

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur un théorème de Pogorielov

O pewnym twierdzeniu Pogorielowa

Об одной теореме Погорелова

Dans ce travail nous nous occuperons du problème de la représentation d'une géodésique sur une surface convexe lisse dans un voisinage d'un de ses points. Les résultats contenus dans ce travail généralisent et précisent le résultat de Pogorielov contenu dans [1], p. 33 (cité dans l'introduction du travail [2]). Les résultats sont plus généraux car nous donnons aussi la représentation pour les courbes gauches d'une classe plus large que la classe des géodésiques sur une surface convexe lisse.

En utilisant les résultats du travail [2] nous établirons, avec les mêmes notations et définitions, les théorèmes suivants:

Théorème 1. Soit $\langle A * B \rangle$ une géodésique sur une surface convexe lisse S et $d(M)$ la distance d'un point $M \in \langle A * B \rangle$ au plan tangent à S au point A . Alors on a

$$\lim_{M \rightarrow A} d(M) : \int_0^{[A * M]} k(s) ds = 1$$

où $k(s)$ est la courbure intégrale de l'arc $\langle A * N \rangle \subset \langle A * M \rangle$, et $s = [A * N]$.

Démonstration. Soit $\tau(A)$ le plan tangent à la surface au point A . Dans l'arc $\langle A * M \rangle$ de la géodésique $\langle A * B \rangle$ inscrivons la ligne brisée $W_n: \langle M_0 = A, M_1, \dots, M_n = M \rangle$, $[A * M_i] \subset [A * M_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, \dots, n-1$. Nous poserons

$$s_i = [M_i M_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

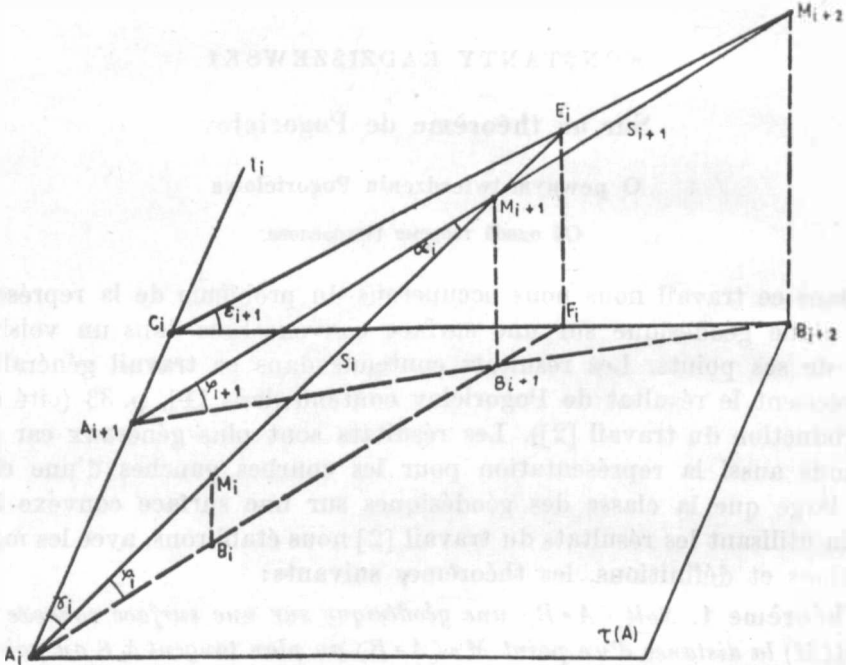
et désignerons par σ_i le plan passant par les points M_i, M_{i+1}, M_{i+2} .

Désignons par l_i la droite formée par l'intersection des plans σ_i et $\tau(A)$. Soient

$$\begin{aligned} \sphericalangle(l_i, M_i M_{i+1}) &= \gamma_i \leq \pi/2, & i &= 0, 1, \dots, n-1, \\ \sphericalangle(M_i M_{i+1}, \overline{M_{i+1} M_{i+2}}) &= \alpha_i, & i &= 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Par le point M_{i+2} menons un plan perpendiculaire à la droite l_i qui coupera l_i au point C_i et soit $\sphericalangle(C_i M_{i+2}, \tau(A)) = \varepsilon_{i+1}$.

Désignons encore par A_i le point d'intersection de la droite $M_i M_{i+1}$ avec le plan $\tau(A)$ et par B_i le point d'intersection de la droite, perpen-



diculaire au plan $\tau(A)$ et passant par le point M_i avec le plan $\tau(A)$. Soit $\sphericalangle(\overline{M_i M_{i+1}}, \overline{B_i B_{i+1}}) = \varphi_i \leq \pi/2$.

Enfin, désignons par E_i le point d'intersection de la droite $C_i M_{i+2}$ avec le plan $\{A_i B_i M_i\}$ et par F_i le point d'intersection de la droite $C_i B_{i+2}$ avec le plan $\{A_i B_i M_i\}$.

Remarquons que dans un voisinage du point A sur $\langle A * B \rangle$, la distance $d(N)$ et l'angle entre la tangente $t(N)$ à $\langle A * B \rangle$ et le plan $\tau(A)$ croissent avec $s = [A * N]$. Admettons que $\langle A * M \rangle$ appartienne à ce voisinage.

Avec ces notations, les triangles rectangles $A_i M_{i+1} B_{i+1}$ donnent

$$\begin{aligned} d(M_1) &= s_0 \sin \varphi_0 \\ d(M_2) &= d(M_1) + s_1 \sin \varphi_1 = s_0 \sin \varphi_0 + s_1 \sin \varphi_1 \\ &\dots \dots \dots \\ d(M_{i+1}) &= d(M_i) + s_i \sin \varphi_i \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad d(M_{i+1}) = s_0 \sin \varphi_0 + s_1 \sin \varphi_1 + \dots + s_i \sin \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

et en outre

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{i+1} &= [M_{i+2} B_{i+2}] / [A_{i+1} M_{i+2}] = [M_{i+2} B_{i+2}] \sin[(\gamma_i + \alpha_i) / [C_i M_{i+2}]] = \\ &= \sin \varepsilon_{i+1} \sin(\gamma_i + \alpha_i). \end{aligned}$$

Mais $[E_i F_i] / [A_i E_i] = \sin \varphi_i$ et $[C_i E_i] / [A_i E_i] = \sin \gamma_i$, donc $\sin \varphi_i = [E_i F_i] \sin \varphi_i / [C_i E_i] = \sin \gamma_i \sin \varepsilon_{i-1}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i &= \sin \varepsilon_{i+1} \sin(\gamma_i + \alpha_i) - \sin \gamma_i \sin \varepsilon_{i+1} = \\ &= \sin \varepsilon_{i+1} [\sin(\gamma_i + \alpha_i) - \sin \gamma_i] = \\ &= 2 \sin \varepsilon_{i+1} \cos \left(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2} \right) \sin \frac{\alpha_i}{2}. \end{aligned}$$

donc $\sin \varphi_{i+1} = \sin \varphi_i + 2 \sin \varepsilon_{i+1} \cos \left(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2} \right) \sin \frac{\alpha_i}{2}$ d'où

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_0 + 2 \sin \varepsilon_1 \cos \left(\gamma_0 + \frac{\alpha_0}{2} \right) \sin \frac{\alpha_0}{2}$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 + 2 \sin \varepsilon_2 \cos \left(\gamma_1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) \sin \frac{\alpha_1}{2} = \sin \varphi_0 +$$

$$+ 2 \sin \varepsilon_1 \cos \left(\gamma_0 + \frac{\alpha_0}{2} \right) \sin \frac{\alpha_0}{2} + 2 \sin \varepsilon_2 \cos \left(\gamma_1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) \sin \frac{\alpha_1}{2}$$

.....

$$\sin \varphi_{i+1} = \sin \varphi_0 + 2 \sin \varepsilon_1 \cos \left(\gamma_0 + \frac{\alpha_0}{2} \right) \sin \frac{\alpha_0}{2} + \dots$$

$$(2) \quad + 2 \sin \varepsilon_{i+1} \cos \left(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2} \right) \sin \frac{\alpha_i}{2}.$$

Mais, lorsque $n \rightarrow \infty$, les angles ε_i tendent uniformément vers l'angle formé par le plan osculateur de la courbe $\langle A * M \rangle$ et le plan $\tau(A)$. (En effet, ε_i est l'angle que fait le plan σ_{i-1} passant par les points M_{i-1}, M_i, M_{i+1} de la courbe $\langle A * M \rangle$ avec le plan tangent à la surface S au point A . Si les plans ne tendaient pas uniformément vers le plan osculateur $\sigma(N')$ de la courbe $\langle A * M \rangle$ au point N' lorsque $W_n \rightarrow \langle A * M \rangle, n \rightarrow \infty$, il existerait une suite partielle $M_{i_k} \in \langle A * M \rangle$ telle que $M_{i_k} \rightarrow N'' \in \langle A * M \rangle$, et $\angle(\sigma_{i_k}, \sigma(N'')) \geq \varepsilon$, ce qui est impossible, car on aurait alors aussi $M_{i_{k+1}} \rightarrow$

$\rightarrow N''$ et $M_{i_k+2} \rightarrow N''$ et l'existence d'un plan osculateur au sens de Menger entraîne $\sigma_{i_k} \rightarrow \sigma(N'')$.

Il s'ensuit, pour $n > N_0$,

$$\sphericalangle[\sigma_i, \sigma(P)] < \varepsilon', \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

où $\sigma(P)$ est un plan osculateur de l'arc $\langle A * M \rangle$.

Comme les plans osculateurs $\sigma(P)$ de la courbe $\langle A * M \rangle$ tendent vers le plan osculateur $\sigma(A)$ au point A lorsque $[A * M] \rightarrow 0$, on aura, pour $[A * M] < \delta$, $\sphericalangle[\sigma(P), \sigma(A)] < \varepsilon''$, $P \in \langle A * M \rangle$. D'où $\sphericalangle[\sigma_i, \sigma(A)] \leq \leq \sphericalangle[\sigma_i, \sigma(P)] + \sphericalangle[\sigma(P), \sigma(A)] < \varepsilon' + \varepsilon''$ donc $\sphericalangle[\sigma_i, \tau(A)] = \varepsilon_i > > \pi/2 - \varepsilon' - \varepsilon''$, $i = 0, 1, \dots, n-2$, $n > N_0$ et

$$(3) \quad \sin \varepsilon_i > \sin(\pi/2 - \varepsilon' - \varepsilon'') = 1 - \eta_2, \quad i = 0, 1, \dots, n-2,$$

pour $[A * M] < \delta$, $n > N_0$, où $\eta_2 = \eta_2(\delta, N_0)$ et

$$(3') \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N_0 \rightarrow \infty} \eta_2 = 0.$$

D'une manière analogue, lorsque $n \rightarrow \infty$ les droites l_i tendent uniformément (puisque les plans σ_i tendent uniformément vers les plans $\sigma(P)$ vers les droites $l(P)$, intersections des plans osculateurs de la courbe $\langle A * M \rangle$ avec le plan $\tau(A)$, donc $\sphericalangle[l_i, l(P)] < \varepsilon'''$ pour $n > N_1$, $i = 0, 1, \dots, n-2$ et, puisque $\sigma(P) \rightarrow \sigma(A)$ et que les $l(P)$ tendent vers la tangente $t(A)$ de la géodésique $\langle A * B \rangle$ au point A lorsque $[A * M] \rightarrow 0$, on a $\sphericalangle[l(P), t(A)] < \varepsilon^{(4)}$ pour $\langle A * M \rangle < \delta_1$.

Les droites $M_i M_{i+1}$ tendent uniformément vers les tangentes $t(P)$ de la courbe $\langle A * M \rangle$ et $t(P) \rightarrow t(A)$ lorsque $[A * M] \rightarrow 0$. (Si les droites $M_i M_{i+1}$ ne tendaient pas uniformément vers les tangentes, il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que pour la suite des points $M_{i_k} \rightarrow M'$ on aurait $\sphericalangle(M_{i_k} M_{i_k+1}, t(P)) \geq \varepsilon$, ce qui est impossible, car la géodésique a une tangente au sens strict.) On aura donc, pour $n > N_2$, $\sphericalangle(M_i M_{i+1}, t(P)) < \varepsilon^{(5)}$ et, pour $[A * M] < \delta_2$, on aura $\sphericalangle(t(P), t(A)) < \varepsilon^{(6)}$. Tenant compte de toutes ces évaluations on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \sphericalangle(M_i M_{i+1}, l_i) \leq \sphericalangle[M_i M_{i+1}, t(P)] + \sphericalangle[t(P), l_i] < \\ &< \varepsilon^{(5)} + \sphericalangle[t(P), t(A)] + \sphericalangle[t(A), l_i] < \\ &< \varepsilon^{(5)} + \varepsilon^{(6)} + \sphericalangle[t(A), l(P)] + \sphericalangle[l(P), l_i] < \varepsilon^{(5)} + \varepsilon^{(6)} + \varepsilon^{(4)} + \varepsilon''' = \varepsilon^{(7)} \end{aligned}$$

pour $[A * M] < \min(\delta_1, \delta_2) = \delta'$, $n > \max(N_1, N_2) = N_3$.

D'autre part, comme les droites $M_i M_{i+1}$ tendent vers les tangentes $t(P)$ et la tangente $t(P)$ est continue, il vient

$$\alpha_i < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

pour $n > N_4$; car s'il y avait dans la suite des lignes brisées W_{n_k} un angle $\alpha_{i_k} \geq \varepsilon$, on pourrait extraire de la suite des M_{i_k+1} une suite partielle M_{i_k+1} convergeant vers $N \in \langle A * M \rangle$ et, alors les droites $M_{i_k} M_{i_k+1}$ et $M_{i_k+1} M_{i_k+2}$ tendraient vers les tangentes $t(N)$, donc on aurait $\alpha_{i_k} \rightarrow 0$, contrairement à l'hypothèse $\alpha_{i_k} \geq \varepsilon$.

En ajoutant ces évaluations on a, pour $[A * M] < \min(\delta, \delta') = \delta^0$ et $n > \max(N_0, N_3, N_4) = N_5$,

$$(4) \quad \cos\left(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}\right) > \cos\left(\varepsilon^{(7)} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \eta_1,$$

$$(4') \quad \lim_{\delta^0 \rightarrow 0, N_5 \rightarrow \infty} (\lim \eta_1) = 0,$$

où $\eta_1 = \eta_1(\delta^0, N_5)$.

Nous allons maintenant évaluer $\sin \varphi_n$ moyennant (2) et en utilisant (3) et (4). Or

$$(1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \left[\sin \varphi_0 + 2 \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_{n-1}}{2} \right) \right] \leq \\ \leq \sin \varphi_n \leq \sin \varphi_0 + 2 \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_{n-1}}{2} \right),$$

d'où, en vertu de (1),

$$(5) \quad (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sin \varphi_0 + 2 \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_{i-1}}{2} \right) \right] s_i \leq \\ \leq d(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \sin \varphi_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sin \varphi_0 + 2 \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_{i-1}}{2} \right) \right] s_i.$$

Développons $\sin \frac{\alpha_i}{2}$ en série, alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\sin \varphi_0 + 2 \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} + \dots + \sin \frac{\alpha_{i-1}}{2} \right) \right] s_i = \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_0 + \alpha_0 + \dots + \alpha_{i-1}) s_i - \\ - \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \varphi_0^3 + 2 \left[\left(\frac{\alpha_0}{2} \right)^3 + \dots + \left(\frac{\alpha_{i-1}}{2} \right)^3 \right] \right\} s_i + \dots$$

Introduisant la notation

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_0 + \alpha_0 + \dots + \alpha_{i-1}) s_i$$

nous allons prouver que

$$I_n \rightarrow I = \int_0^{[A \cdot M]} k(s) ds$$

lorsque $W_n \rightarrow \langle A \cdot M \rangle$, où $k(s)$ est la courbure intégrale de l'arc $\langle A \cdot N \rangle \subset \langle A \cdot M \rangle$, $[A \cdot N] = s$.

Fixons pour l'instant les points M_i , $i = 0, 1, \dots, n$, sur $\langle A \cdot M \rangle$ et posons

$$b_i = \sum_{k=0}^i s_k = s_0 + s_1 + \dots + s_i, \quad b_{i+1} - b_i = s_{i+1}.$$

Introduisons la fonction

$$k_n(s) = \begin{cases} \varphi_0 + a_0 + \dots + a_i & \text{pour } s \in \langle b_{i-1}, b_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \varphi_0 & \text{pour } s \in \langle 0, b_0 \rangle. \end{cases}$$

Alors

$$I_n = \int_0^{b_{n-1}} k_n(s) ds.$$

Comme $b_{n-1} < [A \cdot M]$ et $k_n(s)$ est définie dans l'intervalle $\langle 0, b_{n-1} \rangle$, nous pouvons introduire encore une fonction $k_n^*(s)$, définie dans l'intervalle $\langle 0, [A \cdot M] \rangle$, notamment

$$k_n^*(s) = \begin{cases} k_n(s) & \text{pour } s \in \langle 0, b_{n-1} \rangle \\ k_n(b_{n-2}) & \text{pour } s \in \langle b_{n-1}, [A \cdot M] \rangle. \end{cases}$$

Soit

$$I_n^* = \int_0^{[A \cdot M]} k_n^*(s) ds.$$

Alors $I_n^* - I_n = k(b_{n-2})([A \cdot M] - b_{n-1}) \rightarrow 0$ lorsque $[W_n] = b_{n-1} \rightarrow [A \cdot M]$, puisque $k(b_{n-2}) \rightarrow k(\langle A \cdot M \rangle) < \infty$.

Du théorème 4 du travail [2] il s'ensuit que $k_n^*(s) \rightarrow k(s)$. Les fonctions $k_n^*(s)$ étant non décroissantes, et bornées dans leur ensemble, on obtient, en vertu du théorème de Lebesgue sur la limite des intégrales ([3], p. 46):

$$I_n^* = \int_0^{[A \cdot M]} k_n^*(s) ds \rightarrow \int_0^{[A \cdot M]} k(s) ds = I$$

et, comme $I_n^* - I_n \rightarrow 0$, on voit que $I_n \rightarrow I$, c'est-à-dire

$$\lim_{\max s_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_0 + a_0 + \dots + a_{i-1}) s_i = \int_0^{[A \cdot M]} k(s) ds.$$

Nous allons maintenant trouver la limite de l'expression

$$I_n^k = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \varphi_0^k + 2 \left[\left(\frac{a_0}{2} \right)^k + \dots + \left(\frac{a_{i-1}}{2} \right)^k \right] \right\} s_i, \quad k \geq 3.$$

Si l'on pose $\mu = \max \left(\varphi_0, \frac{a_0}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}}{2} \right)$, on aura

$$I_n^k \leq \mu^{k-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_0 + a_0 + \dots + a_{i-1}) s_i = \mu^{k-1} I_n$$

done, à cause de (6),

$$(7) \quad \lim_{\max s_i \rightarrow 0} I_n^k = 0, \quad k \geq 3$$

puisque la courbe $\langle A * B \rangle$ admet une tangente continue et, par suite, $\mu \rightarrow 0$.

En profitant de (6) et (7), on passe dans (5) à la limite pour $n \rightarrow \infty$ et on a

$$\lim_{N_S \rightarrow \infty} (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \int_0^{[A * M]} k(s) ds = d(M_n) = d(M) \leq \int_0^{[A * M]} k(s) ds$$

d'où, moyennant (3') et (4'), on déduit enfin

$$\lim_{M \rightarrow A} d(M): \int_0^{[A * M]} k(s) ds = 1$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Théorème 2. *Si $\delta(M)$ désigne la distance du point M d'une géodésique $\langle A * B \rangle$ sur une surface convexe lisse S à la tangente $t(A)$ à $\langle A * B \rangle$ au point A , alors*

$$\lim_{M \rightarrow A} \delta(M): \int_0^{[A * M]} k(s) ds = 1.$$

Démonstration. Nous appliquerons le théorème précédent et le théorème 1 du travail [2]. Soit M' le pied de la perpendiculaire menée par le point M à la tangente $t(A)$, $\delta(M) = [MM']$, et \mathbf{n} le vecteur normal de la surface S au point A . Avec ces notations on a

$$(8) \quad \lim_{M \rightarrow A} \frac{\overline{MM'}}{[MM']} = \mathbf{n}.$$

Cela résulte du fait que le plan $\{t(A), M\}$ tend vers le plan $\sigma(A)$ perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point A .

De (8) résulte que l'angle de la droite passant par le point M et perpendiculaire au plan $\tau(A)$ avec la droite MM' tend vers zéro, donc $\delta(M):d(M) \rightarrow 1$. Moyennant le théorème 1 on obtient

$$\lim_{M \rightarrow A} \delta(M): \int_0^{[A * M]} k(s) ds = 1$$

et le théorème 2 se trouve démontré.

Remarquons que cette démonstration entraîne

$$(9) \quad \lim_{M \rightarrow A} [A M'] : [A * M] = 1.$$

Considérons maintenant le rayon-vecteur $r(s) = \overline{AM}$ de la géodésique $\langle A * B \rangle$. En désignant par R un point sur la tangente $t(A)$ tel que $[AR] = s = [A * M]$, on aura

$$r(s) = st + \overline{RM},$$

où $t = t(A)$ est le vecteur unité tangent à $\langle A * B \rangle$ au point A . Comme $|r(s)| : [AR] \rightarrow 1$, on a $\sin \sphericalangle(ARM) : \sin \sphericalangle(AMR) \rightarrow 1$ lorsque $s \rightarrow 0$. D'où, en tenant compte de $\sphericalangle(MAR) \rightarrow 0$, il suit $\sphericalangle(ARM) \rightarrow \pi/2$, donc $\sphericalangle(M' MR) \rightarrow 0$ et $[M' M] : [MR] \rightarrow 1$. De ces considérations résulte

$$(10) \quad \lim_{M \rightarrow A} \overline{RM} / [RM] = n \quad \text{et} \quad \lim_{M \rightarrow A} [RM] / \delta(M) = 1.$$

Moyennant ces relations on a

$$\overline{RM} = \int_0^{[A * M]} k(x) dx \cdot \overline{RM} : \int_0^{[A * M]} k(x) dx = \int_0^{[A * M]} k(x) dx \cdot v$$

où, en vertu du théorème 2 et de (10),

$$v = \overline{RM} : \int_0^{[A * M]} k(x) dx \rightarrow n.$$

Le résultat ainsi obtenu peut être énoncé comme il suit:

Théorème 3. *Le rayon-vecteur $r(s) = \overline{AM}$, $[A * M] = s$, d'une géodésique $\langle A * B \rangle$ sur une surface convexe lisse S s'exprime, dans un voisinage du point A , par la formule*

$$r(s) = st + \int_0^s k(x) dx \cdot v, \quad (8)$$

où \mathbf{t} est le vecteur tangent unité de la géodésique au point A , $k(s)$ la courbure intégrale de l'arc $\langle A * M \rangle \subset \langle A * B \rangle$, ν un vecteur tendant vers le vecteur \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$, vecteur-normal de la surface S au point A .

Remarque 1. Au théorème 3 on peut donner les énoncés plus généraux que voici:

Théorème 3'. Si la courbe $\langle A * B \rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur au sens de Menger orienté, son rayon-vecteur $\mathbf{r}(s) = \overline{AM}$, $s = [A * M]$, peut être exprimé, dans un voisinage du point A , par la formule

$$\mathbf{r}(s) = s\mathbf{t} + \int_0^s k(x)dx \cdot \nu,$$

où \mathbf{t} est le vecteur tangent unité de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point A , $k(s)$ la courbure intégrale de l'arc $\langle A * M \rangle \subset \langle A * B \rangle$, et ν un vecteur tendant vers le vecteur \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$, vecteur normal principal de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point A .

Et encore:

Théorème 3''. Si la courbe $\langle A * B \rangle$ de la classe \mathcal{X} admet en tout point des plans osculateurs au sens de Menger orientés à gauche $\sigma^-(M)$ et à droite $\sigma^+(M)$, on a la conclusion du théorème 3'.

Démonstration. Il existe un voisinage du point A tel que les plans osculateurs $\sigma^-(M)$ et $\sigma^+(M)$ en tout point M de ce voisinage ne forment pas un angle égal à π , et que l'indicatrice sphérique de ce voisinage est une courbe rectifiable (théorème 2''' du travail [2]). Soit $\langle A * M \rangle$ contenu dans ce voisinage. Alors, en vertu du théorème 5 du travail [2], la courbure intégrale des lignes brisées inscrites W_n tend vers $k(\langle A * M \rangle)$.

On pourra répéter pour la courbe $\langle A * M \rangle$, la démonstration du théorème 1, dès que l'on aura établi les formules (3), (4) et (7) intervenant dans cette démonstration.

Or, (3) a bien lieu, puisque les plans σ_i tendent uniformément vers les plans $\sigma(P)$ du paratingent $\pi(P)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\pi(P) \rightarrow \sigma(A)$ lorsque $M \rightarrow A$. En répétant donc le raisonnement relatif à (3), on obtient une évaluation analogue.

L'évaluation (4) est aussi valable. En effet, les droites $M_i M_{i+1}$ tendent uniformément vers les droites $t(P)$ du paratingent $P(P)$ de la courbe $\langle A * M \rangle$ au point P , les droites l_i tendent uniformément vers les droites $l(P)$ intersections des plans du paratingent $\pi(P)$ avec le plan $\tau(A)$ et on a $t(P) \rightarrow t(A)$ lorsque $M \rightarrow A$. Pour ce qui concerne les angles α_i , on a, pour $n > N$, $\alpha_i \leq \sphericalangle [t^-(P), t^+(P)] + \bar{\varepsilon}$ lorsque $M_i \rightarrow P$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ (car s'il existait une suite W_{n_k} telle que $\alpha_{i_k} > \bar{\varepsilon} + \sphericalangle [t^-(P), t^+(P)]$, $\bar{\varepsilon} > 0$, pour tout $P \in \langle A * M \rangle$, il existerait une suite partielle M_{i_k} convergeant vers $P' \in \langle A * M \rangle$ et alors $\sphericalangle (M_{i_{k-1}} M_{i_k} M_{i_{k+1}}) \rightarrow \sphericalangle (t', t'')$, $t' \in P(P')$, $t'' \in P(P')$

et $\angle(t', t'') \leq \angle[t^-(P'), t^+(P')]$, et il y aurait contradiction avec l'hypothèse $\bar{\varepsilon} > 0$). Comme pour $P \in \langle A * M \rangle$, $[A * M] < \varepsilon'$ on a $\angle[t^-(P), t^+(P)] < \bar{\varepsilon}$, il s'ensuit que $\alpha_i < \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} = \varepsilon$ pour $n > N$ et $[A * M] < \varepsilon'$.

Occupons-nous maintenant de l'égalité (7). Dans ce cas μ ne tend plus vers zéro lorsque $W_n \rightarrow \langle A * M \rangle$. C'est pourquoi nous écrivons (5) sous la forme

$$(1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \left[I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_n^{2k+1} \right] \leq d(M_n) \leq I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_n^{2k+1},$$

c'est-à-dire

$$(1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{I_n^{2k+1}}{I_n} \right] \leq \frac{d(M_n)}{I_n} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{I_n^{2k+1}}{I_n}.$$

Mais

$$0 \leq \frac{I_n^{2k+1}}{I_n} \leq \mu^{2k} \frac{I_n}{I_n} = \mu^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

d'où

$$(1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{2k}}{(2k+1)!} \right] \leq \frac{d(M_n)}{I_n} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Passons à la limite dans ces inégalités pour $W_n \rightarrow \langle A * M \rangle$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)] \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}^{2k}}{(2k+1)!} \right) \leq d(M) : \int_0^{[A * M]} k(s) ds \leq \\ \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}^{2k}}{(2k+1)!},$$

où $\bar{\mu}$ est au plus égal à $\sup_{P \in \langle A * M \rangle} \angle[t^-(P), t^+(P)]$, ce qui résulte de considérations relatives à l'expression (4). Comme $t^-(P) \rightarrow t^+(A)$, $t^+(P) \rightarrow t^+(A)$, on a $\bar{\mu} \rightarrow 0$ et, par conséquent,

$$\lim_{M \rightarrow A} \int_0^{[A * M]} k(s) ds = 1,$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 3'''. Si la courbe $\langle A * B \rangle$ est une géodésique sur une surface convexe S et si le point A est au point de la surface S admettant un plan tangent, on a la conclusion du théorème 3.

Théorème 3''''. Si $\langle A \cdot B \rangle$ est une géodésique sur une surface convexe S , le point A un point d'arête de la surface S et si la géodésique $\langle A \cdot B \rangle$ fait avec l'arête de la surface S au point A un angle non nul, alors on a la conclusion du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Погорелов, А. В., *Изгибание выпуклых поверхностей*, en russe, Moskva-Leningrad, 1951.
 [2] K. Radziszewski, *Sur la courbure intégrale d'une classe de courbes*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 16, (1962), p. 19-40.
 [3] Riesz, F., Sz. Nagy, B., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952.

Streszczenie

W pracy tej podaje się między innymi dowód twierdzenia: Jeśli $\langle A \cdot B \rangle$ jest geodezyjną na gładkiej wypukłej powierzchni S , to jej wektor wodzący $r(s) = \overline{AM}$ wyraża się wzorem

$$r(s) = st + \int_0^s k(x) dx \cdot \nu$$

gdzie s jest długością łuku $\langle A \cdot M \rangle \subset \langle A \cdot B \rangle$, t jednostkowym wektorem stycznym do geodezyjnej $\langle A \cdot B \rangle$ w punkcie A , $k(s)$ krzywizną integralną łuku $\langle A \cdot M \rangle$, a ν jest wektorem dążącym do jednostkowego wektora normalnego powierzchni S w punkcie A .

Резюме

В этой работе даётся, среди других, доказательство теоремы: Если $\langle A \cdot B \rangle$ является геодезической на гладкой выпуклой поверхности S , то её радиус — вектор $r(s) = \overline{AM}$ можно представить формулой:

$$r(s) = st + \int_0^s k(x) dx \cdot \nu$$

где s обозначает длину дуги $\langle A \cdot M \rangle \subset \langle A \cdot B \rangle$, t единичный вектор касательный геодезической $\langle A \cdot B \rangle$ в точке A , $k(s)$ интегральную кривизну дуги $\langle A \cdot M \rangle$, а ν вектор стремящийся к единичному вектору нормальной поверхности S в точке A .

