ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXXIII, 1 SECTIO A 1979

Mathematisches Institut der Universität Würzburg, D-8700
Würzburg Am Hubland, RFN

Mohammed Hakim ASIM[1], Karl Joachim WIRTHS

Koeffizientenabschätzungen für Typisch-Reelle Funktionen

Oszacowania współczynników funkcji typowo-rzeczywistych

Оценки коэффициентов типично-вещественных функций

Eine in $E := \{z \mid |z| < 1\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

wird typisch-reell genannt, wenn sie für alle $z \in E$ mit $\operatorname{Im} z \neq 0$ die Bedingung

$$\operatorname{Im}(f(z)) \operatorname{Im} z > 0 \tag{1}$$

erfüllt. Wir wollen in dieser Arbeit die Familie der typisch-reellen Funktionen, die von Rogosinski ([3],[4]) eingeführt wurde, mit T bezeichnen. Er zeigte, daß die Taylorkoeffizienten a_k, $k \geq 2$, der typisch-reellen Funktionen reell sind und die Ungleichungen $|a_k| \leq k$ erfüllen.

[1] Die Ergebnisse dieser Arbeit sind teilweise in der Diplomarbeit des ersten Verfassers an der Fakultät für Mathematik der Universität Würzburg enthalten.

Eine genauere Auskunft über die relativen Größen verschiedener Koeffizienten enthält der folgende, von Leeman ([2]) bewiesene Satz (s. auch [1] und [5]):

Ist $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in T$, *so gilt:*

$$n - a_n \leq \frac{n(n^2-1)}{6}(2 - a_2), \quad n = 3,4,\ldots . \tag{2}$$

Gleichheit tritt nur für $f(z) = z/(1-z)^2$ *auf.*

Wir wollen in dieser Arbeit zeigen, daß sich bei typisch-reellen Funktionen die Differenz $n - a_n$ in vielen Fällen auch noch durch andere Differenzen $m - a_m$ in ähnlicher Weise wie in (2) abschätzen läßt:

SATZ. *Ist* $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \bar{T}$, *so gilt für* $m < n$ *die Abschätzung*

$$n - a_n \leq \frac{n(n^2-1)}{m(m^2-1)}(m - a_m), \tag{3}$$

wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) m *ist ungerade und* n *ist ungerade.*

2) m *ist gerade und* n *ist gerade.*[1)]

3) m *ist gerade.* n *ist ungerade und* $n \geq \frac{3}{2}m - 1$.

(3) *ist in den genannten Fällen nicht zu verbessern. Gleichheit tritt im Fall* 1) *nur für die Funktionen*

$$f(z) = \frac{sz}{(1-z)^2} + \frac{(1-s)z}{(1+z)^2}, \quad s \in [0,1],$$

für $m = 4$, $n = 5$ *nur für die Funktionen*

$$f(z) = \frac{sz}{(1-z)^2} + \frac{(1-s)z}{1+z+z^2}, \quad s \in [0,1]$$

---

1) G. B. Leeman bewies ebenfalls die Ungleichung (3) in den Fällen 1) und 2) (Schriftliche Mitteilung).

und in allen anderen Fällen nur für die Funktion $f(z) =$ $= z/(1-z)^2$ auf.

Die Abschätzung (3) ist z. B. für gerades m, $n = m+1$, $m \geqslant 6$, falsch, was zeigt, daß die Bedingung 3) in gewissem Sinne bestmöglich ist.

B e w e i s. Zum Beweis von (3) ist zu zeigen:

$$\max_{f \in T}\left\{\frac{a_m}{m(m^2-1)} - \frac{a_n}{n(n^2-1)}\right\} = \frac{1}{m^2-1} - \frac{1}{n^2-1}. \tag{4}$$

Nun gibt es nach [4] zu jeder typisch-reellen Funktion $f(z)$ eine eindeutig bestimmte, auf dem Intervall $[0,1]$ definierte, reellwertige nicht abnehmende Funktion $\mu(t)$, die durch die Bedingung $\int_0^\pi d\mu(t) = 1$ normiert ist, so daß

$$f(z) = \int_0^\pi \frac{z\, d\mu(t)}{1 - 2z\cos t + z^2}, \qquad z \in E. \tag{5}$$

Da das reelle stetige lineare Funktional

$$\varphi(f) = \frac{a_m}{m(m^2-1)} - \frac{a_n}{n(n^2-1)}$$

sein Maximum auf einem der Extremalpunkte

$$E(z;t) = \frac{z}{1-2z\cos t + z^2} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\sin t} z^k, \qquad t \in [0,\pi],$$

der Familie T annimmt, brauchen wir statt (4) nur

$$\max_{t \in [0,\pi]}\left\{\frac{\sin mt}{m(m^2-1)\sin t} - \frac{\sin nt}{n(n^2-1)\sin t}\right\} = \frac{1}{m^2-1} - \frac{1}{n^2-1} \tag{6}$$

zu beweisen. Außerdem haben wir zum Beweis der Schärfe diejenigen $t \in [0,\pi]$ zu bestimmen, für die das Maximum angenommen wird. Dies geschieht im Fall 1) für $t = 0$ und $t = \pi$, für

$m = 4$, $n = 5$ für $t = 0$ und $t = 2\pi/3$ und in allen anderen Fällen für $t = 0$.

Wir zeigen, daß für alle anderen $t \in (0,\pi]$

$$(7) \qquad F(t) = \frac{\sin mt}{m(m^2-1)\sin t} - \frac{\sin nt}{n(n^2-1)\sin t} < \frac{1}{m^2-1} - \frac{1}{n^2-1} .$$

Ist die Bedingung 2) oder die Bedingung 3) erfüllt, so ist diese Ungleichung für $t = \pi$ richtig, so daß wir im folgenden stets $\sin t > 0$ voraussetzen können.

Wir führen zunächst den Beweis von (7) auf den Beweis einfacherer trigonometrischer Ungleichungen zurück.

(7) läßt sich für $t \in (0,\pi)$ auch in der Form

$$\frac{n \sin t - \sin nt}{m \sin t - \sin mt} < \frac{n(n^2-1)}{m(m^2-1)}$$

schreiben. Betrachtet man die Zerlegung

$$\frac{n \sin t - \sin nt}{m \sin t - \sin mt} = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{j \sin t - \sin jt}{(j-1)\sin t - \sin(j-1)t} ,$$

so sieht man, daß es für $t \in (0, \pi/2]$ zum Beweis von (7) genügt, die Ungleichungen

$$(8) \qquad F_1(t) = (2u+1)\sin t - (u+2)\sin ut + (u-1)\sin(u+1)t > 0, \qquad u \in \mathbb{N}, \quad u \geqslant 2,$$

zu beweisen. Ist 1) erfüllt, so ist $F(t - \pi/2)$ eine gerade Funktion und daher mit (8) alles bewiesen.

Wenn der Fall 2) eintritt, so ist $F(t - \pi/2)$ ungerade. Somit bleibt hier zu zeigen: Für $t \in (0, \pi/2)$ gilt

$$\frac{n(n^2-1)}{m(m^2-1)} > \frac{n \sin t + \sin nt}{m \sin t + \sin mt} = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{j \sin t + \sin jt}{(j-1)\sin t + \sin(j-1)t} .$$

Aus der letzten Zerlegung ersieht man, daß wir nur den Beweis der Ungleichungen

(9) $$F_2(t) = (2u + 1)\sin t + (u + 2)\sin ut - (u - 1)\sin(u + 1)t > 0, \quad u \in \mathbb{N},\ u \geqslant 2,\ t \in (0, \pi/2),$$

zu führen brauchen.

Im Falle 3) behandeln wir zunächst die Ungleichung $(5 - a_5) \leq 2(4 - a_4)$ gesondert. Sodann zeigen wir

(10) $$F_3(t) = (30k^3 - 46k^2 + 18k - 2)\sin t + (27k^2 - 27k + 6)\sin 2kt + (8k^2 - 2)\sin(3k - 1)t > 0,$$

$$k \in \mathbb{N},\quad k \geqslant 4,\quad k \text{ gerade},\quad t \in (0, \pi/2)$$

bzw.

(11) $$F_4(t) = 30k^3 \sin t + (27k^2 - 3)\sin 2kt + (8k^2 - 2)\sin 3kt > 0,$$

$$k \geqslant 1,\quad k \text{ ungerade},\quad t \in (0, \pi/2).$$

Für $m = 2k$, n ungerade, $n > 3k$, folgt die Behauptung hiermit aus den Zerlegungen

$$\frac{n - a_n}{m - a_m} = \begin{cases} \dfrac{n - a_n}{3k - a_{3k}} \, \dfrac{3k - a_{3k}}{m - a_m}, & k \text{ ungerade} \\[2ex] \dfrac{n - a_n}{3k - 1 - a_{3k-1}} \, \dfrac{3k - 1 - a_{3k-1}}{m - a_m}, & k \text{ gerade}. \end{cases}$$

I) $F_1(t) > 0$.

Wir beweisen (8) zunächst für $t \in (0, 2\sqrt{2}/u]$. Hierzu betrachten wir die Entwicklung

$$F_1(t) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i\, t^{2i+1}}{(2i+1)!}\, b_i,$$

$$b_i = 2u + 1 - (u+2)u^{2i+1} + (u-1)(u+1)^{2i+1}.$$

Wir werden zeigen, daß es sich hierbei für jedes t aus dem betrachteten Intervall um eine alternierende Reihe handelt, in der der Absolutwert jedes Summanden größer ist als der Absolutwert des folgenden Summanden. Hieraus folgt nach einem Satz von Leibniz über alternierende Reihen sofort die Behauptung.
Für $i \geqslant 2$ folgt $b_i > 0$ aus

$$b_i > (u^2-1)(u+1)^{2i} - (u^2+2u)u^{2i},$$
$$\left(\frac{u+1}{u}\right)^{2i} \geqslant \left(\frac{u+1}{u}\right)^4 \; \frac{u^2+2u}{u^2-1}$$

Die Ungleichung

$$\frac{b_i}{(2i+1)!} > \frac{b_{i+1}}{(2i+3)!}\, t^2, \quad t^2 \in (0, 8/u^2], \quad i \geqslant 2, \quad u \geqslant 2,$$

ergibt sich aus

$$(b_i - (2u+1))u^2 \cdot 6 \cdot 7 > \frac{42}{5}(b_{i+1} - (2u+1)) > 8(b_{i+1} - (2u+1)),$$

wobei sich die erste dieser Ungleichungen aus

$$\left(\frac{u+1}{u}\right)^{2i} \geqslant \left(\frac{u+1}{u}\right)^4 > \frac{4u^4 + 8u^3}{4u^4 - 2u^3 - 5u^2 + 2u + 1}$$

folgern läßt.
Für $t \in (2\sqrt{2}/u, \pi/2]$ schätzen wir $F_1(t)$ folgendermaßen ab:

$$F_1(t) = 2(2u+1)\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - 3\sin(u+\tfrac{1}{2})t\cos\frac{t}{2} +$$

$$+ (2u+1)\sin\frac{t}{2}\cos(u+\tfrac{1}{2})t \geqslant 2(2u+1)\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} -$$

$$- \left(9\cos^2\frac{t}{2} + (2u+1)^2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{1/2} .$$

Da $t/2 \in (\sqrt{2}/u, \pi/4]$, gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{2}\,\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{u} .$$

Die Behauptung folgt also aus

$$4(2u+1)^2\sin^2\frac{t}{2}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right) > 9\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right) + (2u+1)^2\sin^2\frac{t}{2},$$

$$\sin^2\frac{t}{2} \in (1/u^2, 1/2], \quad u \geqslant 2.$$

II) $F_2(t) > 0$.

Zum Beweis von (9) für $t \in (0, 2\sqrt{2}/u]$ zeigt man für die Koeffizienten c_i der Entwicklung

$$F_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i\, t^{2i+1}}{(2i+1)!}\, c_i ,$$

$$c_i = 2u + 1 + (u+2)u^{2i+1} - (u-1)(u+1)^{2i+1} ;$$

$$c_0 = c_1 = 4u + 2, \quad c_i < 0 \quad \text{für} \quad i \geqslant 2$$

sowie

$$-\frac{c_i}{(2i+1)!} > -\frac{c_{i+1}}{(2i+3)!}\,t^2, \; t^2 \in (0, 8/u^2], \; i \geqslant 2, \; u \geqslant 2.$$

Im angegebenen Intervall folgt (9) dann aus

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\,(8/u^2)^i\, c_i > 0, \quad u \geqslant 2,$$

wiederum unter Benutzung des Leibnizschen Satzes.

Für $t \in (2\sqrt{2}/u, \pi/2)$ schätzt man wie beim Beweis von (8) ab.

III) $m = 4$, $n = 5$.

Der Beweis des Satzes für den Fall $m = 4$, $n = 5$ ergibt sich sofort aus der Umformung

$$\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{24}\right)\sin t - \frac{\sin 4t}{4\cdot 15} + \frac{\sin 5t}{5\cdot 24} =$$

$$= \frac{\sin t}{30}(2\cos t + 1)^2(\cos t - 1)^2 \geqslant 0.$$

Man sieht, daß in diesem Fall Gleichheit auch für $\cos t = -1/2$, d. h. für $E(z; 2\pi/3) = z/(1 + z + z^2)$ auftritt.

IV) $F_3(t) > 0$.

Für $t \in (0, \frac{\pi}{3k-1}]$ folgt (10) aus $\sin t > 0$, $\sin 2kt > 0$, $\sin(3k - 1)t \geqslant 0$, für $t \in (\frac{\pi}{3k-1}, \frac{\pi}{2k}]$ aus $\sin t > \frac{2}{3k-1}$, $\sin 2kt \geqslant 0$, $\sin(3k - 1)t > -1$.

Im Falle $k = 4$ $(m = 8, n = 11)$ benutzt man für $t \in (\pi/8, \pi/2)$ die Abschätzungen $\sin t > \sin \pi/8 > 8/22$, $\sin 8t \geqslant -1$, $\sin 11t \geqslant -1$ und im Falle $k = 6$ $(m = 12, n = 17)$ für $t \in (\pi/12, \pi/2)$ die Abschätzungen $\sin t > \sin \pi/12 > 1/4$, $\sin 12t \geqslant -1$, $\sin 17t \geqslant -1$.

Es bleibt (10) für $k \geqslant 8$, $t \in (\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2})$ zu beweisen. Hierzu benutzt man

für $t \in (\frac{\pi}{2k}, \frac{7\pi}{12k}]$: $\sin t > \frac{1}{k}$, $\sin 2kt \geqslant \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$,
$\sin(3k - 1)t \geqslant -1$,

für $t \in (\frac{7\pi}{12k}, \frac{2\pi}{3k}]$: $\sin t > \frac{7}{6k}$, $\sin 2kt \geqslant \sin \frac{4\pi}{3} > -\frac{7}{8}$,
$\sin(3k - 1)t > \sin \frac{5\pi}{3} > -\frac{7}{8}$,

für $t \in (\frac{2\pi}{3k}, \frac{\pi}{2})$: $\sin t > \frac{4}{3k}$, $\sin 2kt \geqslant -1$, $\sin(3k - 1)t \geqslant -1$.

V) $F_4(t) > 0$.

(11) folgt

für $t\in(0,\frac{\pi}{3k}]$ aus $\sin t>0$, $\sin 2kt>0$, $\sin 3kt\geqslant 0$,

für $t\in(\frac{\pi}{3k},\frac{\pi}{2k}]$ aus $\sin t>\frac{2}{3k}$, $\sin 2kt\geqslant 0$, $\sin 3kt\geqslant -1$,

für $t\in(\frac{\pi}{2k},\frac{7\pi}{12k}]$ aus $\sin t>\frac{1}{k}$, $\sin 2kt\geqslant -\frac{1}{2}$, $\sin 3kt\geqslant -1$, $k\geqslant 3$,

für $t\in(\frac{7\pi}{12k},\frac{\pi}{2})$ aus $\sin t>\frac{7}{6k}$, $\sin 2kt\geqslant -1$, $\sin 3kt\geqslant -1$, $k\geqslant 3$.

Damit ist (7) vollständig bewiesen und es wurde auch gezeigt, daß das Maximum in (6) nur an den angegebenen Stellen angenommen wird. Aus der Integraldarstellung (5) folgt hiermit sofort die Behauptung des Satzes bezüglich der Schärfe in (3).

BEMERKUNG. Die Ungleichung (3) ist für gerades m, $n = m + 1$, $m\geqslant 6$, z. B. für die Funktion

$$E(z;\ \pi - \frac{3\pi}{2m}) = z/(1 + 2z\cos\frac{3\pi}{2m} + z^2)$$

nicht erfüllt, denn es ist $a_m = \dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{2m}}$, $a_n = -\dfrac{\cos\frac{3\pi}{2m}}{\sin\frac{3\pi}{2m}}$ und daher

$$\frac{n - a_n}{m - a_m}\geqslant\frac{(m + 2)\sin\frac{3\pi}{2m}}{m\sin\frac{3\pi}{2m} - 1} > \frac{m + 2}{m - 1} = \frac{n(n^2 - 1)}{m(m^2 - 1)}.$$

Aus der Ungleichung (7) folgern wir noch ein

KOROLLAR. Ist $m<n$, $m\geqslant 2$ und eine der Bedingungen 1), 2), 3) erfüllt, so ist für $\alpha\geqslant 0$, $-\frac{1}{n}\leqslant\sigma\leqslant\dfrac{m^2 - 1}{n(n^2 - m^2)}$ das Polynom

$$z - \alpha z^m + \sigma z^n \tag{12}$$

genau dann typisch-reell, wenn

$$\alpha\leqslant\frac{n\sigma + 1}{m}. \tag{13}$$

B e w e i s. Wir zeigen, daß unter den angegebenen Bedingungen das Polynom

$$P_{nm}(z) = z - \frac{n^2 - 1}{m(n^2 - m^2)} z^m + \frac{m^2 - 1}{n(n^2 - m^2)} z^n$$

typisch-reell ist. Hierfür genügt es, zu beweisen, daß

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{Re} \frac{P_{nm}(z)(1 - z^2)}{z} \geq 0 \quad \text{für} \quad |z| = 1 \quad \text{(s. [4]).}$$

Dies erhält man aber unmittelbar aus (7).
Außerdem sind die Polynome

$$P_n(z) = z - \frac{1}{n} z^n, \quad P_{(-n)}(z) = z + \frac{1}{n} z^n$$

typisch-reell. Alle im Korollar vorkommenden Polynome lassen sich als konvexe Linearkombinationen dieser drei Polynome darstellen und sind daher ebenfalls typisch-reell.
Ist $\alpha > \frac{n\sigma + 1}{m}$, so sind die Polynome der Form (12) nicht mehr typisch-reell. Da nämlich

$$sP'_{nm}(1) + (1 - s)P'_n(1) = 0, \qquad s \in [0,1],$$

liegt für die Polynome (12), für die (13) nicht mehr gilt, eine Nullstelle der Ableitung im Intervall $(-1,1)$. Dies kann aber für typisch-reelle Funktionen nicht sein.

BEMERKUNGEN. Man prüft leicht durch explizite Rechnung nach, daß für die Polynome

$$\text{(15)} \qquad sP_{nm}(z) + (1 - s)P_n(z)$$

mit $s > 1$ die Bedingung (14) in der Umgebung von $z = 1$ verletzt ist, (13) also für $\sigma > \frac{m^2 - 1}{n(n^2 - m^2)}$ keine scharfe Schranke mehr darstellt.

Falls $n - 1 = k(m - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, so läßt sich zeigen, daß die Polynome (15) für $s \in [0,1]$ E schlicht auf ein bezüglich des Nullpunkts sternförmiges Gebiet abbilden. Man erhält also in diesen Fällen durch (13) scharfe Schranken für die Koeffizienten sternförmiger Polynome der Form (12). Im Falle $k = 2$ wurden diese Schranken bereits in [6] angegeben.

LITERATUR

[1] Krzyż, J.G., Złotkiewicz, E., Two remarks on typically-real functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, 30(1976), 57-61.

[2] Leeman, G.B., A local estimate for typically-real functions, Pacific J. Math., 52(1974), 481-484.

[3] Rogosinski, W., Über positive harmonische Sinusentwicklungen, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, 40(1931), 33-35.

[4] ,, , Über positive harmonische Entwicklungen und typischreelle Funktionen, Math. Z., 35(1932), 93-121.

[5] Ruscheweyh, St., Nichtlineare Extremalprobleme für holomorphe Stieltjesintegrale, Math. Z., 142(1975), 19-23.

[6] ,, , Wirths K.J., Über die Koeffizienten spezieller schlichter Polynome, Ann. Polon. Math., 28(1973), 341-355.

STRESZCZENIE

Praca dotyczy dowodu nierówności

$$(n - a_n)/[n(n^2 - 1)] \leq (m - a_m)/[m(m^2 - 1)], \qquad 2 \leq m < n,$$

W klasie T funkcji typowo-rzeczywistych f mających w kole $|z| < 1$ rozwinięcie

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k ,$$

w każdym z trzech przypadków:

1° m, n - liczby parzyste,

2° m, n - liczby nieparzyste,

3° m - liczba parzysta, n - liczba nieparzysta oraz $n \geqslant (3m - 2)/2$.

Резюме

В работе дается доказательство неравенств

$$(n-a_n)/\left[n(n^2-1)\right] \leqslant (m-a_m)/\left[m(m^2-1)\right] , \quad 2 \leqslant m < n$$

в классе T типично-вещественных функций f имеющих в круге $|z| < 1$ разложение

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

в каждом из случаев:

1° m, n - четные,

2° m, n - нечетные,

3° m - четное, n - нечетное и $n \geqslant (3m-2)/2$