

Z Zakładu Matematyki III, Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: doc. dr K. Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

## Contribution à la théorie des équations différentielles

Przyczynek do teorii równań różniczkowych

К теории дифференциальных уравнений

1. Il existe deux formules qui donnent les solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants (voir par exemple Goursat [3], n° 420, p. 505 et n° 421, p. 509—510 ou bien Kamke [5], n° 97, p. 179—181 et n° 98, p. 182—183). L'une présente des avantages dans les applications, l'autre peut être déduite d'une manière plus heuristique. D'une formule à l'autre on peut passer d'une manière facile moyennant certaines transformations algébriques. Bien que cette méthode soit plus simple que la démonstration indépendante de ces deux formules, à ma connaissance elle n'a été employée que pour des systèmes d'équations dont les matrices des coefficients ont des valeurs propres simples (voir Collar, Duncan, Frazer [2], exemple des pages 207—208).

En employant les résultats de mon travail antérieur (Tatarkiewicz [12], qui sera cité dans la suite comme „OG“) et en employant les mêmes notations, nous obtenons à l'aide de cette méthode les solutions complexes dans le cas général (§ 3). En passant nous obtenons un résultat plus fort que ceux qui étaient connus jusqu'ici. Pour mieux expliquer les raisonnements j'applique cette méthode au § 2 au cas particulier, bien connu, où la matrice des coefficients a des valeurs propres simples.

Enfin j'applique cette méthode aux solutions réelles au cas où la matrice des coefficients a des valeurs propres complexes (§ 5). Cela me permet d'obtenir des formules explicites, jusqu'ici inconnues.

La méthode de Collar, Duncan, Frazer [2] mentionnée ci-dessus est un cas particulier d'une méthode plus générale (Collar, Duncan,

Frazer [2], p. 167—168; elle fut complétée par Lewis [7]) et qui s'applique à des systèmes d'équations linéaires pas nécessairement du premier ordre. Mais comme on ne fait pas dans cette méthode l'emploi de diviseurs élémentaires des matrices, elle ne peut pas donner des formules explicites des solutions, ce qui conduit nécessairement à des calculs numériques pénibles; les auteurs avouent cela eux-mêmes.

La méthode de Snapper [10] encore plus générale, conduit à des calculs encore plus pénibles et ne donne pas des formules explicites pour les solutions réelles.

2. Soit  $\det |A| \neq 0$ . Supposons que les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $A$  soient *simples*, ou bien admettons l'hypothèse plus faible que le diviseurs élémentaires de  $A$  sont *linéaires*. Considérons l'équation (système différentiel linéaire homogène):

$$(2,1) \quad \dot{x} = Ax.$$

Il est facile de voir que la transformation

$$(2,2) \quad y = C^*(A^*)x$$

(où  $C(A^*)$  est la matrice propre de  $A^*$  — voir OG n° 1,1 et 1,2) appliquée à (2,1) nous donne l'équation diagonale

$$(2,3) \quad \dot{y} = K^*(A)y$$

où  $K(A) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = K^*(A) = K^*(A^*)$ .

L'équation (2,3) a comme un des systèmes fondamentaux

$$(2,4) \quad Y = |\delta_{jk} e^{\lambda_j t}|_{(j,k)}.$$

D'où en appliquant la transformation réciproque à (2,2) on voit que

$$(2,5) \quad X = C^{*-1}(A^*) \cdot Y$$

est un système fondamental de (2,1) (voir Kamke [5], p. 181, ou Goursat [3], p. 510). En employant la formule OG (1,62) (OG-Corollaire I ou Corollaire II) on obtient

$$(2,6) \quad X = C(A) \cdot Y$$

(voir Kamke [5], p. 182 ou Goursat [3], p. 505). Une méthode pareille de démonstration a été employée par Collar, Duncan, Frazer [2], dans un exemple (p. 207—208).

La formule (2,6) présente des avantages dans les applications: elle n'exige pas (comme la formule (2,5) le calcul d'une matrice réciproque. Elle peut être déduite d'une autre manière. La transformation

$$y = C^{-1}(A)x$$

(dont les coefficients soit plus difficiles à calculer que ceux de la transformation (2,2)) appliquée à (2,1), conduit à l'équation

$$\dot{y} = K(A)y.$$

Son système fondamental est donné aussi par (2,4), d'où l'on obtient de nouveau (2,6).

3. Soit  $A$  une matrice carrée quelconque, telle que  $\det |A| \neq 0$ . Supposons qu'elle ait comme diviseurs élémentaires ordonnés selon une loi fixe

$$(\lambda - s_1)^{k_1}, \dots, (\lambda - s_r)^{k_r}$$

où  $s_j$  peuvent être complexes.

Considérons l'équation

$$(3,1) \quad \dot{x} = Ax.$$

La transformation

$$y = C_j^*(A^*)x$$

(voir OG — (2,22)) appliquée à (3,1) nous donne l'équation canonique

$$(3,2) \quad \dot{y} = K_j^*(A)y.$$

En partant des  $1, k_1 + 1, \dots, n - k_r + 1$  — ièmes équations, le système (3,2) se laisse résoudre élémentairement. Il a comme système fondamental

$$Y = \text{Diag} (Y^{(k_1)}, \dots, Y^{(k_r)}),$$

où

$$(3,3) \quad Y_j^{(k_j)} = e^{s_j t} \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{t^m}{m!} V_m^{(k_j)}.$$

Un des systèmes fondamentaux de (3,2) sera donné par la formule

$$X = C_j^{*-1}(A^*) \cdot Y.$$

Vu les formules OG — (3,71), OG — (0,24) et OG — (0,25), on a

$$(3,4) \quad X = C_j(A) \cdot F \cdot Y.$$

Mais

$$(3,5) \quad \begin{aligned} F \cdot Y &= \text{Diag} (V^{(k_1)}, \dots, V^{(k_r)}) \cdot \text{Diag} (Y_1^{(k_1)}, \dots, Y_r^{(k_r)}) = \\ &= \text{Diag} (V^{(k_1)} \cdot Y_1^{(k_1)}, \dots, V^{(k_r)} \cdot Y_r^{(k_r)}). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$V^{(k_j)} \cdot Y_j^{(k_j)} = V^{(k_j)} e^{s_j t} \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{t^m}{m!} V_m^{(k_j)} = e^{s_j t} \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{t^m}{m!} V^{(k_j)} \cdot V_m^{(k_j)}.$$

De la formule OG — (0,21) il s'ensuit que

$$V^{(k_j)} \cdot Y^{(k_j)} = e^{s_j t} \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{t^m}{m!} U_m^{(k_j)} \frac{d}{dt} W_j.$$

Posons, en plus,

$$W = \text{Diag} (W_1, \dots, W_r).$$

Alors, vu (3,4) et (3,5), l'équation (3,1) aura comme un des systèmes fondamentaux

$$(3,6) \quad X = C_j(A) \cdot W.$$

Étant donné que la matrice  $C(A)$  n'est pas déterminée univoquement, la formule (3,6) ne détermine pas univoquement le système fondamental  $X$ .

Posons

$$(3,7) \quad \tilde{W}_j = \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{t^m}{m!} U_m^{(k_j)}$$

$$\tilde{W} = \text{Diag} (\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_r)$$

et

$$(3,8) \quad P = \text{Diag} (e^{s_1 t} E^{(k_1)}, \dots, e^{s_r t} E^{(k_r)}).$$

Alors nous pouvons écrire (3,6) sous la forme

$$X = C_j(A) \cdot \tilde{W} \cdot P.$$

Comme  $\tilde{W}$  ne dépend pas des valeurs propres  $s_1, \dots, s_r$  de  $A$ , mais seulement des ordres  $k_1, \dots, k_r$  de ses diviseurs élémentaires, cette dernière formule peut être commode dans les applications.

Jusqu'à présent la formule (3,6) avait été démontrée moyennant la méthode d'Artin (voir Schreier, Sperner [9], p. 79 ou Lefschetz [6], p. 66') qui est moins élémentaire que la nôtre (elle emploie l'opération  $\exp A$ ). Enfin notre formule est plus forte, car jusqu'à présent on mettait cette formule sous la forme: *il existe une matrice  $C$  telle que  $X = -C \cdot W$  forme un système fondamental*, sans que la valeur de  $C$  soit précisé.

4. Si certaines valeurs propres de  $A$  sont complexes, alors  $C(A)$  et  $Y$  sont complexes et le système fondamental  $X$  donné par (3,6) l'est aussi. Alors entre les  $2n$  vecteurs contenus dans les colonnes des matrices réelles  $R'X$  et  $I'X$  (ou  $R'X$  et  $I'X$  sont les parties réelles et imaginaires de  $X$  respectivement) il existe  $n$  linéairement indépendants; ils suffisent

<sup>1)</sup> Lefschetz donne une formule qui diffère de (3,6). On l'obtient en permutant convenablement les colonnes des matrices (3,3).

donc pour la construction d'un système fondamental réel de l'équation (3,1). On peut aussi obtenir toutes les solutions réelles de (3,1) (solution générale réelle) en considérant toutes les solutions

$$x = R' [C_j(A) \cdot Wc]$$

ou  $c$  est un vecteur complexe quelconque.

Dans le paragraphe suivant nous donnons une méthode directe de construction des systèmes fondamentaux réels. Elle ne semble pas avoir d'applications pratiques, le calcul de  $C_R(A)$  (voir OG—n° 2,3, et OG—§ 4) étant plus compliqué que celui de  $C_j(A)$ . Néanmoins cette méthode conduit à des formules explicites, qui semblent être inconnues jusqu'à présent et qui peuvent avoir des applications théoriques (à des problèmes du type considéré par exemple dans le travail Tatar kiewicz [11]).

5. Supposons que la matrice  $A$  (où  $\det |A| \neq 0$ ) ait comme diviseurs élémentaires réels (ordonnés selon une loi fixe)

$$\begin{array}{ll} (\lambda - \lambda_j)^{k_j} & \text{pour } j = 1, \dots, \nu \\ [(\lambda - \rho_j)^2 + \sigma_j^2]^{k_j/2} & \text{pour } j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu \end{array}$$

où  $\sigma_j > 0$

La transformation

$$(5,1) \quad y = C_R^*(A^*) x$$

appliquée à l'équation (3,1) donne l'équation canonique réelle

$$(5,2) \quad \dot{y} = K_R^*(A) y$$

Un de ses systèmes fondamentaux sera donné par exemple par la formule

$$(5,3) \quad Y = \text{Diag} (Y_1^{(k_1)}, \dots, Y_r^{(k_r)})$$

ou  $Y_j^{(k_j)}$  pour  $j = 1, \dots, \nu$  sont données par la formule (3,3) et pour  $j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu$  par la formule

$$(5,4) \quad Y_j^{(k_j)} = e^{\rho_j t} \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{t^m}{m!} V_m^{(k_j)} (\sin \sigma_j t, \cos \sigma_j t).$$

La méthode la plus heuristique qui conduise aux formules (5,4) et (5,3) est la suivante. Soit le système différentiel

$$(5,5) \quad \begin{array}{l} \dot{z}_1 = \rho z_1 - \sigma z_2 \\ \dot{z}_2 = \sigma z_1 + \rho z_2. \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (z_1^2 + z_2^2) = \rho (z_1^2 + z_2^2)$$

d'où  $z_1^2 + z_2^2 = C^2 \exp 2\rho t$ . Donc il existe une fonction  $\varphi(t)$  telle que

$$z_1 = C \exp \rho t \cdot \cos \varphi(t), \quad z_2 = C \exp \rho t \cdot \sin \varphi(t).$$

En substituant cette solution dans l'équation (5,5) on obtient  $\varphi(t) = \pm \sigma t$ .

En partant de ce résultat on obtient les formules (5,4) et (5,3) à l'aide de la variation des constantes et de quelques transformations algébriques. On peut vérifier d'ailleurs directement que  $Y$  donné par (5,3) est une solution de (3,1) et que  $\det |Y| = \prod_{j=1}^{\nu+\mu} \det Y_j^{(k_j)} \neq 0$ .

En appliquant la transformation inverse à (5,1) on obtient le système fondamental de l'équation (3,1)

$$X = C_R^*{}^{-1}(A^*) \cdot Y.$$

Des formules OG — (4,71) et OG — (0,25) il vient

$$(5,6) \quad X = C_R(A) \cdot F \cdot Y.$$

Posons

$$\tilde{W}_j = \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{t^m}{m!} U_m^{(k_j)}(\cos \sigma_j t, \sin \sigma_j t)$$

pour  $j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu$  et prenons pour  $\tilde{W}_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu$  les valeurs (3,7).

Soit

$$W_j = \begin{cases} e^{\sigma_j t} \tilde{W}_j & \text{pour } j = 1, \dots, \nu \\ e^{\rho_j t} \tilde{W}_j & \text{pour } j = \nu + 1, \dots, \nu + \mu \end{cases}$$

et posons

$$W = \text{Diag} (W_1, \dots, W_{\nu+\mu})$$

$$\tilde{W} = \text{Diag} (\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_{\nu+\mu}).$$

Alors de même qu' au § 3 de (5,6) il s'ensuivra que

$$X = C_R(A) \cdot W$$

et

$$X = C_R(A) \cdot \tilde{W} \cdot P$$

(ou  $P$  est définie par (3,8)) sont des systèmes fondamentaux réels de (3,1). Ces formules explicites ne semblent pas être connues jusqu'à présent.

6. En employant des matrices canoniques réelles autres que  $K_R(A)$  on peut obtenir des équations canoniques réelles différentes de (5,2).

Une telle équation a été donnée par exemple par Niemyckij, Stiepanow [8], p. 203. Cette équation semble d'ailleurs être plus simple que la nôtre (5,2). Malheureusement, son système fondamental n'est pas celui donné par les auteurs (formule (5), p. 204—205) mais un autre qui est plus compliqué (et plus compliqué que le système (5,3)).

On a étudié encore d'autres matrices réelles canoniques, voir par exemple, Aitken, Turnbull [1], p. 72 ou Jacobson [4], p. 87, mais elles ne semblent pas avoir d'applications commodes dans la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aitken A. C., Turnbull H. W., *Theory of canonical matrices*, London 1952.
- [2] Collar A. R., Duncan W. J., Frazer R. A., *Elementary matrices*, Cambridge 1938.
- [3] Goursat E., *Cours d'Analyse*, vol. II, Paris 1942.
- [4] Jacobson N., *Lectures in abstract algebra*, vol. II, New York 1953.
- [5] Kamke E., *Differentialgleichungen reeler Funktionen*, New York 1947.
- [6] Lefschetz S., *Lectures on differential equations*, Princeton 1948.
- [7] Lewis D. C., *Simple operational equations with constant coefficients*, Math. Magazine 27 (1954), p. 117—188.
- [8] Niemyckij W. W., Stiepanow W. W., *Kaczestwiennaja teorija diffierencjalnych urawnienij*, Moskwa 1949.
- [9] Schreier O., Sperner E., *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*, vol. II, Leipzig 1935.
- [10] Snapper E., *Polynomial matrices in one variable, differential equations and module theory*, Amer. J. Mat. 69 (1949), p. 299—326.
- [11] Tatarkiewicz K., *Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires*, Ann. UMCS (A) 8 (1954), p. 25—69.
- [12] Tatarkiewicz K., *Sur l'orthogonalité généralisée des matrices propres*, Ann. UMCS (A) 9 (1955), p. 5—28.

#### Streszczenie

Weźmy układ równań różniczkowych liniowy, jednorodny o stałych współczynnikach, zapisany macierzowo jako

$$\dot{x} = Ax. \quad (1)$$

Jeśli wszystkie wartości własne  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  nieosobliwej macierzy  $A$  są pojedyncze, a  $C(A)$  oznacza macierz własną macierzy  $A$  (to jest macierz

której kolumny są wektorami własnymi  $A$ ), to jak wiadomo, systemami fundamentalnymi (1) będą, między innymi, macierze

$$X = C^{*-1}(A^*) \cdot Y \quad (2)$$

oraz

$$X = C(A) \cdot Y \quad (3)$$

gdzie  $Y = [\delta_{jk} \exp \lambda_j t]_{(j, k)}$ .

Wykorzystując pewne twierdzenie algebraiczne (patrz moja praca *Uogólniona ortogonalność macierzy własnych*, ten tom str. 27 wzór (2)) ułatwiające przejście od (2) do (3) podaję w wypadku ogólnym, łatwiejszy sposób wyprowadzenia analogonu (3), przyczym podaję go w nieco mocniejszej, niż zazwyczaj, postaci.

Znajduję wreszcie nie znane dotychczas wzory na systemy fundamentalne rzeczywiste w wypadku gdy wartości własne macierzy  $A$  są zespolone.

#### Резюме.

Возьмём систему дифференциальных уравнений линейных, однородных, с постоянными коэффициентами, записанную в матричном виде

$$\dot{x} = Ax. \quad (1)$$

Если все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  неособой матрицы  $A$  однократны, а  $C(A)$  обозначает собственную матрицу  $A$  (то-есть матрицу которой колонны суть собственные векторы матрицы  $A$ ), то, как известно, фундаментальными системами для (1) будут, между прочим, матрицы

$$X = C^{*-1}(A) \cdot Y \quad (2)$$

а также

$$X = C(A) \cdot Y \quad (3)$$

где  $Y = [\delta_{jk} \exp \lambda_j t]_{(j, k)}$ .

Используя одну алгебраическую теорему (см. мою работу „Обобщенная ортогональность собственных матриц”, этот том стр. 27, формула (2)), облегчающую переход от (2) к (3), я даю в общем случае, более лёгкий способ вывода аналога формулы (3), причём я привожу его в несколько более сильном виде, чем обычный.

Наконец, я нахожу неизвестные до сих пор формулы для действительных фундаментальных систем в случае, когда собственные значения матрицы  $A$  комплексны.