

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS  
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ADOLF HAIMOVICI

## Sur une généralisation du problème de Cauchy

O pewnym uogólnieniu problemu Cauchy'ego

О некотором обобщении проблемы Коши

§ 1. À partir de 1952, E. Hille [2] a publié une série de travaux dans lesquels il a formulé d'une manière générale le problème de Cauchy pour une équation linéaire et établi des relations entre ce problème et la théorie des semigroupes. Ses travaux ont été continués et généralisés par d'autres mathématiciens, parmi lesquels citons R. S. Phillips [5], et plus récemment par T. Kato [4] et E. Heyn [1].

Un exposé d'ensemble des résultats est donné dans le livre de E. Hille [3].

Nous nous proposons de traiter un problème analogue pour des systèmes de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i u, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les  $A_i$  sont  $n$  opérateurs linéaires, définis sur un domaine d'un espace  $\mathcal{B}$  de Banach; pour plus de simplicité nous allons supposer que les domaines des  $A_i$  coïncident et nous désignerons par  $D \equiv D(A_i) \subset \mathcal{B}$  le domaine commun de définition; nous supposerons, de plus, que les opérateurs  $A_i$  sont indépendants de  $x_i$  et que les domaines de leurs valeurs sont  $R(A_i) \subset \mathcal{B}$ .

§ 2. Le problème à résoudre est le suivant:

Trouver une fonction  $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ayant les propriétés suivantes:

1.  $u$  est fortement absolument continue et continûment différentiable sur chaque intervalle fini à  $n$  dimensions, contenu dans l'ensemble  $E_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n): x_i \geq 0, x \neq 0\}$ ;

2. Pour chaque  $x \in E_+^n$ ,  $u(x) \in D(A)$  et satisfait à (1);

§ 3.  $u_0$  étant un élément donné de  $\mathcal{B}$ , on a

$$(2) \quad \lim_{x_i \rightarrow 0} \|u(x) - u_0\| = 0.$$

Nous allons désigner par  $P$  le problème ainsi formulé. On peut alors aisément adapter les définitions suivantes de E. Hille:

Une  $Z$ -solution de (1) est une solution non nulle correspondant à l'élément  $u_0 = \theta \in \mathcal{B}$ . Si le système (1) admet deux solutions différentes  $u_1$  et  $u_2$  correspondant au même élément initial  $u_0$ , alors il admet une  $Z$ -solution.

Une solution normale du type  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  est une solution  $u(x)$  de (1) qui satisfait aux conditions:

$$(3) \quad \limsup_{x_i \rightarrow \infty} \frac{1}{x_i} \log \|u(x)\| \leq \omega_i < +\infty, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

pour  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  quelconques.

Pour que le problème  $P$  admette au plus une solution normale du type  $\omega$ , il est suffisant que l'équation de rang  $i$  ( $i$ -quelconque) admette au plus une solution du type normal  $\omega_i$ , quand les  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  sont fixés. D'autre part, le problème de Cauchy pour cette équation admet au plus une solution du type normal, si  $A_i$  est un opérateur fermé et si son spectre ponctuel n'est pas dense dans un demi-plan  $\lambda$ , défini par  $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0^{(i)}$ , (voir [3] p. 619). On peut donc énoncer le

### **Théorème I. Si**

- a) les opérateurs  $A_i$  sont fermés,
- b) le spectre ponctuel de chaque opérateur  $A_i$  n'est pas dense dans un demi-plan  $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0^{(i)}$ , alors pour tout  $u_0 \in \mathcal{B}$  le problème  $P$  admet au plus une solution du type  $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(n)})$ .

On peut alors démontrer, comme dans le cas d'une seule variable, le

**Théorème II.** Si les opérateurs  $A_i$  sont fermés, la condition nécessaire et suffisante pour que le problème  $P$  admette une  $Z$ -solution d'un type qui ne dépasse pas  $\omega$  est que le système

$$(4) \quad A_i u = \lambda^{(i)} u$$

admette une solution  $u(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \neq \theta$  bornée et holomorphe dans tout demi-plan  $\operatorname{Re} \lambda^{(i)} \geq \omega_i + \varepsilon, \varepsilon > 0$ .

La démonstration est identique à celle d'un théorème analogue dans [3].

**Théorème III.** Si les opérateurs  $A_i$  sont bornés et permutables sur  $\bigcap_{i=1}^n R(A_i) \cap D$ , le problème  $P$  admet une solution unique du type  $\omega = (\omega_i) = (\|A_i\|)$ :

$$(5) \quad u(x_i; y_0) = e^{\sum_{i=1}^n x_i A_i} u_0, \quad x_i \geq 0,$$

c'est-à-dire:

$$u(x_i; u_0) = \left( E + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n x_i A_i + \frac{1}{2!} \left( \sum_{i=1}^n x_i A_i \right)^2 + \dots \right) u_0.$$

**Démonstration.**

a) En effet, on a:

$$\|u(x_i; u_0)\| \leq \left( 1 + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n x_i \|A_i\| + \frac{1}{2!} \left( \sum_{i=1}^n x_i \|A_i\| \right)^2 + \dots \right) \|u_0\| \leq e^{\sum x_i \|A_i\|} \|u_0\|,$$

d'où

$$\log \|u\| \leq \sum_{i=1}^n x_i \|A_i\| + \log \|u_0\|;$$

et il s'ensuit que

$$\limsup_{x_i \rightarrow \infty} \frac{1}{x_i} \log \|u\| \leq \|A_i\|.$$

b) On a encore:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i \left( 1 + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n x_i A_i + \dots \right) u_0 = A_i u_0.$$

c) Enfin, la solution (5) est l'unique solution du type normal, puisque

$$\|A_i u - \lambda u\| \geq (|\lambda| - \|A_i\|) \|u\|,$$

et, si on prend  $\lambda > \|A_i\|$ , l'équation:

$$A_i u - \lambda u = 0$$

n'a pas de solution non nulle; donc le spectre de  $A_i$  n'est pas dense dans un demi-plan  $\text{Re } \lambda > \|A_i\|$ . Du théorème II, il résulte que le système n'admet pas de  $Z$ -solution du type normal, et par suite que la solution (5) est unique.

§ 3. En ce qui concerne la relation entre ce problème et la théorie des semigroupes à  $n$  paramètres, rappelons la définition de ces semigroupes ([2] pag. 334).

Si  $E^n$  est un espace vectoriel à  $n$  dimensions et  $Y$  est un espace de Banach,  $\mathcal{E}(Y)$  l'ensemble des transformations linéaires, bornées de  $Y$  en lui-même et  $T(x) \in \mathcal{E}(Y)$  est une transformation qui dépend d'un paramètre vectoriel  $x \in E_n$ , alors l'ensemble des transformations  $T(x)$  est un semigroupe si:

1.  $T(x)$  est définie pour chaque  $x \in E_+^n$ , où  $E_+^n$  désigne le domaine  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ , à l'exception de l'origine, à valeurs dans  $\mathcal{E}(Y)$ ;

2. Pour  $x_1, x_2 \in E_+^n, u \in Y$ , on a:  $T(x_1 + x_2)u = T(x_1)[T(x_2)u]$ ;

3. Pour tout  $u \in Y$  la fonction  $x \rightarrow T(x)u$ , à valeurs dans  $Y$ , est fortement mesurable sur  $E_+^n$ .

4. Il existe une constante positive  $M$  telle que  $\|T(\xi u_k)\| \leq M$ , pour  $k = 1, 2, \dots, n, 0 \leq \xi \leq 1, u_k$  étant les vecteurs unités des axes;

5. Pour tout  $x \in E_+^n$  l'ensemble  $\bigcup_{\alpha > 0} R(T(\alpha x))$  est dense dans  $Y$ .

Or, on peut alors démontrer le

**Théorème IV.** Si les  $A_i$  sont les générateurs infinitésimaux d'un semigroupe, le problème  $P$  admet une solution unique pour chaque  $u_0 \in D$ .

L'existence d'une solution résulte de la relation générale ([2] p. 332)

$$\frac{d}{d\xi} [T(\xi x)u_0] = A_0(x)[T(\xi x)u_0],$$

où

$$A_0(x)u = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} [T(\eta x) - I]u.$$

En effet, on a:

$$\frac{T(\xi'x) - T(\xi x)}{\xi' - \xi} u_0 = \frac{T[(\xi' - \xi)x] - I}{\xi' - \xi} T(\xi x)u_0,$$

d'où, en prenant  $\xi \equiv (1, 1, \dots, 1), \xi' \equiv (1, 1, 1 + h, 1, \dots, 1)$ , en tenant compte du fait que  $T(x)$  est bornée et passant ensuite à la limite pour  $h \rightarrow 0$ , on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [T(x)u_0] = A_0(u_i)T(x)u_0 = A_i T(x)u_0.$$

On a encore

$$\lim_{x \rightarrow 0} T(x)u_0 = u_0,$$

puisque  $T(x)$  tend fortement vers l'identité quand  $x \rightarrow 0$ .

Démontrons enfin que la solution est unique. En effet, s'il  $y$  avait deux solutions  $y_1, y_2$ , il existerait aussi une  $Z$ -solution  $z = y_1 - y_2$ ; pour cette solution on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ T(x_1, x_2, \dots, x_i - \xi, \dots, x_n) z(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) \right. \\ \left. = T(x_1, x_2, \dots, x_i - \xi, \dots, x_n) \left[ \frac{\partial z}{\partial \xi} - A_i z \right] \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $\xi$ , entre  $a$  et  $\beta$ ,  $0 \leq a < \beta \leq x_i$ , on obtient:

$$\begin{aligned} & T(x_1, \dots, x_i - \beta, \dots, x_n)z(x_1, \dots, \beta, \dots, x_n) \\ & \equiv T(x_1, \dots, x_i - a, \dots, x_n)z(x_1, \dots, a, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Prenant d'abord  $i = 1$ ,  $x_2 = \dots = x_n = 0$ , et faisant  $a = 0$ , et  $x_1 = \beta$ , on a:  $z(x_1, 0, \dots, 0) = \theta$ .

Prenant ensuite  $x_1 \neq 0$ ,  $x_3 = \dots = x_n = 0$ ,  $i = 2$  et faisant  $a = 0$ , et  $x_2 = \beta$ , on obtient:  $z(x_1, x_2, 0, \dots, 0) = \theta$ .

En procédant de même pour  $i = 3, \dots, i = n$ , on obtient

$$z(x_1, \dots, x_n) = \theta,$$

et nous avons ainsi démontré le théorème énoncé.

On peut démontrer maintenant un théorème analogue à un théorème de R. S. Phillips [5].

**Théorème V.** Si

a)  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  sont  $n$  opérateurs linéaires fermés, définis sur un domaine  $D$  dense et ayant des ensembles résolvants non vides,

b) pour chaque  $u_0 \in D$  le problème  $P$  a une solution unique, alors  $A_i$  sont les générateurs d'un semigroupe  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n)u_0 = u(x_1, x_2, \dots, x_n; u_0).$$

Pour établir ce résultat, nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

**Lemme.** Si  $A_i$  sont  $n$  opérateurs linéaires fermés et si pour chaque  $u_0 \in D$  le problème  $P$  admet une solution unique, alors pour chaque  $x \in E_+^n$ , il existe une constante  $C_x$  telle que:

$$\|u(x; u_0)\| + \sum_1^n \|A_i u(x; u_0)\| \leq C_x \left( \|u_0\| + \sum_1^n \|A_i u_0\| \right).$$

La démonstration est analogue à celle donnée par R. S. Phillips, dans la Note citée: On introduit dans  $D$  la norme  $\|u\|' = \|u\| + \sum_1^n \|A_i u\|$ , et on désigne par  $D'$  l'espace ainsi normé. Comme les  $A_i$  sont fermés,  $D'$  est un espace de Banach. On considère encore les fonctions fortement continues sur  $E_+^n$  à valeurs dans  $D'$  telles que

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \|u(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)\|' dx_i \right) < +\infty.$$

Soit  $\mathcal{E}'$  l'ensemble de ces fonctions. Introduisons dans cet ensemble la métrique

$$\rho(u, v) = \sum_0^{\infty} 2^{-n} \frac{\|u - v\|_n}{1 + \|u - v\|_n},$$

où

$$\|u\|_0 = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \|u(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)\|^2 dx_i \right) \text{ et } \|u\| = \sup_{\frac{1}{n} < \|x\| < n} \|u(x)\|'$$

pour  $n = 1, 2, \dots$ , où  $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Il est évident que  $\mathcal{E}'$  est un espace

métrique complet. Soit maintenant  $S$  la transformation qui fait correspondre à  $u_0 \in D'$  la solution du problème  $P$ , c'est-à-dire  $u(x; u_0)$ . L'unicité entraîne la linéarité de  $S$  sur  $D'$ ;  $S$  est une transformation fermée. En effet, soit  $\{u_n\}$  une suite d'éléments de l'espace  $D'$  telle que  $u_n \rightarrow u_0 \in D'$  et  $S(u_n) \rightarrow v \in \mathcal{E}'$ .

On a

$$\frac{\partial u(x; u_n)}{\partial x_i} = A_i u(x; u_n).$$

Le second membre de cette égalité tend uniformément vers  $A_i v$  dans chaque ensemble fermé contenu dans  $E_+^n$  puisque  $u(x; u) = S(u_n)$  tend vers  $v$ , et d'autre part, puisque  $A_i v$  existe,  $A_i$  étant fermé et  $\mathcal{E}'$  complet. Il résulte encore que

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0; u_n) - A_i v(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) \right\|^2 dx_i \right) \rightarrow 0$$

avec  $n \rightarrow \infty$ .

Si l'on pose:

$$(6) \quad u(x_1, 0, \dots, 0, u_n) = u_n^{(1)}; u(x_1, x_2, 0, \dots, 0, u_n^{(1)}) = u_n^{(2)}, \dots, \\ u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, u_n^{n-1}) = u_n^{n-1},$$

de l'égalité:

$$u(x; u_n) = \\ = u_n + \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, 0, 0, \dots, 0; u_n) dx_1 + \dots + \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, u_n^{n-1}) dx_n,$$

on déduit comme conséquence, en répétant plusieurs fois le raisonnement de R. S. Phillips

$$v(x) = u_0 + \int_0^{x_1} A_1 v(x_1, 0, \dots, 0) dx + \dots + \int_0^{x_n} A_n v(x_1, \dots, x_n) dx,$$

ce qui signifie que  $v$  est une solution correspondant à  $u_0$ . De l'hypothèse d'unicité, on tire  $v(x) = u(x; u_0)$ , c'est-à-dire  $S$  est fermé.

Du théorème du graphe fermé on déduit que  $S'$  est continue. La continuité à l'origine implique l'existence d'une constante  $C_n$  telle que

$$\|u(x; u_0)\|_n \leq C_n \|u_0\|,$$

$\|u_0\|$  étant suffisamment petit; et comme les deux membres sont homogènes en  $u_0$ , il résulte que cette relation est vraie pour chaque  $u_0 \in D'$ .

Passons maintenant à la démonstration du théorème énoncé.

Définissons l'opérateur  $T(x)$  sur  $D'$ , à valeurs dans lui-même, pour  $x \in E_+^n$ , par l'égalité:

$$T(x)u_0 = u(x; u_0).$$

L'hypothèse d'unicité conduit à la linéarité de  $T(x)$  sur  $D'$ , le lemme énoncé plus haut implique que  $T(x)$  est borné et des conditions 1 et 2 du problème  $P$  on déduit la continuité de  $T(x)$  sur  $D'$  (comme fonction de  $x$ ), dans la topologie forte des opérateurs.

La linéarité conduit encore à

$$u(x_1 + x_2; u_0) = u(x_1; u(x_2; u_0)) \quad x_1, x_2 \in E_+^n, u_0 \in D,$$

c'est-à-dire à  $T(x' + x'') = T(x')T(x'')$ .

Toujours à cause de l'unicité on constate, en utilisant le théorème 3.1 de R. S. Phillips [5], que pour  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$  on a

$$T(x_1, 0, \dots, 0) = T_1(x_1),$$

où  $T_1(x_1)$  est le semigroupe engendré par  $A_1$ , que

$$T(0, x_2, 0, \dots, 0) = T_2(x_2)$$

est le semigroupe engendré par  $A_2$ , etc., et enfin que

$$T(x) = T(x_1, x_2, \dots, x_n) = T_n(x_n)T_{n-1}(x_{n-1}) \dots T_1(x_1);$$

en tenant compte des propriétés de  $T_i(x_i)$ , cela achève la démonstration du théorème.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Heyn, E., Die Differentialgleichung  $dT/dt = P(t)T$  für Operatorfunktionen, Math. Nachrichten, Bd. 24 (1962) p. 281.
- [2] Hille, E., A note on Cauchy's problem, Ann. de la Soc. Polonaise de Math., vol. 25 (1952) p. 56.
- [3] Hille, E., Functional Analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957.
- [4] Kato, T., On linear differential equations in Banach Spaces, Transactions of the Symposium on partial differential equations, University of California, 1955 p. 181.
- [5] Phillips, R. S., A note on the abstract Cauchy problem, Proc. Nat. Acad. of Sci., vol. 40 (1954) p. 244.

## Streszczenie

Zakładamy, że występujące w równaniu (1) operatory liniowe  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , niezależne od  $x_i$  są określone we wspólnym obszarze  $D$  zawartym w przestrzeni  $\mathcal{B}$  Banacha i zbiory ich wartości  $R(A_i) \subset \mathcal{B}$ . Problem  $P$  polega na poszukiwaniu rozwiązania  $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  równania (1), określonego w obszarze  $E_+^n = \{x: x_i \geq 0, x \neq 0\}$ , przyjmującego dla każdego  $x \in E_+^n$  wartość  $u(x) \in D$ , będącego funkcją mocno absolutnie ciąglą i mającą pochodne cząstkowe ciągle w każdym skończonym  $n$ -wymiarowym przedziale zawartym w  $E_+^n$ , a przy tym spełniającego warunek (2) gdzie  $u_0 \in \mathcal{B}$ . Zgodnie z terminologią E. Hille'a [2] nazywamy niezerowe rozwiązanie równania (1), odpowiadające elementowi zerowemu  $u_0 = \theta \in \mathcal{B}$ ,  $Z$ -rozwiązaniem, a normalnym typu  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  — rozwiązaniem  $u(x)$  spełniające dla dowolnych  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  warunek (3).

**Twierdzenie 1.** Jeżeli operatory  $A_i$  są domknięte a spektrum żadnego z nich nie jest gęste w półpłaszczyźnie  $\text{Re } \lambda \geq \lambda_0^{(i)}$ , to dla każdego  $u_0 \in \mathcal{B}$  problem  $P$  ma rozwiązanie normalne typu  $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \dots, \lambda_0^{(n)})$ .

**Twierdzenie 2.** Jeśli  $A_i$  są domknięte, to warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia  $Z$ -rozwiązania typu nie przekraczającego  $\omega$  jest, by równanie (4) miało rozwiązanie  $u(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \neq 0$  holomorficzne i ograniczone w każdej półpłaszczyźnie  $\text{Re } \lambda^{(i)} \geq \omega_i + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

**Twierdzenie 3.** Jeżeli operatory  $A_i$  są ograniczone i przemienne na zbiorze  $\bigcap_{i=1}^n R(A_i) \cap D$ , to problem  $P$  ma dokładnie jedno rozwiązanie typu  $\omega = (\omega_i) = (\|A_i\|)$ , dane wzorem (5).

**Twierdzenie 4.** Jeżeli operatory  $A_i$  są generatorami półgrupy, to problem  $P$  ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego  $u_0 \in D$ .

**Twierdzenie 5.** Jeżeli operatory  $A_i$  są domknięte, określone na zbiorze gęstym  $D$  i mają niepuste resolwenty, oraz jeśli dla każdego  $u_0 \in D$  problem  $P$  ma dokładnie jedno rozwiązanie, wówczas  $A_i$  są generatorami półgrupy  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  takiej, że  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)u_0 = u(x_1, x_2, \dots, x_n; u_0)$ .

## Резюме

Полагаем, что выступающие в уравнении (1) линейные операторы  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) независимые от  $x_i$  определены в общей области  $D$ , заключённой в пространстве  $\mathcal{B}$  Банаха, а множества их значения  $R(A_i) \subset \mathcal{B}$ . Проблема  $P$  состоит в отыскании решения  $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  уравнения (1), определённого в области  $E_+^n = \{x: x_i \geq 0, x \neq 0\}$ , принимающего для каждого  $x \in E_+^n$  значение  $u(x) \in D$ , явля-

ющееся функцией сильно абсолютно непрерывной и имеющей частные производные непрерывные во всяком конечном  $n$  — мерном интервале, заключённой в  $E_+^n$ , а при том исполняющего условие (2), где  $u_0 \in \mathcal{B}$ . Согласно с терминологией Е. Гилля [2] называем не-нулевое решение уравнения (1), отвечающее нулевому элементу  $u_0 = \theta \in \mathcal{B}$ ,  $Z$  — решением; а решением нормальным типа  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  — решение  $u(x)$ , испалющее условие (3) при произвольных  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ .

**Теорема 1.** Если операторы  $A_i$  домкнуты, а спектр никакого из них не густ в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda^{(1)}$ , то для всякого  $u_0 \in \mathcal{B}$  проблема  $P$  имеет нормальное решение типа  $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \dots, \lambda_0^{(n)})$ .

**Теорема 2.** Если  $A_i$  домкнуты, то необходимым и достаточным условием существования  $Z$  — решения, не превышающего  $\omega$ , является условие, чтобы уравнение (4) имело решение  $u(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) \neq 0$  голоморфное и ограниченное в каждой полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda^{(i)} > \omega_i + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 3.** Если операторы  $A_i$  ограничены и переменны на множестве  $\bigcap_{i=1}^n R(A_i) \cap D$ , то проблема  $P$  имеет точно одно решение типа  $\omega = (\omega_i) = (\|A_i\|)$  данное формулой (5).

**Теорема 4.** Если операторы  $A_i$  суть генераторы полугруппа, то проблема  $P$  имеет одно решение для каждого  $u_0 \in D$ .

**Теорема 5.** Если операторы  $A_i$  домкнуты, определены на густом множестве  $D$  и имеют непустые резольвенты, а также если для всякого  $u_0 \in D$  проблема  $P$  имеет точно одно решение, тогда  $A_i$  суть генераторы полугруппы  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такой, что  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)u_0 = u(x_1, x_2, \dots, x_n; u_0)$ .

ВЫПУСКА  
УМОВ  
СВЯЗАН



## ANNALES

UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

VOL. XV

SECTIO A

1961

1. Z. Lewandowski: Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle  $|z| < 1$ .  
O majorantach funkcji holomorficznych w kole  $|z| < 1$ .
2. Cz. Kluczny: Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles ordinaires I.  
O pewnych rodzinach krzywych w powiązaniu z teorią równań różniczkowych zwyczajnych I.
3. K. Tatariewicz: Deux théorèmes sur la convergence exponentielle des solutions de l'équation du second ordre.  
Dwa twierdzenia o zbieżności wykładniczej rozwiązań równania różniczkowego drugiego rzędu.
4. A. Bielecki et Z. Lewandowski: Sur certaines familles de fonctions  $\alpha$ -étoilés.  
O pewnych rodzinach funkcji  $\alpha$ -gwiazdzistych.
5. J. Krzyż: On Univalent Functions with Two Preassigned Values.  
O funkcjach jednolistnych z dwiema zadanymi wartościami.
6. Z. Lewandowski: Starlike Majorants and Subordination.  
Majoranty gwiazdziste a podporządkowanie.
7. J. Kisiński: Sur l'existence des solutions de l'équation  $\partial^2 x / \partial x \partial y =$   
 $= f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ .  
O istnieniu rozwiązań równania  $\partial^2 x / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ .
8. A. Bielecki et T. Dłotko: Sur certaines équations fonctionnelles.  
O pewnych równaniach funkcyjnych.
9. M. Bojarska: Sur une propriété des développements à base quelconque.  
O pewnej własności rozwinięć przy dowolnej zasadzie.
10. E. Złotkiewicz: On a Variational Formula for Starlike Functions.  
O pewnym wzorze wariacyjnym dla funkcji gwiazdzistych.

ANNALES

UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

VOL. XVI

SECTIO A

1962

1. Cz. Kluczny: Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles ordinaires II.  
O pewnych rodzinach krzywych w powiązaniu z teorią równań różniczkowych zwyczajnych II.
2. K. Radziszewski: Sur la courbure intégrale d'une classe de courbes.  
O krzywiźnie całkowitej pewnej klasy krzywych.
3. K. Radziszewski: Sur un théorème de Pogorielov.  
O pewnym twierdzeniu Pogorielowa.
4. W. Oktaba: Mixed Models  $I \times J$  and  $I \times 2$  with Interaction in the Case of Non-Orthogonal Data.  
Mieszane modele  $I \times J$  i  $I \times 2$  z interakcją w przypadku danych nieortogonalnych.
5. W. Oktaba: Estimates of Parameters of Mixed Model  $I \times J$  with Interaction in the Case of Non-Orthogonal Data.  
Oceny parametrów mieszanego modelu  $I \times J$  z interakcją w przypadku danych nieortogonalnych.
6. W. Oktaba: Expected Mean Squares and Tests of Significance for Mixed Model  $3 \times 3$  with Interaction in the Case of Non-Orthogonal Data.  
Wartości oczekiwane średnich kwadratów i testy istotności dla mieszanego modelu  $3 \times 3$  z interakcją w przypadku danych nieortogonalnych.
7. W. Oktaba: On the Testing of the Linear Hypothesis for the Model of Normal Regression.  
O weryfikowaniu liniowej hipotezy dla modelu normalnej regresji.
8. M. Dąbek: On the Speed of Convergence of Sums and Differences.  
O szybkości zbieżności sum i różnic.
9. J. Kiszyński et W. Tym: Sur la convergence des approximations successives pour l'équation  $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ .  
O zbieżności ciągów kolejnych przybliżeń dla równania  $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ .
10. D. Szynal: On the Strong Law of Large Numbers for Random Variables Bounded by Sequences of Numbers.  
O mocnym prawie wielkich liczb dla zmiennych losowych ograniczonych przez ciągi liczbowe.
11. J. Krzyż: Some Remarks Concerning My Paper: On Univalent Functions with Two Preassigned Values.  
Pewne uwagi o mojej pracy: O funkcjach jednolistnych z dwiema zadanymi wartościami.
12. Т. Г. Эброхи: О некоторых классах  $p$ -листных функций  
O pewnych klasach funkcji  $p$ -listnych.
13. Т. Г. Эброхи: Об аналитических функциях обобщенных классов Шильда  
O funkcjach analitycznych uogólnionych klas Schilda.