

Z Zakładu Geometrii Zespołowej Katedry Matematyki Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Konstanty Radziszewski

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur la congruence des courbes

O przystawaniu krzywych

O конгруентности кривых

Il est bien connu que les courbures jouent un rôle fondamental dans la théorie des courbes dans l'espace euclidien n -dimensionnel. Ces courbures sont définies moyennant les trièdres de Frenet, ce qui entraîne, en général, la nécessité de l'existence des dérivées d'ordre n . Dans le travail [1] A. D. Alexandrov a proposé d'utiliser, dans le cas de l'espace euclidien 3-dimensionnel, les courbures intégrales qui peuvent jouer un rôle analogue, mais, en même temps, exigent des hypothèses moins fortes. Il y a énoncé le théorème suivant: Si deux courbes admettent des longueurs, des courbures intégrales et des torsions intégrales égales, alors elles sont congruentes.

Dans ce travail nous nous proposons de généraliser les résultats de A. D. Alexandrov à l'espace euclidien n -dimensionnel.

Notations et définitions

L'espace euclidien n -dimensionnel sera désigné par $E^{(n)}$. Un sous-espace linéaire k -dimensionnel $E^{(k)}$ sera appelé plan k -dimensionnel ou brièvement k -plan.

Dans ce travail nous nous occuperons des courbes rectifiables orientées $\langle A \star B \rangle \subset E^{(n)}$, données par une équation vectorielle $\bar{r} = \bar{r}(s)$, $\bar{r}(0) = \overline{OA}$, $\bar{r}(s') = \overline{OB}$, $0 \leq s \leq s'$, $\bar{r}(s) = \overline{OM}$, $M \in \langle A \star B \rangle$, où s signifie la longueur de l'arc $\langle A \star M \rangle \subset \langle A \star B \rangle$ et O l'origine des coordonnées.

La longueur d'un arc $\langle M \star N \rangle$ de la courbe $\langle A \star B \rangle$ sera désignée par $[M \star N]$, et la longueur du vecteur \overline{MN} par $[MN]$.

Soit $\langle M_0, \dots, M_m \rangle = W_m$ une ligne brisée inscrite dans la courbe $\langle A \star B \rangle$, $M_0 = A$, $M_m = B$, $M_i \in \langle A \star M_{i+1} \rangle \subset \langle A \star B \rangle$, $i = 0, \dots, m-1$. D'après la définition on a $[A \star B] = \lim \Sigma [M_i M_{i+1}]$.

L'angle entre les k -plan $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$, tels que l'intersection $E_1^{(k)} \cap E_2^{(k)}$ est un $(k-1)$ -plan $E_{12}^{(k-1)}$, sera défini comme il suit: construisons le $(k+1)$ -plan $E_{12}^{(k+1)}$ engendré par les plans $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$ (c'est-à-dire le plus petit espace linéaire contenant $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$; l'existence de $E_{12}^{(k+1)}$ résulte de celle de $k+1$ vecteurs linéairement indépendants, notamment: $k-1$ vecteurs déterminent $E_{12}^{(k-1)}$ et, dans chacun des plans $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$, il existe un vecteur linéairement indépendant de tous les autres k vecteurs). Dans le plan $E_{12}^{(k+1)}$ il existe exactement un plan 2-dimensionnel $E_p^{(2)}$ (défini aux translations près) perpendiculaire au plan $E_{12}^{(k-1)}$. Désignons par $l_1 \subset E_1^{(k)}$ et $l_2 \subset E_2^{(k)}$ les intersections de $E_p^{(2)}$ avec $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$ respectivement. L'angle entre les droites l_1 et l_2 sera appelé angle entre $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$. On voit que les droites l_1 et l_2 déterminent deux angles: φ et $\psi = \pi - \varphi$. Dans la suite de ce travail nous donnerons des conditions supplémentaires qui permettront de choisir un des angles φ ou ψ comme angle entre $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$.

Soient M'_n et M''_n deux suites de points de la courbe orientée $\langle A \star B \rangle$, telles que $M'_n \in \langle A \star M''_n \rangle$. Si la limite

$$\lim_{M'_n, M''_n \rightarrow M} \left\{ \frac{\overline{M'_n M''_n}}{[M'_n M''_n]} \right\}$$

existe, elle sera appelée vecteur paratingent de la courbe $\langle A \star B \rangle$ au point M et désignée par $\bar{i}(M)$.

Maintenant, plaçons l'origine d'un vecteur $\bar{i}(M)$ paratingent de la courbe $\langle A \star B \rangle$ au point M , au centre O de la sphère-unité S , alors l'extrémité de $\bar{i}(M)$ détermine sur la surface de S un point M_i . Considérons l'ensemble de tous les vecteurs paratingents de la courbe $\langle A \star B \rangle$ pour tous les points $M \in \langle A \star B \rangle$. Leurs extrémités déterminent sur la surface de S un ensemble $\langle {}^{(1)}A \star {}^{(1)}B \rangle$ appelé indicatrice sphérique de la courbe $\langle A \star B \rangle$.

Soit ${}^{(1)}W_m = \langle {}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_m \rangle$ une ligne brisée sphérique sur la surface de la sphère-unité S , c'est-à-dire une ligne obtenue de la manière suivante: Par le centre O de S et les points ${}^{(1)}M_i$, ${}^{(1)}M_{i+1}$ nous menons un 2-plan $\{0, {}^{(1)}M_i, {}^{(1)}M_{i+1}\}$ qui coupe la surface de S ; cette intersection sera un cercle 1-dimensionnel C . Les arcs $\langle {}^{(1)}M_i \star {}^{(1)}M_{i+1} \rangle \subset C$, $i = 1, \dots, m-1$, tels que $[{}^{(1)}M_i \star {}^{(1)}M_{i+1}] \leq \pi$, constitueront une ligne brisée sphérique $\langle {}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_m \rangle$. Si $\overline{O}({}^{(1)}M_i) = -\overline{O}({}^{(1)}M_{i+1})$, pour $1 \leq k \leq i \leq j-1 \leq m$, et $\pm \overline{O}({}^{(1)}M_{k-1}) \neq \overline{O}({}^{(1)}M_k)$, alors nous prenons les arcs $\langle {}^{(1)}M_k \star {}^{(1)}M_{k+1} \rangle$, \dots , $\langle {}^{(1)}M_{j-1} \star {}^{(1)}M_j \rangle$ dans le 2-plan $\{O, {}^{(1)}M_{k-1}, {}^{(1)}M_k\}$ de telle façon

que les demi-cercles $\langle {}^{(1)}M_i * {}^{(1)}M_{i+1} \rangle$ et $\langle {}^{(1)}M_{i+1} * {}^{(1)}M_{i+2} \rangle$ forment un cercle complet. Si $k = 1$ et $j < m$, alors tous les cercles $\langle {}^{(1)}M_i * {}^{(1)}M_{i+1} \rangle$ sont pris dans le plan $\{O, {}^{(1)}M_j, {}^{(1)}M_{j+1}\}$, $i < j+1$. Si tous les $O^{(1)}M_i$ se trouvent sur une droite, alors nous prenons tous ces cercles dans un plan fixé.

Par $\{{}^{(1)}M_i, \dots, {}^{(1)}M_{i+k}\}$ on désignera le $(k+1)$ -plan passant par les points $O, {}^{(1)}M_i, \dots, {}^{(1)}M_{i+k}$.

Considérons maintenant les plans $\{{}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}\}$ et $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_n\}$. Le plan $\{{}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}\}$ partage l'espace $E^{(n)}$ en deux demi-espaces ${}_{(1+)}E^{(n)}$ et ${}_{(1-)}E^{(n)}$. Le plan $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_n\}$ partage les plans $\{{}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}\}$ et $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_n\}$ en deux demi-plans: $\{{}^{(1)}M_1^{s+}, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}^{s+}\}$, et $\{{}^{(1)}M_1^{s-}, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}^{s-}\}$ et $\{{}^{(1)}M_2^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_n^{r+}\}$, $\{{}^{(1)}M_2^{r-}, \dots, {}^{(1)}M_n^{r-}\}$ respectivement, où $M_1 \in \{{}^{(1)}M_1^{s+}, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}^{s+}\}$ et $M_n \in \{{}^{(1)}M_2^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_n^{r+}\}$. La réunion $\{{}^{(1)}M_1^{s-}, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}^{s-}\} \vee \{{}^{(1)}M_2^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_n^{r+}\}$ partage $E^{(n)}$ en deux parties ${}_{(12+)}E^{(n)}$ et ${}_{(12-)}E^{(n)}$ où ${}_{(12+)}E^{(n)}$ est tel que ${}_{(12+)}E^{(n)} \subset {}_{(1+)}E^{(n)}$ ou ${}_{(12+)}E^{(n)} \supset {}_{(1+)}E^{(n)}$. L'angle entre les demi-plans $\{{}^{(1)}M_1^{s-}, \dots, {}^{(1)}M_{n-1}^{s-}\}$ et $\{{}^{(1)}M_2^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_n^{r+}\}$ contenant des points intérieurs de ${}_{(12+)}E^{(n)}$ sera désigné par $\varphi_1^{(n-1)}$, $0 \leq \varphi_1^{(n-1)} < 2\pi$.

Considérons maintenant les plans $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_n\}$ et $\{{}^{(1)}M_3, \dots, {}^{(1)}M_{n+1}\}$. Le plan $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_n\}$ partage $E^{(n)}$ en deux parties ${}_{(2+)}E^{(n)}$ et ${}_{(2-)}E^{(n)}$, où ${}_{(2+)}E^{(n)} \subset {}_{(12+)}E^{(n)}$ ou bien ${}_{(2+)}E^{(n)} \supset {}_{(12+)}E^{(n)}$. Le plan $\{{}^{(1)}M_3, \dots, {}^{(1)}M_n\}$ partage les plans $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_n\}$ et $\{{}^{(1)}M_3, \dots, {}^{(1)}M_{n+1}\}$ en deux demi-plans $\{{}^{(1)}M_2^{s+}, \dots, {}^{(1)}M_n^{s+}\}$, $\{{}^{(1)}M_2^{s-}, \dots, {}^{(1)}M_n^{s-}\}$ et $\{{}^{(1)}M_3^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_{n+1}^{r+}\}$, $\{{}^{(1)}M_3^{r-}, \dots, {}^{(1)}M_{n+1}^{r-}\}$ respectivement, où $M_2 \in \{{}^{(1)}M_2^{s+}, \dots, {}^{(1)}M_n^{s+}\}$, $M_{n+1} \in \{{}^{(1)}M_3^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_{n+1}^{r+}\}$. La réunion $\{{}^{(1)}M_2^{s-}, \dots, {}^{(1)}M_n^{s-}\} \vee \{{}^{(1)}M_3^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_{n+1}^{r+}\}$ partage $E^{(n)}$ en deux parties ${}_{(23+)}E^{(n)}$ et ${}_{(23-)}E^{(n)}$, où ${}_{(23+)}E^{(n)}$ est tel qu'on a: ${}_{(23+)}E^{(n)} \subset {}_{(2+)}E^{(n)}$ ou bien ${}_{(23+)}E^{(n)} \supset {}_{(2+)}E^{(n)}$. L'angle entre les demi-plans $\{{}^{(1)}M_2^{s-}, \dots, {}^{(1)}M_n^{s-}\}$ et $\{{}^{(1)}M_3^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_{n+1}^{r+}\}$ contenant des points intérieurs de ${}_{(23+)}E^{(n)}$ sera désigné par $\varphi_2^{(n-1)}$.

En répétant ces considérations pour les plans $\{M_4, \dots\}, \{M_5, \dots\}, \dots$ nous obtiendrons les angles $\varphi_3^{(n-1)}, \dots, \varphi_{m-n+1}^{(n-1)}$.

Le nombre

$$k^{(n-1)}(W_m) = \sum_{i=1}^{m-n+1} (\pi - \varphi_i^{(n-1)})$$

sera appelé $(n-1)$ -courbure intégrale ou brièvement $(n-1)$ -courbure de la ligne brisée W_m dont l'indicatrice sphérique est ${}^{(1)}W_m$. On voit que $k^{(n-1)}$ peut être aussi un nombre négatif.

Prenons maintenant les plans $\{{}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_{k-1}\}$ et $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_k\}$, $k = 3, \dots, n-1$. Le plan $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_{k-1}\}$ partage les plans $\{{}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_{k-1}\}$ et $\{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_k\}$ en deux demi-plans $\{{}^{(1)}M_1^{s+}, \dots, {}^{(1)}M_{k-1}^{s+}\}$, $\{{}^{(1)}M_1^{s-}, \dots, {}^{(1)}M_{k-1}^{s-}\}$ et $\{{}^{(1)}M_2^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_k^{r+}\}$, $\{{}^{(1)}M_2^{r-}, \dots, {}^{(1)}M_k^{r-}\}$ respectivement, où $M_1 \in \{{}^{(1)}M_1^{s+}, \dots, {}^{(1)}M_{k-1}^{s+}\}$, $M_k \in \{{}^{(1)}M_2^{r+}, \dots, {}^{(1)}M_k^{r+}\}$. L'angle

entre les plans $\{(1)M_1^{s+}, \dots, (1)M_{k-1}^{s+}\}$ et $\{(1)M_2^{r+}, \dots, (1)M_k^{r+}\}$, ne surpassant π , sera désigné par $\varphi_1^{(k-1)}$.

En déterminant d'une manière analogue les angles $\varphi_2^{(k-1)}, \varphi_3^{(k-1)}, \dots$ entre les plans $\{(1)M_2^{s+}, \dots, (1)M_k^{s+}\}$ et $\{(1)M_3^{r+}, \dots, (1)M_{k+1}^{r+}\}, \dots$, $0 \leq \varphi_i^{(k-1)} \leq \pi$, $k = 3, \dots, n-1$, nous pouvons définir les nombres

$$k^{(j)}(W_m) = \sum_{i=1}^{m-1} \varphi_i^{(j)}, \quad j = 2, \dots, n-2$$

que nous appellerons j -courbures de la ligne brisée W_m dont l'indicatrice sphérique est $(1)W_m$.

Le nombre

$$k^{(1)}(W_m) = \sum_{i=1}^{m-1} [(1)M_i \star (1)M_{i+1}] = [(1)W_m].$$

sera appelé 1-courbure de la ligne brisée W_m dont l'indicatrice sphérique est $(1)W_m$.

Le nombre

$$k^{(0)}(W_m) = [W_m]$$

sera dit 0-courbure de W_m .

Le nombre $k^{(i)}(W_m)$, $i = 1, \dots, n-1$, sera aussi appelé $(i-1)$ -courbure de $(1)W_m$ et désigné par $k^{(i-1)}(1)W_m = k^{(i)}(W_m)$.

Dans le cas de l'espace $E^{(2)}$ on définira la courbure intégrale de la ligne brisée comme il suit:

Supposons donnée une orientation du plan $E^{(2)}$ par les axes de coordonnées $(0, x, y)$. Considérons deux vecteurs $\overline{M_{i-1}M_i}$ et $\overline{M_iM_{i+1}}$ et posons $\varphi_i = \pm \sphericalangle(\overline{M_{i-1}M_i}, \overline{M_iM_{i+1}})$, $0 \leq \sphericalangle(\overline{M_{i-1}M_i}, \overline{M_iM_{i+1}}) \leq \pi$, où φ_i est positif si le couple de vecteurs $(\overline{M_iM_{i+1}}, \overline{M_{i-1}M_i})$ déplacés de telle façon que leurs origines se trouveront au point O , soit de même sens que le couple des demi-axes positifs (Ox, Oy) (c'est-à-dire on peut obtenir la direction de $\overline{M_{i-1}M_i}$ en faisant tourner $\overline{M_iM_{i+1}}$ dans le sens positif pendant que l'angle balayé ne dépasse pas π), et est négatif dans le cas contraire. Le nombre

$$k^{(1)}(W_m) = \sum_{i=1}^{m-1} \varphi_i.$$

sera appelé 1-courbure de la ligne brisée $W_m = \langle M_0, \dots, M_m \rangle \subset E^{(2)}$.

On peut aussi définir, sans difficulté, la 1-courbure de $W_m \subset E^{(2)}$, identique avec celle donnée plus haut, en prenant l'indicatrice sphérique de W_m dans $E^{(3)}$ ou $E^{(2)}$.

Si, dans les définitions précédentes des j -courbures, les points ${}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_k$ et O ne déterminent pas un k -plan d'une façon unique, alors nous prenons le plan $\alpha_1 = \{{}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_{k+r}\}$ où r est le plus petit nombre tel que ce plan soit k -dimensionnel. Comme plan suivant nous prenons $\alpha_2^0 = \{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_{k+r}\}$, si le plan α_2^0 est k -dimensionnel, et $\alpha_2^s = \{{}^{(1)}M_2, \dots, {}^{(1)}M_{k+r+s}\}$, si α_2^0 est $k-1$ dimensionnel, où s est un nombre tel que α_2^s est k -dimensionnel. Par α_2 on désignera le premier plan k -dimensionnel de la suite $\alpha_2^0, \dots, \alpha_2^s$. En répétant les mêmes considérations à partir du plan α_2 , nous déterminons le plan α_3 , et ensuite α_4, \dots . Les plans $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ étant données, nous pouvons définir, de la façon indiquée précédemment, les angles et par suite, les courbures de la ligne brisée.

Si W_m est contenue dans $E^{(j)}$, nous posons $k^{(j+i)} = 0$, pour $i = 1, 2, \dots$

Il est à remarquer que la $(n-1)$ -courbure (qui peut être négative) de la ligne brisée $W_m \subset E^{(n)}$ peut être remplacée par $(n-1)$ et n -courbure de $W_m \subset E^{(n)} \subset E^{(n+r)}$, $r \geq 1$. Dans ce cas toutes les courbures sont positives ou égales à zero. Par exemple les j -courbures d'une ligne brisée $W_m \subset E^{(2)} \subset E^{(5)}$ sont égales à zero pour $j = 3, 4$, à $k\pi$ pour $j = 2$, où k est un nombre de l'ensemble $0, 1, \dots$, et pour $j = 0, 1$ elles sont des nombres positifs.

Soit maintenant $\langle {}^{(1)}A \star {}^{(1)}B \rangle$ l'indicatrice sphérique de la courbe $\langle A \star B \rangle \subset E^{(n)}$, $n \geq 3$. Le nombre

$$K^{(1)}(A \star B) = [{}^{(1)}A \star {}^{(1)}B]$$

sera appelé 1-courbure de $\langle A \star B \rangle$.

Considérons une ligne brisée $W_m^p = \langle M_1^p, \dots, M_m^p \rangle$ contenue dans un plan $E^{(n-1)} \subset E^{(n)}$. Traçons par les points $M_i^p, i = 1, \dots, m$, les droites (M_i^p) perpendiculaires au plan $E^{(n-1)}$. Si nous désignons par $\{M_i^p, \dots, M_{i+1}^p\}$ les $(k+1)$ -plans passant par les points M_{i+j}^p et les droites (M_{i+j}^p) , alors nous serons en état de définir les angles entre ces plans et, par conséquent, les j -courbures, $j = 0, \dots, n-2$, tout comme pour les lignes brisées sphériques $\langle {}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_m \rangle$.

Soit $W_m = \langle {}^{(1)}M_1, \dots, {}^{(1)}M_m \rangle$ une ligne brisée sphérique inscrite dans l'indicatrice sphérique $\langle {}^{(1)}A \star {}^{(1)}B \rangle$ de la courbe $\langle A \star B \rangle \subset E^{(n)}$. Construisons dans $E^{(n-1)}$ une ligne brisée ${}^{(1)}W_m^p = \langle {}^{(1)}M_1^p, \dots, {}^{(1)}M_m^p \rangle$ dont les j -courbures, $j = 1, \dots, n-2$, sont égales à celles de la ligne brisée sphérique W_m et $[{}^{(1)}M_i \star {}^{(1)}M_{i+1}] = [{}^{(1)}M_i^p \star {}^{(1)}M_{i+1}^p], i = 1, \dots, m-1$. On peut facilement prouver que cela est possible d'une manière unique (à un groupe de transformations euclidiennes près). La limite des lignes ${}^{(1)}W_m^p$, où ${}^{(1)}W_m^p$ sont situées de telle façon qu'elles possèdent les mêmes points ${}^{(1)}M_i^p$ et les mêmes droites ${}^{(1)}M_1^p \star {}^{(1)}M_2^p$ sera une courbe $\langle {}^{(1)}A \star {}^{(1)}B \rangle$ (on peut prendre

des suites partielles). L'indicatrice sphérique de $\langle {}^{(1)}A^p \star {}^{(1)}B^p \rangle$ sera une courbe rectifiable (sinon nous posons $K^{(2)}(A \star B) = \infty$) $\langle {}^{(2)}A \star {}^{(2)}B \rangle \subset S^{(n-2)} \subset E^{(n-1)}$, où $S^{(n-2)}$ la signifie la surface de la sphère-unité $(n-1)$ -dimensionnelle. Le nombre

$$K^{(2)}(A \star B) = [{}^{(2)}A \star {}^{(2)}B]$$

sera appelé 2-courbure de la courbe $\langle A \star B \rangle$, si ce nombre est le même pour toutes les suites de W_m^p .

En répétant ce procédé, nous appellerons

$$K^{(j)}(A \star B) = [{}^{(j)}A \star {}^{(j)}B], \quad j = 1, \dots, n-2,$$

j -courbure de $\langle A \star B \rangle \subset E^{(n)}$, $n \geq 3$.

Remarquons que $L_2 = \langle {}^{(n-2)}A^p \star {}^{(n-2)}B^p \rangle$ sera une ligne de l'espace $E^{(2)}$. Inscrivons dans L_2 une ligne brisée ${}^{(n-2)}W_m^p$ et soit $k^{(1)}({}^{(n-2)}W_m^p)$ la 1-courbure de ${}^{(n-2)}W_m^p \subset E^{(2)}$ définie plus haut (c'est-à-dire $k^{(1)}({}^{(n-2)}W_m^p)$ peut être aussi négative). Le nombre

$$A) \quad K^{(n-1)}(A \star B) = \lim_{{}^{(n-2)}W_m^p \rightarrow L_2} k^{(1)}({}^{(n-2)}W_m^p) = K^{(1)}({}^{(n-2)}A^p \star {}^{(n-2)}B^p)$$

sera appelé $(n-1)$ -courbure de la courbe $\langle A \star B \rangle$, si cette limite est la même pour toutes les lignes brisées inscrites ${}^{(n-2)}W_m^p \rightarrow L_2$.

Nous disons que la courbe $\langle A \star B \rangle$ admet des courbures uniformes, si pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque suite de lignes brisées ${}^{(n-2)}W_m^p = \langle {}^{(n-2)} \times M_1^p, \dots, {}^{(n-2)}M_m^p \rangle$ inscrites dans $L_2 = \langle {}^{(n-2)}A^p \star {}^{(n-2)}B^p \rangle$, il existe un nombre m_0 tel que pour $m > m_0$ on a

$$|K^{(1)}({}^{(n-2)}A^p \star {}^{(n-2)}M_i^p) - k^{(1)}({}^{(n-2)}A^p \wedge {}^{(n-2)}M_i^p)| < \varepsilon$$

pour tous les points M_i , $i = 1, \dots, m$, simultanément, où

$$\langle {}^{(n-2)}A^p \star {}^{(n-2)}M_i^p \rangle \subset \langle {}^{(n-2)}A^p \star {}^{(n-2)}B^p \rangle, \quad \langle {}^{(n-2)}A^p \wedge {}^{(n-2)}M_i^p \rangle \subset {}^{(n-2)}W_m^p.$$

Le nombre

$$K^{(0)}(A \star B) = [A \star B]$$

sera appelé 0-courbure de $\langle A \star B \rangle$.

Pour $n = 2$ la définition de $K^{(1)}$ est donnée par A), où ${}^{(n-2)}W_m^p$ est une ligne brisée inscrite dans $\langle A \star B \rangle$.

Dans le cas des lignes brisées cette notion de j -courbure se confond avec celle donnée plus haut.

On peut définir aussi les courbures de la courbe $\langle A * B \rangle$ comme la limite des courbures $k^{(j)}(W_m)$ des lignes brisées inscrites dans $\langle A * B \rangle$. Il serait intéressant de trouver les conditions sous lesquelles ces deux définitions des courbures sont équivalentes.

Congruence des courbes

Le but de ce travail est de démontrer la congruence des courbes ayant les mêmes courbures intégrales. Pour cela, nous prouverons d'abord quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 1. Si deux lignes brisées $W_m \subset E^{(n)}$ et $W'_m \subset E^{(n)}$ admettent des j -courbures, $j = 0, 1, \dots, n-1$, égales, alors elles sont congruentes.

Démonstration. Nous prouverons ce lemme en utilisant la définition de la courbure intégrale comme la longueur des indicatrices sphériques successives. En effet, comme les courbures $K^{(n-2)}$ et $K^{(n-1)}$ des lignes W_m et W'_m sont égales, les lignes brisées ${}^{(2)}W_m^p = L_2$ et ${}^{(2)}W'_m{}^p = L'_2$ (voir la définition correspondante) sont identiques (après une transformation euclidienne). En continuant ce raisonnement nous arrivons au résultat que les lignes brisées ${}^{(i)}W_m^p$ et ${}^{(i)}W'_m{}^p, i = 3, \dots, n-1$, sont identiques, d'où on peut conclure l'identité de W_m et W'_m (après une transformation euclidienne).

Lemme 2. Si la courbe $\langle A * B \rangle \subset E^{(n)}, n \geq 3$, admet une 1-courbure finie, alors elle admet aussi un vecteur tangent au sens strict au point A .

Démonstration. S'il existait deux vecteurs paratingents \bar{l}_1 et \bar{l}_2 , alors il existerait deux suites de points M_n et M'_n , et deux suites de vecteurs paratingents $\bar{l}(M_n)$ et $\bar{l}(M'_n)$ tels que $M_n \rightarrow A, M'_n \rightarrow A, \bar{l}(M_n) \rightarrow \bar{l}_1, \bar{l}(M'_n) \rightarrow \bar{l}_2$. Mais cela est impossible, car l'indicatrice sphérique aurait une longueur infinie. La contradiction obtenue prouve notre lemme.

Lemme 3. Soient données deux courbes $\langle A * B \rangle \subset E^{(2)}$ et $\langle A' * B' \rangle \subset E^{(2)}$. Si tous les arcs correspondants $\langle A * M \rangle \subset \langle A * B \rangle$ et $\langle A' * M' \rangle \subset \langle A' * B' \rangle, [A * M] = [A' * M']$ admettent des i -courbures, $i = 0, 1$, égales, finies et uniformes, alors les courbes $\langle A * B \rangle$ et $\langle A' * B' \rangle$ sont congruentes.

Démonstration. Soit $\langle M_0, \dots, M_m \rangle$ une ligne brisée contenue dans l'espace $E^{(2)}$. Menons les axes de coordonnées $(0, x, y)$ tels que le sens positif de l'axe Ox soit compatible avec le vecteur $\overline{M_0 M_1}$ et $M_0 = 0$. Posons $\varphi_i = \pm \sphericalangle(\overline{M_{i-1} M_i}, \overline{M_i M_{i+1}}), |\varphi_i| \leq \pi$, en prenant le signe $+$ si le

couple de vecteurs $(\overline{M_i M_{i+1}}, \overline{M_{i-1} M_i})$ est de même sens que le couple de demi-axes positifs (Ox, Oy) , et — dans le cas contraire. Alors, en désignant les coordonnées rectangulaires du point M_i par (x_i, y_i) , nous avons :

$$\begin{aligned} x_1 &= [M_0 M_1] = s_1 & y_1 &= 0 \\ x_2 &= s_1 \cos \varphi_1 & y_2 &= s_1 \sin \varphi_1 \\ x_3 &= s_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & y_3 &= s_1 \sin \varphi_1 + s_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

B)
$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \cos k_i \qquad y_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \sin k_i$$

où
$$k_i = \sum_{j=1}^i \varphi_j \qquad \text{et} \qquad s_i = [M_{i-1} M_i].$$

En vertu de B) on peut écrire

$$x = \int_0^s \cos k(s) ds \qquad y = \int_0^s \sin k(s) ds,$$

où $k(s)$ est la 1-courbure de l'arc $\langle M_0 \wedge M \rangle \subset W_m$ et $s = [M_0 \wedge M]$.

Maintenant, si deux courbes $\langle A * B \rangle$ et $\langle A' * B' \rangle$ ont les mêmes i -courbures, $i = 0, 1$, nous inscrivons dans $\langle A * B \rangle$ et $\langle A' * B' \rangle$ des lignes brisées $W_m = \langle M_0, \dots, M_m \rangle$ et $W'_m = \langle M'_0, \dots, M'_m \rangle$ telles que $[M_0 * M_i] = [M'_0 * M'_i]$, $\langle M_0 * M_i \rangle \subset \langle A * B \rangle$, $\langle M'_0 * M'_i \rangle \subset \langle A' * B' \rangle$, $M_0 = A$, $M'_0 = A'$, $M_m = B$, $M'_m = B'$, et que W_{m+1} , $m = 1, 2, \dots$, compte parmi ses sommets tous les points M_0, \dots, M_m ,

Plaçons $\langle A * B \rangle$ et $\langle A' * B' \rangle$ de telle façon que les vecteurs tangents $\vec{i}(A) = \vec{i}(A')$, $A = A' = 0$, aient le sens du demi-axe positif Ox , tandis que B et B' se trouvent du même côté de l'axe Ox . Désignons par k et k' les 1-courbures des arcs correspondants de W_m et W'_m , et par (x_i, y_i) et (x'_i, y'_i) les coordonnées des points M_i et M'_i respectivement.

Alors on tire de B)

$$\begin{aligned} |x_m - x'_m| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} (s_i \cos k_i - s'_i \cos k'_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |s_i (\cos k_i - \cos k'_i)| + \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n-1} |(s_i - s'_i) \cos k'_i| \end{aligned}$$

où $s_i = [M_{i-1} M_i]$, $s'_i = [M'_{i-1} M'_i]$.

En profitant du fait que la courbure est uniforme nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n-1} s_i (\cos k_i - \cos k'_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} s_i \left| 2 \sin \frac{k_i - k'_i}{2} \sin \frac{k_i + k'_i}{2} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} s_i |k_i - k'_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} s_i \leq \varepsilon L, \end{aligned}$$

où $L = [A*B]$.

Posons $s_i = [M_{i-1}*M_i] - \varepsilon_i$, $s'_i = [M_{i-1}'*M_i'] - \varepsilon'_i$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (s_i - s'_i) \cos k'_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |(s_i - s'_i)| = \sum_{i=1}^{n-1} |\varepsilon_i - \varepsilon'_i| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i + \varepsilon'_i = \\ &= [A*B] - [W_m] + [A'*B'] - [W'_m] \rightarrow 0, \quad \text{car} \quad [W_m] \rightarrow [A*B] \\ &\quad \text{et} \quad [W'_m] \rightarrow [A'*B']. \end{aligned}$$

Donc nous avons $|x_m - x'_m| \rightarrow 0$.

Les coordonnées y satisfont à des inégalités analogues. Le lemme est ainsi prouvé.

Théorème. Si deux courbes $\langle A*B \rangle \subset E^{(n)}$ et $\langle A'*B' \rangle \subset E^{(n)}$ admettent des j -courbures, $j = 0, 1, \dots, n-1$, égales, finies et uniformes, elles sont congruents.

Démonstration. Nous utiliserons l'induction par rapport à la dimension.

Notre théorème est démontré pour $E^{(2)}$ (lemme 3). Admettons qu'il soit vrai pour $E^{(n-1)}$.

Prenons deux courbes $\langle A*B \rangle$ et $\langle A'*B' \rangle$ plongées dans $E^{(n)}$ et satisfaisant aux hypothèses du théorème. Leurs indicatrices sphériques $\langle {}^{(1)}A*{}^{(1)}B \rangle$ et $\langle {}^{(1)}A'*{}^{(1)}B' \rangle$ sont congruentes, car, moyennant la même transformation de la sphère-unité sur un $(n-1)$ -plan que nous avons utilisée dans la définition des i -courbures, on peut obtenir des courbes $\langle {}^{(1)}A^p*{}^{(1)}B^p \rangle$ et $\langle {}^{(1)}A'^p*{}^{(1)}B'^p \rangle$ qui, d'après notre hypothèse, sont congruentes (car elles sont plongées dans $E^{(n-1)}$ et possèdent les mêmes courbures). Donc, en vertu du lemme 1, les courbes $\langle A*B \rangle$ et $\langle A'*B' \rangle$ sont congruentes (car si W_m^p et $W_m'^p$ sont proches, alors W_m et W_m' le sont aussi).

Nous avons prouvé que les courbes $\langle A*B \rangle$ et $\langle A'*B' \rangle$ admettent les mêmes tangentes unilatérales au sens strict (à droite et à gauche), donc leurs équations peuvent être obtenues par une simple intégration, ce qui prouve notre théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. D. Alexandrov, Teorija krivyh na osnovie približenija lomanyimi. Uspehi Mat. Nauk, 1947, T. 2, vyp. 3, p. 182-184.
- [2] A. D. Alexandrov, Vnutriennaja geometrija vypuklyh povierhnostiej. Moskva-Leningrad 1948.
- [3] F. Riesz et Sz. Nagy, Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest 1953.

Streszczenie

W pracy tej wprowadza się pojęcia krzywizn integralnych krzywych w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej oraz dowodzi się twierdzenie: Niech dwie krzywe w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej posiadają krzywizny integralne skończone i jednostajne. Jeśli krzywizny tych krzywych są równe, to krzywe są przystające.

Резюме

В этой работе вводятся понятия интегральных кривизн кривых в евклидовом пространстве n -измерений.

Доказывается теорема: Пусть две кривые имеют конечные и равномерные интегральные кривизны. Если кривизны этих кривых равны, то кривые конгруэнтны.