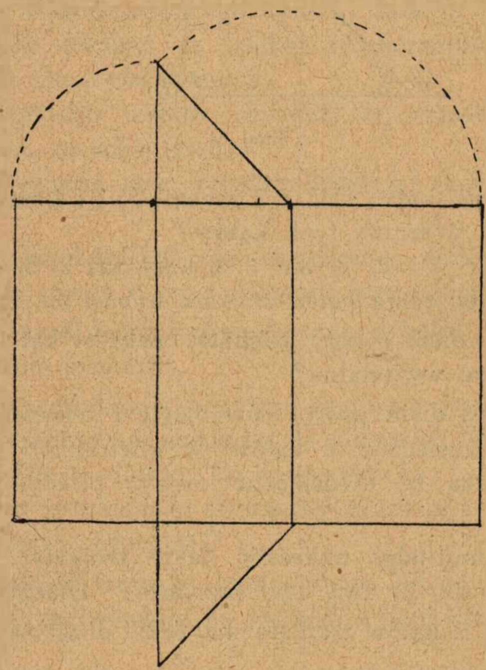
62. Czy możnaby nakreślić takie trójkąty, które miałyby następujące kąty: 1) 17^0, 20^0, 98^0; 2) 45^0, 137^0, 54^0.

63. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie $= 36^0$. Oblicz pozostałe kąty.

64. W trójkącie równoramiennym kąt przy wierzchołku $= 22^0\ 30'$. Oblicz pozostałe kąty.

65. Opisz graniastosłup trójkątny prosty, mający za podstawę: 1) trójkąt prostokątny, 2) trójkąt równoboczny, 3) trójkąt równoramienny, 4) trójkąt prostokątny równoramienny.

Nakreśl siatki każdego z poszczególnych graniastosłupów i zbadaj odpowiednie modele (rys. 15).



Rys. 15.

66. Opisz graniastosłup, w którym krawędzie boczne są pochyłe względem podstawy i którego podstawy są kwadrami (graniastosłup kwadratowy pochyły).

Ile ścian ma graniatosłup kwadratowy pochyły?

Czy wszystkie ściany są jednakowe?

Które ściany są jednakowe?

Jakie jest położenie wzajemne ścian przyległych i przeciwległych?

Ile wierzchołków i krawędzi ma ten graniastosłup?

Ile krawędzi zbiega się w jednym wierzchołku?

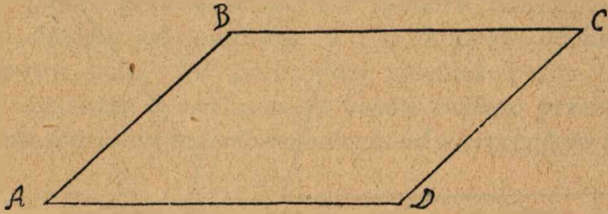
Czy i jakie krawędzie są jednakowe?

Wskaż krawędzie prostopadłe, pochyłe, wichrowate, równoległe.

Czy ściany boczne mają takie same kąty, jak kwadrat lub prostokąt?

Jak są skierowane względem siebie przeciwległe boki ścian bocznych?

Ściany boczne graniatosłupa pochyłego kwadratowego mają kształt niżej podany (rys. 16).



Rys. 16.

Czworokąt (rys. 16), mający dwie pary równoległych boków, nazywa się *równoległobokiem*.

Zmierz kąty równoległoboku i porównaj je ze sobą: co zauważysz?

Kąty, leżące naprzeciw siebie są równe, a przyległe do jednego boku są spełniające się (czyli, że suma ich wynosi 180°).

Z czterech listewek (dwu jednakowych dłuższych i dwu jednakowych krótszych) wykonaj model prostokąta, łącząc listewki, nprz. gwoździkami. Następnie zmień położenie listewek tak, by one nie tworzyły kątów prostych. Otrzymasz równoległobok.

Czem się różni równoległobok od prostokąta?

Które boki równoległoboku są równe?

Czy prostokąt jest równoległobokiem?

67. Nakreśl równoległobok, mający:

1) boki równe 0,9 cm i 5 cm i kąt przez te boki utworzony = 55°.

2) boki równe $1\frac{1}{2}$ dm i 0,6 dm i kąt przez te boki utworzony = 30°.

70. a) Nakreśl równoległobok, który miałby wszystkie boki równe 4 cm i kąt równy 60°.

Równoległobok, który ma wszystkie boki równe, a żaden kąt nie jest prostym, nazywamy *rombem* lub *ukośnikiem*.

b) Jakie własności mają kąty rombu?

c) Jeden z kątów rombu zawiera 50^0. Oblicz pozostałe kąty.

d) Zapomocą cyrkla i linijki zbuduj romb, mając dany bok i kąt.

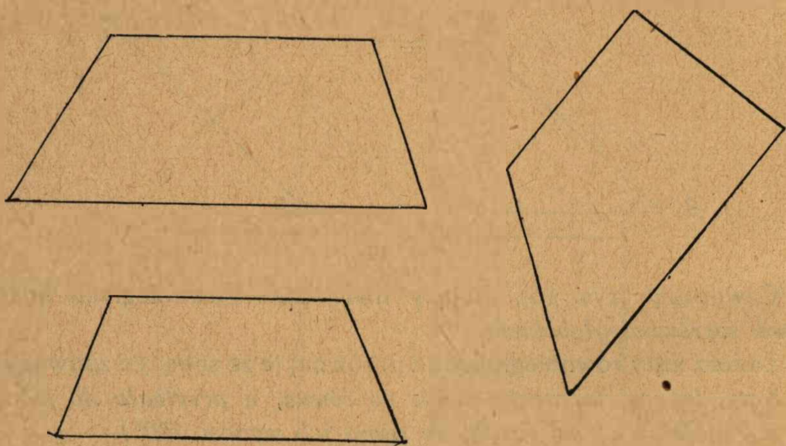
e) Nakreśl romb, który miałby wszystkie kąty proste. Czy można nakreślić taki romb?

Jak nazywa się taki romb?

f) Czy możnaby nakreślić romb, który miałby: 1) wszystkie kąty ostre, 2) wszystkie kąty rozwarte?

Kwadrat, prostokąt, romb są równoległobokami, gdyż przeciwległe boki są równe i równoległe.

68. Czworokąt, mający tylko jedną parę boków równoległych, nazywa się *trapezem* (rys. 17). Równoległe boki nazywamy podstawami trapezu.



Rys 17.

Nakreśl kilka trapezów.

Nakreśl kilka trapezów, z których jeden z nierównoległych boków jest prostopadły do podstaw.

Trapez taki nazywamy *prostokątnym*.

Nakreśl kilka trapezów, których nierównoległe boki są równe.

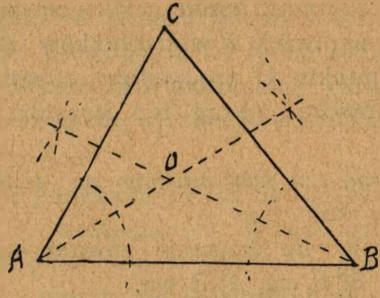
Trapez taki nazywamy *równoramiennym*.

69. a) Nakreśl osie symetrji odcinków: 4 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm.

Zmierz odległości jakiegokolwiek punktu osi symetrji od końców danego odcinka. Co zauważysz?

Jakikolwiek punkt osi symetrji danego odcinka jest jednakowo odległy od końców tego odcinka.

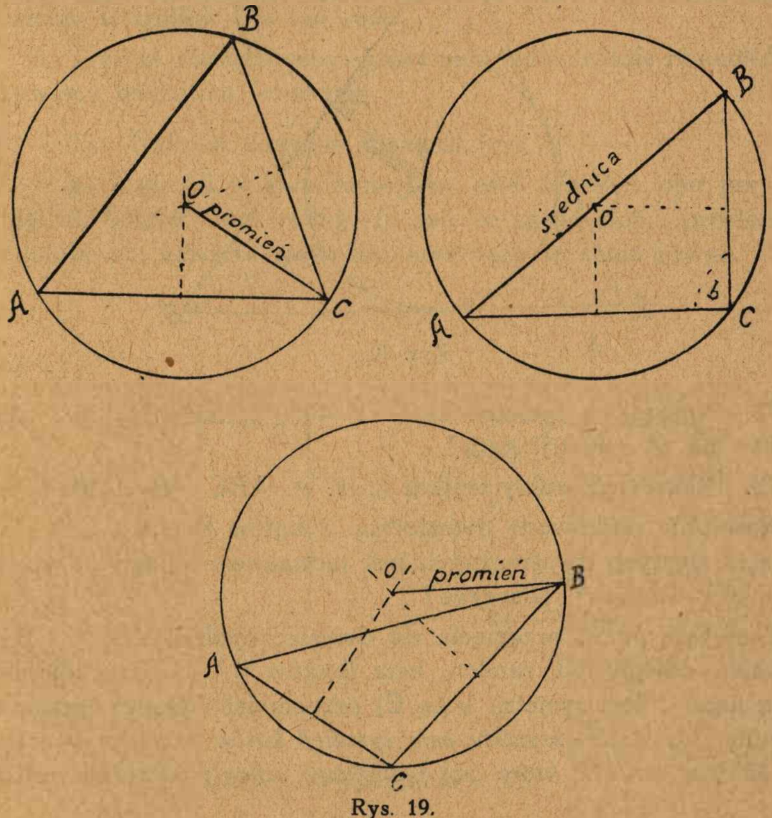
70. Nakreśl dowolny trójkąt ostrokątny, t. j. trójkąt, którego wszystkie kąty są ostre (rys. 18); następnie wykreśl osie symetrji dwu boków, nprz. AC i BC.



Rys. 18.

Czy punkt O przecięcia się tych osi będzie jednakowo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta, t. j. od punktów A, B i C? Dlaczego?

Ponieważ punkt przecięcia się osi symetrji boków AC i BC jest jednakowo odległy od punktów A i B (końców odcinka AB), przeto oś symetrji boku AB przechodzi również przez ten sam punkt O, więc ***wszystkie 3 osie symetrji boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest jednakowo odległy od wierzchołków trójkąta.***



Rys. 19.

Jeżeli przeto, połączymy punkt przecięcia się osi symetrji boków trójkąta z którymkolwiek z wierzchołków tego trójkąta nprz. O z C (rys. 19) i z punktu O promieniem równym odcinkowi OC zakreślimy okrąg, wówczas okrąg ten przejdzie przez wszystkie wierzchołki trójkąta.

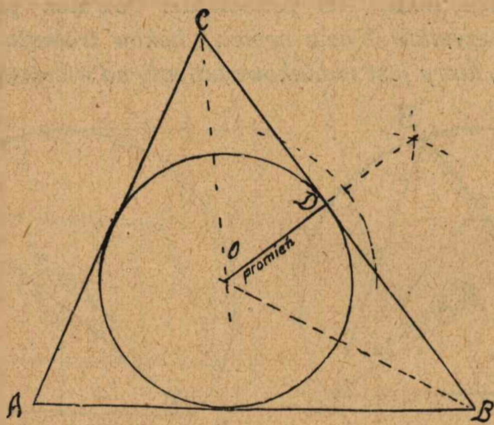
Mówimy, że *okrąg ten jest opisany na trójkącie*, lub też, że trójkąt jest *wpisany w koło.*

71. a) Opisz koło na trójkącie równobocznym, którego bok = 1) 4 cm, 2) 5 cm, 3) 6 cm, 4) 3 cm.

b) Opisz koło na trójkącie prostokątnym.

c) Opisz koło na trójkącie rozwartokątnym.

d) Opisz koło na trójkącie równoramienym; w każdym z powyższych wypadków sprawdź pomiarem, że punkt przecięcia się osi symetrji boków jest jednakowo odległy od wszystkich wierzchołków.



Rys. 20.

72. Nakreśl oś symetrji kąta: 1) 40^0, 2) 55^0, 3) 135^0. Jaką własność ma oś symetrji kąta?

73. Nakreśl dowolny trójkąt nprz. $\triangle$ ABC. (Rys. 20).

Następnie poprowadź dwusieczne 2 kątów B i A: Czy punkt przecięcia się tych dwusiecznych jest jednakowo odległy od wszystkich boków trójkąta? Dlaczego?

Ponieważ punkt przecięcia się dwusiecznych kątów A i B jest jednakowo odległy od ramion kąta (boków CA i CB), przeto dwusieczna kąta C (osi symetrji kąta C) przechodzi również przez ten sam punkt O; więc *wszystkie osie symetrji kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest jednakowo odległy od boków trójkąta.*

Jeżeli, przeto, z punktu O przecięcia się osi symetrji kątów trójkąta, spuścimy prostopadłą na jeden z boków (rys. 20) i z punktu O promieniem równym OD zakreślimy okrąg, wówczas otrzymany okrąg zwie się okręgiem *wpisanym w trójkąt*, o trójkącie mówimy, *że jest opisany na kole.*

a) Wyznacz punkt przecięcia się osi symetrji kątów w trójkącie: 1) ostrokątnym, 2) prostokątnym, 3) rozwartokątnym.

b) Sprawdź pomiarem w każdym z poszczególnych wypadków, że odległość tego punktu od wszystkich boków trójkąta jest jednakowa. Następnie wpisz w trójkąt koło.

74. Nakreśl dowolny trójkąt: 1) równoboczny, 2) równoramienny, 3) prostokątny, 4) różnoboczny.

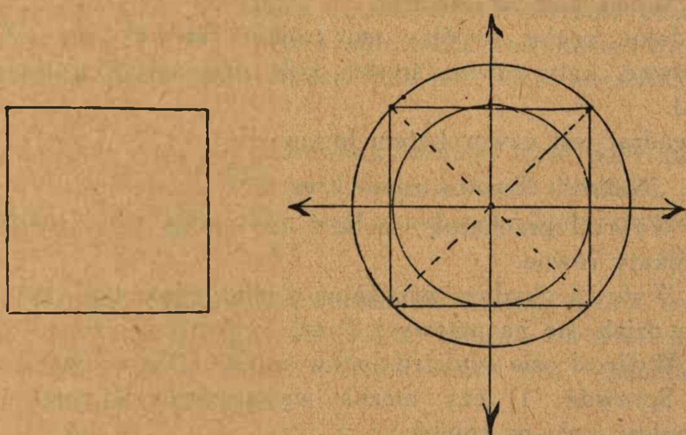
Na każdym z tych trójkątów opisz koła, następnie w te same trójkąty wpisz koła i zauważ, gdzie w każdym z tych trójkątów leżą środki kół wpisanych i opisanych.

Tylko w trójkącie równobocznym środek koła opisanego i wpisanego w trójkąt jest ten sam.

Trójkąt równoboczny, który jest jednocześnie równokątnym nazywamy trójkątem *foremnym*.

75. Nakreśl dowolny kwadrat (rys. 21).

a) Wykreśl w kwadracie tym osie symetrji obu par przeciwległych boków i udowodnij, że osie te są do siebie prostopadłe i że odcinki osi, zawarte wewnątrz kwadratu są sobie równe.



Rys. 21.

b) Wykreśl przekątną kwadratu i udowodnij, że przekątna ta dzieli kwadrat na 2 trójkąty równe. (Jakie to będą trójkąty?).

Uwaga. *Przekątną nazywamy odcinek, łączący przeciwległe wierzchołki czworokąta.*

c) Ile przekątnych ma kwadrat?

d) Wykreśl obydwie przekątne kwadratu i udowodnij, *że obie przekątne są równe*, są do siebie prostopadłe i dzielą się na połowy.

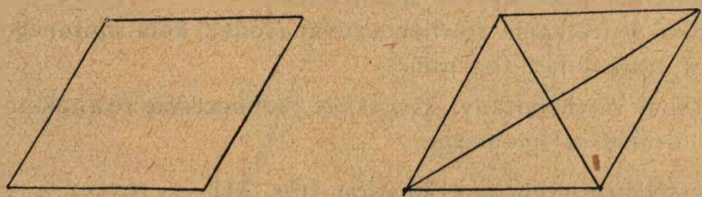
e) Wykreśl osie symetrji kątów kwadratu.

W jakim punkcie przecinają się osie symetrji kątów kwadratu? Czy w tym samym, co i przekątne?

f) Sprawdź, czy osie symetrji boków, tudzież osie symetrji kątów są także osiami symetrji całego kwadratu.

Wskazówka. Zbadaj model i przegnij wzdłuż osi.

Ile osi symetrji ma kwadrat?



Rys. 22.

g) Nakreśl okrąg, któryby przechodził przez wszystkie wierzchołki kwadratu, (opisać okrąg na kwadracie).

h) Wpisz koło w kwadrat.

i) Jakie cechy wspólne ma trójkąt równoboczny i kwadrat, (boki równe, kąty równe, środek koła opisanego i wpisanego jest ten sam).

Kwadrat jest czworokątem foremnym.

76. Nakreśl dowolny romb, (rys. 22).

a) Wykreśl przekątną rombu i udowodnij, że ona dzieli romb na 2 trójkąty równe.

b) Wykreśl obydwie przekątne rombu, udowodnij, że: 1) przekątne te dzielą się na połowy i 2) są do siebie prostopadłe.

c) Wykreśl osie symetrji kątów rombu. Co zauważysz?

d) Sprawdź: 1) czy można wpisać koło w romb i 2) czy można opisać koło na rombie.

Jeżeli można, to jak znaleźć środek i promień koła?

77. Nakreśl prostokąt i oznacz w nim osie symetrji.

Ile osi symetrji ma prostokąt?

Sprawdź: 1) czy można opisać koło na prostokącie i 2) czy można wpisać koło w prostokąt.

Znajdź środek i promień.

78. Nakreśl dowolny równoległobok, wytnij go i sprawdź na modelu, czy oś symetrji boku i oś symetrji kąta jest jednocześnie osią symetrji równoległoboku?

Ile osi symetrji ma równoległobok?

Czy można: 1) opisać koło na równoległoboku i 2) wpisać koło w równoległobok?

79. a) Nakreśl trapez równoramienny i na modelu sprawdź, czy trapez równoramienny jest figurą symetryczną względem osi.

Czy na trapezie równoramiennym można opisać koło?

Znajdź środek i promień?

b) Czy trapezy nierównoramienne są symetryczne względem osi?

Własności przekątnych w równoległobokach.

W równoległoboku przekątne dzielą się na połowy i każda z nich dzieli równoległobok na 2 części równe, przyczem w kwadracie i rombie każda z przekątnych jest osią symetrji dla drugiej (prostopadłe względem siebie), osią symetrji kątów i osią symetrji całej figury.

W prostokącie i kwadracie przekątne są sobie równe.

Koła można opisać na czworokątach, w których suma przeciwległych kątów wynosi 180°, t. j. na kwadratach, prostokącie i trapezie równoramiennym, przyczem środnica koła jest punkt przecięcia się osi symetrji boków.

Koła można wpisać w czworokąt, którego dwie pary przyległych boków są równe, a więc w kwadrat, romb i deltoid, przyczem środkiem koła wpisanego jest punkt przecięcia się osi symetrji kątów.

80. a) Prócz trójkątów i czworokątów istnieją figury, mające więcej, niż trzy (cztery) boki. Figury te zależnie od ilości kątów (boków) nazywamy pięciokątami, sześciokątami i t. d. Ogólnie zaś nazywamy te figury *wielokątami.*

Odcinek, łączący dwa wierzchołki wielokąta, nie leżące na jednym boku, zowie się *przekątną,*

b) Nakreśl dowolny pięciokąt i poprowadź wszystkie przekątne z jednego wierzchołka.

Ile przekątnych można poprowadzić w pięciokącie z jednego wierzchołka? Na ile trójkątów podzielony został pięciokąt?

81. Nakreśl dowolny: 1) sześciokąt, 2) siedmiokąt, 3) ośmiokąt, i poprowadź z jednego wierzchołka wszystkie przekątne.

Ile przekątnych można było poprowadzić w każdym z poszczególnych wypadków?

Na ile trójkątów podzielony został każdy z wielokątów?

Zauważyłeś, że z jednego wierzchołka w czworokącie można poprowadzić jedną przekątną (o trzy mniej, niż boków), w pięciokącie dwie przekątne (o trzy mniej, niż boków) i t. d. A więc wogóle: *W wielokącie z jednego wierzchołka można poprowadzić tyle przekątnych, ile dany wielokąt posiada boków mniej trzy.* Ilość zaś trójkątów, na jakie zostanie podzielony wielokąt przez przekątne, poprowadzone z jednego wierzchołka wynosi o dwa mniej, niż liczba boków wielokąta.

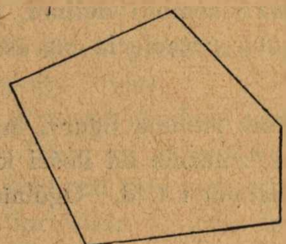
82. a) Wielokąt, który widzisz na rys. 23 nazywa się wielokątem *wypukłym.*

b) Wielokąt, który widzisz na rys. 24 nazywa sie wielokątem *wklęsłym.*

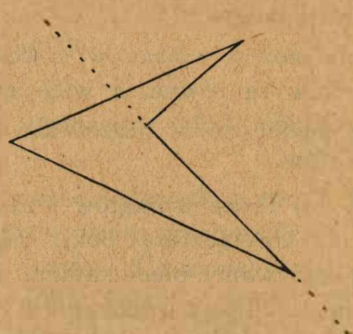
W dalszym ciągu mówiąc o wielokątach, będziemy mieli na myśli wielokąty wypukłe.

Suma boków wielokątów nazywa się obwodem.

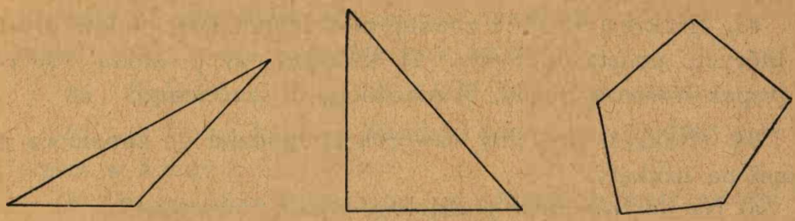
c) Nakreśl odcinki równe obwodom poniższych figur (rys. 23—27).



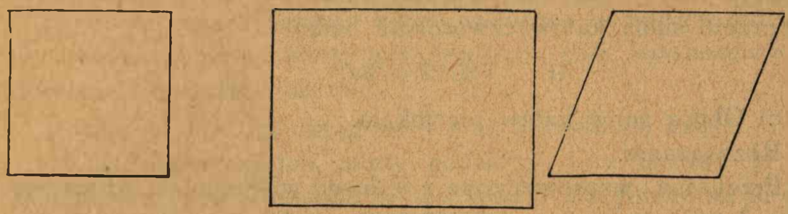
Rys. 23.



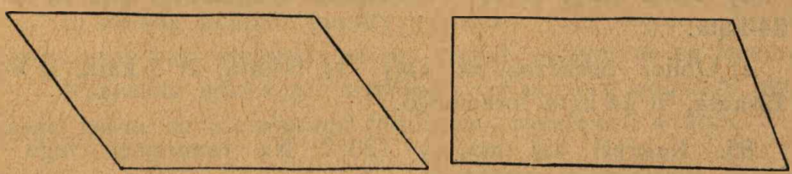
Rys. 24.



Rys. 25.



Rys. 26



Rys. 27.

d) Oblicz obwód kwadratu o boku = 8 m.

e) Pole ma kształt prostokąta, którego długość wynosi 17 m, zaś szerokość 7 m. Oblicz obwód tego prostokąta.

f) Ile trzebaby zapłacić za oparkanienie ogródka, mającego kształt prostokąta o wymiarach 15,5 m, i 7,5 m, jeżeli metr bieżący parkanu kosztuje obecnie... zł.?

g) Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 14,6 m, jego ramię ma 5,3 m. Oblicz podstawę?

h) Obwód kwadratu wynosi 18 m. Oblicz boki?

i) Obwód trójkąta równobocznego wynosi 7,2 dm. Oblicz jego boki.

j) Obwód trapezu równoramiennego wynosi 5,08 m; podstawy jego mają 2,4 m i 1,04 m. Oblicz pozostałe boki.

83. Nakreśl siatki i zbuduj modele graniastosłupów prostych, w których podstawą byłby: 1) kwadrat, 2) prostokąt, 3) romb, 4) trapez równoramienny, 5) pięciokąt, 6) sześciokąt.

84. Nakreśl dowolny czworokąt i podziel go zapomocą przekątnej na trójkąty.

a) Na ile trójkątów podzielony został czworokąt?

b) Oblicz sumę kątów czworokąta. Ponieważ kąty obydwu trójkątów, na jakie dzieli czworokąt przekątna, zarazem tworzą wszystkie cztery kąty czworokąta, suma zaś kątów w trójkącie = 180^0, przeto suma kątów czworokąta będzie:

$$180^0 . 2 = 360^0$$

c) Oblicz sumę kątów pięciokąta.

Rozwiązanie.

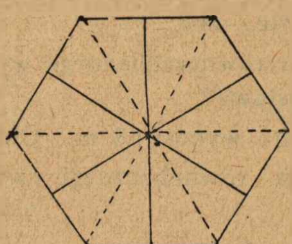
Przekątne, wyprowadzone z jednego wierzchołka, dzielą pięciokąt na 3 trójkąty (o 2 mniej, niż liczba boków), przeto będzie:

$$180^0 . 3 = 540^0$$

d) Oblicz sumę kątów: 1) 6-kąta, 2) 7-kąta, 3) 8-kąta, 4) 12-kąta, 5) 24-kąta.

e) Oblicz poszczególne kąty: 1) 6-kąta, 2) 7-kąta, 3) 8-kąta, 4) 12-kąta, 5) 24-kąta foremnego.

85. Nakreśl kąt mający 120^0? Na ramionach tego kąta, odmierz jednakowe odcinki, następnie, uważając końce tych odcinków za wierzchołki nowych kątów, nakreśl na nich znowu dwa kąty po 120^0, i odmierz na ich ramionach odcinki równe poprzednim. Uważając końce tych nowych odcinków za wierzchołki kątów, zbuduj na nich kąty po 120^0 i t. d. Otrzymasz sześciokąt, którego wszystkie boki i wszystkie kąty są równe. Sześciokąt taki nazywamy *sześciokątem foremnym* (rys. 28).



Rys. 28.

Wogóle wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, w którym wszystkie jego boki i wszystkie kąty sa równe.

86. Nakreśl: 1) 7-kąt, 2) 8-kąt, 3) 12-kąt foremny.

87. a) Opisz koła na każdym wielokącie, podanym w Nr. 86 i wpisz w każdy z nich koło.

b) Czy wielokąty foremne są figurami symetrycznemi względem osi?

c) Znajdź punkt przecięcia się osi symetrji boków?

d) Znajdź punkt przecięcia się osi symetrji kątów?

Osie symetrji boków i kątów wielokąta foremnego przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem koła wpisanego w wielokąt foremny i opisanego na nim.

88. a) Podziel okrąg na 4 i na 8 równych części.

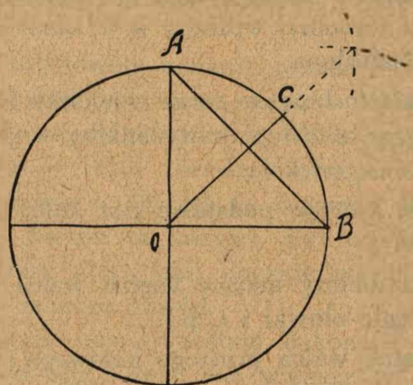
b) Połącz kolejno punty podziału. Czy cięciwy te są sobie równe, oraz czy wielokąty w ten sposób otrzymane są foremne?

c) Niech cięciwa AB (rys. 29) będzie bokiem kwadratu. Nakreśl: 1) bok 8-kąta foremnego, 2) 16-kąta foremnego.

89. a) Podziel okrąg na: 1) 6, 2) 3 części równe.

b) Połącz kolejno punkty podziału. Czy cięciwy te są sobie równe oraz czy wielokąty w ten sposób otrzymane są foremne?

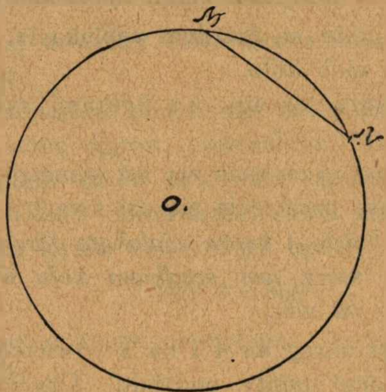
Wszystkie wielokąty, kreślone przy pomocy podziału okręgu na części równe są wielokątami foremnemi, wpisanemi w koło.



Rys. 29.

Uwaga. Ze środka koła O poprowadź promień OC prostopadły do cięciwy AB. Następnie przegnij figurę OBCA wzdłuż OC. Co zauważysz? (p. Nr. 50).

90. Niech MN (rys. 30) będzie bokiem 6-kąta foremnego. Nakreśl: 1) bok 12-kąta foremnego, 2) 24-kąta foremnego. (p. Nr. 50).



Rys. 30.

91. a) Nakreśl siatkę i zbuduj model graniastosłupa prostego, którego podstawą byłby sześciokąt foremny.

b) Na podstawie powyższego graniastosłupa opisz koło.

c) Nakreśl siatkę i zbuduj model graniastosłupa, którego podstawą byłby 12-kąt foremny, wpisany w to samo koło, co i podstawa poprzedniego graniastosłupa.

d) Nakreśl siatkę i zbuduj model graniastosłupa, którego podstawą byłby 24-kąt foremny, wpisany w to samo koło, co i podstawa poprzedniego graniastosłupa.

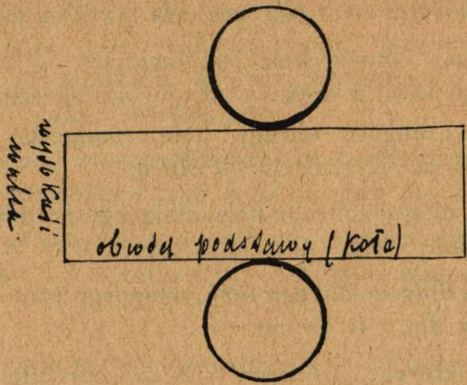
Budując graniastosłupy o coraz większej liczbie boków, możnaby zbudować graniastosłup, który miałby w podstawie wielokąt, nie wiele różniący się od koła.

Graniastosłup, którego podstawą jest koło, nazywa się *walcem prostym — kołowym*.

e) Wskaż przedmioty mające kształt walca (monety metalowe, okrągłe słupy, okrągłe ołówki i t. p.).

f) Nakreśl siatkę walca prostego kołowego i zbuduj jego model.

Uwaga 1. Siatka walca składa się z prostokąta (powierzchnia boczna walca), którego szerokość równa się wysokości walca, a długość równa się obwodowi koła, (który nazywa się w tym wypadku podstawą walca) i z 2 równych kół, dotykających przeciwległych boków prostokąta (rys. 31).



Rys. 31.

Uwaga 2. Aby zmierzyć obwód podstawy walca (koła), opasz nitką szczelnie walec raz wkoło przy podstawie. Długość kawałka nitki wyrazi obwód koła.

Gdy zaś zmierzysz średnicę podstawy i następnie podzielisz długość obwodu koła przez długość jego średnicy, przekonasz się, że obwód koła stanowi $^{22}/_{7}$ średnicy. Postępując w ten sam sposób z innemi modelami walców, zapomocą rachunku przekonasz się, że obwód *jakiegokolwiek* koła stanowi $^{22}/_{7}$ jego średnicy.

g) Nakreśl na papierze kilka kół o różnych promieniach; zmierz ich średnicę i obwody (zapomocą nitki) i przekonaj się zapomocą rachunku, że obwód każdego z kół stanowi $^{22}/_{7}$ średnicy (lub też 3,14 — z dokł. do 0,01).

Uwaga. Przy szczegółowem badaniu przekonasz się, że liczbę, wyrażającą, ile razy obwód koła jest większy od jego średnicy, można obliczyć tylko z pewną dokładnością. Matematyk holenderski Ludolf van Ceulen (1540 — 1610) pierwszy przeprowadził dokładniejsze badania w tej sprawie i obliczył, że stosunek długości okręgu do średnicy = 3,14159. Liczba ta nazywa się *ludolfiną* i oznacza się na piśmie grecką literą π (pi), jako początkową literą greckiego wyrazu „perymetr", co oznacza obwód.

Po raz pierwszy wyliczenie π zostało dokonane przez Archimedesa (286 — 212 przed Chr.), że π jest większe od $3\frac{10}{71}$ i mniejsze od $3\frac{1}{7}$.

Z powyższego wynika, że: *aby obliczyć obwód koła, należy pomnożyć jego średnicę przez* π.

Oznaczając obwód koła przez s i promień jego przez r, możemy napisać:

$$s = 2\pi r.$$

h) Przekonaj się, że π jest większe od 3, a mniejsze od 4.

Wskazówka. Obwód koła jest mniejszy od obwodu kwadratu opisanego na tem kole, a większy od obwodu sześciokąta wpisanego.

92. Oblicz długość okręgu koła, mającego promień $r =$: 1) 4 cm, 2) 0,55 m, 3) 2,3 cm, 4) 5,6 m.

93. Oblicz długość okręgu koła, mającego promień $r =$: 1) 7,6 cm, 2) 4,5 m, 3) 4 dm 5 cm, 4) 2 m 3 cm.

94. Oblicz długość okręgu koła, mającego promień $r =$: 1) $3\frac{1}{2}$ cm, 2) $2\frac{5}{11}$ m, 3) $3\frac{2}{3}$ dm, 4) $4\frac{5}{6}$ cm.

95. Koło, którego średnica = 2 m, obróciło się na pewnej drodze 400 razy; oblicz długość tej drogi.

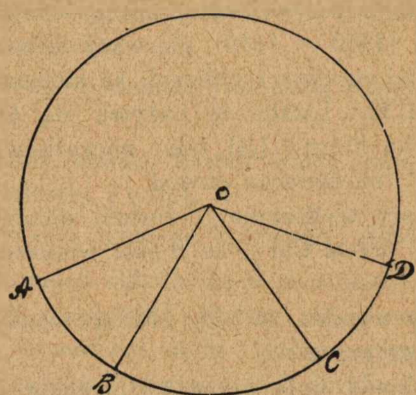
96. Przednie koła wozu, mające promień = 1 m 35 cm obraca się 25 razy na tej samej drodze, na której tylnie koło obraca się 18 razy. Oblicz obwód tylnego koła.

97. W kwadrat, którego bok = 12,4 dm wpisano koło. Oblicz różnicę pomiędzy obwodem kwadratu, a obwodem koła.

98. Oblicz obwód koła, opisanego na sześciokącie foremnym o boku = 14 cm.

99. Oblicz średnicę koła roweru, jeżeli koło to przy 120 obrotach na minutę w ciągu 12,5 minut zrobiło 1570,8 m.

100. Nakreśl okrąg, którego obwód: 1) byłby 2 razy większy od obwodu okręgu danego, 2) byłby 6 razy mniejszy od obwodu okręgu danego.



Rys. 32.

101. a) Nakreśl koło (rys. 32) dowolnym promieniem i odetnij dwa równe łuki AB = CD; następnie połącz końce tych łuków promieniami ze środkiem koła O, promienie OA i OB, OC i OD utworzą kąty, zwane *środkowemi*.

Kąt, którego wierzchołek leży w środku danego koła i którego ramiona są promieniami tego koła, nazywa się kątem środkowym.

Wytnij w powyższy sposób utworzone kąty: AOB i COD i połóż je na sobie. Co zauważysz? Kąty środkowe są równe.

Więc:

W tem samem kole równym łukom odpowiadają kąty środkowe równe i odwrotnie.

b) Przypomnij, jak mierzymy kąty? Kąty mierzymy wielkością kąta, przyjętego za jednostkę mierniczą kątów. Jednostką taką jest kąt będący 360-tą częścią kąta pełnego, którą zowiemy *stopniem kątowym* i oznaczamy, pisząc 1^0; $\frac{1}{60}$ część stopnia nazywamy *minutą* i oznaczamy pisząc 1'; $\frac{1}{60}$ część minuty nazywamy *sekundą* i oznaczamy piszą 1". Możemy więc napisać:

$$1^0 = 60' = 3600''.$$

c) Jeżelibyś podzielił okrąg koła na 360 równych części i następnie połączył punkty podziału ze środkiem koła, to coby się wówczas stało z kątem środkowym pełnym?

Łuk, odpowiadający stopniowi kątowemu, nazywa się *stopniem łukowym*.

Jeżeli więc kąt środkowy ma np. 30^0 stopni kątowych, wówczas kątowi temu odpowiada łuk, mający 30^0 stopni łukowych i t. p.

d) Nakreśl dwa koła, mające wspólny środek i różne promienie; (koła mające wspólny środek i różne promienie nazywamy *współśrodkowemi*); następnie nakreśl kąt środkowy, ramiona tego kąta odetną na obydwu okręgach współśrodkowych pewne łuki.

Czy ilości stopni łukowych, zawartych w każdym z tych łuków będą jednakowe? A długości ich?

Łuk, odpowiadający danemu kątowi bez względu na długość promienia, ma tyle stopni łukowych, ile stopni kątowych ma dany kąt; długość zaś łuku zależy od wielkości promienia koła i od wielkości kąta, którego ramiona odcinają na okręgu dany łuk.

Ażeby obliczyć długość takiego łuku, postępujemy w następujący sposób.

Nprz. znaleźć długość łuku 42^0 okręgu, nakreślonego promieniem (r), równym 35 cm.

Rozwiązanie:

Obwód koła wynosi:

$$2\pi r = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 35 = 219{,}8 \text{ cm};$$

ponieważ obwód koła odpowiada kątowi środkowemu pełnemu, t. j. mającemu 360^0, więc kątowi środkowemu mającemu 1^0, odpowiada łuk długości $\frac{219{,}8}{360}$ cm, zaś kątowi środkowemu 42^0 — łuk długości

$$\frac{219{,}8 \,.\, 42}{360}, \text{ a po skróceniu } \frac{109{,}9}{30} \,.\, 7 = 25{,}64 \text{ cm}.$$

102. Oblicz długość łuku, odpowiadającego kątowi środkowemu, mającemu: 1) 60^0 w kole o promieniu 1,8 cm ($\pi = 3{,}14$); 2) 72^0 w kole o promieniu $3\frac{1}{3}$ m ($\pi = \frac{355}{113}$); 3) $172^0 30'$ w kole o promieniu 0,24 dm ($\pi = 3{,}14$); 4) $24^0 22' 30''$ w kole o promieniu 19,2 m ($\pi = 3{,}14$).

103. Oblicz promień koła: 1) jeżeli długość łuku jego, mającego 105^0, wynosi 15,4 dm ($\pi = \frac{22}{7}$); 2) jeżeli długość łuku jego, mającego $22^0 30'$, wynosi 4,71 m ($\pi = 3{,}14$).

104. Oblicz, ile stopni, minut i sekund zawiera łuk, równoważny promieniowi.

Wskazówka. Oznaczając przez l długość łuku, przez r promień, mamy $x = \frac{180 l}{\pi r}$, ponieważ zaś $l = r$, więc będzie $x = \frac{180}{\pi}$.

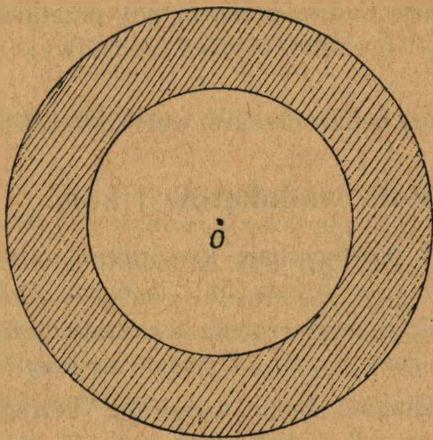
105. O ile cm powiększy się długość okręgu o promieniu = 32 cm, jeżeli powiększymy promień o 12 cm?

106. Promień koła = 3,6 m; co się stanie z długością okręgu, jeżeli zmniejszymy promień 3 razy? Oblicz długość okręgu.

107. Mała wskazówka zegara na wieży kościelnej ma 0,8 m długości. Jaką drogę przebiega koniec tej wskazówki w ciągu: 1) 1 godziny, 2) 3 godzin, 3) w ciągu doby?

108. Długości 2 okręgów współśrodkowych wynoszą: 25 m i 12,56 m. Oblicz szerokość pierścienia współśrodkowego.

Uwaga. Pierścieniem współśrodkowym nazywamy figurę ograniczoną obwodami kół współśrodkowych (rys. 33).



Rys. 33.

109. Długość zewnętrznej ścianki zbiornika, mającego kształt walca, wynosi 19 m, wewnętrznej zaś ścianki — 17 m. Oblicz grubość ścianki.

110. Obwód kuli ziemskiej wynosi około 40000 km. Oblicz średnicę i promień ziemi.

111. Oblicz długość 1^0 na równiku ziemi.

112. Pewne miasto leży pod $42^0 20'$ północnej szerokości, drugie zaś na tym samym południku pod $51^0 5'$ tej szerokości. Oblicz w km długość pomiędzy temi miastami.

113. a) Z czego się składa siatka walca?

b) Jaką powinna być szerokość i długość prostokąta, z którego składa się siatka walca?

c) Czy można wykreślić odcinek równoważny danemu okręgowi?

Uwaga. *Wykreślenie odcinka równoważnego okręgowi nazywa się rektyfikacją okręgu.*

Rozwiązanie tego zagadnienia nie da się uskutecznić dokładnie, gdyż, jak wiadomo, średnicą nie można dokładnie wymierzyć obwodu koła (inaczej mówiąc liczbę π, wyrażającą, ile razy obwód koła jest większy od jego średnicy, można obliczyć tylko z pewną dokładnością).

114. Nakreśl siatkę i zbuduj model walca, jeżeli promień podstawy ma 4 cm, a wysokość 20 cm.

115. Nakreśl siatkę i zbuduj model walca, jeżeli promień podstawy ma 6 cm, a wysokość 24 cm.

116. Jaką figurą będzie przekrój, gdy przetniesz walec prostopadle do podstawy: 1) wzdłuż cięciwy podstawy; 2) wzdłuż średnicy podstawy.

117. Jaką figurą będzie przekrój walca, rówroległy do podstawy?

Pola wielokątów i koła.

118. a) Oblicz powierzchnię kwadratów o bokach: 1) 5 cm, 2) 6 dm, 3) 8 m, 4) 2 cm 5 mm, 5) 2 m 6 cm, 6) 0,42 m, 7) $\frac{3}{5}$ m,

b) Co się stanie z powierzchnią kwadratu, jeżeli bok jego powiększymy: 2, 3, 4 razy i t. d. Wyjaśnij na przykładzie.

119. Oblicz długość boku kwadratu, którego powierzchnia = 1) 1 dm^2, 2) 1 m^2, 3) 4 dm^2, 4) 9 cm^2, 5) 16 mm^2, 6) 25 m^2, 7) 1 m^2 21 dm^2, 8) 1 m^2 60 mm^2.

120. Obwód ogrodu, mającego kształt kwadratu, wynosi 180 m. Oblicz powierzchnię ogrodu.

121. Ile dkm^2 zawiera plac, mający kształt prostokąta, jeżeli obwód jego wynosi 30 m 5 dm, a szerokość 6 m 25 cm?

122. Obwód placu, mającego kształt prostokąta, wynosi 330 m. Oblicz powierzchnię placu, jeżeli długość jego jest 2 razy większą od szerokości.

123. Obwód ogrodu, mającego kształt prostokąta, wynosi 480 m. Długość ogrodu jest 5 razy większa od szerokości. Jaką jest wartość tego ogrodu, licząc według cen bieżących.. za 1 ar?

124. Szerokość placu, mającego kształt prostokąta, wynosi 18 m. Oblicz długość tego placu, jeżeli jego powierzchnia wynosi 738^2.

125. Przemalowanie 4 ścian izby szkolnej, mającej 7 m długości i 6 m. szerokości, kosztowało 87,36 zł., licząc 0,8 zł. za 1 m^2. Oblicz wysokość izby.

126. Oblicz powierzchnię sześcianu, którego krawędź wynosi 2,2 m.

127. Wymiary prostopadłościanu są: 9 dm (długość), 4 dm (szerokość) i 2 dm (wysokość). Oblicz: 1) powierzchnię boczną, 2) powierzchnię całkowitą.

128. Ile trzebaby kartonu, aby zbudować model graniastosłupa prostego kwadratowego, którego krawędzie mają 3 cm i 6 cm długości?

129. Jak zmieni się pole prostokąta o bokach: $a = 12$ cm i $b = 4$ cm, jeżeli: 1) bok a zmniejszymy: 2, 3, 4, 6 razy; 2) bok b powiększymy: 2, 3, 4, 6 razy?

Jaka więc istnieje zależność pomiędzy: polem prostokąta i jego bokami?

130. a) Nakreśl dowolny prostokąt; wytnij model jego i następnie przetnij model ten wzdłuż przekątnej. Co otrzymasz?

b) Z 2 otrzymanych trójkątów ułóż trójkąt równoramienny.

Czy trójkąt równoramienny i prostokąt będą zajmowały taką samą powierzchnię? Ponieważ trójkąt równoramienny i prostokąt składają się z takiej samej ilości (2) trójkątów równych, więc zajmują jednakową powierzchnię, t. j. że są figurami *równoważnemi* wogóle.

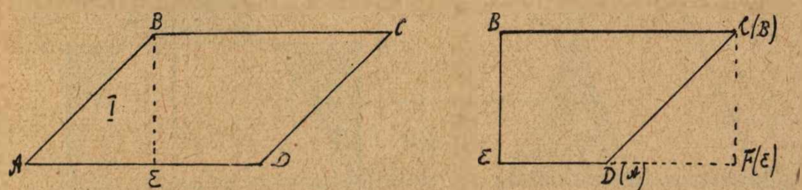
Dwa wielokąty nazywamy równoważnemi, jeżeli można je podzielić na jednakową liczbę części odpowiednio równych.

Czy figury równe są równoważnemi? A odwrotnie? Sprawdź.

131. Podziel dowolny kwadrat na 4 trójkąty i z otrzymanych trójkątów ułóż kilka figur.

132. Zrób to samo (zagadnienie Nr. 131) z prostokątem.

133. Nakreśl dowolny równoległobok, wytnij jego model i zamień go na równoważny mu prostokąt. (p. rys. 35).



Rys. 35.

Uwaga. 1) Równoległobok ABCD składa się z trójkąta ABE i trapezu EBCD; z takich samych części składa się prostokąt EBCF.

2) Odcinek BE, oznaczający prostopadłą odległość boków równoległoboku, nazywa się *wysokością równoległoboku.*

Prostokąt BECF i równoległobok ABCD (rys. 35) mają tę samą wysokość i jednakowe podstawy.

A ponieważ pole prostokąta = iloczynowi liczb, oznaczających podstawę i wysokość jego, więc i powierzchnia *równoległoboku = iloczynowi liczb, oznaczających podstawę i* wysokość *równoległoboku.*

134. Oblicz pole równoległoboku; mającego podstawę = 48,5 cm i wysokość = 12,7 cm.

135. Za 6900 zł. kupiono łąkę, mającą kształt równoległoboku, w cenie 125 zł. za 1 ar. Oblicz podstawę równoległoboku, jeżeli jego wysokość wynosi 48 m.

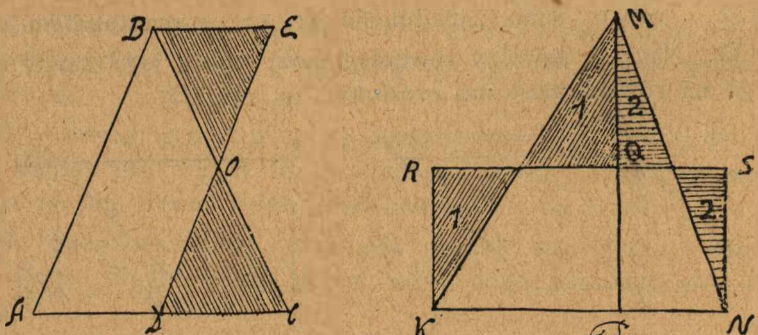
136. Oblicz: 1) powierzchnię boczną, 2) powierzchnię całkowitą graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o wysokości = 7 m, i podstawie = 8 cm, jeżeli krawędź boczna graniastosłupa ma 1,4 m.

137. Romb jest równoważny prostokątowi, którego powierzchnia wynosi 750 dm^2. Wysokość rombu = 6 m. Oblicz podstawę rombu.

138. Nakreśl dowolny romb; wytnij jego model i zamień go na równoważny prostokąt (p. Nr. 132).

139. Ogród, mający 13,42 *a* powierzchni, ma kształt rombu, którego obwód wynosi 114 m. Oblicz wysokość rombu.

140. Nakreśl dowolny trójkąt, wytnij jego model i zamień go: 1) na równoważny mu równoległobok; 2) na równoważny mu prostokąt (p. rys. 36).



Rys. 36

Wskazówka. 1) AD = DC, DE || AB, BE || AC; 2) MP ⊥ KN, MQ || QP. W pierwszym wypadku otrzymasz równoległobok ABED, który składa się z takich samych części, co i dany trójkąt, przytem wysokość jego = wysokości trójkąta, a podstawa = $\frac{1}{2}$ podstawy trójkąta; zaś w drugim wypadku otrzymamy prostokąt KRSN, który składa się z takich samych części, co i dany trójkąt, przytem podstawa jego = podstawie trójkąta, a wysokość = $\frac{1}{2}$ wysokości trójkąta.

b) jak oblicza się pole prostokąta?

c) Jak oblicza się pole równoległoboku?

d) Co trzeba zmierzyć w trójkącie, aby móc obliczyć jego pole?

e) Jak więc obliczyć pole trójkąta?

Pole trójkąta równa się połowie iloczynu wartości liczebnych podstawy i wysokości trójkąta (względem tej samej jednostki mierniczej).

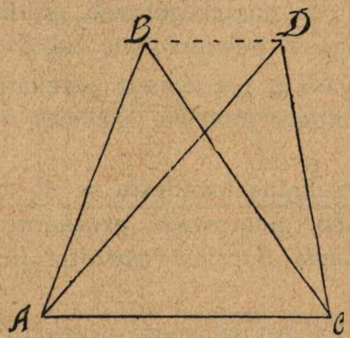
f) Wyraź powyższą regułę zapomocą wzoru.

g) Od czego zależy wielkość powierzchni trójkąta? Pole trójkąta zależy (jest funkcją) od podstawy i wysokości.

Ponieważ pole trójkąta jest $\frac{1}{2}$ iloczynów wysokości i podstawy, zatem, jeżeli jeden z czynników (podstawa lub wysokość) się nie zmienia i pole ma zostać to samo, to nie może się zmienić dany czynnik (wysokość względnie podstawa), innemi słowy:

Trójkąty równoważne, mające podstawy równe, mają wysokości odpowiednio równe, lub też trójkąty równoważne, mające wysokości równe, mają podstawy odpowiednio równe.

h) Dany trójkąt zamień na inny równoważny mu [o tej samej podstawie (rys. 37).



Rys 37.

141. Zamień równoległobok na równoważny mu trójkąt.

142. Zamień trójkąt dany na równoważny mu trójkąt prostokątny.

143. Dany trójkąt zamień na równoważny mu trójkąt równoramienny.

144. Oblicz pola trójkątów, mających:

a) podstawę	14 cm	i odpowiednią wysokość		7 cm;
b) „	15 cm	„	„	5 cm;
c) „	3 dm 5 cm	„	„	14 cm.

145. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego, mają: 17 m i 24 m. Oblicz powierzchnię trójkąta.

146. Pole trójkąta wynosi 1344 m^2. Oblicz jego wysokość, jeżeli podstawa wynosi 42 m.

147. Oblicz podstawę trójkąta, równoważnego równoległobokowi o wymiarach (wysokość i podstawa): 124 m i 87,6 m, jeżeli wysokość trójkąta = 96 m.

148. Zamień trójkąt o podstawie = 8 cm i wysokości = 5 cm, na równoważny mu trójkąt o podstawie dwa razy mniejszej.

149. Zamień trójkąt o podstawie = 15 cm i wysokości = 4 cm, na równoważny mu trójkąt o wysokości dwa razy większej.

150. Jak się zmieni powierzchnia trójkąta:

a) jeżeli jego wysokość powiększymy 2 razy, a podstawę — 3 razy?

b) jeżeli jego wysokość powiększymy 6 razy, a podstawę zmniejszymy 2 razy?

151. Nakreśl siatkę dowolnego graniastosłupa prostego, mającego za podstawę:

a) trójkąt prostokątny c) trójkąt równoboczny

b) „ „ równoramienny d) „ różnoboczny.

Zbuduj model każdego z poszczególnych graniastosłupów i oblicz: 1) powierzchnię boczną, 2) powierzchnię całkowitą każdego z nich.

152. Nakreśl kwadrat, poprowadź przekątne i wykaż, że *pole kwadratu równa się połowie iloczynu wartości liczebnych obu przekątnych.*

Wskazówka. Przekątne kwadratu są do siebie prostopadłe.

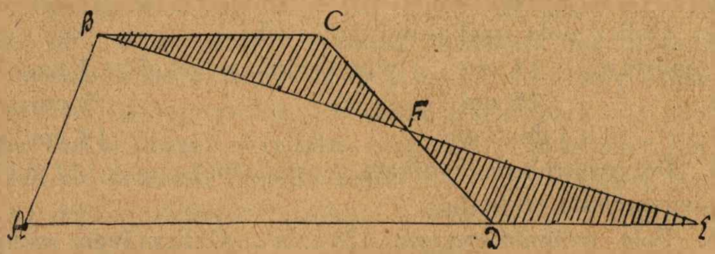
153. Nakreśl romb, poprowadź przekątne i wykaż, że *pole rombu równa się połowie iloczynu wartości liczebnych obu przekątnych.*

Wskazówka. Jaka jest własność przekątnych rombu?

154. Oblicz powierzchnię kwadratu, jego przekątna ma $2\frac{2}{3}$ m.

155. Oblicz pole rombu, którego przekątne = 0,4 m i 0,7 m.

156. Pole rombu wynosi 15,3 m^2, jedna zaś z przekątnych = $= 1\frac{8}{9}$ m. Oblicz długość drugiej przekątnej.



Rys. 39.

157. a) Nakreśl trapez (rys. 39); następnie połącz wierzchołek B ze środkiem F boku CD i przedłuż BF do przecięcia się z przedłużoną podstawą AD w punkcie E.

Z jakich części składa się trapez ABCD?

Z jakich części składa się △ ABE?

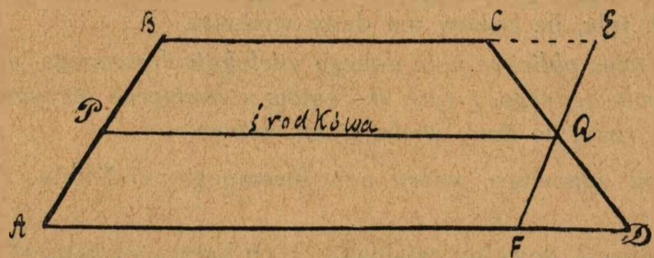
Czy części składowe trapezu i trójkąta są sobie równe?

Ponieważ dany trapez i trójkąt ABE podzielone są na jednakową ilość części równych, więc są równoważne, przytem trójkąt ma taką samą wysokość, jak trapez, podstawa zaś jego równa się sumie podstaw trapezu (dlaczego?).

b) Co należy zmierzyć w trapezie, aby móc obliczyć jego powierzchnię?

Pole trapezu równa się połowie iloczynu z sumy podstaw przez wysokość.

c) Nakreśl dowolny trapez i połącz zapomocą odcinka środki boków nierównoległych (rys. 40) (odcinek ten nazywa się *środkową*)



Rys. 40.

Wykaż, że środkowa $= \frac{1}{2}$ *sumy podstaw trapezu.*

Pole trapezu $=$ *iloczynowi środkowej przez wysokość.*

158. Oblicz pole trapezu, w którym podstawy $= 3\frac{1}{4}$ cm i 4,5 cm, wysokość zaś $= \frac{3}{4}$ dm.

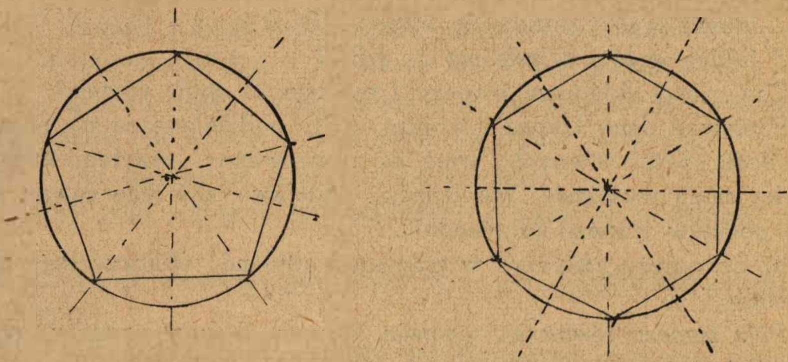
159. Ile należałoby zapłacić za grunt, mający kształt trapezu, w którym podstawy $= 127{,}4$ m i 186,6 m i wysokość $= 18{,}5$ m, jeżeli cena 1 ha wynosi 1650 zł?

160. Wysokość trapezu $= 56$ m. Trapez ten jest równoważny kwadratowi, którego bok jest równy wysokości trapezu. Oblicz podstawy trapezu, jeżeli jedna z nich jest 3 razy mniejsza od drugiej.

161. a) Każdy wielokąt foremny ma punkt, który jest jednakowo odległy od wierzchołków jego, jako też i od boków.

Punkt ten jest środkiem koła opisanego na wielokącie, a zarazem środkiem koła weń wpisanego (rys. 41).

Jeżeli punkt ten połączymy z wierzchołkami danego wielokąta zapomocą prostych, wówczas rozłożymy wielokąt na szereg trójkątów



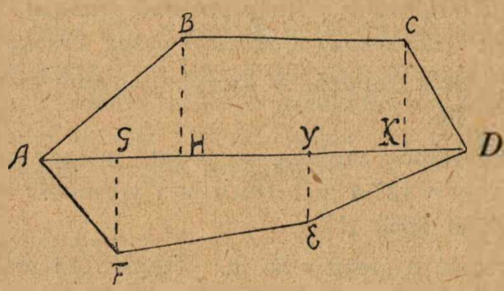
Rys 41.

równoramiennych, przystających (dlaczego), a więc i równoważnych, będzie ich tyle, ile boków ma dany wielokąt.

Aby więc obliczyć pole danego wielokąta foremnego, wystarczy obliczyć pole jednego z tych trójkątów i następnie otrzymane pole wziąć tyle razy, ile dany wielokąt ma boków.

Wyraź zapomocą wzoru pole foremnego: 1) 5-kąta, 2) 6-kąta, 3) 8-kąta.

c) Nakreśl dowolny wielokąt: 1) 6-kątny, 2) 8-kątny i oblicz jego pole.



Rys 42.

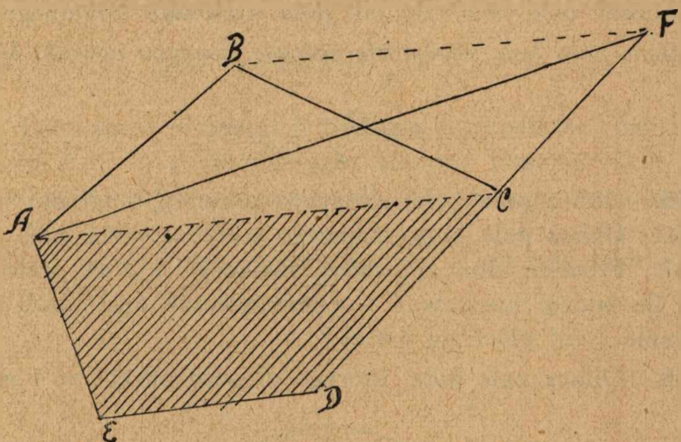
162. Ażeby zmierzyć powierzchnię dowolnego wielokąta, prowadzimy największą przekątną (rys. 42) i dzielimy wielokąt zapomocą prostopadłych, wykreślonych z wierzchołków jego do tej przekątnej, na trójkąty prostokątne i trapezy. Następnie zmierzywszy odcinki: AH, HG, GY, KY, KD, jako też prostopadłe BH, GF, CK, YE i zapomocą rachunku znajdziemy wartość powierzchni każdej ze składowych części danego wielokąta.

Sposób ten stosuje się często w miernictwie, gdy chodzi o zmierzenie pola wielokątnego.

Można jednakowoż zmienić dany wielokąt na równoważny trójkąt (rys. 43).

Niech będzie dany nprz. pięciokąt ABCDE; prowadzimy przekątną AC i do niej przez wierzchołek B równoległą aż do przecięcia się jej z przedłużeniem DC w punkcie F. Poprowadziwszy następnie odcinek AF, otrzymamy czworokąt AFDE równoważny danemu 5-kątowi. (Dlaczego?)

W ten sposób zamieniliśmy 5-kąt na równoważny mu czworokąt. W podobny sposób możemy zamienić czworokąt na równoważny mu trójkąt.



Rys. 43.

Pomiar figur nieforemnych można uskutecznić również zapomocą przezroczystego papieru (kalki), pokrytego siatką milimetrów kwadratowych. Mianowicie zakrywamy tą siatką całą figurę i rachujemy, ile kwadracików milimetrowych mieści się na polu danej figury.

163. Nakreśl dowolny: 1) 5-kąt foremny, 2) 8-kąt foremny i oblicz pole wielokąta zapomocą rachunku, następnie zmierz pole kalką i porównaj obydwa wyniki.

164. a) Nakreśl koło dowolnym promieniem; wpisz w to koło 6 kąt foremny, oblicz obwód tego wielokąta i obwód koła, następnie oblicz różnicę pomiędzy obwodem koła, a obwodem 6-kąta. Co zauważysz?

b) W to samo koło wpisz 12-kąt foremny i jak poprzednio oblicz różnicę pomiędzy obwodem koła, a obwodem 12-kąta. Następnie porównaj tę różnicę z poprzednio otrzymaną. Co zauważysz?

Wpisując w to samo koło wielokąty: 24-kąt, 48-kąt i t. d. i porównywując, jak poprzednio różnice pomiędzy obwodem koła, a obwodami wielokątów, przekonywasz się, że boki wielokątów, coraz to ściślej przylegają do danego koła, i że różnica, tak pomiędzy obwodem koła i obwodem wielokątów, jak i wielkością pól koła i wielokątów jest tem mniejsza, im więcej boków ma wielokąt. Możemy więc z pewnym przybliżeniem powiedzieć, że koło jest to wielokąt foremny o bardzo wielkiej ilości boków i że obwód tego wielokąta stanowi w przybliżeniu obwód koła. Wskutek tego możemy obliczać pole koła tak, jak pole wielokąta foremnego.

Zatem pole koła równa się połowie iloczynu obwodu koła przez promień

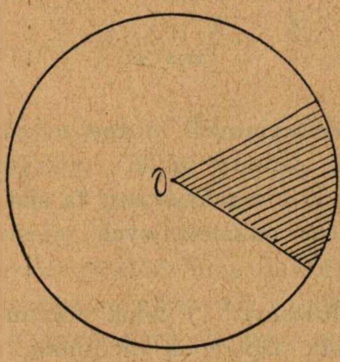
$$P = \frac{2\pi r}{2} = \pi r?$$

165. Oblicz pole koła, mającego promień = 1,4 m.

166. Oblicz pole koła, mającego średnicę = 1,2 m.

167. Promień dna zbiornika, mającego kształt walca wynosi 1,2 m. Ile będzie kosztować wycementowanie dna, jeżeli za wycementowanie 1 m^2 płaci się 4,8 zł.?

168. Oblicz pole koła, którego długość okręgu = 4 m.



Rys. 44.

169. Oblicz pole pierścienia kołowego, utworzonego przez koła o promieniach: 5 m i $2\frac{1}{2}$ m.

170. Oblicz powierzchnię koła równoważnego sumie kół o promieniach: 25 dm i 7 m.

171. a) część koła ograniczoną dwoma promieniami i łukiem nazywamy *wycinkiem kołowym* (rys. 44).

Bardzo mały wycinek koła można uważać z pewnem przybliżeniem za trójkąt równoramienny, którego podstawą jest łuk a wysokością promień. Większy zaś wycinek możemy uważać jako sumę takich małych wycinków. Aby więc obliczyć pole wycinka, należy obliczyć sumę pól wszystkich trójkącików równoramiennych, z których się składa wycinek. Oznaczając przez a podstawy tych trójkącików, a promień koła przez r, będziemy mieli:

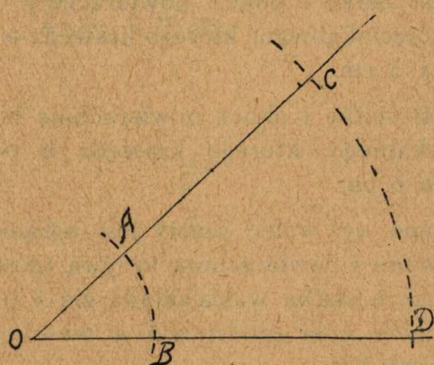
$$\text{pole wycinka} = \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \ldots.$$

lub też:

$$\text{pole wycinka} = \frac{r}{2}(a + a + a + \ldots..).$$

Lecz suma wszystkich podstaw trójkącików równoramiennych $a + a + a + \ldots..$ w przybliżeniu stanowi długość łuku. Zatem pole wycinka *równa się iloczynowi długości łuku przez połowę promienia*

$$W \text{ (pole wycinka)} = \frac{l \cdot r}{2} \quad (l \text{ długość łuku}).$$



Rys. 45.

b) Oblicz pole wycinka, utworzonego przez dwa promienie, nachylone do siebie pod kątem 75^0 i równe 5 cm.

c) Z wierzchołka O kąta $AOB = 50^0$ zakreśl dwa łuki promieniami 3,1 m i 1 m, przecinającemi ramiona kąta w punktach A i B, C i D. Oblicz pole figury ABCD (rys. 45).

d) Oblicz pole odcinka kołowego, jeżeli kąt środkowy, odpowiadający cięciwie, odległej od środka o 3,46 cm ma 60^0, przyczem promień koła ma 4 cm.

e) Oblicz pole wycinka kołowego o średnicy = 1,2 dm, którego kąt środkowy ma 120^0.

172. Oblicz całkowitą powierzchnię sześcianu o krawędzi: 1) 0,6 dm, 2) 64 mm. Nakreśl siatkę.

173. Oblicz boczną i całkowitą powierzchnię graniastosłupa prostego kwadratowego, jeżeli:

a) bok podstawy	3 cm	i krawędź boczna	4,6 cm
b) „ „	2,5 cm	„ „	7,5 cm
c) „ „	0,8 dm	„ „	5 cm

Nakreśl siatki.

174. Oblicz boczną i całkowitą powierzchnię prostopadłościanu o wymiarach:

a) 2 m, 1,5 m i 4 m; b) 0,5 dm, 4,5 cm i 12 cm; c) 1,4 dm, 2,54 cm i 7 cm.

175. Nakreśl siatkę i oblicz powierzchnię boczną graniastosłupa sześciokątnego foremnego, którego krawędź u podstawy = $\frac{2}{3}$ m, a krawędź boczna 1,5 m. Nakreśl siatkę i zbuduj model.

176. Nakreśl siatkę i oblicz powierzchnię boczną graniastosłupa foremnego pięciokątnego, którego krawędź u podstawy = 2 cm, a krawędź boczna 3 cm.

177. Nakreśl siatkę i oblicz powierzchnię boczną graniastosłupa foremnego 8-kątnego, którego krawędź u podstawy = 8 cm, a krawędź boczna 6 cm.

178. Wiadomo, że walec prosty jest ograniczony dwoma kołami jako podstawami i powierzchnią krzywą (powierzchnią boczną, inaczej pobocznicą), a siatka walca składa się z prostokąta, którego podstawą jest obwód koła (podstawy) a wysokością — wysokość walca i z 2 równych kół.

Więc powierzchnia walca, podobnie jak powierzchnia graniastosłupa, składa się: z 2 podstaw i pobocznicy. A ponieważ pobocznica walca jest prostokątna, którego pole równa się iloczynowi obwodu podstawy (koła) $= 2\pi r$ i wysokości walca (h), podstawą zaś walca jest koło, którego pole $= \pi r^2$, więc całkowita powierzchnia walca P:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h.$$

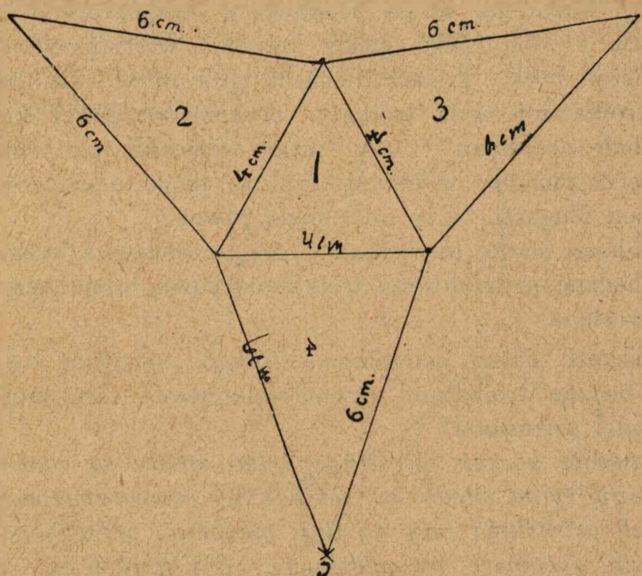
179. Oblicz powierznię boczną walca (pobocznicę), a następnie powierzchnię całkowitą, jeżeli promień podstawy = 5 cm, wysokość walca 4,2 dm.

180. Ile należałoby zapłacić za pomalowanie kolumny, mającej kształt walca o wysokości = 7,5 m i średnicy podstawy = 0,9 m, jeżeli za pomalowanie 1 m^2 płacono 1,1 zł.?

181. Wysokość zbiornika, mającego kształt walca, którego średnica podstawy = 7 m wynosi 1,5 m. Ile należałoby zapłacić za wycementowanie wewnątrz zbiornika, licząc 1,6 zł. za 1 m^2?

182. Oblicz promień podstawy i całkowitą powierzchnię walca, jeżeli wysokość walca = 2 dm i powierzchnia boczna = 33 dm^2.

183. Ile m^2 trzebaby blachy na obicie walca o średnicy = 1 m i wysokości = 15,7 m.



Rys. 46.

184. Nakreśl trójkąt (1) równoboczny o boku = 4 cm (rys. 46); na każdym boku tego trójkąta nakreśl trójkaty równoramienne o ramionach = 6 cm. Otrzymasz siatkę bryły, zwanej ostrosłupem trójkątnym. Obracając trójkąty 2, 3 i 4 naokoło boków, wspólnych z trójkątem (2) dotąd, dopóki wierzchołki tych trójkątów nie zbiegną się w jednym punkcie *S*, otrzymasz model ostrosłupa.

Ile ścian ma ostrosłup trójkątny?

Ile krawędzi i wierzchołków ma ostrosłup?

Krawędzie, zbiegające się w jednym punkie (*S*), zwanym wierzchołkiem ostrosłupa, nazywamy *krawędziami bocznemi*, pozostałe zaś — *krawędziami u podstaw*.

Ściany boczne ostrosłupa są zawsze trójkątami. Podstawą ostrosłupa może być trójkąt, czworokąt i wogóle wielokąt, zależnie od ilości boków podstawy, mówimy o ostrosłupie *trójkątnym*, *czworokątnym* i wogóle *wielokątnym*.

185. Nakreśl siatkę ostrosłupa trójkątnego, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku = 6 cm, a pozostałe ściany trójkątami równoramiennemi o ramieniu = 10 cm. Zbuduj model ostrosłupa.

186. a) Nakreśl dowolny trójkąt: 1) równoboczny, 2) równoramienny, 3) różnoboczny i w każdym z nich naznacz środek koła wpisanego. Następnie ustaw pionowo w środku pręcik o długości nprz. 10 cm. i połącz jego górny koniec z wierzchołkami trójkąta przy pomocy nitek. Zmierz długości tych nitek. Co zauważysz? Jakiemi trójkątami będą trójkąty, ograniczone przez każdą parę nitek i bok podstawy? Czy nitki wszystkie są sobie równe? Ustaw pręcik pionowo w innym punkcie trójkąta, poprowadź nitki i zmierz ich długości. Czy nitki będą równe?

b) Nakreśl siatkę ostrosłupa, którego podstawą byłby kwadrat a ściany boczne jednakowemi trójkątami równoramiennemi i zbuduj model ostrosłupa.

c) Nakreśl siatkę ostrosłupa, którego podstawą byłby romb, a ściany boczne trójkątami równoramiennemi. Czy mógłbyś zbudować model ostrosłupa?

Krawędzie boczne ostrosłupa tylko wtedy są równe, a więc ściany boczne tylko wtedy są trójkątami równoramiennemi, jeżeli wierzchołek ostrosłupa leży na linji pionowej, przechodzącej przez środek koła opisanego na podstawie. (Na rombie koła opisać nie można).

Ostrosłupy takie nazywamy *prostemi*.

Na szczególną uwagę zasługują ostrosłupy *proste, mające za podstawę wielokąty foremne*. Ostrosłupy takie nazywamy *foremnemi*.

187. a) Nakreśl siatkę i zbuduj model ostrosłupa sześciokątnego foremnego.

Oblicz powierzchnię boczną i całkowitą.

b) Na podstawie powyższego ostrosłupa opisz koło.

c) Nakreśl siatkę i zbuduj model ostrosłupa, którego podstawą byłby 12-kąt foremny, wpisany w to samo koło, co i podstawa poprzedniego ostrosłupa.

d) Nakreśl siatkę i zbuduj model ostrosłupa, którego podstawą byłby 24-kąt foremny, wpisany w to samo koło, co i podstawa ostrosłupa o 12-kątnej podstawie.

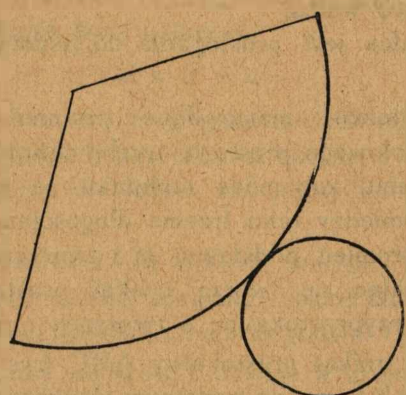
Budując ostrosłupy o coraz większej liczbie boków, możnaby zbudować ostrosłup, który miałby w podstawie wielokąt nie wiele różniący się od koła.

Ostrosłup, którego podstawą jest koło nazywa się *stożkiem kołowym.*

e) Wskaż przedmioty, mające kształt stożka.

f) Na rys. 47 widzisz siatkę stożka kołowego. Siatka składa się z wycinka kołowego i koła, przyczem obwód koła, zwanego podstawą stożka, równa się długości łuku wycinka kołowego.

188. Nakreśl siatkę i zbuduj model stożka, którego promień podstawy = 5 cm, promień pobocznicy (wycinka kołowego) = 10 cm, a kąt środkowy = 180^0.



Rys. 47.

189. Nakreśl siatkę i zbuduj model stożka, którego promień dodstawy = 4 cm, promień pobocznicy = 16 cm, a kąt środkowy = 90^0.

190. Nakreśl siatkę i zbuduj model dowolnego stożka (p. Nr. 187).

191. Przetnij stożek w kilku miejscach wzdłuż osi jego (t. j. wzdłuż linji, przechodzącej przez jego wierzchołek i środek podstawy. Jaką figurą będzie każdy przekrój?

192. Przetnij stożek w kilku miejscach równolegle do podstawy. Jaką figurą będzie każdy przekrój?

193. Nakreśl trojkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych = 4 cm i wytnij jego model; następnie nakreśl koło o promieniu = 4 cm, i przyłóż model trójkąta do koła przyprostokątną = 4 cm prostopadle tak, by wierzchołek kąta prostego padł na środek koła; obracaj trójkąt dokoła pionowej przyprostokątnej. Co zatoczy koniec przyprostokątnej = 4 cm. Co zatoczy przeciwprostokątna?

194. Nakreśl prostokąt i wytnij jego model. Obracaj prostokąt dookoła jednego z boków. Co zatoczy przeciwległy bok? Co zatoczy bok przyległy?

Uwaga. Promień wycinka kołowego, z którego się składa siatka stożka, nazywa się *tworzącą* stożka, a koło (podstawa) *kierownicą.*

Linja, przechodząca przez środek koła i wierzchołek stożka, nazywa się *osią.*

Jeżeli oś jest prostopadła do podstawy, stożek jest *prosty.*

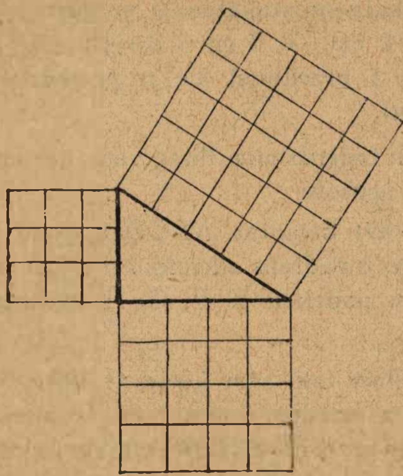
Prosta, przechodząca przez środki podstaw walca, jest *osią* walca; odcinek, leżący na pobocznicy walca równolegle do osi — nazywą się *tworzącą* walca.

Jeżeli oś walca jest prostopadła do podstawy, — walec nazywamy *prostym.*

195. a) Częstokroć, mając dane: promień podstawy i wysokość (oś) stożka kołowego prostego, trzeba obliczyć tworzącą stożka. Wykonać to możemy zapomocą rachunku na podstawie następującego związku pomiędzy temi trzema długościami.

Wiemy, że promień podstawy, oś i tworząca stożka kołowego prostego — przecinając się tworzą trójkąt prostokątny, w którym promień i oś są przyprostokątne, a tworząca — przeciwprostokątną.

Niech będzie trójkąt prostokątny ABC (rys. 48), którego przyprostokątne: $AC = b$ (promień podstawy stożka) $= 4$ cm i $AB = c$ (oś stożka) $= 3$ cm, $BC = a$ przeciwprostokątna (tworząca stożka). Nakreśl na przyprostokątnych i przeciwprostokątnej kwadraty; podziel każdy z nich na kwadraty centymetrowe i oblicz, z ilu kwadratów centymetrowych składają się te kwadraty (inaczej oblicz pole każdego z kwadratów). Gdy dodasz ilości kwadratów centy-



Rys. 48.

metrowych, z których składają się kwadraty. zbudowane na przyprostokątnych i porównasz otrzymaną sumę z liczbą kwadracików centymetrowych, z których składa się kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej, co zauważysz?

Kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej (a) jest równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na przyprostokątnych (b i c).

Jest to t. zw. twierdzenie Pitagorasa*) (580 — 500 przed Chr.). Wyrażamy je zapomocą wzoru, pisząc:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ponieważ zaś liczby a, b i c są jednocześnie odpowiednio wartościami liczebnemi długości: przeciwprostokątnej i przyprostokątnych trójkąta prostokątnego (względem tej samej jednostki mierniczej), zatem:

W trójkącie prostokątnym kwadrat wartości liczebnej przeciwprostokątnej względem pewnej jednostki, równa się sumie kwadratów wartości liczebnych przyprostokątnych względem tej samej jednostki.

Zwykle wyrażamy się krócej, mówiąc w trójkącie prostokątnym, kwadrat przeciwprostokątnej = sumie kwadratów przyprostokątnych.

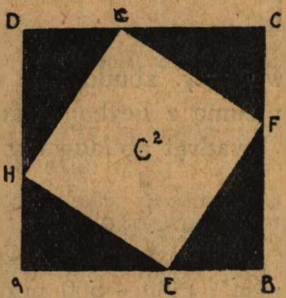
*) Pitagoras z Samosu (580 — 500 przed Chr.); założył szkołę w Krotonie. Pitagorejczycy pierwsi nadali geometrji charakter teoretyczny; odkrycia ich są bardzo liczne (dowiedli, że suma kątów trójkąta = 2d) rozwinęli naukę o proporcjach i t. d.

b) Nakreśl trójkąty prostokątne, o przyprostokątnych: 1) 6 cm i 8 cm; 2) 5 cm i 12 cm; 3) 7 cm i 2,4 dm; 4) $1\frac{1}{2}$ i $\frac{4}{5}$ (względem tej samej jednostki) i przekonaj się o prawdziwości powyższego twierdzenia (jak w *a*).

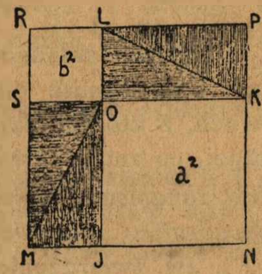
c) O słuszności twierdzenia Pitagorasa możemy się przekonać m. i. w następujący sposób:

Kreślimy (rys. 49) kwadrat ABCD o boku $(b+c)$; odcinamy na każdym boku tego kwadratu odcinki b i c jak na rys. 48 i łączymy przyległe punkty podziału E, F, G, H odcinkami; jaką będzie figura EFGH?

Następnie kreślimy taki sam kwadrat RPMN (rys. 50) o boku $(b+c)$; odcinamy na każdym boku tego kwadratu odcinki b i c, ak na rys. 49 i łączymy przeciwległe punkty podziału S i K, L i J.



Rys. 49.



Rys. 50.

Ponieważ w obu wypadkach trójkąty: HGD, GCF, FEB, AHE, LPK, LKO, SOM, OMI wszystkie są sobie równe jako mające jednakowe przyprostokątne), kwadraty zaś ABCD i RPMN również są równe, więc gdy w każdym z tych kwadratów odrzucimy po cztery równe trójkąty, wówczas pozostaną reszty równe, zatem:

$$\text{EFGH} = \text{RLSO} + \text{OKIN}$$

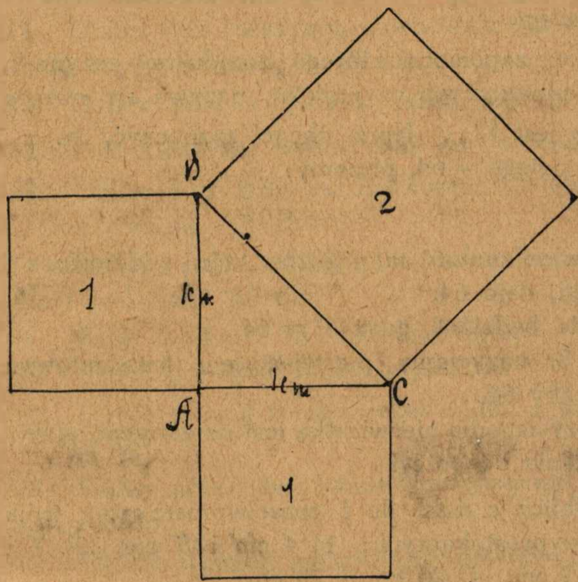
czyli

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

196. a) Z pomocą twierdzenia Pitagorasa można wykreślić kwadrat, którego powierzchnię mamy daną, a nie znamy długości boku.

Niech trzeba będzie nakreślić nprz. kwadrat, którego powierzchnia $= 2\ \text{cm}^2$.

W tym celu kreślimy trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych = 1 cm (rys. 51).



Rys. 51.

Kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej BC tego trójkąta będzie = 2 cm^2.

Budując trójkąt prostokątny o przyprostokątnych, jednej = 1 cm, drugiej zaś równy odcinkowi BC poprzednio wykreślonemu i wykreślając kwadrat na przeciwprostokątnej tego trójkąta, otrzymamy kwadrat = 3 cm^2.

b) Nakreśl kwadrat, którego powierzchnia ma: 1) 5 cm^2, 2) 6 cm^2, 3) 7 cm^2, 4) 8 cm^2.

c) Nakreśl kwadrat, którego powierzchnia ma: 1) 10 cm^2, 2) 11 cm^2, 3) 17 cm^2.

Uwaga. Kwadrat = 10 cm^2, możemy uważać jako sumę kwadratów: 9 cm^2 i 1 cm^2 i t. d.

197. Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprzyprostokątnych: 1) 3 cm i 4 cm, 2) 12 cm i 5 cm.

Uwaga. Do rozwiązywania takich zagadnień trzeba: 1) obliczyć iloczyny dwu danych jednakowych czynników oraz 2) znaleźć czynnik, mając dany iloczyn dwu tych czynników.

Iloczyn z jednakowych czynników nazywa się drugą potęgą (wogóle iloczyn kilku czynników jednakowych nazywa się potęgą); działanie, zapomocą którego otrzymujemy potęgi, nazywa się *podnoszeniem do potęgi*.

Działanie, zapomocą którego znajdujemy czynnik, gdy dany jest iloczyn jednakowych czynników, nazywa się *pierwiastkowaniem*. Znakiem jego jest $\sqrt{\ }$. Nprz. chcąc zaznaczyć, że x jest liczbą, której druga potęga $= 64$, piszemy:

$$x = \sqrt{64}$$

Mamy więc znaleźć taką liczbę, która podniesiona do kwadratu (drugiej potęgi) daje 64.

Liczbą tą będzie 8, gdyż $8^2 = 64$.

Liczbę 8, nazywamy pierwiastkiem kwadratowym (drugiego stopnia) z liczby 64.

Zatem wyciąganie pierwiastka jest działaniem odwrotnem względem podnoszenia do potęgi.

198. Oblicz z dokł. do 1 przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych: 1) 4 cm i 5 cm, 2) 7 cm i 9 cm, 3) 12 cm i 15 cm, 4) 20 cm. i 25 cm.

199. Oblicz z dokł. do a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{1}{100}$ przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych: 1) 4 cm i 5 cm, 2) 7 cm i 9 cm, 3) 12 cm i 15 cm, 4) 20 cm i 25 cm.

200. Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych: 6,6 cm i 5 cm.

201. Oblicz przyprostokątną trójkąta prostokątnego, jeżeli przeciwprostokątna = 28 cm i przyprostokątna = 5,6 cm.

202. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku = 3 cm.

203. Oblicz przekątną prostokąta o wymiarach 2,4 cm i 5 cm.

204. Obwód kwadratu wynosi 8,4 cm. Oblicz jego przekątną.

205. Podstawa trójkąta równoramiennego wynosi 6 cm. i wysokość = 4 cm. Oblicz obwód trójkąta.

206. Przekątne rombu mają: 0,9 m i 0,56 m. Oblicz obwód rombu.

207. Promień koła wpisanego w kwadrat wynosi 0,5 dm. Oblicz przekątną i pole kwadratu.

208. a) Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu = 0,8 dm.

209. Pole trójkąta prostokątnego wynosi 32 m^2, a jedna z przyprostokątnych 1,6 m. Oblicz przeciwprostokątną.

210. Oblicz wysokość trójkąta, równoważnego kwadratowi o boku = $1\frac{5}{6}$ dm, jeżeli podstawa trójkąta = $2\frac{4}{9}$ dm.

211. Oblicz bok kwadratu, równoważnego trójkątowi o podstawie = $3\frac{1}{3}$ cm i wysokości = 9,6 cm.

212. Oblicz pole kwadratu, jeżeli jego przekątna = 2,4 dm.

213. Pole kwadratu wynosi 2,89 dm^2. Oblicz jego przekątną.

214. Oblicz pole trójkąta równoramiennego, jeżeli wysokość jego = 3 cm, a ramię = 5 cm.

215. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o ramionach = 0,5 dm i podstawie 0,6 dm.

216. Pole trójkąta równoramiennego = 2 m^2, a podstawa = 0,4 m. Oblicz pozostałe boki i wysokość.

217. Oblicz obwód rombu, jeżeli jedna z przekątnych = $7\frac{3}{7}$ m i pole = 10,4 m^2.

218. Oblicz pole i bok kwadratu wpisanego w koło o promieniu = 7 dm 2 cm.

219. Oblicz promień koła, którego powierzchnia wynosi 3,75 m?

220. Oblicz obwód koła, którego pole wynosi 0,5 dm?

221. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego obwód wynosi 5 dm 8 cm, a jedno ramię ma 1 dm 5 cm długości. Oblicz całkowitą powierzchnię graniastosłupa.

222. Oblicz powierzchnię całkowitą graniastosłupa prostego, którego podstawą jest sześciokąt foremny o boku = $\frac{2}{3}$ m i wysokość = 1,5 m.

223. Oblicz: 1) powierzchnię boczną, 2) całkowitą ostrosłupa foremnego trójkątnego, jeżeli bok podstawy = 6 cm. i wysokość ostrosłupa = 4 cm.

Nakreśl siatkę i zbuduj model.

224. Oblicz powierzchnię: 1) boczną, 2) całkowitą ostrosłupa trójkątnego foremnego, którego krawędź boczna = 2,5 dm i wysokość ściany bocznej = 1,5 dm.

225. Oblicz całkowitą powierzchnię ostrosłupa czworokątnego foremnego, jeżeli bok podstawy = 20 cm i wysokość ściany bocznej 26 cm.

226. Oblicz całkowitą powierzchnię ostrosłupa czworokątnego foremnego, jeżeli wysokość ostrosłupa = 5 cm i wysokość ściany bocznej 13 cm.

227. Powierzchnia boczna ostrosłupa sześciokątnego foremnego = 28 dm^2 i wysokość ściany bocznej = 5 dm. Oblicz wysokość ostrosłupa i bok podstawy.

228. Oblicz powierzchnię całkowitą ostrosłupa sześciokątnego foremnego, jeżeli bok podstawy = 3 dm i krawędź boczna 6 dm.

229. a) Wiadomo (Nr. 187), że powierzchnia całkowita stożka składa się z jednego koła i powierzchni bocznej, która po rozwinięciu przedstawia się jako wycinek kołowy, przyczem obwód podstawy stożka jest równy długości łuku wycinka kołowego, a promieniową wycinka tworząca stożka, zatem powierzchnię boczną stożka otrzymamy mnożąc długość połowy obwodu podstawy przez tworzącą stożka, co wyrażamy pisząc:

$$S = \frac{2\pi r}{2} \cdot t = \pi r t$$

(r = promień podstawy, t — tworząca stożka);

całkowita zaś powierzchnia stożka będzie:

$$S_1 = \pi r t + \pi r^2$$

b) Oblicz powierzchnię boczną, a następnie całkowitą stożka, jeżeli promień podstawy = 12 dm i tworząca = 1,4 m.

c) Oblicz powierzchnię boczną, a następnie całkowitą stożka, jeżeli promień podstawy = 5 cm i tworząca = 13 cm.

230. Tworząca stożka = 5 cm i wysokość = 3 cm. Oblicz promień podstawy i powierzchnię boczną stożka.

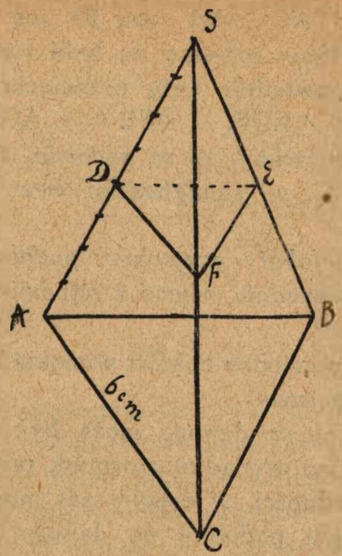
231. Oblicz całkowitą powierzchnię równobocznego stożka, jeżeli tworząca = 0,8 m.

Uwaga. Stożek nazywa się równobocznym, jeżeli przecięcie jego wzdłuż osi jest trójkątem równobocznym.

232. Promienie rozwiniętej pobocznicy stożka, tworzą kąt = 120°. Oblicz całkowitą powierzchnię stożka, jeżeli tworząca jego = 15 cm.

233. Oblicz wysokość stożka równobocznego jeżeli jego powierzchnia całkowita = powierzchni walca równobocznego o wysokości = 0,64 m.

Uwaga. Walec nazywamy równobocznym, jeżeli średnica podstawy = wysokości walca, inaczej jeżeli przecięcie walca wzdłuż osi jest kwadratem.



Rys. 52.

234. a) Nakreśl ostrosłup trójkątny foremny, w którym bok podstawy = 6 cm (rys. 52).

Podziel krawędzie boczne na 8 części równych i odmierz na każdej z nich po 4 takie części; następnie przez punkty podziału D, E i F poprowadź przecięcie ostrosłupa.

Jaką figurę otrzymałeś w przecięciu?

Zmierz boki tej figury i porównaj je z odpowiedniemi bokami podstawy ostrosłupa (t. j. DF z AC, FE z BC, DE z AB), co zauważysz? Czy istnieje jaki związek pomiędzy bokami podstawy i przecięcia, a odcinkami krawędzi bocznych?

Zmierz kąty przecięcia i porównaj je z odpowiedniemi kątami podstawy. Co zauważysz?

Jakie jest położenie wzajemne odcinków AC i DF, BC i FE, AB i DE?

W przecięciu otrzymałeś trójkąt, t. j. figurę taką samą, jaką jest podstawa ostrosłupa, boki przecięcia i podstawy, zawarte między temi samemi krawędziami, są równoległe i w tym samym stosunku, co odległości wierzchołka S ostrosłupa od wierzchołków podstawy i przecięcia (t. j. $\frac{SA}{SD}=\frac{SC}{SF}=\frac{SB}{SE}=\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{FE}$ czyli, że ile razy

DF jest mniejsze od AC, tyleż razy EF jest mniejsze od BC lub DE od AB, co wyrażamy mówiąc, że boki tych figur są *proporcjonalne*) i wreszcie odpowiednie kąty przecięcia i podstawy są sobie równe t. j. $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle DFE = \angle ACB$, $\angle DEF = \angle ABC$. O takich trójkątach mówimy, że są *podobne* (to znaczy że $\triangle$ DEF przedstawia $\triangle$ ABC w zmniejszeniu bez najmniejszej zmiany kształtu).

Wogóle dwa wielokąty nazywamy podobnemi, jeżeli kąty ich parami są sobie odpowiednio równe i odpowiednie boki proporcjonalne.

Stały stosunek pomiędzy bokami wielokątów podobnych nazywa się *stosunkiem podobieństwa.*

Wielokąt podobny do danego może być większy lub mniejszy od niego; w pierwszym wypadku stosunek podobieństwa tych figur będzie większy od jedności, w drugim zaś mniejszy.

b) Nakreśl trójkąt podobny do danego, jeżeli stosunek podobieństwa 2 boków odpowiednich $= \frac{2}{5}$.

W tym celu kreślimy $\triangle$ ABC; jeden z boków danego trójkąta, nprz. AB dzielimy na 5 części równych. Na dowolnej prostej bierzemy DE równe 2 takim częściom; następnie budujemy kąt D i E równe odpowiednio kątom A i B danego trójkąta. Otrzymamy trójkąt DEF będzie podobny do danego. Dlaczego?

c) Nakreśl trójkąt podobny do dowolnego trójkąta: 1) różnobocznego, 2) prostokątnego, 3) równoramiennego.

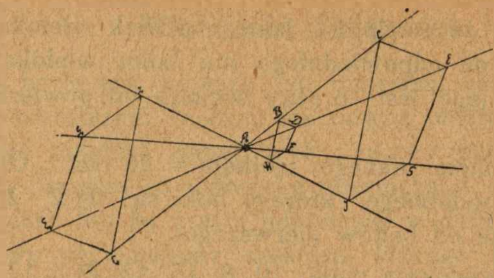
235. Nakreśl trójkąt, mający boki: 3 cm, 4 cm i 5 cm; obok nakreśl trójkąt podobny, w którym najmniejszy z boków miałby 6 cm. Jaki jest stosunek podobieństwa? Oblicz pozostałe boki.

236. Boki trójkąta są: 10, 4 i 9 cm. Oblicz boki trójkąta podobnego, w którym najmniejszy z boków = 25 cm.

237. Nakreśl dowolny trójkąt i obok trójkąt podobny do niego, przytem taki, by stosunek podobieństwa $= \frac{1}{4}$. Następnie poprowadź w obydwu trójkątach wysokości odpowiednie; zmierz je, oblicz stosunek ich i porównaj z danym stosunkiem podobieństwa. Co zauważysz?

238. a) Nakreśl figurę podobną do danej, znając stosunek podobieństwa.

Niech będzie dana figura BDFH, do której należy narysować podobną (rys. 53). W tym celu bierzemy dowolny punkt A na płaszczyźnie i przez ten punkt prowadzimy przez wierzchołki wielokąta



Rys. 53.

danego promienia. Przypuśćmy, że nowa figura ma być zwiększona 4 razy. Na każdym z promieni wyznaczamy punkty, odpowiadające wierzchołkom danej figury tak, by odległości tych punktów od punktu A były 4 razy większe od odległości wierzchołków odpowiednich danej figury od punktu A. Łącząc w odpowiedni sposób punkty podziału promieni, otrzymamy wielokąt (powiększony) podobny do danego.

b) Nakreśl dowolny sześciokąt, następnie obok nakreśl wielokąt podobny i przytem taki, by stosunek podobieństwa $= \frac{3}{2}$.

239. Nakreśl dwa wiolokąty podobne, oblicz obwody tych wielokątów i porównaj stosunek obwodów ze stosunkiem podobieństwa wielokątów. Co zauważysz?

Obwody wielokątów podobnych tak się mają do siebie, jak boki odpowiednie.

240. Boki wielokąta mają: 5, 6, 7 i 8 cm. Oblicz obwód wielokąta podobnego, w którym najmniejszy z boków ma 2 cm.

241. Obwody wielokątów podobnych mają: 20 dm i 12 dm, przyczem jeden z boków wielokąta o większym obwodzie ma 5 dm. Oblicz odpowiedni bok wielokąta podobnego.

242. Oblicz boki trójkątą o obwodzie = 16 cm, podobnego do trójkąta, mającego boki: $3\frac{5}{6}$ cm, 2,4 cm i 1,5 cm.

243. Obwody dwu trójkątów równoramiennych wynoszą odpowiednio: 31,7 m i 18,2 m. Podstawa trójkąta o większym obwodzie wynosi 2,7 m. Oblicz boki obydwu trójkątów.

244. a) Nakreśl 2 trójkąty podobne i oblicz powierzchnie tych trójkątów; oblicz stosunek powierzchni i porównaj ze stosunkiem podbobieństwa wielokątów. Co zauważysz?

Stosunek powierzchni 2 podobnych wielokątów jest równy drugiej potędze stosunku 2 boków odpowiednich.

To znaczy, że jeżeli bok jakiegokolwiek wielokąta jest naprz. 3 razy większy od odpowiedniego mu boku wielokąta podobnego, to powierzchnia jego jest 16 razy większa od powierzchni drugiego wielokąta.

b) Powierzchnia danego trójkąta = 36 cm^2. Oblicz powierzchnię trójkąta podobnego, którego boki są: 1) 2, 2) 3, 3) 4 razy większe (mniejsze od boków pierwszego).

245. Boki wielokąta mają: 10, 8, 15, 12, 21 i 17 cm. Największy z boków wielokąta podobnego ma 14 cm. Oblicz: 1) pozostałe boki, 2) stosunek powierzchni.

246. Odpowiednie boki 2 trójkątów podobnych mają: 7 dm i 4 dm. Oblicz pole mniejszego z wielokątów, jeżeli powierzchnia większego wynosi 4,9 dm^2.

247. a) Sprawdź że wielokąty foremne o jednakowej ilości boków są podobne.

b) Czy kwadrat i romb mogą być figurami podobnemi?

c) Czy prostokąt i kwadrat mogą być figurami podobnemi?

248. a) Nakreśl dowolny ostrosłup; następnie przetnij go płaszczyzną równoległą do podstawy; ostrosłup zostanie podzielony na 2 części, z których jedna będzie ostrosłupem *całkowitym*, a druga tak zwanym *ostrosłupem ściętym*.

Opisz ostrosłup ścięty foremny, nakreśl jego siatkę i zbuduj model.

b) Jak obliczysz: 1) powierzchnię boczną, 2) powierzchnię całkowitą ostrosłupa ściętego foremnego?

Powierzchnia boczna ostrosłupa ściętego foremnego równa się połowie iloczynu sumy obwodów podstaw przez wysokość ściany bocznej.

249. Boki podstaw i wysokość ściany bocznej ostrosłupa trójkątnego foromnego mają odpowiednio: 6, 2 i 2. Oblicz powierzchnię boczną.

250. Boki podstaw i wysokość ostrosłupa trójkątnego foremnego mają odpowiednio: 10, 4 i 1. Oblicz powierzchnię boczną.

251. Boki podstaw i krawędź boczna ostrosłupa czworokątnego ściętego foremnego mają odpowiednio: 6 cm, 2 cm i 3 cm. Oblicz powierzchnię całkowitą. Nakreśl siatkę i zbuduj model.

252. Boki podstaw i wysokość ściany bocznej foremnego sześciokątnego ostrosłupa ściętego mają odpowiednio: 2 dm, 0,4 dm i 1 dm. Oblicz powierzchnię boczną.

Mierzenie objętości.

Każda bryła jest większa lub mniejsza, czyli jak mówią, zajmuje część przestrzeni, inaczej, ma pewną objętość.

Zmierzyć objętość danej bryły, znaczy porównać jej objętość z objętością, przyjętą za jednostkę mierniczą, t. j. określić, ile razy jednostka miary lub jej części mieści się w danej objętości. Za jednostkę miary przyjmujemy sześcian, którego krawędź równa się 1 m. Sześcian taki nazywa się *metrem sześciennym* i oznacza się w piśmie m^3.

Do mierzenia mniejszych objętości służą mniejsze sześciany, do mierzenia zaś większych — większe, przytem nprz. sześcian, mający krawędź = 1 dm, nazywa się decymetrem sześciennym, co oznaczamy — dm^3; podobnież używamy do mierzenia objętości: cm^3, mm^3.

253. Wkładając wewnątrz modelu prostopadłościanu o wymiarach nprz. 5, 6, 7 cm. sześciany, mające krawędzie równe 1 cm, zauważ, jak zapomocą rachunku można obliczyć objętość prostopadłościanu.

Aby znaleźć objętość prostopadłościanu, należy pole jego podstawy pomnożyć przez wysokość.

254. Krawędź sześcianu = $1\frac{1}{3}$ dm, 2) 0,6 m, 3) 1,5 dm. Oblicz objętość.

255. Oblicz objętość graniatosłupa prostego kwadratowego gdy: 1) powierzchnia podstawy = 0,7 dm^2 i wysokość = 0,5 dm; 2) bok podstawy = 0,8 m i powierzchnia ścian bocznych = 2 m^2.

256. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: 2 cm, 4 cm i 1,5 cm.

257. Oblicz objętość prostopadłościanu, gdy jeden z boków podstawy = 1,4 dm, pole podstawy 2,54 dm^2 i powierzchnia boczna $1\frac{2}{7}$ dm^2.

258. Skrzynia ma kształt prostopadłościanu o wymiarach 5, 3 i 4 m (wysokość). Ile hl zboża mieści się w tej skrzyni, jeżeli zboże sięga do wysokości 1 m 3 dm?

259. W zbiorniku, mającym kształt prostopadłościanu o wymiarach: 5,4 m; 12,8 m i 6,3 m (wysokość), woda sięga do 0,7 wysokości. Ile dm^3 wody możnaby wlać do zbiornika?

260. Ile trzebaby wynająć furmanek do wywiezienia ziemi przy kopaniu rowu o wymiarach 14 m, 5 m i 6 m, jeżeli 1 furmanka może wywieść $1\frac{1}{3}$ m^3 ziemi?

261. Szerokość sali, mającej kształt prostopadłościanu o objętości 377,4 m^3 wynosi 6 m a wysokość 4,25 m. Oblicz długość sali.

262. Objętość prostopadłościanu z kamienia wynosi 1,512 m^3. Wymiary podstawy wynoszą: 2,1 m i 1,8 m. Oblicz wysokość prostopadłościanu.

263. Ile waży prostopadłościan z żelaza o wymiarach 4,5 dm, 3 cm i 4 mm, jeżeli ciężar właściwy żelaza = 7,8?

264. Skrzynię, której długość wynosi 2,5 m. i szerokość 1,25 m napełniono zbożem do wysokości 46 cm. Ile wynosi według cen bieżących wartość tego zboża, licząc za 1 dkl...?

265. Ile waży sześcian z marmuru, mający krawędź 2,5 dm, jeżeli ciężar właściwy marmuru = 2,8?

266. a) Zbuduj model graniastosłupa prostego o podstawie prostokątnej; następnie zbuduj kilka modeli graniastosłupów prostych, mających za podstawy: 1) trójkąt, 2) czworokąt, 3) pięciokąt, 4) sześciokąt tak, aby wszystkie graniastosłupy miały podstawy równoważne i wysokości równe. Następnie napełnij jeden z nich piaskiem; przesypując piasek, napełniający tę bryłę, kolejno do każdej z pozostałych, co zauważyłeś?

Wszystkie graniastosłupy, majace równoważne podstawy i równe wysokości, mają jednakową objętość.

Zatem, aby obliczyć objętość dowolnego graniastosłupa, należy pole jego podstawy pomnożyć przez wysokość.

b) Ponieważ walec uważamy za graniastosłup o podstawie kołowej, przeto możemy obliczać objętość walca w ten sam sposób, jak objętość graniastosłupa, zatem:

Aby obliczyć objętość walca, należy pole jego podstawy pomnożyć przez wysokość.

c) Oznaczając promień podstawy walca przez r i przez h jego wysokość, wyraź zapomocą wzoru objętość walca.

267. Oblicz objętość graniastosłosłupa trójkątnego foremnego, jeżeli bok podstawy = 0,8 dm i wysokość = 12 cm.

268. Oblicz objętość graniastosłupa trójkątnego foremnego, jeżeli bok podstawy = 8 cm i powierzchnia boczna = 24 cm^2.

269. Wysokość graniastosłupa trójkątnego foremnego wynosi 4 dm i objętość 3 dm^3. Oblicz: 1) bok podstawy, 2) pole podstawy.

270. Oblicz objętość graniastosłupa prostego, mającego za podstawę trójkąt równoramienny o podstawie = 2,5 dm, ramieniu = = 3,25 dm, jeżeli wysokość graniastosłupa = 2 dm.

271. Oblicz objętość i całkowitą powierzchnię graniastosłupa prostego, mającego za podstawę romb, w którym bok = 7,5 m, mniejsza przekątnego = 9 m, a wysokość graniastosłupa = $\frac{2}{3}$ m.

272. Oblicz powierzchnię i objętość graniastosłupa prostego o wysokości = 5 m, mającego za podstawę trapez równoramienny, którego podstawy mają: 10 m i 4 m, a pozostałe boki = 5 m.

273. Oblicz powierzchnię i objętość graniastosłupa sześciokątnego foremnego, w którym wysokość = 1,5 m i bok podstawy = $\frac{3}{2}$ m.

274. Ile waży kawałek żelaza, długości 10 m, mającego kształt graniastosłupa prostego, jeżeli podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoramienny o podstawie = 3 cm i wysokości = 18 mm (ciężar właściwy żelaza = 7,8).

275. Podstawą graniastosłupa prostego, jest trójkąt prostokątny. Oblicz jego objętość, jeżeli przeciwprostokątna podstawy = 8,7 dm, przyprostokątna = 47 cm, a wysokość graniastosłupa 5,03 m.

276. Oblicz objętość i powierzchnię walca, jeżeli promień podstawy = 0,7 dm i wysokość = $1\frac{2}{3}$ dm.

277. Promień podstawy walca = 3,5 cm, objętość = 154 cm^3. Oblicz wysokość i powierzchnię boczną.

278. Oblicz objętość i powierzchnię walca, jeżeli promień podstawy = 2,4 dm i wysokość = 1 m.

279. Ile hl zawiera naczynie w postaci walca o średnicy wewnętrznej 1,3 m i wysokości 2,8 m?

280. Ile m^3 muru potrzeba do ocembrowania okrągłego zbiornika, głębokiego na 5,7 m, jeżeli promień wewnętrzny = 4,2 m, a zewnętrzny = 4,5 m?

281. Ile waży drut miedziany, długości = 1 m i grubości = 9 mm, jeżeli ciężar właściwy miedzi = 8,9?

282. Oblicz wysokość walca, jeżeli pole podstawy = 5,5 m^2 i objętość = 4400 dm^3.

283. Naczynie w postaci walca zawiera 62,75 l. Oblicz wewnętrzną wysokość naczynia, jeżeli średnica podstawy = 4 dm.

284. a) Zbuduj z kartonu 2 modele: dowolnego ostrosłupa prostego i graniastosłupa prostego o równej wysokości i o podstawie równej lub równoważnej podstawie ostrosłupa. Następnie oderwij dno w ostrosłupie i jedną z podstaw graniastosłupa, poczem napełnij piaskiem ostrosłup i przesyp go do graniastosłupa.

Ile razy trzeba będzie przesypać piasek z ostrosłupa do graniastosłupa?

Ostrosłup, mający tę samą (lub równoważną) podstawę i wysokość, co graniastosłup, ma trzy razy mniejszą objętość.

Zatem:

Aby otrzymać objętość ostrosłupa, należy pomnożyć trzecią część powierzchni podstawy przez wysokość.

b) Ponieważ stożek uważamy za ostrosłup w którym podstawą jest koło, zatem:

Aby obliczyć objętość stożka kołowego, należy pole jego podstawy pomnożyć przez $\frac{1}{3}$ wysokości.

c) Oznaczając promień podstawy stożka przez r i wysokość przez h, wyraź zapomocą wzoru objętość stożka.

285. Oblicz objętość ostrosłupa, jeżeli podstawa ma 5,46 m^2, a wysokość 2,4 m.

286. Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego foremnego, jeżeli bok podstawy = 6 cm i wysokość ostrosłupa = 4 cm.

287. Obwód podstawy ostrosłupa czworokątnego foremnego = 160 mm, a wysokość = 2 cm 1 mm. Oblicz powierzchnię boczną i objętość ostrosłupa.

288. Ile waży kawałek srebra, mający kształt ostrosłupa czworokątnego foremnego, jeżeli bok podstawy = 1,5 cm i wysokość = = 3 cm? (ciężar właściwy srebra = 10,8).

289. Wysokość jednej z największych piramid w Egipcie (piramida Cheopsa) wynosi 146 m, a bok kwadratowej podstawy tej piramidy = 233 m. Oblicz objętość piramidy.

290. Oblicz powierzchnię boczną i objętość ostrosłupa czworokątnego foremnego, jeżeli krawędź boczna = 5 dm, a wysokość ściany bocznej = 4 dm.

291. Oblicz objętość ostrosłupa sześciokątnego foremnego, jeżeli bok podstawy = 3 dm i krawędź boczna = 6 dm.

292. Oblicz wysokość i całkowitą powierzchnię ostrosłupa czworokątnego foremnego, jeżeli objętość ostrosłupa = 1 dm^3, a bok podstawy = 20 cm.

293. Ile będzie ważyć nagrobek marmurowy, mający kształt piramidy czworokątnej foremnej, jeżeli wysokość = 4 m 8 dm i bok podstawy = 8 dm? (ciężar właściwy marmuru = 2,8).

294. Trójkąt prostokątny obraca się dokoła przyprostokątnej. Jaką bryłę zakreśli ten trójkąt?

295. Kwadrat obraca się dokoła swego boku. Jaką bryłę otrzymasz przez ten obrót?

296. Mamy trójkąt prostokątny. Jedna przyprostokątna = 4 cm, druga = 5 cm.

a) trójkąt ten obraca się dokoła przyprostokątnej = 4 cm. Oblicz objętość tak otrzymanego stożka?

b) trójkąt ten obraca się dokoła przyprostokątnej = 5 cm. Oblicz objętość tak otrzymanego stożka? Czy objętości te są równe?

297. Trójkąt prostokątny obraca się dokoła przyprostokątnej = 3 cm. Druga przyprostokątna = 2 dm 1 cm. Oblicz objętość otrzymanego stożka?

298. Trójkąt prostokątny obraca się dokoła przyprostokątnej = 60 cm. Stożek otrzymany ma objętość = 6160 cm^3. Znajdź długość drugiej przyprostokątnej?

299. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne są równe 24 cm i 15 cm. Trójkąt ten obraca się dokoła boku = 24. Znajdź: 1) objętość tego stożka, 2) powierzchnię boczną, 3) powierzchnię całkowitą, 4) powierzchnię podstawy?

300. Kwadrat o boku = 4 cm obraca się dokoła swego boku. Znajdź objętość i powierzchnię boczną otrzymanej bryły?

301. Kwadrat, którego przekątna = $\sqrt{50}$ obraca się dokoła boku. Znajdź powierzchnię całkowitą i objętość otrzymanej bryły?

302. Oblicz objętość stożka równobocznego, jeżeli średnica podstawy = 3,5 dm.

303. Kwadrat o boku = 6 cm obraca się dokoła jednego boku. Oblicz powierzchnię i objętość bryły, otrzymanej drogą obrotu.

304. Oblicz powierzchnię i objętość bryły, otrzymanej od obrotu prostokąta, mającego wymiary 4 cm i 8 cm dokoła mniejszego z boków.

305. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnej = 9,6 dm i przeciwprostokątnej = 1,04 m obraca się dokoła: 1) mniejszej z przyprostokątnych, 2) większej z przyprostokątnych. Oblicz powierzchnie boczne i objętości brył, otrzymanych od obrotu.

306. Prostokąt o wymiarach: 4 cm i 6 cm, obraca się dokoła osi, równoległej do większego boku i odległej od najbliższego boku o 5 cm. Oblicz objętość bryły otrzymanej od obrotu.

Wielościany foremne.

307. a) Jakie znasz wielościany?

b) Czy wśród znanych ci wielościanów istnieją takie, w których wszystkie ściany są jednakowemi równemi wielokątami foremnemi?

c) Opisz sześcian. Ile ścian sześcianu schodzi się w jednym wierzchołku? Jaka może być najmniejsza ilość ścian, schodzących się w jednym punkcie?

Figura, utworzona przez płaszczyzny kątów ścian wielościanu, schodzących się w jednym punkcie, zwanym wierzchołkiem, nazywa się kątem bryłowym.

d) Wskaż na modelu sześcianu wszystkie kąty bryłowe.

e) Wskaż na modelu dowolnego graniastosłupa kąty bryłowe.

f) Wskaż na modelu dowolnego ostrosłupa kąty bryłowe.

g) Czy mógłbyś utworzyć kąt bryłowy z czterech kwadratów?

h) Czy mógłbyś utworzyć kąt bryłowy z 3, 4, 5, 6 trójkątów równobocznych?

i) Kiedy kąty płaskie, schodzące się w jednym wierzchołku, mogą utworzyć kąt bryłowy?

Suma kątów płaskich, tworzących kąt bryłowy, musi być mniejsza od 4 kątów prostych.

j) Czy można utworzyć kąt bryłowy trójścienny, jeżeli kąty przy wierzchołku byłyby: 75^0, 100^0, 130^0?

k) Czy można utworzyć kąt bryłowy czworościenny, jeżeli kąty przy wierzchołku byłyby: 120^0, 100^0, 108^0, 96^0.

308. *Wielościan nazywa się foremnym, jeżeli wszystkie jego ściany są wielokątami foremnemi i równemi.*

a) wyjaśnij, ile ścian, będących trójkątami foremnemi, może się schodzić w jednym punkcie. Ponieważ suma kątów płaskich kąta bryłowego musi być mniejsza od 4 d, więc, jeżeli ściany kąta bryłowego mają być kątami trójkątów równobocznych, w kącie bryłowym może być albo 3, albo 4, albo 5 ścian, gdyż 6 takich ścian dałoby 360^0.

b) Więc ile gatunków wielościanów foremnych można utworzyć z trójkątów foremnych?

c) Ile gatunków wielościanów foremnych można utworzyć z kwadratów?

d) 1) Ile wynosi suma wszystkich kątów wielokąta?

2) Ile wynosi suma wszystkich kątów pięciokąta foremnego?

3) Ile stopni ma kąt pięciokąta foremnego?

4) Ile gatunków wielościanów foremnych można utworzyć z pięciokątów foremnych.

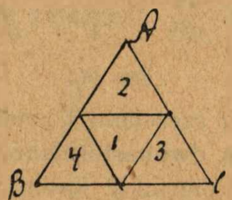
e) Ile gatunków wielościanów foremnych można utworzyć z sześciokątów foremnych?

f) Czy można utworzyć wielościan foremny z 7-kątów foremnych?

g) Ile więc istnieje wszystkiego gatunków wielościanów foremnych?

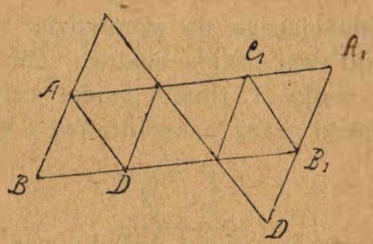
Nie może istnieć więcej, jak 5 gatunków wielościanów foremnych.

309. Nakreśl siatkę czworościanu foremnego i zbuduj model. W tym celu wykreślamy trójkąt równoboczny ABC (rys. 54) i łączymy środki jego boków; otrzymamy cztery trójkąty foremne:



Rys. 54.

1, 2, 3, 4. Obracamy trójkąty 2, 3, 4 około boków wspólnych z trójkątem 1 dotąd, dopóki wierzchołki A, B i C nie zejdą się w jednym punkcie; w ten sposób otrzymamy model czworościanu foremnego.

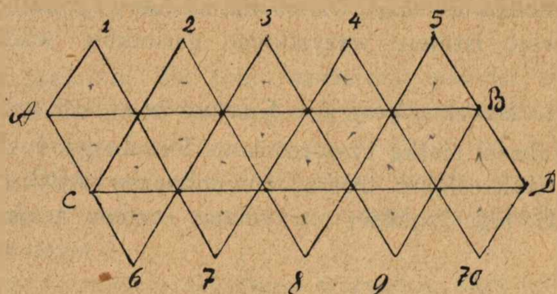


Rys 55.

310. Nakreśl siatkę ośmiościanu foremnego i zbuduj model. W tym celu kreślimy 8 trójkątów foremnych, ułożonych, jak wskazuje rys. 55. Następnie obracamy te trójkąty około ich boków dotąd, aż punkt A padnie na A^1, B na B^1, C na C^1 i D na D^1.

311. Nakreśl siatkę dwudziestościanu foremnego i zbuduj model. Rysunek 56 przedstawia siatkę 20-ścianu foremnego.

Składa się ona z 20 trójkątów równobocznych; dziesięć z nich tworzą równoległobok ABCD, pozostałe zaś otrzymujemy, przedłużając boki tych dziesięciu trójkątów. Zginamy trójkąty siatki tak, aby punkt A padł na B, punkt C na D, oraz aby punkty 1, 2, 3, 4, 5 złączyły się w jeden i punkty 6, 7, 8, 9, 10 także w jeden punkt.



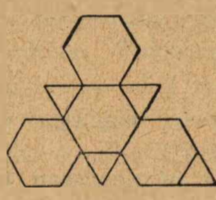
Rys. 56.

312. Nakreśl siatkę sześcianu i zbuduj model.

313. Nakreśl siatkę dwunastościanu foremnego i zbuduj model. W tym celu wykreślamy pięciokąt foremny i na każdym jego boku wykreślamy znowu pięciokąt foremny, następnie wykreślamy drugą figurę, złożoną z 6 pięciokątów foremnych i przyległą do pierwszej; pięć 5-kątów obracamy około boków wspólnych z 5-kątem środkowym dotąd, dopóki nie utworzy się rodzaj pudełka; z pozostałych sześciu pieciokątów utworzymy drugie pudełko; obracając te dwa pudełka około wspólnej krawędzi, doprowadzamy ich brzegi do przystania.

314. Rys. 57 przedstawia siatkę półforemnego wielościanu, t. j. wielościanu, składającego się wprawdzie z wielokątów foremnych, ale o niejednakowej liczbie boków. Zbuduj model.

315. Nakreśl siatkę i zbuduj model czternastościanu półforemnego, ograniczonego przez 6 kwadratów i 8 pięciokątów.



Rys 57.

Podobieństwo wielościanów.

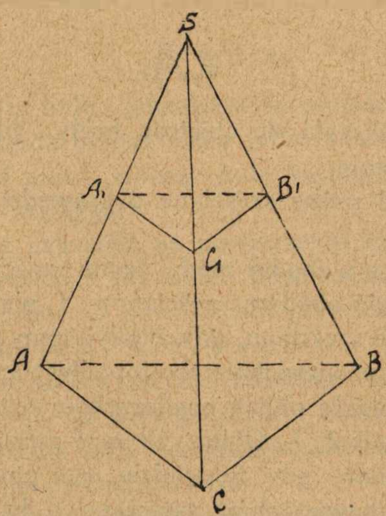
316. a) Nakreśl dowolny czworościan i przetnij go płaszczyzną równoległą do podstawy (rys. 58). Sprawdź, czy: 1) $\triangle$ ASB jest podobny do trójkąta A_1SB_1, 2) $\triangle$ ASC podobny do trójkąta A_1SC_1, 3) $\triangle$ BSC podobny do trójkąta B_1SC_1, 4) $\triangle$ ABC podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$.

Dwa wielościany nazywamy podobnemi, jeżeli ściany ich są figurami podobnemi.

b) Czy: 1) dwa sześciany, 2) dwa czworościany foremne są wielościanami podobnemi? Dlaczego?

317. Niech dany będzie czworościan SABC (rys. 59). Nakreśl czworościan podobny do danego.

W tym celu łączymy dowolny punkt O z wierzchołkami danego czworościanu. Następnie na promieniach OS, OA, OB, OC obieramy takie punkty, aby zachodziła zależność $\frac{OS}{OS_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OC}{OC_1}$.



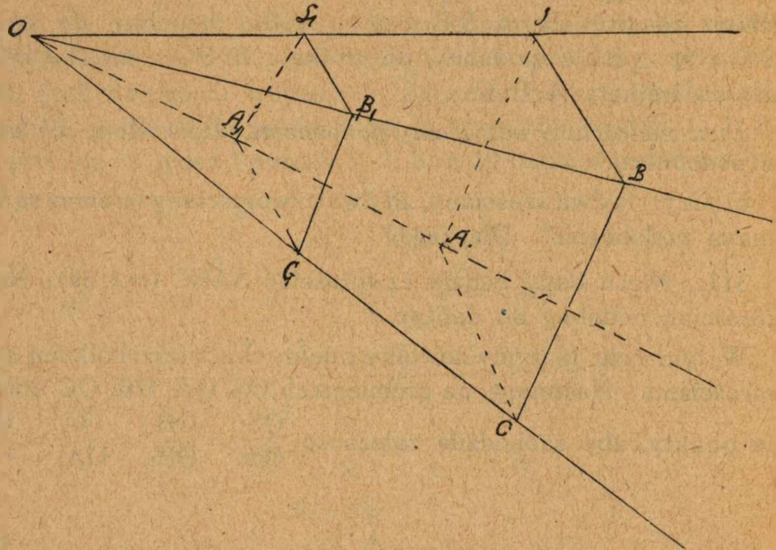
Rys. 58.

Łącząc punkt S_1 z punktami A_1, B_1, C_1 otrzymamy czworościan $S A_1 B_1 C_1$.

Sprawdź, czy odpowiednie ściany czworościanów SABC i $S_1 A_1 B_1 C_1$ są do siebie podobne.

318. Nakreśl siatkę i zbuduj model prostopadłościanu o wymiarach 7 cm, 5 cm, 3 cm. Następnie nakreśl siatkę i zbuduj model tegoż prostopadłościanu w skali 2 : 1.

Oblicz objętość obydwu brył i porównaj je.



Rys. 59.

Ile razy zwiększyła się objętość bryły, gdy krawędzie powiększyły się dwukrotnie.

319. Nakreśl siatkę sześcianu o krawędzi 6 cm i zbuduj jego model.

Nakreśl siatkę i zbuduj model tegoż sześcianu w skali 1 : 3.

Oblicz objętość obydwu sześcianów i wyjaśnij, jak się zmienia objętość danego sześcianu, gdy zmniejszymy jego krawędź 3 razy?

320. Oblicz powierzchnię prostopadłościanu o wymiarach 7 cm, 5 cm, 3 cm; następnie oblicz powierzchnię tegoż prostopadłościanu nakreślonego w skali 2 : 1. Oblicz, ile razy zwiększyła się powierzchnia prostopadłościanu, gdy krawędzie jego powiększyły się 2 razy.

321. Oblicz powierzchnię sześcianu o krawędzi = 6 cm; następnie oblicz powierzchnię tegoż sześcianu nakreślonego w skali 1 : 5. Oblicz, jak się zmieniła powierzchnia sześcianu, gdy jego krawędź zmniejszyła się 3 razy.

Stosunek powierzchni dwu brył podobnych, jest równy kwadratowi stosunku krawędzi odpowiednich, innemi słowy *powierzchnie wielościanów podobnych są proporcjonalne do kwadratów krawędzi* *odpowiednich. Objętości wielościanów podobnych są proporcjonalne do sześcianów krawędzi odpowiednich.*

322. Odpowiednie krawędzie 2 wielościanów podobnych mają: 0,5 m i 2 m. Obliczyć objętość drugiego, jeżeli objętość pierwszego = 1,25 m^3.

323. Krawędź wielościanu równa się 0,25 m. Oblicz krawędź wielościanu podobnego, mającego objętość 2 razy większą.

324. Jak się zmieni objętość walca, jeżeli zmniejszymy jego wysokość 3 razy, pozostawiając promień podstawy bez zmiany?

325. Jak się zmieni objętość i powierzchnia walca, jeżeli powiększymy promień podstawy 2 razy, nie zmieniając wysokości?

326. Promień podstawy walca = 3 m, a wysokość = 2 m. Oblicz objętość i powierzchnię walca, mającego podstawę o promieniu = 4 m.

327. Jak się zmieni objętość stożka, jeżeli wysokość jego powiększymy 6 razy, pozostawiając promień podstawy bez zmiany?

328. Wysokość stożka = 4 m i promień podstawy = 3 m. Oblicz objętość stożka podobnego do danego, mającego wysokość = 2 m.

Kula.

Porównywując kulę z jakimkolwiek wielościanem, odrazu zauważysz, że kula posiada pewne sobie tylko właściwe własności.

Czy mógłbyś naprz. owinąć kulę kartką papieru tak, by papier szczelnie do niej przylegał?

Czy mógłbyś nakreślić na powierzchni kulistej linję prostą?

Takie powierzchnie jak kula, powierzchnia boczna walca lub stożka, w odróżnieniu od powierzchni płaskich czyli płaszczyzn zowią powierzchniami krzywemi.

Powierzchnię kulistą zwykle określamy jako miejsce punktów, jednakowo odległych od jednego punktu zwanego środkiem.

Odległość środka kuli od jakiegokolwiek punktu powierzchni kulistej nazywa się promieniem.

Część przestrzeni, ograniczona powierzchnią kulistą, zowie się kulą.

Odcinek, przechodzący przez środek kuli i mający końce na jej powierzchni, zowie się średnicą.

Z powyższych określeń wynika, że:

a) Wszystkie promienie i średnice tej samej kuli są sobie równe.

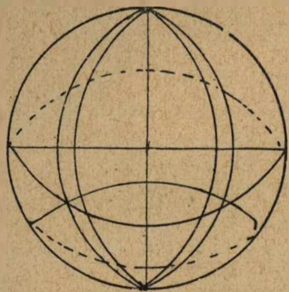
b) Kule o równych promieniach są równe.

329. Zbuduj model półkola i obracaj go około średnicy. Jaką figurę otrzymasz przez ten obrót?

330. a) Przetnij kulę płaszczyzną: jaką figurę otrzymasz?

b) Przetnij kulę płaszczyzną, przechodzącą przez środek kuli; jaką figurę otrzymasz? I w jednym i w drugim wypadku w przecięciach otrzymasz koło.

Koło przechodzące przez środek kuli jest największe i zowie się k o ł e m w i e l k i e m (rys. 60).



Rys. 60.

Czy promień tego koła będzie równy promieniowi kuli?

Ile można poprowadzić kół wielkich?

Czy wszystkie koła wielkie są sobie równe?

W jaki sposób należałoby, poprowadzić koła małe, by one były równe?

Powierzchnię kuli oblicza się zapomocą wzoru:

$$4 \pi R^2 \text{ (}R\text{ promień kuli).}$$

Wzór ten wskazuje, że powierzchnia kulista jest 4 razy większa od powierzchni koła wielkiego.

Objętość zaś kuli obliczamy na podstawie wzoru:

$$\tfrac{4}{3} \pi R^3.$$

331. Oblicz powierzchnię i objętość kuli o powierzchni = 3 dm.

332. Oblicz powierzchnię i objętość kuli, mającej średnicę równą 2,5 m.

333. Oblicz powierzchnię i objętość kuli, jeżeli długość okręgu wielkiego koła wynosi 18,84 dm.

334. Oblicz powierzchnię i objętość kuli, jeżeli pole wielkiego koła wynosi 2,25 m^2.

335. Oblicz promień kuli, której powierzchnia wynosi 1 m^3.

336. Oblicz powierzchnię i obwód koła wielkiego, jeżeli powierzchnia kuli = 8 cm^2.

337. Jak się zmieni powierzchnia i objętość kuli, jeżeli:
a) promień kuli powiększymy 3 razy?
b) „ „ zmniejszymy 4 razy?

338. Jak się zmieni promień kuli, jeżeli:
a) powierzchnię jej powiększymy 64 razy?
b) „ „ zmniejszymy 9 razy?

339. Jak się zmieni promień kuli, jeżeli:
a) objętość jej powiększymy 8 razy?
b) „ „ zmniejszymy 27 razy?

Powierzchnie kul są proporcjonalne do kwadratów ich promieni, a objętości kul są proporcjonalne do sześcianów ich promieni.

340. Półokrągła kopuła o promieniu = 7 m. ma być pokryta blachą. Ile m^2 blachy trzebaby kupić na pokrycie?

341. Ile litrów wody możnaby wlać do półkolistego zbiornika o średnicy = 60 cm?

342. Średnica ziemi wynosi 12 750 km. Oblicz jej objętość, oraz oblicz długość równika.

343. Ile razy kula o promieniu = 4 cm jest większa od kuli o promieniu = 2 cm?

344. Ile waży kula ołowiana o promieniu = 8 cm, jeżeli ciężar właściwy ołowiu = 11,3?

345. Zmierz w klasie promień globusu i oblicz jego powierzchnię i objętość.

346. Ile należałoby zapłacić za złotą kulę o promieniu = 1 cm. jeżeli 1 kg złota obecnie kosztuje... (ciężar właściwy złota = 19,3).

347. Promień kuli = 2 m; oblicz powierzchnię przecięcia kuli płaszczyzną, jeżeli odległość jego od środka wynosi = 1,5 m.

348. Promień przecięcia kuli płaszczyzną = 3 dm. Oblicz odległość tego przecięcia od biegunów, jeżeli promień kuli = 0,5 m.

Uwaga. Biegunami okręgu, leżącego na powierzchni kuli, nazywają się końce jej średnicy, prostopadłej do płaszczyzny okręgu.

349. Powierzchnia kuli jest równoważna powierzchni stożka równobocznego, mającego tworzącą = 0,6 m. Oblicz promień kuli.

350. Powierzchnia kuli jest równoważna powierzchni walca, mającego wysokość = 2,6 dm i promień podstawy = 1,4 dm. Oblicz promień kuli.

351. Oblicz promień kuli, której objętość jest 10 razy mniejsza od objętości kuli o promieniu = 20,5 cm.

Treść.