ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE – SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA

VOL. LIV, 5 SECTIO A 2000

REINER KÜHNAU

Über die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen[1]

Professor Zdzisław Lewandowski zum 70. Geburtstag

ABSTRACT. We will derive a sharpend form of the Grunsky coefficient inequalities which guarantee for a given mapping $\in \Sigma$ the existence of a quasiconformal extension with an explicit dilatation bound.

1. Sei $w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \cdots$ in einer Umgebung von $z = \infty$ regulär bis auf den einfachen Pol in $z = \infty$. Wir entnehmen der Entwicklung

$$\log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta} = - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_{kl}}{z^k \zeta^l} \tag{1}$$

die "Grunsky-Koeffizienten" a_{kl}. Dann sind die "Grunskyschen Koeffizientenbedingungen" (vgl. z.B [Po])

$$\left| \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{k}, \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32H02, 30C45.
Key words and phrases. Grunsky coefficients, quasiconformal extension, quasiconformal reflection, Grunsky inequality (sharpened version), dilatation bound of quasiconformal extension.

[1] Nach einem Vortrag am 9. Juni 1999 am Mathematischen Institut der Maria Curie-Skłodowska Universität Lublin.

erfüllt für alle natürlichen Zahlen n und alle Systeme komplexer Zahlen x_k, notwendig und hinreichend dafür, dass $w(z)$ für $|z| > 1$ schlicht konform ist, d.h. zur Klasse Σ gehört.

Wir haben es hier mit einem schönen Beispiel des Zusammenhanges zwischen globalen und lokalen Eigenschaften zu tun: Die globale Eigenschaft der Schlichtheit wird in Zusammenhang gesetzt mit einer lokalen Eigenschaft, da in (2) nur das Verhalten von $w(z)$ in einer beliebig kleinen Umgebung von $z = \infty$ eingeht.

2. Auf der "5th Conference on Analytic Functions" in Lublin August 1970 wurde gezeigt [Ku1] (vgl. auch z.B. [Ku2],[Po]), dass

$$\left|\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l\right| \leq \kappa \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{k}, \tag{3}$$

erfüllt für alle n und Systeme x_k, mit $\kappa = \frac{Q-1}{Q+1} < 1$ notwendig dafür ist, dass $w(z)$ sogar nach $|z| < 1$ stetig und Q- quasikonform fortsetzbar ist. Es zeigte sich jedoch, dass hiervon die Umkehrung falsch ist [Ku4]: Es ist

$$w(z) = z(1 + qz^{-3})^{2/3} \in \Sigma,\ 0 < q < 1, \tag{4}$$

$Q = \frac{1+q}{1-q}$ - quasikonform fortsetzbar nach $|z| < 1$, aber nicht mit einem kleineren Q, wohingegen (3) sogar mit einem $\kappa < \frac{Q-1}{Q+1}$ erfüllt ist.

3. So ergibt sich folgendes **Problem**: Man bestimme zu jedem festen κ, $0 < \kappa < 1$, die Zahl

$$Q^*(\kappa) = \inf Q, \tag{5}$$

so dass *alle* $w(z) \in \Sigma$, die (3) erfüllen, noch Q-quasikonform nach $|z| < 1$ fortsetzbar sind.

In [Po] (Theorem 9.14) wurde schon gezeigt, dass aus (3) mit $\kappa < 1$ immerhin die Existenz einer quasikonformen Fortsetzung folgt, allerdings ohne Angabe einer konkreten Dilatationsschranke. Hier soll eine solche Schranke explizit angegeben werden, also eine Abschätzung für $Q^*(\kappa)$ (vgl. unten Satz 2). Schon in [Ku1] wurde

$$Q^*(\kappa) < \frac{1 + 3\kappa}{1 - 3\kappa} \tag{6}$$

bemerkt. Das ist natürlich nur für $\kappa < 1/3$ sinnvoll.

4. Für das Folgende ist wichtig diese Aussage (vgl. [Ku4], [Ku5]; in [Sch] schon für hinreichend glattes Bild von $|z| = 1$): Zu *fester* Abbildung

$w(z) \in \Sigma$ ist der kleinstmögliche Koeffizient κ in (3) (bei also beliebigen Systemen x_k) der reziproke Wert des Fredholmschen Eigenwertes λ von $w(|z| = 1)$. Dabei wird dieser Eigenwert aufgefasst in der allgemeinen Schoberschen Definition für beliebige Jordankurven - vgl. z.B. [Ku5]. Das liefert - hier beiläufig bemerkt - die folgende Ungleichung von Ahlfors [Ah]: Ist an der Jordankurve $\mathfrak{C}$ eine Q-quasikonforme Spiegelung möglich, dann gilt für den Fredholmschen Eigenwert λ

$$\frac{1}{\lambda} \leq q \tag{7}$$

mit

$$q = \frac{Q-1}{Q+1}. \tag{8}$$

Dann kann man nach Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{C}$ als Bild von $|z| = 1$ bei einer Abbildung $\in \Sigma$ annehmen, und eine Q - quasikonforme Spiegelung an $\mathfrak{C}$ gibt bekanntlich zu einer Q-quasikonformen Fortsetzung dieser Abbildung $\in \Sigma$ Anlass, so dass (3) mit $\kappa = \frac{Q-1}{Q+1}$ gilt. Dass in (7) nicht immer das Gleichheitszeichen möglich ist, zeigt (4); eine genauere Diskussion des Gleichheitszeichens in [Kru], [Ku7].

5. Für die angestrebte Abschätzung von $Q^*(\kappa)$ benötigen wir noch zu einem Quasikreis $\mathfrak{C}$ das Funktional

$$M = \sup \frac{m'}{m}. \tag{9}$$

Dabei bezeichnet m den konformen Modul des Inneren von $\mathfrak{C}$, wenn auf $\mathfrak{C}$ vier Punkte markiert werden. Dazu sei jeweils m' der konforme Modul des Äusseren von $\mathfrak{C}$ mit den gleichen vier markierten Randpunkten. Und in (9) ist das Supremum bei allen möglichen auf $\mathfrak{C}$ gewählten Quadrupeln zu bilden.

Es ist $M \geq 1$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathfrak{C}$ ein Kreis ist. (Für $M = 1$ ist nämlich stets $m' = m$, und wenn man Inneres und Äusseres von $\mathfrak{C}$ auf die obere Halbebene schlicht konform abbildet, kann man für die induzierte Randabbildung die Fixpunkte $0, 1, \infty$ annehmen, was wegen $m' = m$ nach sich zieht, dass alle Punkte der reellen Achse Fixpunkte sind; es gibt demnach eine konforme Spiegelung an $\mathfrak{C}$).

Dann wurde in [Ku9] bewiesen

$$M \leq \frac{\lambda+1}{\lambda-1}. \tag{10}$$

Danach ist für Quasikreise $\mathfrak{C}$ *stets* $M < \infty$. Unten wird sich umgekehrt nach (14) ergeben, dass $M < \infty$ nur für Quasikreise gilt.

Es folgt also aus (10) im Verein mit (7), wenn wir noch die Abkürzung

$$\Lambda = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} > 1 \tag{11}$$

einführen [Ku9]:

$$M \leq \Lambda \leq Q. \tag{12}$$

Dabei kann man sich unter Q gleich die bei den Spiegelungen an $\mathfrak{C}$ kleinstmögliche Dilatationsschranke ("Spiegelungskoeffizient" von $\mathfrak{C}$) vorstellen. Da - wie Beispiel (4) zeigt - $\Lambda < Q$ möglich ist, ist also auch $M < Q$ möglich. Das war zuerst in [A/H] durch längere Konstruktion eines Beispiels festgestellt worden; vgl. auch die Literatur in [Ku9] zur Diskussion des Falles $M = Q$, dazu noch [Ch] und [Ya] (dort §2 ist freilich in [Ku8] als Spezialfall enthalten) und vor allem [St] zur genaueren Beleuchtung der Hintergründe.

6. Für das Folgende benötigen wir noch die in [Le] (S. 15, (2.3)) definierte "distortion function" $\boldsymbol{\lambda}(K)$, die so definiert wird ($\boldsymbol{\lambda}$ ist dabei nicht mit λ zu verwechseln). Dazu werden alle K-quasikonformen Abbildungen f der Ebene betrachtet, die die reelle Achse in sich transformieren und die Fixpunkte $-1, 0, \infty$ besitzen. Dann sei

$$\boldsymbol{\lambda}(K) = \max f(1).$$

Die Funktion $\boldsymbol{\lambda}(K)$ kann explizit durch elliptische Integrale ausgedrückt werden [Le].

Fussend auf einem Resultat von M. Lehtinen (1984) ist nach [Le](S. 34, Schluss von 5.3) zu einer gegebenen k-quasisymmetrischen Randabbildung auf der reellen Achse eine quasikonforme Fortsetzung in die obere Halbebene möglich, wobei die

$$\text{Dilatation} \leq \min\,(k^{3/2}, 2k - 1). \tag{13}$$

7. Nun sei eine Abbildung $w(z) \in \Sigma$ gegeben, für die das Bild $\mathfrak{C}$ von $|z| = 1$ eine geschlossene Jordankurve ist mit dem durch (9) definierten Funktional $M < \infty$. Dann können wir das Äussere und das Innere von $\mathfrak{C}$ schlicht konform auf die obere Halbebene abbilden, und die induzierte Randabbildung der reellen Achse auf sich ist dann nach [Le](S. 32 oben) $k = \boldsymbol{\lambda}(M)$-quasisymmetrisch. Daraus entsteht somit eine quasikonforme Abbildung der oberen Halbebene auf sich mit (13). Rückübertragung bringt damit eine quasikonforme Fortsetzung von $w(z)$ mit gleicher Dilatation.

Damit haben wir den

Satz 1. *Liefert $w(z) \in \Sigma$ als Bild von $|z| = 1$ eine geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}$ mit dem durch* (9) *definierten Funktional $M < \infty$, dann existiert eine Q-quasikonforme Fortsetzung nach $|z| < 1$ mit*

$$Q \leq \max\left(\boldsymbol{\lambda}^{3/2}(M), 2\boldsymbol{\lambda}(M) - 1\right). \tag{14}$$

Es gesellt sich also zu der Ungleichung (12) für die drei Kurvenfunktionale M, Λ, Q für $\mathfrak{C}$ die Ungleichung (14).

Nehmen wir nun noch die Ungleichung $M \leq \Lambda$ entsprechend (12) hinzu, wird Q auch durch Λ abschätzbar. Damit haben wir endgültig das folgende Hauptresultat.

Satz 2. *Ist für $w(z) \in \Sigma$ das Ungleichungssystem* (3) *für alle n und Systeme x_k mit einem $\kappa < 1$ erfüllt, dann existiert zu $w(z)$ eine Q-quasikonforme Fortsetzung nach $|z| < 1$ mit*

$$Q \leq \max\left(\boldsymbol{\lambda}^{3/2}\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right), 2\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right) - 1\right). \tag{15}$$

Anders gesagt: Für die in (5) gesuchte Funktion $Q^*(\kappa)$ gilt

$$Q^*(\kappa) \leq \max\left(\boldsymbol{\lambda}^{3/2}\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right), 2\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right) - 1\right). \tag{16}$$

8. Die Abschätzung (16) ist sicher unscharf. Für kleine κ folgt nach (16)

$$Q^*(\kappa) < 1 + 13.14\kappa + O(\kappa^2), \tag{17}$$

wohingegen aus (6) bzw. [Ku1] schon folgt

$$Q^*(\kappa) < 1 + 6\kappa + O(\kappa^2). \tag{18}$$

In der anderen Richtung ergibt sich mit Hilfe des Beispiels (4) nach [Ku6]

$$Q^*(\kappa) > 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\kappa + O(\kappa^2) = 1 + 2.12\cdots\kappa + O(\kappa^2). \tag{19}$$

Liefert dieses Beispiel (4) den exakten Wert $Q^*(\kappa)$?

9. In letzter Zeit wurden zahlreiche geringfügige Verbesserungen der Ungleichung (13) von M. Lehtinen gegeben, u.a. von Delin Tan, Zhong Li, D. Partyka und J. Zajac, Jian Wang und Zhimin Gong, Zhiguo Chen, L. Resendis und J. Zajac, Tianquan Jiang und Xueliang Zheng. Das kann man natürlich jeweils zu einer geringfügigen Verbesserung von (14) und (16) heranziehen.

Eine andere Frage ist, ob es günstigere Abschätzungen für $Q^*(\kappa)$ ergibt, wenn man die Konstruktion quasikonformer Abbildungen aus den Randwerten statt in der oberen Halbebene sofort - was eigentlich auch naheliegender und natürlicher erscheint - in der Einheitskreisscheibe durchführt. Hier könnte an [Krz] angeknüpft werden, wo J. Krzyż die Quasisymmetrie für den Einheitskreis formuliert.

Aber es scheint ziemlich sicher, dass sich über Verbesserungen von (13) u.ä. der exakte Wert für $Q^*(\kappa)$ nicht gewinnen lässt. Hierzu müßte man wohl eine neue Variationsmethode austüfteln. Dazu müßte man etwa die Klasse der *nicht* (sic!) Q-quasikonform nach $|z| < 1$ fortsetzbaren Abbildungen $\in \Sigma$ betrachten und in dieser Klasse inf $\frac{1}{\lambda}$ bestimmen. (Es ist natürlich sup $\frac{1}{\lambda} = 1$.) Zu dieser (zunächst obskur erscheinenden) Klasse existiert noch keine brauchbare Variationsformel. Es hätte natürlich keinen Sinn, in der Klasse der Q-quasikonform fortsetzbaren Abbildungen eine (dort vorhandene) Variationsformel zu verwenden, da dort $\frac{1}{\lambda}$ alle Werte zwischen 0 und q entsprechend (8) annehmen kann.

10. Es sei bemerkt, dass H. Grunsky seine Koeffizientenbedingungen schon in seiner klassischen Arbeit 1939 auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete angegeben hatte; in [Ku2] die Verallgemeinerung bei quasikonformer Fortsetzung, als notwendige Bedingungen. Deshalb ist natürlich wiederum die Frage, inwieweit diese bei entsprechender Verschärfung hinreichend für quasikonforme Fortsetzbarkeit werden.

Bei der Frage der quasikonformen Fortsetzbarkeit ist es übrigens so, dass man schon beim einfach zusammenhängenden Falle im Grunde genommen jedes einfach zusammenhängende Gebiet mit gleicher Berechtigung als Grundgebiet zum Ausgangspunkt nehmen kann - im Gegensatz zum klassischen konformen Grunskyschen Falle ist die Frage bei quasikonformer Fortsetzbarkeit nicht durch konforme Hilfsabbildung auf das Kreisäussere zurückführbar.

Vom Autor wurde (zusammen mit H. Blaar und H. Baumgarten) u.a. der Fall des Äusseren einer Ellipse bzw. des Äusseren zweier Kreise studiert. Das wird höllisch kompliziert, erst recht, wenn man anschliessend die scharfen hinreichenden Bedingungen für quasikonforme Fortsetzbarkeit sucht.

11. Schliesslich sei bemerkt, dass in [Ku3] Bedingungen für die Laurent-Koeffizienten einer in einem konzentrischen Kreisring schlichten konformen Abbildung angegeben wurden. Die wieder entstehende anschließende Frage nach der Verallgemeinerung bei quasikonformer Fortsetzbarkeit ist noch nicht studiert worden.

12. Abschließend noch die Bemerkung, dass analog wie beim Grunskyschen

Funktional auch bei verschiedenen anderen Funktionalen (z.B. Ableitung, Schwarzsche Ableitung u.ä.) das Problem besteht, aus ihrer Abschätzung (=notwendige Bedingung) für die quasikonform fortsetzbaren Abbildungen $\in \Sigma$ durch Verschärfung eine hinreichende Bedingung zu machen mit bestmöglichem (=kleinstmöglichem) Wert für die Dilatationsschranke, anschliessend an die bekannten Arbeiten von L.V. Ahlfors/G. Weill, J. Becker, J. Krzyż, I.V. Zhuravlev.

Literatur

[Ah] Ahlfors, L.V., *Remarks on the Neumann-Poincaré integral equation*, Pacific J. Math. **2** (1952), 271–280.

[A/H] Anderson, J.M., A. Hinkkanen, *Quadrilaterals and extremal quasiconformal extensions*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 455–474.

[Ch] Chen, Jixiu, *A remark on: "An approximation condition and extremal quasiconformal extension" [Proc. Amer. Math. Soc. 125(1997) no.5, 1479-1481; MR 97g: 30018] by E. Reich*, Chinese Sci. Bull. **42** (1997), no. 21, 1765–1767.

[Kru] Krushkal', S.L., *Über die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen*, Sibirsk. Mat. Zh. **28,1** (1987), 138–145. (Russ.)

[Krz] Krzyż, J.G., *Quasicircles and harmonic measure*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **12** (1987), 19–24.

[Ku1] Kühnau, R., *Koeffizientenbedingungen bei quasikonformen Abbildungen*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **22/23/24** (1968/1969/1970), 108–111.

[Ku2] Kühnau, R., *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom GRUNSKY-schen Typ für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr. **48** (1971), 77-105.

[Ku3] Kühnau, R., *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende Laurentsche Reihen*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. math., astr., phys. **20** (1972), 7–10.

[Ku4] Kühnau, R., *Zu den Grunskyschen Coeffizientenbedingungen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **6** (1981), 125–130.

[Ku5] Kühnau, R., *Quasikonforme Fortsetzbarkeit, Fredholmsche Eigenwerte und Grunskysche Koeffizientenbedingungen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **7** (1982), 383–391.

[Ku6] Kühnau, R., *Zur Berechnung der Fredholmschen Eigenwerte ebener Kurven*, Z. Angew. Math. Mech. **66** (1986), 193–200.

[Ku7] Kühnau, R., *Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit ?*, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 290–307.

[Ku8] Kühnau, R., *Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **90** (1988), 90–109.

[Ku9] Kühnau, R., *Drei Funktionale eines Quasikreises*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **25** (2000), 413–415.

[Le] Lehto, O., *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, New York etc., 1987.

[Po] Pommerenke, Chr., *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[Sch] Schiffer, M., *Fredholm eigenvalues and Grunsky matrices*, Ann. Polon. Math. **39** (1981), 149–164.

[St] Strebel, K., *On the dilatation of extremal quasiconformal mappings of polygons*, Comment. Math. Helv. **74** (1999), 143–149.

[Ya] Yang, Shanshuang, *Conformal invariants of smooth domains and extremal quasiconformal mappings of ellipses*, Illinois J. Math. **41** (1997), 438–452.

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg
D-06099 Halle(Saale), Deutschland

received March 7, 2000