ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XII, 5 SECTIO A 1958

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr M. Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur le second théorème de la moyenne du calcul intégral *)

O drugim twierdzeniu o wartości średniej rachunku całkowego

О второй теореме о среднем значении в интегральном исчислении

Introduction. Dans la formule classique de O. Bonnet

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b)$$

on suppose que $\varphi(x)$ est positive et non croissante. Je me propose d'établir une formule analogue, et aussi une formule analogue à la formule de Weierstrass, en supposant seulement que $\varphi(x)$ est „en moyenne non croissante à droite de a dans (a, b)", c'est-à-dire que la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

est non croissante dans cet intervalle [cf. mes travaux **1, 2**].

Voici d'abord quelques propriétés de ces fonctions. On constate immédiatement que *pour que $\varphi(x)$ soit en moyenne non croissante à droite de a dans (a, b), il faut et il suffit que l'on ait dans cet intervalle l'inégalité*

$$\varphi(x) \leqslant \frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

*) Les principaux résultats de ce travail ont été présentés le 16 août 1958 au Congrès International des Mathém. à Edimbourg.

Il en résulte que *si $\varphi(x)$ est en moyenne non croissante à droite de a dans (a, b), on a $\varphi(x) \leqslant \varphi(a)$ dans cet intervalle. On voit aussi aisément que si $\varphi(x)$ est en moyenne croissante à droite de a dans (a, b) et en moyenne croissante à droite de b dans (b, c), alors $\varphi(x)$ est en moyenne croissante à droite de a dans (a, c).*

En effet, il résulte de nos hypothèses que l'on a

$$(b-a)\varphi(b) \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$(x-b)\varphi(x) \leqslant \int_b^x \varphi(x)\,dx \qquad (b \leqslant x \leqslant c).$$

Si donc $b \leqslant x \leqslant c$, on a

$$\begin{aligned}(x-a)\varphi(x) &= (x-b)\varphi(x) + (b-a)\varphi(x) \\ &\leqslant \int_b^x \varphi(x)\,dx + (b-a)\varphi(b) \\ &\leqslant \int_b^x \varphi(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^x \varphi(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que *$\varphi(x)$ soit non croissante dans l'intervalle (a, b) et non décroissante dans l'intervalle (b, c). Pour que $\varphi(x)$ soit en moyenne non croissante à droite de a dans l'intervalle (a, b), il suffit que l'on ait*

$$(*) \qquad \varphi(c) \leqslant \frac{1}{c-a} \int_a^c \varphi(x)\,dx\,.$$

En effet, la propriété en question, qui s'exprime par l'inégalité

$$(1) \qquad \varphi(x) \leqslant \frac{1}{x-a} \int_a^x \varphi(x)\,dx\,,$$

est évidente dans l'intervalle (a, b) et vérifiée pour $x = c$. Supposons d'abord que dans $(*)$ on ait le signe d'inégalité. Si (1) n'était pas vérifiée dans (b, c), il existerait dans cet intervalle un point ξ tel que l'on aurait

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\xi - a} \int_a^{\xi} \varphi(x)\,dx$$

et que l'inégalité (1), avec le signe $<$, serait vérifiée pour $\xi < x \leqslant c$.

Or cela est impossible, car dans cet intervalle $\varphi(x)$ est non décroissante et

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

décroît.

Si l'on a le signe d'égalité dans (*) on pourra considérer la fonction $\varphi(x)-\varepsilon x$, où $\varepsilon>0$ est arbitrairement petit. Cette fonction satisfait à l'inégalité (*) avec le signe $<$, elle est donc non croissante en moyenne à droite de a dans (a, b). En faisant tendre ε vers 0 on voit qu'il en est de même de $\varphi(x)$.

Voici maintenant quelques exemples:

a) La fonction $(x-1)^2$ est non croissante en moyenne, à droite de 0, dans l'intervalle $(0, 3/2)$.

b) La fonction représentée par la ligne polygonale: $y=-m(x-a)$ dans l'intervalle $(0, a)$ et $y=p(x-a)$ pour $x>a$, où $m>0$ et $p>0$, est en moyenne non croissante à droite de 0 dans l'intervalle $(0, a\sqrt{1+m/p})$.

c) La fonction $2-\sin x$ possède la même propriété dans l'intervalle $(0, x_0)$, où x_0 est la racine (unique), comprise entre $\pi/2$ et π, de l'équation $x\sin x+\cos x-1=0$.

d) On peut aussi construire une fonction définie sur tout l'axe positif, croissante pour x suffisamment grand, qui soit pourtant en moyenne non croissante à droite de 0 sur tout l'axe positif: d'après l'inégalité (1) il suffit, par exemple, de considérer une fonction $\varphi(x)$ décroissante et positive dans l'intervalle $(0, a)$ et croissante pour $x>a$, de manière que $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=c$ avec $\varphi(a)<c<\varphi(0)$ en supposant que l'on ait, x_0 désignant la valeur unique de x où $\varphi(x)=0$,

$$\int_0^{x_0}[\varphi(x)-c]\,dx>\int_{x_0}^{\infty}[c-\varphi(x)]\,dx.$$

e) On voit aussi sans peine qu'il est possible de construire une fonction $\varphi(x)$ positive pour $x>0$, qui tende vers 0 lorsque $x\to+\infty$ et qui possède une infinité de maxima a_k $(k=1, 2, 3, \ldots,\ \lim\limits_{k\to\infty} a_k=\infty)$ de manière que $\varphi(x)$ soit en moyenne non croissante à droite de a_k dans l'intervalle infini $x>a_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Il suffit pour cela, par exemple, que la suite (a_k) soit décroissante vers zéro et que l'on ait

$$\varphi(a_{k+1})\leqslant\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\varphi(x)\,dx,\qquad (k=1, 2, \ldots).$$

En supposant, en effet, que $\varphi(x)$ possède un seul minimum dans l'intervalle (a_k, a_{k+1}) cela résulte des propriétés qui ont été énoncées au début.

Évidemment, on pourrait considérer, par exemple, des fonctions $\varphi(x)$ *non décroissantes en moyenne à gauche de b dans (a, b)*, c'est-à-dire telles que

$$\frac{1}{b-x}\int_x^b \varphi(x)\,dx$$

soit non décroissante dans cet intervalle. Les propriétés de ces fonctions se déduisent de suite des propriétés des fonctions en moyenne non croissantes à droite.

Il est clair que l'on pourrait aussi considérer des fonctions „en moyenne non croissantes à gauche de b dans l'intervalle (a, b)", c'est-à-dire telles que l'expression

$$\frac{1}{b-x}\int_x^b f(x)\,dx$$

soit non croissante dans (a, b). Les théorèmes correspondants, de même que les théorèmes relatifs aux „fonctions en moyenne non décroissantes", s'obtiendraient des théorèmes démontrés dans ce travail par de simples changements de variables. On peut aussi s'attendre à ce qu'il soit possible de généraliser encore davantage, en introduisant des fonctions „monotones d'ordré supérieur". Ainsi par exemple, la fonction $f(x)$ sera dite en moyenne non croissante d'ordre deux à droite de a dans (a, b), si l'expression

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x \frac{\int_a^t f(u)\,du}{t-a}\,dt$$

est non croissante dans cet intervalle.

J'ai établi les énoncés suivants:

I. *Supposons que $\varphi(x)$ soit continue, positive et en moyenne non croissante à droite de a dans l'intervalle (a, b) et que $f(x)$ soit continue dans cet intervalle. Posons*

$$L = \frac{\operatorname{Max}|f(x)|}{\operatorname{Max}\left|\int_a^x f(x)\,dx\right|} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Alors
$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right| = (L+1)\,\varphi(a)\left|\int_a^\xi f(x)\,dx\right| \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

II. *En conservant les hypothèses du théorème précédent, admettons toutefois, plus généralement, que $\varphi(x) \geqslant m$, $m \leqslant 0$ dans (a, b) et supposons que l'on ait en outre* $\int_a^x f(x)\,dx > 0$ *pour* $a < x \leqslant b$ *et*

$$P = \sup_{a \leqslant x \leqslant b}\left[|(x-a)f(x)| : \int_a^x f(x)\,dx\right] < 1\,;$$

Dans ces conditions on a

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = [(L+1)\varphi(a) - mL]\int_a^\xi f(x)\,dx + m\int_\xi^b f(x)\,dx \;{}^{*})$$

(L est la constante de l'énoncé I, évidemment $L \leqslant P$).

La démonstration de ces théorèmes sera exposée aux §§ 1—3.

Le théorème I peut avoir des applications analogues à celles du théorème de Bonnet classique; ainsi par exemple, on obtient l'énoncé suivant: *$\varphi(x)$ étant la fonction considérée dans l'exemple e (p. 47) et $f(x)$ une fonction continue pour $x > 0$, s'annulant en changeant de signe aux points a_k de l'exemple c) et seulement en ces points, si l'on a*

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| < A \qquad (p > 0,\ q > 0)$$

et

$$\frac{\operatorname{Max}_{x>0} |f(x)|}{\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx\right|} < L,$$

où A et L sont des constantes définies, dont la seconde ne dépend pas de k **)*, l'intégrale*

$$\int_0^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$$

est convergente.

*) Cette formule est exacte pour $m > 0$, mais il est préférable d'utiliser dans ce cas la formule plus simple qui correspond au cas $m = 0$. Si $f(x) > 0$, la condition $P \geqslant 1$ est remplie par toute fonction $f(x)$ non croissante à droite de a.

**) Par exemple, si $f(x) = \sin x$, on a $A = 2$ et $L = 1/2$.

En effet, il résulte des hypothèses que la fonction

$$F(p,q)=\int_p^q f(x)\varphi(x)\,dx$$

possède des extréma aux points $p=a_k$, $q=a_l$ il suffit donc de considérer le cas $p=a_k$; or, en appliquant l'énoncé I on voit que

$$\left|\int_{a_k}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx\right|=(L+1)\varphi(a_k)\left|\int_{a_k}^{\xi} f(x)\,dx\right|< A(L+1)\varphi(a_k),$$

tandis que le second membre de l'inégalité tend vers zéro lorsque $k\to\infty$.

J'ai établi [1], pp. 123—130, une proposition qui s'énonce, dans un cas particulier, de la manière suivante:

„Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues dans l'intervalle (a,b), si $g(x)$ remplit les conditions

$$g(a)\neq 0,\qquad \int_a^x g(x)\,dx\neq 0\qquad\qquad (a< x< b)$$

et si $\varphi(x)$ est une fonction bornée, positive et non croissante dans (a,b), on a

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\Big/\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx=\int_a^\xi f(x)\,dx\Big/\int_a^\xi g(x)\,dx\qquad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

Actuellement j'ai reconnu que *cet énoncé ne s'étend pas, en général, au cas où $\varphi(x)$ est seulement en moyenne non croissante à droite de a dans* (a,b). L'exemple correspondant sera étudié au § 4.

1. Dans la démonstration des théorèmes I et II je vais considérer les approximations des intégrales en question par des sommes de R i e m a n n. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $a=0$ et $b=1$. En supposant donc que $\varphi(x)$ est positive dans $[0,1]$, je vais écrire pour abréger:

$$f_k=\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,dx,\qquad \varphi_k=\varphi\left(\frac{k}{n}\right),\qquad F_k=\int_b^{k/n} f(x)\,dx\qquad (k=1,2,\dots,n)$$

et

$$S_k=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k-k\varphi_{k+1}\qquad (k=1,2,\dots,n-1).$$

La somme de Riemann approchant l'intégrale $\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx$ peut s'écrire:

$$\sum_1^n f_i\varphi_i=A+B,$$

où

$$A = F_1 \cdot \frac{S_1}{2} + F_2 \cdot \frac{S_2}{2.3} + \cdots + F_{n-2} \frac{S_{n-2}}{(n-2)(n-1)} + F_{n-1} \frac{S_{n-1}}{n-1} + F_n \varphi_n,$$

$$B = \frac{F_1 - F_2}{2} S_1 + \frac{F_2 - F_3}{3} S_2 + \cdots + \frac{F_{n-2} - F_{n-1}}{n-1} S_{n-2}.$$

En effet, la transformation d'A b e l fournit d'abord, en posant $\varphi_k - \varphi_{k+1} = \sigma_k$, l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i = F_1 \sigma_1 + \cdots + F_{n-1} \sigma_{n-1} + F_n \varphi_n;$$

en y substituant les formules:

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_2 = \frac{S_2 - S_1}{2}, \ldots, \sigma_{n-1} = \frac{S_{n-1} - S_{n-2}}{n-1}$$

on trouve que

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i = \left(F_1 - \frac{F_2}{2}\right) S_1 + \left(\frac{F_2}{2} - \frac{F_3}{3}\right) S_2 + \cdots + \left(\frac{F_{n-2}}{n-2} - \frac{F_{n-1}}{n-1}\right) S_{n-2} + $$
$$+ F_{n-1} \frac{S_{n-1}}{n-1} + F_n \varphi_n.$$

Je vais tout d'abord établir les deux lemmes suivants:

Lemme I. *Quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, on a pour n suffisamment grand*

$$\frac{S_k}{k} < \varphi(0) + \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Lemme II. Si *$\varphi(x)$ est de classe C^1 dans $[0, 1]$, on a*

$$\frac{S_k}{k} > -\frac{C}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où C est une constante indépendante de n.

$\varphi(x)$ étant en moyenne non croissante à droite de 0 dans $(0, 1)$, on a, d'après (1) et en vertu de la définition d'une fonction en moyenne non croissante, les inégalités:

$$(2) \qquad \varphi_{k+1} \leqslant \frac{n}{k+1} \int_0^{(k+1)/n} \varphi(x)\, dx \leqslant \varphi(0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Divisons l'intervalle $(0, (k+1)/n)$ en k intervalles égaux $I_1, I_2, \ldots, I_k$. On a, d'après le 1er théorème de la moyenne, ξ_i étant un point de I_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$:

$$\frac{n}{k+1}\int_0^{(k+1)/n} \varphi(x)\,dx = \frac{\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi_2)+\cdots+\varphi(\xi_k)}{k}.$$

Or, $\varphi(x)$ est continue dans $[0, 1]$ et les différences $\xi_i - (i/n)$ ne dépassent pas $1/n$ en valeur absolue, donc, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on aura pour n suffisamment grand

$$\text{(3)} \qquad \frac{\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k}{k} - \varepsilon \leqslant \frac{n}{k+1}\int_0^{(k+1)/n} \varphi(x)\,dx \qquad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Si $\varphi(x)$ est de classe C^1, posons $C = \max|\varphi'(x)|$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$; on aura

$$|\varphi(\xi_i) - \varphi_i| < \frac{C}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et par suite

$$\text{(4)} \qquad \frac{n}{k+1}\int_0^{(k+1)/n} \varphi(x)\,dx < \frac{\varphi_1+\cdots+\varphi_k}{k} + \frac{C}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Les inégalités (2), (3) et (4) fournissent immédiatement les lemmes I et II.

2. Pour établir le théorème I, on profitera de l'identité

$$\text{(5)} \qquad \frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{2.3} + \cdots + \frac{S_{n-2}}{(n-2)(n-1)} + \frac{S_{n-1}}{n-1} + \varphi_n = \varphi_1 \quad ^{*}).$$

En vertu du lemme I on a, en posant $\bar{s}_i = s_i$ lorsque $s_i < 0$ et $\bar{s}_i = 0$ lorsque $s_i = 0$,

$$\text{(6)} \qquad \frac{\bar{S}_1}{2} + \frac{\bar{S}_2}{2.3} + \cdots + \frac{\bar{S}_{n-2}}{(n-2)(n-1)} + \frac{\bar{S}_{n-1}}{n-1} >$$

$$> -\frac{C}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) > -\frac{C(\log n + 1)}{n} > -\varepsilon$$

*) Cette identité s'obtient, par exemple, de la formule (*) qui précède le texte du lemme I, en y posant $f(c) = 1$ dans $[0, 1/n]$ et $f(x) = 0$ dans $[1/n, 1]$; alors $F_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

si n est suffisamment grand. Il en résulte, en tenant compte de (5), que l'on a

$$(7) \qquad \frac{|S_1|}{2}+\frac{|S_2|}{2.3}+\cdots+\frac{|S_{n-2}|}{(n-2)(n-1)}+\frac{|S_{n-1}|}{n-1}+\varphi_n<\varphi_1+2\,\varepsilon.$$

En posant

$$\max_{0<x\leqslant 1}\left|\int_0^x f(x)\,dx\right|=M,$$

on a donc, en vertu de la définition des F_i et de la somme A (p.),

$$(8) \qquad |A|\leqslant M(\varphi_1+2\,\varepsilon).$$

Quant à la somme B, on constate, en tenant compte du lemme I, que son k-ième terme ne dépasse pas en valeur absolue

$$\operatorname*{Max}_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{|f(x)|}{n}\cdot\frac{|S_k|}{k+1}\leqslant\operatorname*{Max}_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{|f(x)|}{n}[\varphi(0)+\varepsilon],$$

on a donc

$$(9) \qquad |B|\leqslant\operatorname*{Max}_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\,[\varphi(0)+\varepsilon]\leqslant LM[\varphi(0)+\varepsilon].$$

Les inégalités (8) et (9) fournissent évidemment, lorsque $n\to\infty$, le théorème I dans le cas où $\varphi(x)$ est de classe C^1. Si $\varphi(x)$ est seulement continue, on peut approcher cette fonction uniformément dans $(0,1)$ par des fonctions de classe C^1 (par exemple par des polynomes); ces fonctions seront— dans le cas de l'inégalité stricte dans la formule (1) — aussi en moyenne non croissantes à droite de 0 dans $(0,1)$, le théorème I s'obtiendra donc en effectuant un passage à la limite. Dans le cas général, on remplacera $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)=\varphi(x)-\varepsilon x$, où $\varepsilon>0$ est assez petit pour que $\varphi_1(x)$ soit positive dans $(0,1)$. La fonction $\varphi_1(x)$ satisfait à l'inégalité stricte de la formule (1); en lui appliquant la formule de l'énoncé I et en faisant tendre ε vers zéro on obtiendra cet énoncé dans le cas général.

3. Pour obtenir l'énoncé II (nous supposerons d'abord dans cet énoncé que $\varphi(x)$ est de classe C^1 et que $m=0$), il faudra comparer séparément les termes correspondants des sommes A et B, c'est-à-dire considérer les rapports:

$$\left|\frac{F_k-F_{k+1}}{k+1}\right|:\frac{F_k}{k(k+1)} \qquad (k=1,2,\ldots,n-2).$$

Or, ces rapports peuvent s'écrire

$$(10)\qquad \frac{\frac{k}{n}|f(\xi_k)|}{\int\limits_0^{k/n} f(x)\,dx} = \left| \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{n}{k}\int\limits_0^{k/n} f(x)\,dx} + \frac{f(\xi_k) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{n}{k}\int\limits_0^{k/n} f(x)\,dx} \right| \quad \left(\frac{k}{n} \leqslant \xi_k \leqslant \frac{k+1}{n}\right).$$

Le premier terme du second membre de (10) ne dépasse pas P en valeur absolue, d'après l'hypothèse de l'énoncé. Si l'on considère ceux des termes des sommes A et B qui correspondent aux indices $k \geqslant \lambda n$, où $\lambda > 0$ est fixe, $\int\limits_0^{k/n} f(x)dx$ est plus grande qu'une constante positive $C(\lambda)$, donc, $f(x)$ étant continue, le deuxième terme du second membre de (10) sera plus petit que ε arbitrairement petit, pourvu que n soit assez grand. D'autre part, la somme des termes de B qui correspondent aux indices $k < \lambda n$ est, d'après les inégalités $S_k/k < \varphi(0) + \varepsilon$ du lemme I, plus petite en valeur absolue que

$$(11)\qquad \lambda n \cdot \operatorname*{Max}_{0<x<1} \frac{|f(x)|}{n} \cdot [\varphi(0) + \varepsilon|.$$

Pour obtenir l'énoncé II dans le cas considéré ($m = 0$), ils suffit d'établir, en tenant compte de l'énoncé I, l'inégalité

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqslant 0.$$

Or, considérons la somme:

$$(12)\qquad A + B = \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{F_k}{k} + F_k - F_{k+1}\right) \frac{S_k}{k+1} + F_{n-1} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} + F_n\,\varphi_n$$

et fixons l'attention sur les termes négatifs éventuels de la somme (12), d'abord sur ceux d'indice $k \geqslant \lambda n$ de même sur le terme $F_{n-1}\ (S_n—1)/n—1$. Il résulte de (6) et des considérations précédentes que la somme des termes en question, auxquels correspondent les termes négatifs de la somme A, est plus grande que $-\,M\varepsilon(1 + P + \varepsilon)$. D'autre part, il résulte des mêmes considérations, de l'hypothèse $P \leqslant 1$ et de (8) que la somme des termes en question, auxquels correspondent les termes positifs de la somme A, est plus grande que $-\varepsilon M(\varphi_1 + 2\varepsilon)$. En ce qui concerne les termes de la somme (12) pour lesquels $k \leqslant \lambda n$, leur somme sera plus grande, en vertu de (6) et (11), que $-M\varepsilon - \lambda \operatorname{Max} |f(x)| [\varphi(0)+\varepsilon]$. En résumé, on obtient donc l'inégalité:

$$A+B > -\varepsilon M(2+P+\varphi_1+3\varepsilon) - \lambda \operatorname{Max}|f(x)|[\varphi(0)+\varepsilon]. \tag{13}$$

ε étant arbitrairement petit, pourvu que n soit suffisamment grand, on obtient, en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité (13), la suivante:

$$\int_0^1 f(x)\varphi_1(x)\,dx \geqslant -\lambda \operatorname{Max}|f(x)|[\varphi(0)+\varepsilon].$$

Or, $\lambda > 0$ est arbitrairement petit, on a donc bien

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx \geqslant 0,$$

c'est-à-dire le théorème II dans le cas où $m=0$ et où $\varphi(x)$ est de classe C^1. Ce résultat s'étend au cas où $\varphi(x)$ est seulement continue en appliquant le procédé décrit à la fin du § 2. Pour l'étendre au cas où $m<0$, on considère la fonction $\psi(x)=\varphi(x)-m$ qui est, de même que $\varphi(x)$, non croissante en moyenne et, en plus, positive. En lui appliquant la formule

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = (L+1)\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

on obtient bien la formule de l'énoncé II.

4. Occupons-nous maintenant de l'exemple dont il est question à la fin de l'introduction. Posons $f(x)=x^s$, $g(x)=x^p$, où $s>p>\sqrt{6}$. Supposons que $\varphi(x)=(x-1)^2$, $a=0$, $b=3/2$; $\varphi(x)$ est en moyenne non croissante à droite de 0 dans l'intervalle $(0,3/2)$. Dans ces conditions on a les égalités:

$$\frac{\int_0^b \varphi(x)f(x)\,dx}{\int_0^b \varphi(x)g(x)\,dx} = \frac{\dfrac{b^{s+2}}{s+3}-\dfrac{2b^{s+1}}{s+2}+\dfrac{b^s}{s+1}}{\dfrac{b^{p+2}}{p+3}-\dfrac{2b^{p+1}}{p+1}+\dfrac{b^p}{p+1}}, \tag{14}$$

$$\frac{\int_0^\xi f(x)\,dx}{\int_0^\xi g(x)\,dx} = \frac{(p+1)\xi^s}{(s+1)\xi^p} \qquad (0\leqslant\xi\leqslant b). \tag{15}$$

L'égalité des rapports (14) et (15) entraînerait l'inégalité

$$\frac{\dfrac{b^2}{s+3}-\dfrac{2b}{s+2}+\dfrac{1}{s+1}}{\dfrac{b^2}{p+3}-\dfrac{2b}{p+2}+\dfrac{1}{p+1}}=\frac{p+1}{s+1}\left(\frac{\xi}{b}\right)^{s-p}\leqslant\frac{p+1}{s+1},$$

qui peut s'écrire, en remplaçant b par $3/2$ et en posant

$$E(x)=1+\frac{9}{4}\,\frac{x+1}{x+3}-3\,\frac{x+1}{x+2}, \qquad E(s)<E(p).$$

Or la fonction $E(x)$ est égale à $1/4$ pour $x=0$ et elle tend vers la même limite $1/4$ lorsque $n\to\infty$. La fonction $E(x)$ possède un seul minimum positif pour $x=\sqrt{6}$ et elle est par suite croissante pour $x>\sqrt{6}$. L'inégalité $E(s)<E(p)$ est donc incompatible avec l'hypothèse $s>p>\sqrt{6}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biernacki, M., *Sur le 2 théorème de la moyenne et sur l'inégalité de Tchébycheff*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 4 (1950), p. 124-130.

[2] — *Sur une inégalité entre les intégrales due à Tchébycheff*, Ibidem, 5 (1951), p. 23-29.

Streszczenie

Funkcję $\varphi(x)$ nazywamy średnio nierosnącą na prawo od a w przedziale (a, b) jeśli w tym przedziale wyrażenie

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

jest nierosnące. Podaję następujące twierdzenia analogiczne do twierdzeń Bonneta i Weierstrassa.

I. Jeśli $\varphi(x)$ jest ciągła, dodatnia i średnio nierosnąca na prawo od a w przedziale (a, b) a $f(x)$ jest ciągła w tym przedziale, to kładąc

$$L=\mathrm{Max}\,|f(x)|\,/\,\mathrm{Max}\left|\int_a^x f(x)\,dx\right| \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

mamy

$$\left|\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right|=(L+1)\,\varphi(a)\left|\int_a^\xi f(x)\,dx\right| \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

II. Utrzymując założenia twierdzenia I, załóżmy ogólniej, że $\varphi(x) \geqslant m$, $m \leqslant 0$ w (a, b). Załóżmy ponadto, że $\int\limits_a^x f(x)dx > 0$ gdy $a < x \leqslant b$. Kładąc

$$P = \sup\left[|(x-a)f(x)| \Big/ \int\limits_a^x f(x)\,dx\right] \qquad (a < x < b)$$

i przypuszczając, że $P \leqslant 1$, mamy

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = [(L+1)\varphi(a) - mL] \int\limits_a^\xi f(x)\,dx + m\int\limits_\xi^b f(x)\,dx .$$

Podaję zastosowanie twierdzenia I do dowodu zbieżności całek określonych niewłaściwych typu

$$\int\limits_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx .$$

Wykazuję również w tej pracy, że wzór

$$\frac{\int\limits_a^b \varphi(x)f(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)g(x)\,dx} = \frac{\int\limits_a^\xi f(x)\,dx}{\int\limits_a^\xi g(x)\,dx},$$

który udowodniłem w tomie IV Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska przypuszczając, że funkcja $\varphi(x)$ jest dodatnia, ograniczona i nierosnąca w (a, b), nie uogólnia się na przypadek, gdy $\varphi(x)$ jest tylko średnio nierosnąca na prawo od $x = a$.

Резюме

Функцию $\varphi(x)$ называем в среднем невозрастающей направо от a в интервале (a, b), если в этом интервале выражение

$$\frac{1}{x-a}\int\limits_a^x \varphi(x)\,dx$$

не возрастает. Я даю следующие теоремы аналогичные теоремам Бонне и Вейерштрасса.

I. Если $\varphi(x)$ непрерывна, положительна и в среднем невозрастающая направо от a в интервале (a,b), а $f(x)$ непрерывна в этом интервале, то полагая

$$L = \operatorname{Max}|f(x)| / \operatorname{Max}\left|\int_a^x f(x)\,dx\right| \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right| = (L+1)\varphi(a)\left|\int_a^\xi f(x)\,dx\right| \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

II. Удерживая предпосылки теоремы I, положим общее, что $\varphi(x) \geqslant m$, $m \leqslant 0$ в (a,b). Сверх того предположим, что $\int_0^x f(x)\,dx > 0$, когда $a < x \leqslant b$. Полагая

$$P = \sup\left[|(x-a)f(x)| : \int_a^x f(x)\,dx\right] \qquad (a < x \leqslant b)$$

и предполагая, что $P \leqslant 1$, имеем

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = [(L+1)\varphi(a) - mL]\int_a^\xi f(x)\,dx + m\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Я привожу применение теоремы I к доказательству сходимости определённых несобственных интегралов типа

$$\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx.$$

В этой работе показано тоже, что формула

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)g(x)\,dx} = \frac{\int_a^\xi f(x)\,dx}{\int_a^\xi g(x)\,dx},$$

которую я доказал в IV томе Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska в предположении, что функция $\varphi(x)$ положительна, ограничена и не возрастает в (a,b), не обобщается на случай, когда $\varphi(x)$ лишь в среднем невозрастающая направо от $x = a$.