Joanna Niewiadoma · Jan Szynal

15 WYKŁADÓW I 150 ZADAŃ Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej

15 WYKŁADÓW I 150 ZADAŃ
Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

UMCS
WYDAWNICTWO

Joanna Niewiadoma · Jan Szynal

15 WYKŁADÓW I 150 ZADAŃ Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej
Lublin 2020

Recenzent
dr hab. Leopold Koczan, prof. Politechniki Lubelskiej

Redakcja techniczna
Agnieszka Muchowska

Projekt okładki i stron tytułowych
Krzysztof Trojnar

Skład
Joanna Niewiadoma

Wydrukowano z materiałów przekazanych przez Autorów

© Wydawnictwo UMCS, Lublin 2020

ISBN 978-83-227-9408-1

Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej
ul. Idziego Radziszewskiego 11, 20-031 Lublin
tel. 81 537 53 04
www.wydawnictwo.umcs.eu
e-mail: sekretariat@wydawnictwo.umcs.lublin.pl

Dział Handlowy
tel./faks 81 537 53 02
Księgarnia internetowa: www.wydawnictwo.umcs.eu
e-mail: wydawnictwo@umcs.eu

Druk i oprawa
Mazowieckie Centrum Poligrafii Wojciech Hunkiewicz
ul. Lisi Jar 29, 05-270 Marki

Spis treści

Wstęp

Przedmiot analiza matematyczna (lub rachunek różniczkowy i całkowy) stanowi podstawę edukacji matematycznej na tych kierunkach studiów wyższych, które w swoim programie mają przedmiot matematyka wyższa.

Literatura przedmiotu w zakresie treści teoretycznych jak też zbiorów zadań jest bardzo obszerna. Jej najlepsze (naszym zdaniem), współczesne pozycje podajemy w spisie na końcu naszej monografii. Mogą one służyć do uzupełnienia wiedzy przedstawionej w prezentowanej pozycji.

Niniejszą monografię pisaliśmy z myślą o studentach kierunków niematematycznych, chociaż sądzimy, że studenci matematyki czy fizyki również znajdą w niej wiele interesujących treści, dotyczących rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej.

Celem naszym było takie przedstawienie zagadnień teoretycznych oraz licznych zadań, aby student łatwo je zrozumiał i samodzielnie stosował, ucząc się na wielu zademonstrowanych przykładach i licznych komentarzach.

Metoda poznawania wiedzy krok po kroku oraz udokumentowanie jej nietrywialnymi przykładami różnych problemów pozwala doskonalić myślenie i techniki rachunkowe, tak istotne w tym przedmiocie. Kładziemy przy tym nacisk nie na ilość zadań, lecz na metodologię ich rozwiązywania.

Problemy i zadania zaczerpnęliśmy z naszej wieloletniej pracy w wykładaniu tego przedmiotu na uczelniach krajowych i zagranicznych oraz z niektórych pozycji wymienionych w literaturze.

Chcieliśmy, aby przedstawiona monografia, przy możliwie minimalnej objętości, traktowała rozważane zagadnienia w miarę kompletnie i była dla nich samowystarczalna. Konieczność rezygnacji z niektórych trudnych zagadnień, jak na przykład jednostajna ciągłość czy ciągi i szeregi funkcyjne, została podyktowana ograniczoną objętością oraz programem studiów. Pozwoliło nam to położyć większy nacisk na dokładniejsze przedstawienie innych zagadnień. Na przykład, bez szczegółowej wiedzy o ciągach czy szeregach funkcyjnych, pokazujemy jak wyznaczyć sumy szeregów liczbowych takich jak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, czy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Pokazujemy również, jak łatwo wyznaczyć sumy niektórych interesujących szeregów liczbowych, czy granice ciągów $e_n^+ = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1)$ innymi metodami, niż powszechnie stosowane. Ta sama uwaga dotyczy nierówności funkcyjnych oraz całkowych i ich zastosowań (na przykład do prostego ale dość dokładnego oszacowania $n!$).

Tytuł naszej monografii nawiązuje do ilości godzin przeznaczonych na realizację rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej, przewidywaną w programie studiów w jednym semestrze: 15 wykładów oraz 15 ćwiczeń po dwie godziny. Liczba zaprezentowanych zadań i problemów znacznie przekracza 150 - chcieliśmy oczywiście, aby takie „minimum" pozwoliło dobrze opanować przedstawione zagadnienia.

Rozdziały I i II oprócz nowych treści zawierają niektóre zagadnienia omawiane już w szkole średniej. Przypominamy je celem ugruntowania wiedzy czytelnika i wprowadzenia do dalszej nauki.

Błędy i niedoskonałości występujące w tej monografii obciążają wyłącznie autorów. Wszelkie uwagi przyjmiemy z wdzięcznością. Można je przesyłać na adres e-mail: joanna.niewiadoma@kul.pl lub jan.szynal3@gmail.com.

Joanna Niewiadoma i Jan Szynal

Rozdział I. FUNKCJE „PODSTAWOWE" ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ ORAZ RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z NIMI ZWIĄZANE. CZĘŚĆ I. WAŻNE NIERÓWNOŚCI ELEMENTARNE

1.1 Funkcje „podstawowe"

Przez funkcje „podstawowe" rozumieć będziemy: funkcję potęgową o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym, wielomiany (w szczególności funkcję liniową i kwadratową), funkcję homograficzną, funkcje wykładniczą i logarytmiczną, funkcje trygonometryczne i funkcje do nich odwrotne.

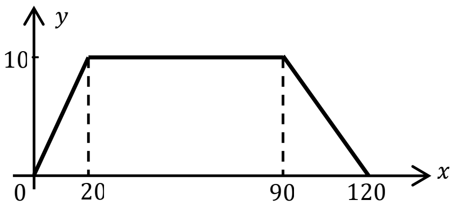
Funkcje te są określone na całym zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, bądź na określonych przedziałach osi liczbowej i zakładamy w całej monografii, że przyjmują one wartości rzeczywiste.

Dwa podstawowe sposoby podania funkcji to sposób graficzny (wykres) oraz sposób analityczny, wzorem $y = f(x),\ \ x \in A \subset \mathbb{R}$.

Na podstawie wykresu będziemy analizować różne własności funkcji. W przypadku gdy mamy wzór $y = f(x)$ badamy różne własności funkcji, aby potem podać jej wykres, choćby przybliżony.

Wszystkie funkcje, którymi będziemy się zajmować powstały historycznie z zagadnień praktycznych, a matematyka porządkuje i uogólnia ich własności oraz tworzy narzędzia do ich badania.

Na przykład, poniższy wykres może przedstawiać wielkość produkcji pewnego dobra w czasie (120 dni), ale również poziom lotu samolotu od startu do lądowania (2 h).

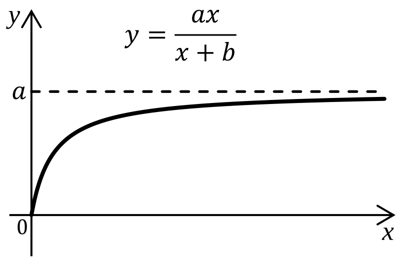


Drugim przykładem funkcji niech będzie podatek liniowy, który jest najprostszym zastosowaniem funkcji liniowej $y = ax$.

Inny przykład to funkcja Törnquista pierwszego rodzaju

$$T_1(x) = \frac{ax}{x+b}\ ,\ x \geq 0\ ,\ a, b > 0\ .$$

Podaje ona zależność popytu konsumenta od jego dochodu na dobra podstawowe. Jej wykresem jest część hiperboli (rysunek niżej).



Prosta $y = a$, to matematycznie asymptota pozioma, a ekonomicznie to tak zwany poziom nasycenia.

Mając podany wzór $y = f(x)$ zakładamy sensowność występujących w nim działań i określamy w ten sposób **dziedzinę funkcji**:

(1.1) $$D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ \text{wzór } y = f(x) \text{ ma sens}\}\ .$$

(Jest to tak zwana **dziedzina naturalna**).

Na przykład:

1. gdy $f(x) = \frac{1}{x}$ to $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

2. gdy $f(x) = \sqrt{x}$ to $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = \langle 0, +\infty)$;

3. gdy $f(x) = sinx,\ f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ to $D_f = \mathbb{R}$.

Wyznaczenie dziedziny funkcji D_f sprowadza się do rozwiązania odpowiednich równań, bądź nierówności, na przykład:

1. gdy $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ to $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;

2. gdy $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ to $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x^2 \geq 0\} = \langle -2, 2 \rangle$.

W przypadkach ciągów liczbowych: (a_n), $(\mathbb{N} \ni n \to a_n = f(n) \in \mathbb{R})$, dziedziną będzie odpowiedni podzbiór zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}_0$, na przykład:

1. $a_n = (-1)^n$, $D_f = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

2. $a_n = \frac{1}{n}$, $D_f = \mathbb{N}$,

3. $a_n = \frac{1}{n-2}$, $a_n > 0$, $D_f = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

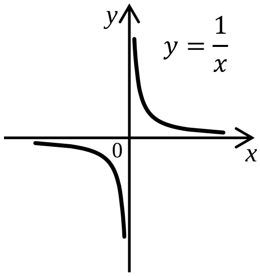
Trudniejszym problemem, który będziemy realizować etapami, jest wyznaczenie **zbioru wartości funkcji** R_f:

(1.2) $$R_f = \left\{y \in \mathbb{R}:\ y = f(x)\ ,\ \ x \in D_f\right\} .$$

Przykłady

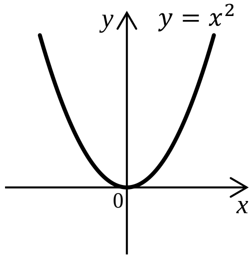
1. $f(x) = \frac{1}{x}$,

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



2. $f(x) = x^2$,

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \langle 0, +\infty)$.



Wykres funkcji $f(x) = x^2$ (parabola o wierzchołku $(0,0)$ z ramionami skierowanymi „do góry”) jest znakomitą ilustracją **„najważniejszej nierówności”** (elementarnej) w matematyce:

(1.3) $$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; x^2 \geq 0 \;\; \wedge \;\; (x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0)\,.$$

Zauważmy w tym miejscu olbrzymią moc kwantyfikatora „dla każdego” ($\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}$) , bowiem za x możemy podstawiać dowolną liczbę rzeczywistą.

Pozwala to kreować nowe, często nieoczekiwane nierówności. Podamy dwa przykłady. Dalsze będą podane w następnych rozdziałach.

Przykłady

1. Nierówność (1.3) zachodzi gdy za x podstawimy na przykład $(x-1)$. Daje to:

$$(x-1)^2 \geq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x^2 - 2x + 1 \geq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x^2 + 1 \geq 2x \;\; \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; x + \frac{1}{x} \geq 2$ dla $x > 0$, czyli mamy nierówność

(1.4) $$\underset{x>0}{\forall} \; x + \frac{1}{x} \geq 2\,,$$

a znak równości ma miejsce tylko dla $x = 1$.

Nierówność (1.4) może być interpretowana dwojako:

a) suma liczby dodatniej i jej odwrotności jest większa lub równa 2, lub

b) najmniejsza wartość funkcji $g(x) = x + \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, +\infty)$ jest osiągnięta w punkcie $x = 1$ i wynosi $min\, g(x) = g(1) = 2$.

Interpretacja ta daje nam na przyszłość wskazówkę odnośnie położenia wykresu funkcji $y = g(x)$.

2. Rozważmy teraz n-nierówności postaci :

$$(y_1 - tx_1)^2 \geq 0\,,\ \ (y_2 - tx_2)^2 \geq 0\,, \dots,\ \ (y_n - tx_n)^2 \geq 0,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, $x_i\,, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Po podniesieniu do kwadratu, dodając wszystkie nierówności stronami, otrzymamy (po zgrupowaniu wyrazów) nierówność:

$$(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) - 2t(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) +$$
$$+t^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq 0\ .$$

Traktując powyższą nierówność jako kwadratową ze względu na t , stwierdzamy, że jest ona nieujemna dla każdego $t \in \mathbb{R}$, gdy:

$$\Delta = 4(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\cdot$$
$$\cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \leq 0,$$

co daje nam bardzo ważną nierówność matematyki wyższej - nierówność Cauchy-Buniakowskiego-Schwarza (**CBS**):

(1.5) $$\underset{\substack{x_i, y_i \in \mathbb{R} \\ i=1,2\dots,n}}{\forall} \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n {y_i}^2\right).$$

Uwaga. Zastosowaliśmy wyżej symbol sumy, oznaczenie, którego będziemy często używać, mianowicie jest to skrót dla **skończonej** sumy n kolejnych wyrazów ciągu (a_n).

Jeżeli (a_n), $n \in \mathbb{N}$ jest dowolnym ciągiem, to oznaczamy:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i\,,\ \ n \in \mathbb{N}\ \text{(ustalona liczba)},$$

(czytamy: suma od „$i = 1$” do „n”, a_i).

Znak sumy Σ jest dużą grecką literą sigma. Własności symbolu Σ grają rolę w przekształcaniu wzorów. Oto niektóre z nich:

$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$; $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$, $c \in \mathbb{R}$,

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$, $m < n$.

Analogicznie dla iloczynu n liczb a_i , $i = 1, \dots, n$, stosujemy oznaczenie: $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$, $n \in \mathbb{N}$ (ustalona liczba) .

1.2 Ważne nierówności

Wiele zagadnień analizy wymaga zastosowania różnych nierówności, wśród których kilka jest szczególnie ważnych, ze względu na liczne zastosowania. Zapiszemy je w postaci trzech twierdzeń, a dowody niektórych z nich będą podane w dalszych rozdziałach.

Definicja. *Niech $x \in \mathbb{R}$. Wartością bezwzględną liczby x nazywamy liczbę (funkcję) $f(x) = |x|$ określoną następująco*

$$|x| = \begin{cases} x & gdy\ x > 0 \\ 0 & gdy\ x = 0 \\ -x & gdy\ x < 0 \end{cases} .$$

Twierdzenie 1. (nierówności elementarne)

a) Nierówności dla x^2 i $|x|$:

1. $\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall}\ x^2 \geq 0$ *i* $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall}\ |x| \geq 0$ *i* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. $\underset{x,y \in \mathbb{R}}{\forall}\ \big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ *(nierówność trójkąta).*

b) Nierówność ***Cauchy-Buniakowskiego-Schwarza (CBS)****:*

4. $\underset{\substack{x_i, y_i \in \mathbb{R} \\ i=1,2\ldots,n}}{\forall} \; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right).$

Twierdzenie 2. (nierówności Bernoulliego)

5. $\underset{\substack{a>-1 \\ n\in\mathbb{N}_0}}{\forall} \; (1+a)^n \geq 1 + na\,,$

6. $\underset{\substack{a\geq 0 \\ n\in\mathbb{N}}}{\forall} \; (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2\,,$

7. $\underset{\substack{a>-1 \\ n\in\mathbb{N}}}{\forall} \; (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3\,,$

8. $\underset{\substack{a_i\in\mathbb{R},\ a_i>-1 \\ i=1,2\ldots,n}}{\forall} \; (1+a_1)\,(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 1 + (a_1 + a_2 + \cdots a_n).$

Definicja. *Dla dowolnego skończonego ciągu* **liczb dodatnich** $a_1, a_2, \ldots a_n$, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ *, definiujemy następujące średnie tych liczb:*

1. ***średnia arytmetyczna****:* $A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,
2. ***średnia geometryczna****:* $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot\ldots\cdot a_n}$,
3. ***średnia harmoniczna****:* $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$,
4. ***średnia kwadratowa****:* $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$.

Średnie te powiązane są następującymi nierównościami, które mają zastosowania w dowodach wielu ważnych, szczególnych nierówności.

Twierdzenie 3. (nierówności dla średnich)

Dla dowolnych liczb dodatnich $a_k,\ k = 1,2,\dots,n$ *i dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *, prawdziwe są nierówności:*

$$\min_{1\le k\le n}(a_k) \le H_n \le G_n \le A_n \le K_n \le \max_{1\le k\le n}(a_k)\,. \tag{1.6}$$

Znak równości we wszystkich nierównościach ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Powyższa uwaga jest bardzo istotna, bowiem gdy tylko dwie spośród liczb a_k są różne, to w (1.6) mamy nierówności ostre.

Symbole $\min\limits_{1\le k\le n}(a_k)$ $\left(\max\limits_{1\le k\le n}(a_k)\right)$ oznaczają odpowiednio najmniejszą (największą) spośród liczb $a_k,\ k = 1,2,..,n.$

Dowód relacji (1.6) można znaleźć w wielu pozycjach literatury (np. [8]). Dowód wykorzystujący wypukłość funkcji będzie podany w rozdziale VIII.

Uwaga. Nierówności pomiędzy średnimi są bardzo użytecznym narzędziem w konkretnych sytuacjach. W szczególności pozwalają zbadać monotoniczność ciągów oraz wyznaczyć ekstrema globalne funkcji (to znaczy wartość największą i najmniejszą funkcji) i rozstrzygnąć problem dla jakich wartości x są one osiągnięte. Jest to bardzo wygodne, bo nie potrzeba wtedy stosować metod rachunku różniczkowego. Podamy niżej kilka konkretnych przykładów.

Przykłady

1. Wyznaczyć minimalny obwód prostokąta (działki) o powierzchni $1600\ m^2$.

Jeżeli wymiary prostokąta oznaczymy przez x oraz y, to jego obwód jest równy $2x + 2y = 2(x + y)$. Ale pole prostokąta jest równe $xy = 1600$ skąd $y = \frac{1600}{x}$. Nasz problem to: wyznaczenie $\min\limits_{x>0} f(x)$, gdzie $f(x) = x + \frac{1600}{x}$, $x > 0$.

Wykorzystując nierówność $A_2 \geq G_2$ możemy napisać:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{x + \frac{1600}{x}}{2} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1600}{x}} = 2 \cdot 40 = 80\ .$$

Minimum jest osiągnięte gdy składniki są równe, to jest gdy $x = \frac{1600}{x}$, czyli dla $x = 40$ i stąd $y = 40$. Zatem najmniejszy obwód ma kwadrat o boku $40\ m$.

2. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x}{ax^2+b}$ dla $x > 0$, $a, b > 0$.

Możemy napisać $\frac{ax^2+b}{2} \geq \sqrt{ax^2b} = x\sqrt{ab}$ czyli $ax^2 + b \geq 2x\sqrt{ab}$, stąd $f(x) = \frac{x}{ax^2+b} \leq \frac{x}{2x\sqrt{ab}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$, czyli $\max\limits_{x>0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ i jest ono osiągnięte, gdy $ax^2 = b$ to jest dla $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

3. Udowodnić, że $\forall_{\substack{x>0 \\ n\in\mathbb{N}}} \ \frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$.

Jeżeli zapiszemy naszą nierówność w postaci $\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1} \geq x^n$, to stosując do lewej strony nierówność $A_{2n+1} \geq G_{2n+1}$ otrzymamy:

$$L = \frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1} \geq \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n}} =$$

$$= \sqrt[2n+1]{x^{1+2+\cdots+2n}} = \sqrt[2n+1]{x^{\frac{2n(2n+1)}{2}}} = x^n = P\ .$$

Znak równości ma miejsce gdy wszystkie składniki są równe, to jest gdy: $1 = x = x^2 = \cdots = x^{2n+1}$, co zachodzi tylko dla $x = 1$. Zatem nierówność **3.** jest udowodniona.

4. Oto prosty sposób oszacowania funkcji $f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Ponieważ czynniki są nierówne, więc znak nierówności będzie ostry. Mamy:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < [G_n \leq A_n] < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}, \text{ czyli}$$

$$\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}}{\forall} \quad n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Inny dowód (Gaussa) tej nierówności podamy w rozdziale III.

5. Nierówności dla średnich z $n = 3$ są szczególnie przydatne w trójkącie dla pokazania różnych relacji pomiędzy jego elementami.

Podamy oszacowanie pola trójkąta przez jego obwód (tak zwany problem izoperymetryczny), a następnie przez sumę kwadratów długości boków.

Stosując wzór Herona na pole trójkąta S w terminach długości boków a, b, c $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$, otrzymujemy

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq$$

$$\leq \sqrt{p}\left\{\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}^{\,3}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq [G_3 \leq A_3] \leq$$

$$\leq \sqrt{p} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}} = \sqrt{p}\sqrt{\left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3} =$$

$$= \sqrt{p}\,\frac{(\sqrt{p})^3}{\sqrt{27}} = \frac{p^2}{\sqrt{27}} = \frac{(2p)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2 \leq$$

$$\leq [A_3 \leq K_3] = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(a^2+b^2+c^2)}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}} \ , \quad \text{czyli } S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}} \ .$$

Znak równości ma miejsce tylko dla trójkąta równobocznego.

Uwaga. Stosując twierdzenie cosinusów nietrudno udowodnić, że w dowolnym trójkącie ma miejsce równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S \cdot (ctg\,\alpha + ctg\,\beta + ctg\,\gamma) \ .$$

Zatem powyższa nierówność dla pola trójkąta daje nam również informację o nierównościach dla kątów dowolnego trójkąta, mianowicie w dowolnym trójkącie zachodzi nierówność

$$ctg\,\alpha + ctg\,\beta + ctg\,\gamma \geq \sqrt{3} \ ,$$

ze znakiem równości tylko dla trójkąta równobocznego.

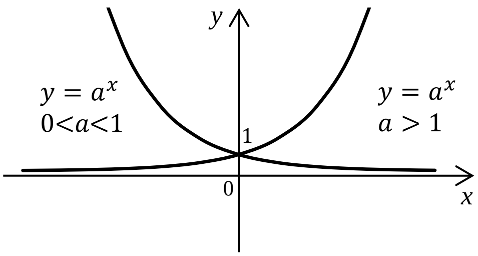
1.3 Funkcja wykładnicza i potęgowa

Dwie funkcje, mające „wzrokowo” podobny kształt i wywodzące się z pojęcia potęgi są bardzo często mylone. Są to funkcje: wykładnicza $y = a^x$ i funkcja potęgowa $y = x^\alpha$.

Funkcja wykładnicza $y = a^x$ jest zdefiniowana dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, przy założeniu, że jej podstawa "a" (stała) jest liczbą dodatnią.

Na przykład: $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = (1.025)^x$, itd.

Jest to (po funkcji liniowej) najważniejsza funkcja nie tylko w matematyce, ale także w naukach stosowanych (ekonomii, chemii, biologii, itp.). Opisuje ona bowiem wiele zjawisk praktycznych (przykłady będą podane w dalszym ciągu).



Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa wykładnicza o kształcie, jak na rysunku obok. Rozważamy dwa przypadki: $a > 1$, $0 < a < 1$.

Przyjmujemy: $1^x = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Fakt, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} \ a^x > 0$, decyduje o jej zastosowaniach.

W funkcji potęgowej $y = x^\alpha$ zmienną jest podstawa, natomiast wykładnik α jest stałą. W zależności od wykładnika α dziedzina funkcji potęgowej zmienia się, na przykład dla $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $D_f = \mathbb{R}$; $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\alpha = -\frac{1}{2}$, $D_f = (0, +\infty)$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Przypadki $\alpha = -1, 1, 2, 3,$ są dla nas najważniejsze.

W przypadku wykładnika wymiernego na przykład $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ lub $\alpha = -\frac{1}{2}$ i ogólnie $\alpha = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, funkcja potęgowa staje się funkcją pierwiastkową, ze względu na definicję pierwiastka.

Mamy bowiem dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $a \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$ i ogólnie

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

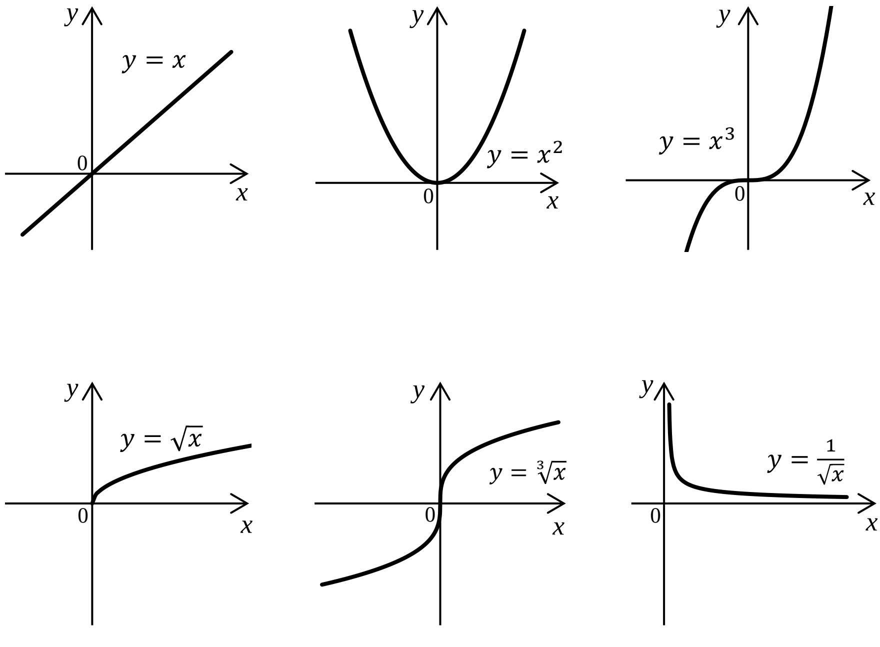
Tak zdefiniowany pierwiastek rozszerza się na wszystkie liczby $a \in \mathbb{R}$, w przypadku n będącego liczbą nieparzystą. Np. $\sqrt[3]{-8} = -2$ bo $(-2)^3 = -8$.

Niżej podajemy najczęściej używane przypadki funkcji potęgowej:

$\alpha = 1: \quad y = x\,, \;\; D_f = \mathbb{R}\,, \qquad \alpha = \frac{1}{2}: \quad y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\,, \;\; D_f = \langle 0, +\infty)\,,$

$\alpha = 2: \quad y = x^2\,, \;\; D_f = \mathbb{R}\,, \qquad \alpha = \frac{1}{3}: \quad y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}\,, \;\; D_f = \mathbb{R}\,,$

$\alpha = 3: \quad y = x^3\,, \;\; D_f = \mathbb{R}\,, \qquad \alpha = -\frac{1}{2}: \quad y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,, D_f = (0, +\infty)\,.$



Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$, potęgę x^{α} , $x > 0$, zdefiniujemy w następnym rozdziale.

1.4 Funkcja homograficzna i jej własności

Jedną z najważniejszych funkcji „podstawowych" jest funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x}\,,\ \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Jej wykresem jest hiperbola, której asymptotami są osie układu współrzędnych. Hiperbola jest krzywą składającą się z dwóch części (gałęzi).

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ pozwalają po prostych przekształceniach podać wykres funkcji homograficznej.

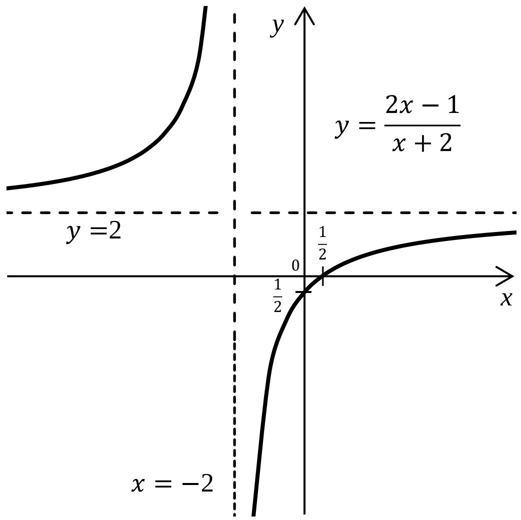
Definicja. *Funkcją* ***homograficzną*** *nazywamy funkcję określoną wzorem*
$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,,\ \ x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}\,,\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0\,.$

Jej wykresem jest hiperbola, której asymptotą pionową jest prosta $x = -\frac{d}{c}$, natomiast asymptotą poziomą prosta $y = \frac{a}{c}$.

Przykład. Niech będzie dana funkcja

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}\,,\ \ D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}\,.$$

Wykresem funkcji jest hiperbola o asymptocie pionowej $x = -2$ i asymptocie poziomej $y = 2$. Asymptoty te dzielą płaszczyznę OXY na cztery części. Aby wybrać właściwe położenie gałęzi hiperboli wyznaczamy dodatkowo miejsce zerowe funkcji $f(x)$ (w naszym przykładzie $x = \frac{1}{2}$) lub punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.



Uwaga. Powyższa funkcja jest przykładem ważnej w ekonomii tak zwanej funkcji Törnquista drugiego rodzaju. Dla $x \geq \frac{1}{2}$ funkcja $f(x)$ może być interpretowana jako zależność popytu (y) od dochodu (x) na tak zwane dobra wyższego rzędu.

1.5 Okresowość oraz parzystość funkcji

Przypomnijmy w tym miejscu, trzy ważne własności funkcji.

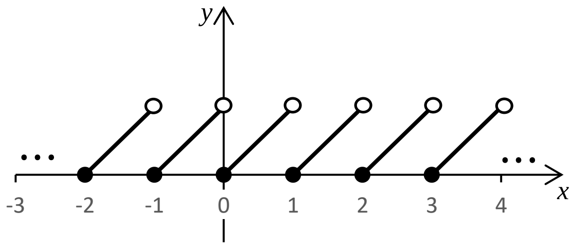
Definicja. *Funkcja f jest funkcją* ***okresową*** *o okresie podstawowym $T > 0$, jeżeli:*

$$\underset{T>0}{\exists} \underset{\substack{x \in D_f \\ x+T \in D_f}}{\forall} f(x+T) = f(x).$$

Wykres funkcji okresowej wystarczy wykonać w przedziale o długości T, gdzie $T > 0$ jest okresem podstawowym.

Przykład

Poniższa funkcja jest przykładem funkcji okresowej o okresie $T = 1$.



Powtarzające się ornamenty architektoniczne w dekoracjach pałaców, zamków, ogrodzeń są pięknym przykładem okresowości.

Jak pamiętamy funkcje trygonometryczne, są funkcjami okresowymi, a okresem podstawowym funkcji $sinus$ i $cosinus$ jest $T = 2\pi$, a funkcji $tangens$ i $cotangens$ $T = \pi$, to znaczy $sin(x + 2\pi) = sinx$; $cos(x + 2\pi) = cosx$; $tg(x + \pi) = tgx$; $ctg(x + \pi) = ctgx$, $x \in D_f$. Zatem wykresy tych funkcji wystarczy wykonać odpowiednio w przedziałach o długości 2π oraz π.

Definicja. *Załóżmy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest symetryczny względem $x = 0$, to znaczy, na przykład $A = (-x_0, x_0)$, $x_0 > 0$, lub $A = (-b, -a) \cup (a, b)$, $0 \leq a < b$, $A = \mathbb{R}$, itp.*

*Funkcja f jest funkcją **parzystą (nieparzystą)** jeżeli:*

$$\underset{x \in A}{\forall} f(-x) = f(x), \quad (f(-x) = -f(x)) .$$

Powyższe wzory mają oczywiste przełożenie na wykresy: wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY, a wykres funkcji nieparzystej względem punktu $(0, 0)$. Zatem w obu przypadkach wystarczy podać wykres funkcji dla $x \geq 0$, natomiast część wykresu dla $x \leq 0$ otrzymamy przez odpowiednie symetrie: względem osi OY (funkcja parzysta), bądź dwie symetrie względem osi OX i OY (funkcja nieparzysta).

Najłatwiej to prześledzić na wykresach funkcji $f(x) = x^2$ i $f(x) = x^3$, co jednocześnie usprawiedliwia nazwę funkcji parzystej i nieparzystej.

Stwierdzić fakt, że dana funkcja jest parzysta czy nieparzysta jest często sprawą natychmiastową, np. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ jest funkcją parzystą, natomiast $g(x) = x + \frac{1}{x}$ jest funkcją nieparzystą. Znajomość symetrii ich wykresów, pozwala je łatwiej analizować, chociaż często sam wykres nie jest oczywisty.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Uwaga. W wielu obliczeniach pojawia się wyrażenie postaci $\sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Pamiętajmy o oczywistym wzorze $\sqrt{x^2} = |x|$.

Zadanie 1. a) Rozwiązać równanie $f(x) = 0$, gdzie:

1) $f(x) = x^3 - 1$; 2) $f(x) = |x^2 - 4|$; 3) $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$;

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; 5) $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$; 6) $f(x) = |x+2| - |x-2|$;

7) $f(x) = |sinx|$; 8) $f(x) = sin|x|$; 9) $f(x) = sinx^2$; 10) $f(x) = sin^2 x$;

11) $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 2$; 12*) $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 1$.

b) Podać przybliżone wykresy powyższych funkcji, wykorzystując wykresy znanych funkcji „podstawowych”.

c) Wykorzystując wykres funkcji f rozwiązać nierówność $f(x) > 0$.

d) Rozwiązać graficznie nierówność $f(x) \leq -3$.

e) Zbadać parzystość (nieparzystość) funkcji f i okresowość funkcji z przykładów 7-10.

Zadanie 2. Wyznaczyć dziedzinę D_f funkcji jeżeli:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$; b) $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{4-x}$; c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$;

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}$; e) $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$; f) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$.

Zadanie 3. Analizując podane niżej wykresy funkcji f odpowiedzieć na pytania, uzasadniając każdą odpowiedź krótkim zdaniem:

a) Jaka jest dziedzina funkcji f ?

b) Jaki jest zbiór wartości f ?

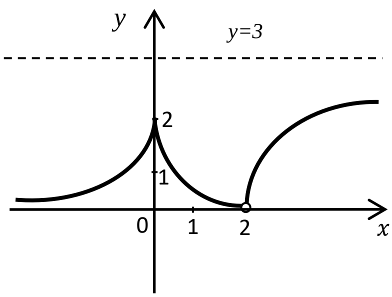
c) Czy funkcja f jest funkcją parzystą ?

d) Gdzie funkcja f rośnie, a gdzie maleje ?

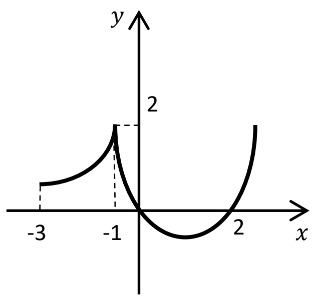
e) Czy funkcja f jest ograniczona w D_f ?

f) Czy wykres funkcji ma asymptoty ?

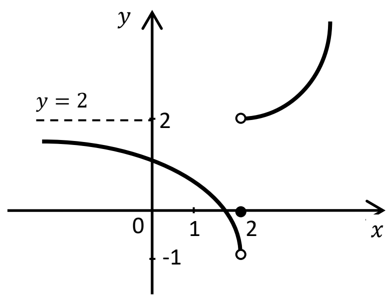
g) Czy istnieje największa i najmniejsza wartość funkcji w D_f ?



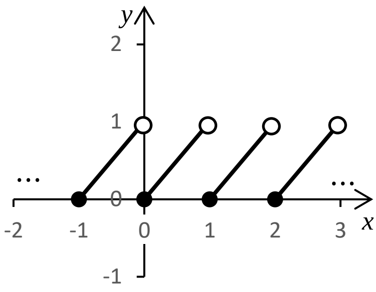
1)



2)



3)



4)

Zadanie 4. Wykonać wykres funkcji $y = f(x)$ danej poniższym wzorem:

a) $y = \begin{cases} x^2 & dla \quad x \in (-\infty, 1\rangle \\ -2x+6 & dla \quad x \in (1,5) \\ \sqrt{x-1} & dla \quad x \in \langle 5, +\infty) \end{cases}$; b) $y = \begin{cases} -x-2 & dla \quad x \in (-\infty, -1) \\ x^3 & dla \quad x \in \langle -1,1\rangle \\ \frac{x}{x-1} & dla \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

Omówić własności powyższych funkcji: dziedzina, zbiór wartości, parzystość, ograniczoność, monotoniczność, wartość największa i najmniejsza, itd.

Zadanie 5. Niech $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$. Podać wykres funkcji $y = f(x)$ oraz wykresy funkcji $g(x) = |f(x)|$ i $h(x) = f(|x|)$. Jaką ogólną własność wykresów funkcji można zauważyć przy konstrukcji wykresów g oraz h?

Zadanie 6. Uzasadnić, że:

$$\underset{a,b\in\mathbb{R}}{\forall} max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)\ ,\ \ min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)\ .$$

Zadanie 7. Podać interpretację graficzną na płaszczyźnie OXY zbioru D określonego warunkiem:

a) $D = \{(x,y):\ x^2 \le y \le 1\}$;

b) $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \ge 2\}$;

c) $D = \{(x,y):\ |y| = \frac{x}{x-1}\}$;

d) $D = \{(x,y):\ |x| + |y| \le 1\}$.

Zadanie 8. Przeprowadzić dyskusje znaku równości w nierówności trójkąta i nierówności **CBS** (***Twierdzenie 1***).

Zadanie 9. Co oznacza przypadek $ad - bc = 0$ dla funkcji homograficznej?

Zadanie 10*. Udowodnić nierówność $G_3 \leq A_3$, to jest

$$\underset{a,b,c>0}{\forall} \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3},$$

z równością tylko dla przypadku $a = b = c$.

Wskazówka. Podstawić w nierówności $G_3 \leq A_3$: $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, a otrzymane wyrażenie po przeniesieniu na jedną stronę rozłożyć na czynniki. Wywnioskować stąd przypadek znaku równości.

Zadanie 11. Stosując odpowiednie nierówności dla średnich, wyznaczyć

$$\max_{x \in \langle -a,a \rangle} f(x) \text{ gdzie } f(x) = |x| \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, \ a > 0 .$$

Zadanie 12*. Wykorzystując odpowiednie relacje dla średnich, udowodnić poniższe nierówności. Wyjaśnić przypadek znaku równości.

a) $\underset{a,b,c>0}{\forall} (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$;

b) $\underset{\substack{a,b>0 \\ a+b=1}}{\forall} \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$; c) $\underset{\substack{a,b>0 \\ n\in\mathbb{N}}}{\forall} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

Zadanie 13. Stosując odpowiednią nierówność dla średnich, do znanej i ważnej nierówności dla kątów dowolnego trójkąta

$$\underset{\substack{\alpha,\beta,\gamma>0 \\ \alpha+\beta+\gamma=\pi}}{\forall} \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8},$$

(którą można otrzymać na przykład z twierdzenia cosinusów) udowodnić, że dla kątów dowolnego trójkąta ma miejsce nierówność

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} \geq 12 .$$

Rozdział II. FUNKCJE „PODSTAWOWE" ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ ORAZ RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z NIMI ZWIĄZANE. CZĘŚĆ II. OGÓLNE WŁASNOŚCI FUNKCJI

2.1 Równania i nierówności algebraiczne

W niniejszym rozdziale rozwiązywanie równań i nierówności ograniczymy do tych najważniejszych, to jest do prostych równań i nierówności algebraicznych, potęgowo-pierwiastkowych, wykładniczych i logarytmicznych.

Definicja. *Równaniem algebraicznym stopnia n-tego nazywamy równanie postaci:*

(2.1) $$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$$a_j\,,\ x \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, n\,,\ n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0\,.$$

Potrafimy rozwiązać efektywnie tylko bardzo specjalne równania, a w szczególności równania liniowe i kwadratowe. Dla równań stopni wyższych podstawową metodą rozwiązywania jest rozkład na czynniki, którego dokonujemy grupując wyrazy podobne, bądź stosując twierdzenie Bézouta.

Przypomnijmy podstawowe fakty.

Definicja. *Liczba $x = a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem równania (2.1) (miejscem zerowym wielomianu $W_n(x)$), jeżeli $W_n(a) = 0$.*

Twierdzenie 1. (Bézouta) *Liczba* $x = a$ *jest miejscem zerowym wielomianu* $W_n(x)$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* $W_n(x)$ *dzieli się przez* $(x - a)$.

Wniosek. Jeżeli więc „zgadniemy” miejsce zerowe $W_n(x)$, to dzieląc $W_n(x)$ przez $(x - a)$ obniżymy stopień wielomianu o jeden i powtarzamy tę procedurę, aż dojdziemy do wielomianu (równania) stopnia drugiego.

A jak zgadnąć pierwiastek równania (2.1)? Metodą prób i błędów jest to zbyt skomplikowane. Jeden z podstawowych i łatwych przypadków to zastosowanie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Jeżeli wielomian* $W_n(x)$ *ma współczynniki całkowite, to całkowitymi pierwiastkami równania (2.1) mogą być tylko podzielniki wyrazu wolnego* a_0.

Przykłady. Rozwiązać równania i nierówności:

1. $W_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Zbiór podzielników wyrazu wolnego ma 6 elementów $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

Sprawdzamy: $W(-1) = -1 - 3 + 4 = 0$, zatem $x = -1$ jest pierwiastkiem równania $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

Dzielimy $W_3(x)$ przez $(x + 1)$:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \, . \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
\;= \quad -4x^2 + 4 \\
\qquad\quad \underline{4x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad = \quad 4x + 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-4x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad = \quad =
\end{array}
$$

Zatem $(x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$ i jest to pierwiastek dwukrotny. Mamy więc: $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 2$.

2. $W_4(x) = x^4 + 4x - 1 = 0$.

Równanie wygląda bardzo prosto, ale nie ma pierwiastków wymiernych, bo $W_4(1) = 4$, $W_4(-1) = -4$.

Próbujemy grupowania jak niżej

$$(x^2 + 1)^2 - 2(x - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left\{x^2 + 1 - \sqrt{2}(x - 1)\right\} \cdot \left\{x^2 + 1 + \sqrt{2}(x - 1)\right\} = 0 \ .$$

Powyższe równanie zapisujemy w postaci dwóch równań kwadratowych:

$$x^2 - \sqrt{2}x + \left(\sqrt{2} + 1\right) = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2} - 1\right) = 0 \ ,$$

z których pierwsze nie ma pierwiastków rzeczywistych, a drugie ma

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2} \approx -2{,}2 \ , \quad x_2 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2} \approx 0{,}8 \ .$$

3. $W_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 > 0$.

$$2(x^3 - 1) - 3x(x - 1) = 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 3x(x - 1) =$$

$$= (x - 1)(2x^2 + 2x + 2 - 3x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - x + 2) > 0 \ .$$

Ponieważ trójmian kwadratowy w nawiasie ma wyróżnik $\Delta < 0$, więc jest dodatni dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Nasze równanie ma zatem tylko jeden pierwiastek rzeczywisty $x = 1$ i stąd $(2x^3 - 3x^2 + 3x - 2) > 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 > 0$, a zatem rozwiązaniem nierówności $W_3(x) > 0$ są liczby $x \in (1, +\infty)$.

Aby rozwiązać nierówność $W_n(x) \geq 0$ rozwiązujemy najpierw równanie $W_n(x) = 0$. Pierwiastki równania wyznaczą przedziały na osi liczbowej. Rozkładamy wielomian $W_n(x)$ na czynniki, jak niżej (twierdzenie 5) i stosujemy tak zwaną siatkę znaków (lub jej uproszczoną wersję tak zwany „chiński mur”). Korzystamy przy tym z następujących trzech twierdzeń.

Twierdzenie 3. *Równanie stopnia n-tego* $W_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *ma co najwyżej* n *pierwiastków rzeczywistych.*

Twierdzenie 4. *Każdy wielomian* $W_n(x), n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *rozkłada się w zbiorze liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.*

Twierdzenie 5. *Jeżeli* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *są miejscami zerowymi* $W_n(x)$ *to wielomian ten zapisze się w postaci:*

$$W_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \ .$$

Przykłady. Rozwiązać równania i nierówności:

a) Równanie Kartezjusza

$$W_4(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0 \ .$$

Zbiór podzielników liczby (-120) jest „obszerny”, więc spróbujemy grupowania wyrazów.

$$x^3(x-4) - 19x(x-4) + 30x - 120 = 0$$

$$(x-4)(x^3 - 19x + 30) = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 = 4 \ \vee \ x^3 - 19x + 30 = 0$$

$$x^3 - 19x + 30 = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30 =$$

$$= x^2(x-3) + 3x(x-3) - 10(x-3) = 0$$

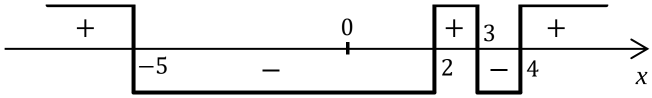
$(x-3)(x^2 + 3x - 10) = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 3$, następnie $x_3 = -5$, $x_4 = 2$.

Czyli zbiorem rozwiązań równania Kartezjusza jest $S = \{-5, 2, 3, 4\}$.

Chcąc rozwiązać nierówność, na przykład $W_4(x) < 0$ zauważamy, że

$$W_4(x) = (x+5)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Ponieważ mamy cztery czynniki to konstrukcję „chińskiego muru” rozpoczynamy od góry.

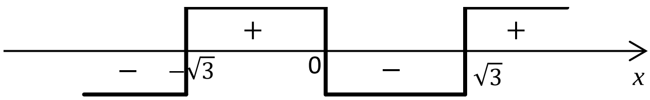


Z rysunku odczytujemy odpowiedź, że:

$$W_4(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-5,2) \cup (3,4).$$

b) $W_3(x) = x^3 - 3x > 0$. Mamy $W_3(x) = \left(x + \sqrt{3}\right)(x - 0)\left(x - \sqrt{3}\right)$.

Mając trzy czynniki liniowe, „chiński mur” konstruujemy od dołu, jak niżej



Stąd odpowiedź: $W_3(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

2.2 Monotoniczność funkcji. Funkcje ograniczone

W rozdziale pierwszym omówiliśmy kilka funkcji „podstawowych” oraz niektóre własności ogólne funkcji (dziedzina D_f, zbiór wartości R_f, parzystość, okresowość). Niżej podamy kilka następnych własności.

W dalszym ciągu będziemy oznaczać $A = (a,b)$, $a < b$.

Definicja. *Niech* $A \subset D_f \subseteq \mathbb{R}$ *. Mówimy, że funkcja* f *o wartościach rzeczywistych jest* ***rosnąca (malejąca)*** *w* A*, gdy:*

$$\underset{x_1,x_2 \in A}{\forall} \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \;\Leftrightarrow\; f \uparrow_A$$

$$\left(\underset{x_1,x_2 \in A}{\forall} \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2) \;\Leftrightarrow\; f \downarrow_A \right) .$$

Ważną jest również ***funkcja stała*** *w A, a mianowicie:*

$$y = f(x) \text{ jest funkcją stałą na } A \iff \underset{x\in A}{\forall} f(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli $y = f(x)$ jest funkcją rosnącą lub malejącą na $A \subset D_f$ to mówimy, że jest funkcją ściśle monotoniczną. W przypadku gdy w powyższych nierównościach dla $f(x)$ mamy nierówności słabe, mówimy o funkcji niemalejącej (nierosnącej) na A.

Przykład

Badanie monotoniczności funkcji f z definicji jest trudne i da się zrobić tylko dla pewnych funkcji. Sprowadza się to do zbadania znaku wyrażenia $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Dla niektórych funkcji można to zrobić efektywnie, na przykład:

1. $f(x) = x^3$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$. W tym celu wystarczy wykazać, że

$$\underset{\substack{x_1,x_2\in\mathbb{R}\\ x_1\neq x_2}}{\forall} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \iff \frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0,$$

co jest oczywiste.

2. $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)-\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)}{x_2-x_1} = 1 + \frac{1}{x_1\cdot x_2} > 0$, zatem funkcja f jest rosnąca w obu przedziałach D_f.

Po wprowadzeniu pojęcia pochodnej funkcji otrzymamy proste narzędzie do badania monotoniczności.

Definicja. *Funkcję f o wartościach rzeczywistych nazywamy* ***ograniczoną*** *na $A \subset D_f$, jeżeli jej zbiór wartości $f(A)$ jest ograniczony, to znaczy istnieją liczby $m, M \in \mathbb{R}$ takie, że $m \le f(x) \le M$ dla każdego $x \in A$.*

Przykłady

1. Mamy $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} -1 \leq sinx \leq 1$ oraz $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} -1 \leq cosx \leq 1$, co oznacza, że obie funkcje trygonometryczne $f(x) = sin\,x$ i $f(x) = cos\,x$ są ograniczone na $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ jest ograniczona z góry i z dołu bo $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} 0 \leq f(x) < 1$.

3. Nierówność $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} a^x > 0$, oznacza, że funkcja wykładnicza jest ograniczona z dołu na $\mathbb{R}$, oczywiście z góry nie jest ograniczona.

2.3 Pojęcie funkcji odwrotnej

Niech A$\subseteq D_f$, B $\subseteq D_f$, $D_f \subset \mathbb{R}$ i niech $f: A \to B$.

W niektórych zagadnieniach musimy być bardziej precyzyjni i określić, czy odwzorowanie zbioru *A* realizowane przez funkcję f jest na cały zbiór B, czy tylko na jego część.

Jeżeli $f(A) = B$ to mówimy, że funkcja f odwzorowuje A **na** B . Na przykład $f(x) = x^2$ odwzorowuje $\mathbb{R}$ **w** $\mathbb{R}$, ale odwzorowuje $\mathbb{R}$ **na** $\langle 0, +\infty)$. Analogicznie $f(x) = x^3$ odwzorowuje $\mathbb{R}$ **na** $\mathbb{R}$.

Również: $f(x) = tg\,x$ odwzorowuje $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **na** $\mathbb{R}$,

$f(x) = sin\,x$ odwzorowuje $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ **na** $\langle -1, 1\rangle$,

$f(x) = a^x$ odwzorowuje $\mathbb{R}$ **na** $(0, +\infty)$.

Mając funkcję $y = f(x)$ oraz jej konkretną wartość $y_0 \in R_f$ pytamy, jaki $x_0 \in D_f$ jej odpowiada.

Na przykład dla funkcji $y = x^2$ wartości $y_0 = 4$ odpowiadają dwie wartości: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Chcąc aby odpowiedniość odwrotna była również funkcją, funkcja wyjściowa f musi spełniać pewien warunek.

Definicja. *Mówimy, że funkcja f jest funkcją **różnowartościową** na $A \subset D_f$, jeżeli:*

$$\underset{x_1,x_2 \in A}{\forall} \quad x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2) \;\; (\Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1) \, .$$

Uwaga. Oczywiście, zgodnie z definicjami monotoniczności i różnowartościowości, warunkiem wystarczającym na różnowartościowość funkcji f na zbiorze $A \subset D_f$ jest jej ścisła monotoniczność.

Na przykład $f(x) = sin\, x$ jest ściśle rosnąca na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, więc jest różnowartościowa na tym przedziale. Funkcja $f(x) = x^2$ jest różnowartościowa na każdym z przedziałów $(-\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty)$ oddzielnie.

Definicja. *Niech $f: A \xrightarrow{na} B$ $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ będzie różnowartościowa na zbiorze A (czyli $f(A) = B$) . Wtedy funkcję $g: B \to A$, nazywamy funkcją odwrotną do f i piszemy $g = f^{-1}$.*

Czyli $x = g(y) = f^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; y = f(x),\; x \in A,\; y \in B$.

Wniosek. Praktyczne wyznaczenie funkcji odwrotnej f^{-1} sprowadza się do wyznaczenia z równania $y = f(x)$, zmiennej x jako funkcji zmiennej y.

Przykłady

1. $f\colon y = 2x - 1$, $A = \mathbb{R}$, $f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

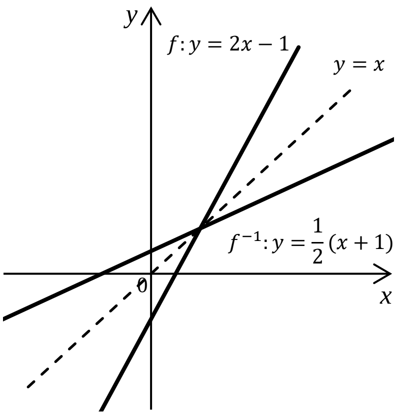
2. $f\colon y = x^2$, a) $A = \langle 0, +\infty)$, $f^{-1}\colon y = \sqrt{x}$;

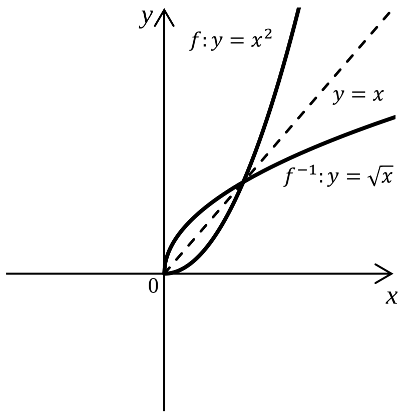
b) $A = (-\infty, 0\rangle$, $f^{-1}\colon y = -\sqrt{x}$.

3. $f\colon y = x - \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ponieważ funkcja f rośnie w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$, więc wyliczając x z powyższej równości otrzymamy dwa rozwiązania:

$x = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 + 4}\right) \in (0, +\infty)$, $x = \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2 + 4}\right) \in (-\infty, 0)$.





Ponieważ wzór na f i f^{-1} wynikający z równania $y = f(x)$ jest formalnie taki sam, więc zamieniamy litery x na y w funkcji odwrotnej (aby miała ona postać $y = g(x)$, $g = f^{-1}$) .

W związku z tą „zamianą liter” otrzymujemy bardzo ważną własność wykresu f^{-1} , mianowicie wykres funkcji f^{-1} jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.

2.4 Funkcja wykładnicza o podstawie e. Logarytm naturalny

W szkole średniej rozważa się funkcję wykładniczą o podstawie $a > 0$:

$$f\colon\ y = a^x\ ,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ x \in \mathbb{R}\ ,$$

do której funkcją odwrotną jest funkcja logarytmiczna:

$$f^{-1}\colon\ y = log_a x \ \ \Leftrightarrow\ \ x = a^y,\ a > 0,\ a \neq 1\ .$$

Celem uproszczenia rachunków w matematyce wyższej, rozważa się funkcję wykładniczą $y = e^x$ o podstawie e, gdzie e jest stałą zdefiniowaną wzorem

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\ \ldots\ .$$

(Powyższy ciąg będzie badany w następnych rozdziałach).

Funkcję do niej odwrotną, logarytm o podstawie e, nazywa się logarytmem naturalnym. Zapisujemy

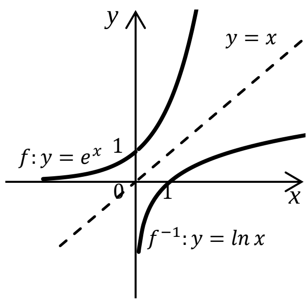
$$y = log_e x = ln\, x \ \ \Leftrightarrow\ \ x = e^y.$$

W związku z powyższym, wykresy obu tych funkcji są jak niżej, a znane wzory dla funkcji wykładniczej i logarytmu pozostają bez zmiany, na przykład:

$$e^0 = 1\ ,\quad ln\, 1 = 0\ ,\quad ln\, e = 1\ ,\quad ln\, a + ln\, b = ln(ab)\ ,$$

$$ln\, a - ln\, b = ln\frac{a}{b}\ ,\ a, b > 0\ .$$

Wykresy funkcji $y = ln\,x$ i $y = e^x$ mają postać jak niżej.



Definicja. *Niech* $x > 0$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Funkcję potęgową o wykładniku rzeczywistym α *definiujemy wzorem:*

(2.2)
$$x^{\alpha} = e^{\alpha lnx} \ .$$

Na przykład: $x^x = e^{xlnx}$, $x^{sinx} = e^{sinx \cdot lnx}$, $\left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \cdot ln\left(\frac{sinx}{x}\right)}$.

Przykłady. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $2^{x^2-x} \leq 1$; **b)** $e^{x^2+1} = 2$; **c)** $e^{x^2-x} \geq e$;

d) $ln(3x^2 - 1) = 3$; **e)** $ln\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$; **f)** $ln\,x = \frac{3}{2}$.

Odnośnie przykładów **a)** i **e)** mamy:

$$2^{x^2-x} \leq 1 = 2^0 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (0{,}1) \ ,$$

$$ln\sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \leq e \ .$$

2.5 Funkcje cyklometryczne

W niniejszym paragrafie omówimy funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych, które nazywają się funkcjami cyklometrycznymi.

Znając fakt, że $f \uparrow_{A\subset \mathrm{D_f}}$ lub $f \downarrow_{A\subset \mathrm{D_f}}$ i $f\colon A \xrightarrow{na} B$, wiemy, że istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}\colon B \to A$.

Dla funkcji $y = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, ale jest ona monotoniczna na różnych przedziałach, na przykład $y = \sin x \uparrow$ dla $x \in A = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $y = \sin x \downarrow$ dla $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle$ itd. Przyjęto umownie, że

Definicja. *Funkcję odwrotną do funkcji* $y = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ *nazywamy* $arcsin$ *(jeden wyraz) (czytamy arkus sinus). Czyli mamy:*

$$f\colon\ y = \sin x \ ; \qquad\qquad f^{-1};\ y = \arcsin x \ ;$$
$$f\colon\ \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \langle -1,1 \rangle; \qquad f^{-1};\ \langle -1,1 \rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \ .$$

Zatem dziedziną funkcji $y = \arcsin x$ jest przedział $\langle -1,1 \rangle$.

Analogicznie definiujemy pozostałe funkcje cyklometryczne (to jest odwrotne do cos, tg, ctg).

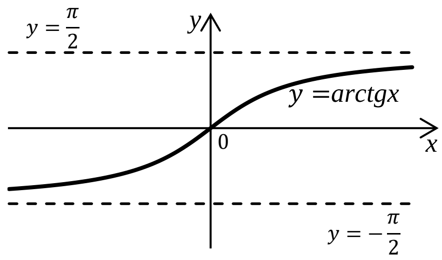
Definicja.

$$f\colon\ y = \cos x \ ; \qquad\qquad f^{-1}\colon\ y = \arccos x \ ;$$
$$f\colon\ \langle 0, \pi \rangle \to \langle -1,1 \rangle; \qquad f^{-1}\colon\ \langle -1,1 \rangle \to \langle 0, \pi \rangle \ ;$$

$$f\colon\ y = tg\, x \ ; \qquad\qquad f^{-1}:\ y = arctg\, x \ ;$$
$$f\colon\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}; \qquad f^{-1}\colon\ \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ ;$$

$$f\colon\ y = ctg\, x \ ; \qquad\qquad f^{-1}:\ y = arcctg\, x \ ;$$
$$f\colon\ (0, \pi) \to \mathbb{R} \ ; \qquad f^{-1}\colon\ \mathbb{R} \to (0, \pi) \ .$$

Uwaga 1. Najczęściej używaną funkcją cyklometryczną jest funkcja $f(x) = arctg\,x\,,\; x \in \mathbb{R}$, która jest funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = tg\,x\,,\;\; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Wynika stąd jej dziedzina, nieparzystość, ograniczoność, istnienie asymptot. Wykres funkcji $f(x) = arctg\,x\,,\; x \in \mathbb{R}$, jest przedstawiony na rysunku niżej.



Uwaga 2. Dla funkcji cyklometrycznych istnieje wiele wzorów, które wynikają z odpowiednich wzorów trygonometrycznych, na przykład:
$arcsin\,x + arccos\,x = \frac{\pi}{2}\,,\; x \in \langle -1,1 \rangle\,,\; arctg\,x + arcctg\,x = \frac{\pi}{2}\,,\; x \in \mathbb{R}.$

2.6 Operacje arytmetyczne na funkcjach. Funkcje złożone

Załóżmy, że mamy dwie funkcje $y = f(x),\; y = g(x)$, o wspólnej dziedzinie, to jest $D_f = D_g$.

Możemy dla nich zdefiniować sumę, różnicę, iloczyn i iloraz (gdy ma sens) wzorami: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)\,,\; (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\,,$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,,\;\; g(x) \neq 0,\;\; x \in D_f.$

Jest to metoda na tworzenie nowych funkcji, które często potrafią być już bardzo skomplikowane.

Na przykład, jeżeli $f(x) = x^2$, $g(x) = sin\,x$, $x \in \mathbb{R}$, to:

$f(x) \pm g(x) = x^2 \pm sin\,x$, $f(x) \cdot g(x) = x^2\, sin\,x$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{sin\,x}$.

Bardzo ważną metodą tworzenia nowych funkcji jest podstawianie wzoru na funkcję f do wzoru na funkcję g (o ile ma to sens). Operację taką nazywamy składaniem funkcji, a wynik funkcją złożoną.

Na przykład dla $f(x) = x^2$, $g(x) = sinx$, $x \in \mathbb{R}$, możemy utworzyć dwie funkcje złożone: $f[g(x)] = (sin\,x)^2 = sin^2\,x$ i $g[f(x)] = sin\,x^2$.

Oczywiście złożenie nie zawsze ma sens, a może nawet nie istnieć.
Na przykład $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $g(x) = -1 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$,

$f[g(x)]$ nie istnieje , $g[f(x)] = -1 - x$.

Definicja. *Niech $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami i przy tym $B \subset C$.*

Niech $f: A \to B$, $g: C \to D$. ***Złożeniem funkcji g i f*** *nazywamy nową funkcję $\Phi = g \circ f: A \to D$, określoną wzorem*

$$\Phi(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] \,,\; x \in A \,.$$

Uwaga. Oczywiście własności funkcji „składowych” g i f mają wpływ na własności funkcji złożonej, ale każdy przykład należy analizować oddzielnie. Na przykład dla $f(x) = -x^2$, $g(x) = e^x$, mamy $\Phi(x) = g[f(x)] = e^{-x^2}$ i jest to bardzo ważna funkcja w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce. Funkcja $g(x)$ jest rosnąca, a $\Phi(x)$ już nie; $f(x)$ jest nieograniczona, natomiast funkcja $\Phi(x)$ jest funkcją ograniczoną. Po prostu, pewne własności dziedziczą się, a inne nie.

Definicja. *Wszystkie funkcje, które powstają z funkcji „podstawowych” przez operacje arytmetyczne oraz operację złożenia (również wielokrotną) nazywamy* ***funkcjami elementarnymi****.*

Istnieją funkcje nieelementarne (również bardzo ważne w zastosowaniach), ale nie będą one tematem naszych rozważań.

2.7 Funkcje $sgn\, x$ i $[x]$

W matematyce celem krótkiego zapisu wzorów wprowadza się funkcje, które są bardzo proste, ale ich zrozumienie na początku sprawia pewne kłopoty (taką funkcją jest na przykład $f(x) = |x|$).

Definicja. a) *Funkcja $f(x) = sgnx$ (czytamy* ***signum x****) jest zdefiniowana wzorem:*

$$sgn\, x = \begin{cases} -1 & dla\ x < 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \\ 1 & dla\ x > 0 \end{cases}.$$

Jak więc widzimy $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{-1,\ 0,\ 1\}$.

b) *Funkcja $f(x) = [x]$ (**część całkowita** liczby $x \in \mathbb{R}$).*

Każdą liczbę rzeczywistą x możemy zapisać jako sumę liczby całkowitej $[x]$ i części ułamkowej $\{x\}$, o której zakładamy, że $\{x\} \in \langle 0, 1)$. Czyli mamy: $x = [x] + \{x\}$. Zatem część całkowita liczby $x \in \mathbb{R}$, którą oznaczamy przez $[x]$ jest to największa liczba całkowita nie przekraczająca x, to znaczy: $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x - 1 < [x] \le x \Leftrightarrow [x] \le x < [x] + 1$.

Stąd możemy napisać wzór „jawny” dla $[x]$:

$$[x] = \begin{cases} 0 & gdy\ \ x \in \langle 0, 1) \\ 1 & gdy\ \ x \in \langle 1, 2) \\ \vdots & \\ -1 & gdy\ \ x \in \langle -1, 0) \\ \vdots & \end{cases}.$$

Zatem wykresem funkcji $f(x) = [x]$ są odcinki funkcji stałej (schodkowej), której wartości zmieniają się dla $x = \pm k,\ \ k \in \mathbb{N}_0$.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Zadanie 1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, b) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-3}$, c) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

Zadanie 2. Uzasadnić, które z podanych funkcji są ograniczone, a które nie?

a) $f(x) = e^{\sin x}$, b) $f(x) = e^{-x}$, c) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, $x \geq 1$, d)$f(x) = \sin x^2$.

Zadanie 3. Wyznaczyć wartość największą i najmniejszą funkcji, $x \in D_f$ wykorzystując własności znanych funkcji „podstawowych”.

a) $f(x) = e^{-x^2}$, b) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$, c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Zadanie 4. Uzasadnić, które z poniższych funkcji są okresowe, a które nie:

a) $f(x) = \sin 2x$, b) $f(x) = \cos^2 2x$, c) $f(x) = tg\sqrt{x}$.

Wskazówka. Przeanalizować położenie zer funkcji $f(x)$.

Zadanie 5. a) Stosując znane wzory trygonometryczne, wykazać, że: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $\sin(arctg\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Obliczyć: $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$, $arctg(-1)$, $arcctg\,\sqrt{3}$.

Zadanie 6. Dla poniższych par funkcji f i g utworzyć funkcje złożone (o ile istnieją): a) $\Phi_1(x) = f[g(x)]$, b) $\Phi_2(x) = g[f(x)]$.

Przeanalizować własności funkcji Φ_1 i Φ_2 (monotoniczność, okresowość, parzystość, itd.) w zależności od własności funkcji f i g.

a) $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = x^2 + 1$, b) $f(x) = \ln x$, $g(x) = 1 + e^{-x}$.

Zadanie 7. Wykreślić funkcje

a) $f(x) = \left[\sqrt{x}\right]$, b) $f(x) = sgn(1 + x - [x])$.

Rozdział III. DWUMIAN NEWTONA. INDUKCJA MATEMATYCZNA

3.1 Dwumian Newtona

Uogólnieniem znanych wzorów $(a+b)^2,\ (a+b)^3,\ a,b \in \mathbb{R}$, na dowolną potęgę naturalną jest tak zwany **dwumian Newtona**.

Do jego zapisu niezbędne są następujące pojęcia.

Definicja. *Niech* $n \in \mathbb{N}$. *Funkcję (ciąg) określoną wzorem* $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ *nazywamy **silnią**.*

Mamy: $1! = 1$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, itd.

Z definicji mamy oczywisty wzór $n! = (n-1)! \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$.

Wynika z niego, że można przyjąć $0! = 1$, bo podstawiając $n = 1$ mamy $L = 1! = 1$, $P = 0! \cdot 1 = 0!$.

Jest to bardzo szybko rosnący ciąg, bo na przykład $10! = 3\,628\,800$.

Funkcja $f(n) = n!$ jest elementarna w swojej definicji, ale jej wielkość jest niełatwa do oszacowania dla dużych $n \in \mathbb{N}$.

Oto kilka oszacowań dla $n!$, których dowody podamy na stronach 53-54.

1. $\underset{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 3}}{\forall} \quad n^{\frac{n}{2}} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (Gauss) ,

2. $\underset{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 6}}{\forall} \quad \left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$,

3. $\underset{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 3}}{\forall} \quad 2^{n-1} < n! < 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

Definicja. *Niech* $n \geq k \geq 0$, $n, k \in \mathbb{N}_0$. ***Symbol Newtona*** $\binom{n}{k}$ *definiujemy wzorem:*

(3.1)
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Mamy na przykład:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n , \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} , \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} .$$

Wprost z powyższej definicji możemy zauważyć, że:

(3.2)
$$(*) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} , \ n \geq k , \ n, k \in \mathbb{N}_0 ; \ skąd \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 ,$$
$$(**) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} , n \geq k+1 , n, k \in \mathbb{N} .$$

Gdy $n < k$, to przyjmujemy $\binom{n}{k} = 0$.

Wykorzystując powyższe wzory można indukcyjnie udowodnić (Zadanie 3):

Twierdzenie 1. (Dwumian Newtona)

(3.3)
$$\forall_{\substack{a,b \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N}}} \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$
$$= \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0 .$$

Uwaga. Jak widzimy z powyższego, dwumian Newtona możemy napisać bardzo szybko gdy policzymy $\binom{n}{k}$. Dla małych n dzięki wzorowi (**) z (3.2) współczynniki $\binom{n}{k}$ liczymy łatwo z tak zwanego trójkąta Pascala:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \leftarrow (a+b)^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \leftarrow (a+b)^5 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Na przykład $(a+b)^5 = b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5 =$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Uwaga. Fakt, że dwumian Newtona jest prawdziwy dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, implikuje, że dobór konkretnych a, b daje różne wzory na współczynniki $\binom{n}{k}$. Na przykład kładąc $a = b = 1$, otrzymujemy:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n .$$

Podstawiając $a = 1,\ b = -1$ otrzymamy:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 ,$$

lub

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots ,$$

czyli suma współczynników o „numerach parzystych”, jest taka sama jak suma współczynników o „numerach nieparzystych”.

Uwaga. Zacytujmy w tym miejscu ważną równość zbliżoną w swojej idei do dwumianu Newtona, której dowód otrzymamy przez wykonanie mnożenia i redukcję wyrazów podobnych.

(3.4)
$$\underset{\substack{a,b\in\mathbb{R} \\ n\in\mathbb{N}}}{\forall} \quad a^n - b^n =$$
$$= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) .$$

Uwaga. Analogicznie jak oszacowanie silni, nieoczywistym jest oszacowanie symbolu $\binom{n}{k}$. Podamy niżej elementarne, ale wcale nie oczywiste oszacowania.

Przykłady

1. $\underset{\substack{n,k\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}{\forall} \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$.

Dowód. Skorzystamy z definicji symbolu Newtona, prostych obserwacji wynikających z nierówności $n \geq k \geq 1$ oraz odpowiedniego zapisu silni. Mamy:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{k-j} \leq n^k , \qquad \text{bo} \qquad \frac{n-j}{k-j} \leq n ,$$

dla $j = 0,1,\ldots,k-1$. Analogicznie $\frac{n-j}{k-j} \geq \frac{n}{k}$, dla $0 \leq j \leq k-1$.

2. $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq k\geq 2}}{\forall} \binom{n}{k} < 2\left(\frac{n}{2}\right)^k$.

3. $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}}{\forall} 2^{2n-1}\cdot\frac{1}{n} < \binom{2n}{n} < 2^{2n-1}$.

3.2 Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna (zupełna) jest twierdzeniem dotyczącym własności liczb naturalnych. Stosuje się ją do dowodu równości, nierówności, podzielności liczb, własności ciągów, itp., które są rozważane dla $n \in \mathbb{N}$.

Podamy niżej kilka zastosowań zasady indukcji matematycznej.

Następujące sformułowanie jest jednym z najprostszych i ponadto łatwym w stosowaniu.

Twierdzenie 2. (Zasada indukcji matematycznej)

Niech każdej liczbie naturalnej n przyporządkowane będzie zdanie logiczne $T(n)$. Jeżeli:

$$(\mathrm{Z}) \quad \begin{cases} 1^\circ \quad T(1) \text{ jest zdaniem prawdziwym} \\ 2^\circ \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \text{ z prawdziwości } T(n) \text{ wynika prawdziwość } T(n+1)\,, \end{cases}$$

to $(T)\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ T(n)$ *jest zdaniem prawdziwym.*

Uwaga. W konkretnych zadaniach często zamiast $T(1)$ startujemy z $T(n_0)$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$ jest określoną liczbą.

Przykłady. Udowodnić, że:

1. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}\,,\ q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,$

2. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$

3. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}$ liczba (n^3+11n) dzieli się przez 6 .

Dowód 3.

Fakt podzielności przez 6 możemy zapisać następująco: $n^3+11n = 6s$, $s \in \mathbb{N}$ $\big(T(n)\big)$. Wtedy $T(n+1)$ ma postać: $(n+1)^3+11(n+1) = 6p$, $p \in \mathbb{N}$. Mamy: $(n+1)^3+11(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+11n+11 =$

$$= (n^3+11n)+(3n^2+3n+12) = 6s+3(n^2+n+4) =$$

$$= 6s+3\underbrace{\{n(n+1)+4\}}_{liczba\ parzysta} = 6s+6m = 6(s+m) = 6p\,,\ p \in \mathbb{N}\,.$$

4. Udowodnić, że $\underset{\substack{n,k\in\mathbb{N}\\ n\geq k}}{\forall}$ współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną.

Dowód 4. Mamy na mocy definicji:

$$\underset{\substack{n\geq k\geq 0\\ n,k\in\mathbb{N}_0}}{\forall} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k} = 0\,, \text{ gdy } n < k.$$

Przeprowadzimy prosty dowód indukcyjny względem n. Gdy $n = 0$ (wtedy również będzie $k = 0$) mamy

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\cdot 0!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1 \in \mathbb{N}\,.$$

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i $k = 0, 1, \dots, n$ $(n \geq k)$.

Gdy $k = 0$ to $\binom{n+1}{0} = \frac{(n+1)!}{0!\cdot(n+1)!} = 1$, natomiast gdy $1 \leq k \leq n$, to na mocy wzoru (3.2)(**) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$ suma liczb naturalnych, więc jest liczbą naturalną.

A więc $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k=0,1,\dots,n}}{\forall} \binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną.

Uwaga. Stwierdzenie, że $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną ma interesujące konsekwencje. Oto dwie z nich.

Wniosek 1. Iloczyn dowolnych k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez $k!$, $k \in \mathbb{N}$. Mamy oczywistą równość dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)} = \binom{n+k}{k} \in \mathbb{N}\,,$$

zatem na mocy **4.** lewa strona powyższej równości jest liczbą naturalną.

Wniosek 2. Ważną rolę w matematyce dyskretnej odgrywają liczby Catalana $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Aby uzasadnić, że C_n jest liczbą naturalną (co nie jest oczywiste wobec dzielenia przez $(n+1)$), zauważmy tożsamość:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = 4\binom{2n-1}{n} - \binom{2n+1}{n},$$

skąd wynika na mocy **4.**, że istotnie $C_n \in \mathbb{N}$.

5. $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 3}}{\forall} \quad 2^n > 2n+1$,

6. $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}}{\forall} \quad 2\sqrt{n+1} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$.

Dowód 6.

Udowodnimy lewą stronę nierówności. Mamy $T(2)$: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2 \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} + 1 > 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; 3\sqrt{2} + 1 > 2\sqrt{6},$$

skąd po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy nierówność prawdziwą.

Dla prawdziwości $T(n+1)$: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} - 2$ mamy wykazać nierówność $2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} - 2$, to jest $2(n+1) + 1 > 2\sqrt{(n+2)(n+1)} \Leftrightarrow (2n+3)^2 > 4(n+2)(n+1)$, która jest oczywiście prawdziwa.

Analogicznie dowodzimy prawą stronę nierówności **6.**

7. Nierówności Bernoulliego i ich zastosowania

(A) $\underset{\substack{a>-1\\ n\in\mathbb{N}_0}}{\forall}\ (1+a)^n \geq 1+na$.

Dowód **(A)**. $T(0)$ daje równość;

dla $T(1)$: $1+a=1+a$, też mamy równość;

dla $T(2)$: $(1+a)^2 \geq 1+2a \;\Leftrightarrow\; 1+2a+a^2 \geq 1+2a \;\Leftrightarrow\; a^2 \geq 0$,

czyli prawda. $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ oznacza $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

Mamy

$$L=(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq$$
$$\geq 1+(n+1)a = P\ .$$

(B) $\underset{\substack{a\geq 0\\ n\in\mathbb{N}}}{\forall}\ (1+a)^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$.

Uwaga. Powyższa nierówność może być dowodzona indukcyjnie, ale wynika ona natychmiast z dwumianu Newtona dla $(1+a)^n$, bo są to trzy jego pierwsze wyrazy. Można w niej nawet wziąć dowolne k wyrazów dwumianu $(1+a)^n$, $(1 \leq k < n)$ lub jeden z nich, bo $a>0$.

(C) $\underset{\substack{a>-1\\ n\in\mathbb{N}_0\\ n\geq 2}}{\forall}\ (1+a)^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3$.

Dowód indukcyjny powyższej nierówności pozostawiamy Czytelnikowi.

Poniżej przedstawimy dwa zastosowania nierówności Bernoulliego.

Jeżeli podstawimy w **(A)** : $a=\frac{1}{n}$, $n\in N$ mamy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

Jeżeli podstawimy w **(C)** : $a=-\frac{1}{n+1}$, $n \geq 2$ mamy :

$$\left\{1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right\}^n \geq 1-\frac{n}{n+1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{1}{(n+1)^3}=$$

$$=\frac{2n^3+9n^2+7n+6}{6(n+1)^3}>\frac{2n^3+6n^2+6n+2}{6(n+1)^3}=\frac{2(n+1)^3}{6(n+1)^3}=\frac{1}{3}.$$

Ale $\left\{1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right\}^n=\left\{\frac{n+1-1}{n+1}\right\}^n=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}^n=\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$,

skąd otrzymujemy bardzo ważną nierówność

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\quad 2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\,.$$

Na stronie 45 zacytowaliśmy trzy nierówności dla $n!$ Podamy teraz trikowy (nie indukcyjny) dowód oszacowania silni przez Gaussa.

***Dowód* 1.** (str. 45). Niech $n\in\mathbb{N}$. Zapiszmy funkcję $f(n)=n!$ jak niżej

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$,

$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Mnożąc przez siebie powyższe równości i grupując parami otrzymamy:

$$(n!)^2=(1\cdot n)\big(2\cdot(n-1)\big)\big(3\cdot(n-2)\big)\cdot\ldots\cdot[k\cdot(n-k+1)]\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot((n-2)\cdot 3)((n-1)\cdot 2)(n\cdot 1)\,.$$

Każdy czynnik ma postać trójmianu kwadratowego względem k, $[k\cdot(n-k+1)]$, $k=1,2,\ldots,n$. Oznaczając $g(k)=[k\cdot(n-k+1)]$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, otrzymujemy stąd oczywiste relacje:

$$g(0)=0\,,\qquad g(n+1)=0\,,\qquad g(1)=n=g(n)\,,$$

$$max\, g(k)=g(k_0)\,,\ \ k_0=\frac{0+(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}\,.$$

Stąd $n\leq g(k)\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ czyli $n^n\leq(n!)^2<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$, skąd wynikają nierówności **1.** ze strony 45.

***Dowód* 2.** (str. 45). Dla $n = 6$ mamy: $\left(\frac{6}{2}\right)^6 = 3^6 = 729$, $\left(\frac{6}{3}\right)^6 = 64$, $6! = 720$, więc $T(6): 64 < 6! < 729$ jest nierównością prawdziwą.

Aby udowodnić nierówność $T(n) \to T(n+1),\ n > 6$, to jest:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n \ \Rightarrow\ \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} < (n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

wykorzystamy nierówność $2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Zapiszmy powyższą nierówność w postaci $2 \le \frac{(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^{\mathrm{n}}} < 3$ i napiszmy oczywisty ciąg nierówności oraz wykorzystajmy $T(n)$:

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{3}\right)\left(\frac{n+1}{3}\right)^n = \left(\frac{n+1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{n+1}{3} \cdot n! \cdot 3 = (n+1)!\,.$$

Analogicznie

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \ge \frac{n+1}{2} \cdot n! \cdot 2 = (n+1)!\,.$$

Zatem dowód nierówności jest zakończony.

8. Na zakończenie udowodnimy indukcyjnie ważny wzór dla ciągu będącego rekurencją liniową rzędu pierwszego **o stałych współczynnikach**.

Twierdzenie 3. *Rozwiązanie równania*

(3.5) $$x_n = a \cdot x_{n-1} + b\ , n \in \mathbb{N},\ \ x_0, a, b \in \mathbb{R}\ \ (\textit{stałe dane}),$$

dane jest wzorem

(3.6) $$x_n = x^* + (x_0 - x^*)a^n\ ,\ x^* = \frac{b}{1-a}\ , n \in \mathbb{N}\ ,\ a \neq 1\ .$$

Gdy $a = 1$ *to* x_n *jest ciągiem arytmetycznym i mamy* $x_n = x_0 + nb$.

Uwaga 1. Ciąg (3.5) zawiera trzy podstawowe znane ciągi: ciąg stały ($a = 0$), ciąg arytmetyczny ($a = 1$) i ciąg geometryczny ($b = 0$).

Uwaga 2. Liczba x^* jest to punkt stały odwzorowania liniowego $x \to ax + b$. W ekonomii x^* nazywa się rozwiązaniem równania (3.5) niezależnym od czasu.

Dowód. Mamy: $x_1 = ax_0 + b = x^* + (x_0 - x^*)a$. Również dla $n = 2$,

$$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2 x_0 + ab + b =$$
$$= a^2 x_0 - a^2 x^* + a^2 x^* + ab + b =$$
$$= \frac{b(a^2+1-a^2)}{1-a} + a^2(x_0 - x^*) = x^* + (x_0 - x^*)a^2 .$$

Załóżmy teraz, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ ma miejsce wzór:

$$x_n = x^* + (x_0 - x^*)a^n .$$

Wtedy $x_{n+1} = ax_n + b = a[x^* + (x_0 - x^*)a^n] + b =$

$$= (ax^* + b) + (x_0 - x^*)a^{n+1} = x^* + (x_0 - x^*)a^{n+1} .$$

Zatem udowodniliśmy na mocy zasady indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozwiązanie równania $x_n = a \cdot x_{n-1} + b$ dane jest wzorem: $x_n = x^* + (x_0 - x^*)a^n$, $x^* = \frac{b}{1-a}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$.

Przykład. W tak zwanym modelu pajęczynowym popyt (D_t) i podaż (S_t) , $t \in \mathbb{N}$ na pewne dobro dane są wzorami:

$$D_t = 22 - 3P_t , \quad S_t = -2 + P_{t-1} ,$$

gdzie P_t oznacza cenę w okresie $t \in \mathbb{N}$ i $P_0 = 5{,}5$.

Zakładając równowagę $D_t = S_t$ wyznaczyć cenę P_t .

Rozwiązanie. Równowaga $D_t = S_t$ implikuje, że równanie na P_t ma postać

$$P_t = \left(-\frac{1}{3}\right) P_{t-1} + 8 .$$

Wykorzystując oznaczenia z twierdzenia 3, otrzymujemy $P^* = 6$ i ostatecznie $P_t = 6 - 0{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t$.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Uwaga. W dalszym ciągu używać będziemy wygodne oznaczenia dla tak zwanej podwójnej silni, mianowicie dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy ($0!! = 1!! = 1$):

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n)\ ;\ (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)\ .$$

Zadanie 1. Podać wyraz zawierający potęgę x^4 w dwumianie $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^9$.

Zadanie 2. Podać wyraz nie zawierający x w dwumianie $\left(x^5 + \frac{1}{x^{20}}\right)^{1000}$.

Zadanie 3. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić wzór na dwumian Newtona (wzór (3.3)).

Zadanie 4. Podać wzory na sumę n - kolejnych wyrazów ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, (a_1 - dane), arytmetycznego (A) i geometrycznego (G), stosując zasadę indukcji matematycznej lub pewne elementarne rozważania:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} \quad \text{(A)}\ ; \qquad S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}\ ,\ q \neq 1 \quad \text{(G)}\ .$$

Kolejne zadanie pokazuje jak z dwumianu Newtona przez odpowiedni dobór a i b można uzyskać interesujące wzory dla współczynników $\binom{n}{k}$.

Zadanie 5. Korzystając tylko z dwumianu Newtona oraz własności współczynników $\binom{n}{k}$ udowodnić wzory (nie stosując indukcji matematycznej):

a) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$;

b)* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n = \binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n$;

Wskazówka. Obliczyć $a_n - a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, stosując „odpowiedni" dwumian Newtona, a następnie zsumować różnice $(a_n - a_{n-1})$. Ciąg

(3.7) $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\ , \ \ n \in \mathbb{N}\ ,$$

jest to tak zwany **ciąg harmoniczny**, który odgrywa ważną rolę w wielu zagadnieniach matematyki wyższej.

c) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

Wskazówka. Porównać współczynniki przy x^n w wielomianach:
$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6. Udowodnić indukcyjnie:

a) $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}}{\forall}\quad 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} cos(2kt) = \frac{sin(2n-1)t}{sin\, t}$;

b) $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}}{\forall}\quad 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k cos(2kt) = (-1)^{n-1}\frac{cos(2n-1)t}{cos\, t}$.

Podamy dowód drugiej tożsamości. Oczywista równość ma miejsce dla $n = 2$. Należy wykazać implikację $T(n) \to T(n+1)$. Mamy kolejno

$$L_{T(n+1)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos(2kt) = (-1)^{n-1}\frac{cos(2n-1)t}{cos\, t} +$$

$$+2(-1)^n cos(2nt) = \frac{(-1)^n}{cos\, t}[-cos(2n-1)t + 2\, cos(2nt)\, cos\, t] =$$

$$= \frac{(-1)^n}{cos\, t}[-cos(2nt)\, cos\, t - sin(2nt)\, sin\, t + 2\, cos(2nt)\, cos\, t] =$$

$$= \frac{(-1)^n}{cos\, t}[cos(2nt)\, cos\, t - sin(2nt)\, sin\, t] = (-1)^n\frac{cos(2n+1)t}{cos\, t} = P_{T(n+1)}.$$

W dowodzie wykorzystaliśmy wzór na $cos\,(\alpha \pm \beta)$.

Zadanie 7. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

a) liczba $(11^{n+2} + 12^{2n+1})$ jest podzielna przez 133 ;

b) liczba $\left(\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}\right)$ jest liczbą naturalną ;

c)* $\underset{n,k\in\mathbb{N}}{\forall} \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+k)!}{(j-1)!} = \frac{(n+k+1)!}{(k+2)(n-1)!}$, d)* $\underset{n,k\in\mathbb{N}}{\forall} \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)!}{(j+k)!} = \frac{1}{k\cdot k!} - \frac{n!}{k\cdot(n+k)!}$;

e)* $\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ q\in\mathbb{N}_0}}{\forall} \sum_{j=1}^{n} j(j+1)\ldots(j+q) = \frac{1}{q+2} n(n+1)\ldots(n+q+1)$.

Zadanie 8. Stosując indukcję matematyczną udowodnić nierówności:

a) $\underset{\substack{x_i\in\mathbb{R}\\ i=1,2,\ldots,n,\ n\geq 2}}{\forall} |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$;

b) $\underset{\substack{a,b>0\\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2}}{\forall} (a+b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n)$; c)* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Zadanie 9. Udowodnić indukcyjnie, że

a)* $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Zapisać powyższą równość używając znaków sumy.

c) Obliczyć s_n dla $n = 1,2,3,4$.

d) Uzasadnić oszacowanie dla s_n: $\frac{1}{2} < s_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

e)* Udowodnić indukcyjnie, że $s_n > \frac{13}{24}$, $n \geq 2$.

f)* Udowodnić, że $s_n < \frac{3}{4}$, $n \geq 2$.

Wskazówka: pogrupować parami wyrazy równoodległe od początku i końca.

Rozdział IV. KRESY ZBIORU $A \subset \mathbb{R}$. CIĄGI NIESKOŃCZONE. GRANICA CIĄGU LICZB RZECZYWISTYCH

4.1 Kres górny i dolny zbioru $A \subset \mathbb{R}$

Na osi liczbowej $\mathbb{R}$ możemy wyróżnić wiele ważnych podzbiorów, na przykład liczby parzyste i nieparzyste, przedziały domknięte $\langle a, b\rangle$, otwarte (a, b), półdomknięte $(a, b\rangle$ lub $\langle a,b)$, $a < b$, itd.

Struktura tych podzbiorów może być bardzo skomplikowana, w zależności od ich własności (na przykład zbiór liczb pierwszych, zbiór wyrazów ciągu $a_n = \sqrt[n]{n},\ n \geq 2$, itd.).

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem. Interesuje nas istnienie największego i najmniejszego elementu zbioru A. Na przykład:

1. Jeżeli $A = \langle -2, 4\rangle$ to największym elementem zbioru A jest $x = 4$, a najmniejszym $x = -2$. Jeżeli natomiast $A = (-1, 5)$, to nie istnieje ani element najmniejszy, ani największy tego zbioru.
2. Jeżeli $A = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, to najmniejszy element tego zbioru to $n = 1$, a największy nie istnieje bo $\underset{x\in\mathbb{N}}{\forall}\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$.

W pierwszej kolejności wyróżnimy zbiory $A \subset \mathbb{R}$, które nazwiemy **ograniczonymi**.

Definicja. *Niech $A \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że A jest zbiorem* ***ograniczonym z góry****, jeżeli:*

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in A}{\forall}\ x \leq M .$$

Definicja. *Mówimy, że A jest zbiorem* ***ograniczonym z dołu****, jeżeli:*

$$\underset{m\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in A}{\forall}\ x \geq m\,.$$

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczonym**, gdy jest on ograniczony z góry i z dołu.

Uwaga. W powyższych nierównościach może być użyta nierówność ostra $(<,>)$. Zauważmy, że ograniczeń z dołu i z góry może być nieskończenie wiele. Na przykład w przykładzie **1.**, zbiór $A = (-1, 5)$ ma jako ograniczenie od góry nie tylko liczbę $5 \notin A$. Każda liczba większa jest również ograniczeniem z góry.

Podamy teraz uściślenie powyższych faktów. Najpierw podamy definicję kresów zbioru $A \subset \mathbb{R}$, „mniej abstrakcyjną” (bez kwantyfikatorów).

Definicja. *Największą (najmniejszą) liczbę zbioru $A \subset \mathbb{R}$ (o ile taka istnieje) lub najmniejszą (największą) ograniczającą zbiór A z góry (z dołu) nazywamy* ***kresem górnym*** *zbioru A: sup A (****kresem dolnym****: inf A). (Czytamy supremum i infimum zbioru A)*

Powyższą definicję można zapisać krótko za pomocą dwóch warunków, używając odpowiednich kwantyfikatorów.

Definicja.

$$M = sup\,A \iff \begin{cases} 1^\circ \ \underset{x\in A}{\forall}\ x \leq M \\ 2^\circ \ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x'\in A}{\exists}\ x' > M - \varepsilon \end{cases},$$

$$m = inf\,A \iff \begin{cases} 1^\circ \ \underset{x\in A}{\forall}\ x \geq m \\ 2^\circ \ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x''\in A}{\exists}\ x'' < m + \varepsilon \end{cases}.$$

Łatwe zrozumienie tych pojęć daje rozpatrzenie zbiorów $A = \langle -2, 4\rangle$ i $A = (-1, 5)$.

Przykłady

1. $A = \left\{1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\ \right\}$,

   mamy oczywiście : $inf\ A = 0 \notin A, sup\ A = 1 \in A$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R}:\ x = (-1)^n\ ,\ n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$,

   $sup\ A = 1 \in A,\ inf\ A = -1 \in A.$

3. $A = \left\{x:\ x = \frac{n}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$.

   Oczywiście $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 0 < \frac{n}{n+1} < 1$, więc zbiór A jest ograniczony.

   Wykażemy, że $inf\ A = \frac{1}{2} \in A$ i $sup\ A = 1 \notin A$. Łatwo udowodnić, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący, więc $inf\ A = \frac{1}{2}$. Udowodnimy, że $sup\ A = 1$.

   Niech $0 < \varepsilon < 1$. Gdyby było $\frac{n}{n+1} < 1 - \varepsilon$, to wyliczając n otrzymamy: $n < n + 1 - (n+1)\varepsilon\ \Rightarrow\ (n+1)\varepsilon\ < 1\ \Rightarrow\ n + 1 < \frac{1}{\varepsilon}$, $\Rightarrow n < \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, co jest niemożliwe bo $n \in \mathbb{N}$, więc od pewnego $n_0 \in \mathbb{N},\ n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Zatem $sup\ A = 1$.

4. $A = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x = e_n^+ = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$,

   mamy: $e_1^+ = 2,\ e_2^+ = \frac{9}{4},\ e_3^+ = \frac{16}{27}, \dots, e_{100}^+ = \left(\frac{101}{100}\right)^{100}$, … .

   Ciąg ten jest bardzo skomplikowany i na razie poza faktem, że $e_n^+ > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, nie możemy nic powiedzieć o jego kresach, chociaż wiemy już, że $2 \le e_n^+ < 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Definicja. W przypadku gdy zbiór $A \in \mathbb{R}$ nie jest ograniczony, to przyjmujemy $sup\ A = +\infty,\ inf\ A = -\infty$.

Uwaga. Powyższe równości można przyjąć za definicję symboli $(+\infty)$ oraz $(-\infty)$, co pokrywa się z intuicją wynikającą z faktu, że zbiór $\mathbb{N}$ nie ma liczby największej.

4.2 Ciąg nieskończony liczb rzeczywistych i jego własności

Funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ $(\mathbb{N}_0)$ nazywamy nieskończonym ciągiem liczb rzeczywistych to jest:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad n \to a_n = f(n) \in \mathbb{R}\,.$$

Liczbę a_n - nazywamy n-tym lub ogólnym wyrazem ciągu (a_n).

Ten specjalny rodzaj funkcji ma rozliczne zastosowania i wymaga oddzielnego potraktowania.

Ciągi, analogicznie jak funkcje zmiennej rzeczywistej możemy definiować:

a) wzorem, na przykład

$$a_n = \frac{1}{n}\,,\ \ a_n = \frac{2n}{n+2}\,,\ \ a_n = (-1)^n\,,\ \ a_n = (-1)^n\frac{1}{n}\,,$$

$$e_n^+ = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n,\ \ a_n = q^n,\ q \in \mathbb{R}\,,\ \ n \in \mathbb{N}\,,$$

b) wypisując kolejne wyrazy na przykład 1, 2, 3, 5, 7, 11, ... ; 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ,

c) podając relację pomiędzy sąsiednimi wyrazami, czyli tak zwany **wzór rekurencyjny**, na przykład:

$$a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}),\ \ n \in \mathbb{N}\,,\ \ a_0\,, a_1 \in \mathbb{R}\,,$$

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ a_1 = 3\,,$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ F_0 = 0\,,\ F_1 = 1\,.$$

Uwaga. „Najlepszą” postacią ciągu jest oczywiście wzór jawny to znaczy $a_n = f(n)\,, n \in \mathbb{N}$, jednakże często jest to niemożliwe do uzyskania. Ponadto wzór jawny, może mieć skomplikowaną postać. Na przykład ostatni z ciągów, tak zwany ciąg Fibonacciego ma dość nieoczekiwaną jawną postać daną wzorem

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\,,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Oczywiście na mocy definicji (F_n) jest liczbą naturalną.

Przykłady. Popatrzmy teraz na zachowanie się poniższych ciągów:

1. $a_n = \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ \ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_{10} = \frac{1}{10},\ a_{1000} = \frac{1}{1000},$ itd.
2. $a_n = \frac{n}{n+1}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ \ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_{100} = \frac{100}{101},$ itd.
3. $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}\,,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2^2 = 4,\ a_{10} = 10^2,\ a_{1000} = 10^6;$
4. $a_n = (-1)^n\,, a_1 = -1, a_2 = 1, \dots, a_{2k} = 1,\ a_{2k+1} = -1,\ n, k \in \mathbb{N}_0,$
5. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N},\ a_1 = 2,\ a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ a_{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10}$, itd.

Ciąg **1.** jest malejący i gdy n jest duże to jego wyrazy są dowolnie bliskie 0; ciąg **2.** jest rosnący (wykażemy poniżej), ale jego wyrazy nie przekraczają 1; ciąg **3.** jest rosnący, a ponadto jego wyrazy mogą być dowolnie duże. Zbiór wartości ciągu **4.** jest zbiorem dwuelementowym $\{-1,1\}$ i nie jest to ciąg ani rosnący, ani malejący. Ciąg **5.** to najważniejszy ciąg w matematyce, ale swoje źródło ma w finansach i nie widać na razie czy jest rosnący (początkowe wyrazy mówią, że tak) i jak duże są wyrazy tego ciągu. Wykażemy, że istotnie jest to ciąg rosnący. Wykazaliśmy już (rozdział III), że $a_n < 3\,,\ n \in \mathbb{N}$.

Z powyższego widać potrzebę wyróżnienia następujących ciągów:

Definicja. *Ciąg* (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ *jest rosnący (malejący) gdy:*

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_{n+1} > a_n \quad (a_{n+1} < a_n)\,.$$

Wniosek. Ciąg rosnący lub malejący nazywamy monotonicznym. Z definicji widzimy, że zbadanie monotoniczności sprowadza się do zbadania nierówności:

$$a_{n+1} - a_n > 0\ (< 0)\,,\ n \in \mathbb{N} \text{ lub gdy } a_n > 0\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\ (< 1)\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Przykłady

a) Ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący, bo: $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$

b) Ciąg $a_n = \frac{2^n}{n!}$ jest malejący, bo: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} < 1$, dla $n \geq 2.$

Definicja. *Jeżeli* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n = c \in \mathbb{R}$ *, to ciąg* (a_n) *jest ciągiem stałym lub inaczej gdy* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_{n+1} = a_n$ (a_1 *dany*).

Definicja. *Ciąg* (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ *nazywamy ograniczonym, gdy:*

$$\underset{a,A\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a \leq a_n \leq A\,.$$

A - nazywamy ograniczeniem z góry; a *- nazywamy ograniczeniem z dołu.*

Zdajmy sobie sprawę w tym miejscu raz jeszcze, że ograniczeń i z góry i z dołu może być nieskończenie wiele.

Przykłady

1. Ciąg $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $a_1 = \sqrt{2}$, $n \in \mathbb{N}$, jest ograniczony i rosnący.

Dowód. Mamy $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...
Widać więc, że ciąg (a_n) jest rosnący, ale należy to udowodnić.

Udowodnimy najpierw indukcyjnie, że ciąg (a_n) jest ograniczony z góry przez 2 (co nie jest wcale oczywiste). Zakładając, że $a_n < 2$, mamy $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$, czyli istotnie nasz ciąg jest ograniczony z góry przez 2.

Wykorzystując ten fakt, możemy napisać:
$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n \cdot a_n} = a_n$, czyli ciąg (a_n) jest rosnący, co było już widać przez wypisywanie wyrazów.

2. Udowodnimy teraz monotoniczność i ograniczoność ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Metodą dowodu będzie wykorzystanie nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną dla odpowiednio dobranych liczb.

Wykażemy jednocześnie dwa fakty, że:
ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący, a ciąg $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest malejący.
Z dowodu będzie wynikać ograniczoność powyższych ciągów.

Zauważmy najpierw, że:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n < b_n \text{ , bo } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Zastosujmy nierówność $G_n \le A_n$ dla następujących $(n + 1)$ liczb:
$a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Otrzymamy:

$$G_{n+1} = \sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} <$$

$$< A_{n+1} = \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

skąd $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$, co oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Analogicznie stosując nierówność $G_n \leq A_n$ dla $(n+2)$ liczb: $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+2} = 1 - \frac{1}{n+1}$, otrzymamy:

$$G_{n+2} = \sqrt[n+2]{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} < A_{n+2} = \frac{1+(n+1)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} .$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymamy:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, czyli $b_n > b_{n+1}$, co oznacza, że ciąg (b_n) jest malejący. Biorąc pod uwagę, powyższe dwa fakty, możemy napisać następujący ciąg nierówności:

$$2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} \ldots < b_{n+1} < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_1 = 4 ,$$

z którego wynika, że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry przez 4, natomiast ciąg (b_n) jest malejący i ograniczony z dołu przez 2.

4.3 Granica ciągu.

Mając konkretne n, na przykład $n = 10;\ 175;\ 1020$ itd. oraz wzór jawny na ciąg $a_n = f(n)$ możemy wyznaczyć wyrazy ciągu o podanych wskaźnikach (numerach).

Nas interesuje coś więcej, mianowicie jak zachowuje się ciąg (a_n) (to znaczy jakie wartości przyjmuje a_n), gdy n jest dowolnie duże, co będziemy zapisywać:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \, ,$$

(czytamy: limes a_n , gdy n dąży do nieskończoności).

Definicja. *Mówimy, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę g, gdy $n \to +\infty$, co zapisujemy $\lim_{n\to+\infty} a_n = g$, jeżeli:*

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{n_0(\varepsilon)} \; \forall_{n>n_0} \; |a_n - g| < \varepsilon \, . \tag{4.0}$$

Ciąg mający skończoną granicę nazywamy zbieżnym, w przeciwnym przypadku rozbieżnym.

Zrozumienie powyższej definicji staje się oczywiste, gdy wykonamy wykres ciągu (a_n).

Twierdzenie 1. *Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to ma tylko jedną granicę.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że ciąg (a_n) ma dwie granice to jest:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = g_1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = g_2 \, , \quad \text{ale} \quad g_1 \neq g_2 \, .$$

Na mocy definicji granicy, stosując nierówność trójkąta możemy napisać:

$0 < |g_1 - g_2| = |g_1 - g_2 + a_n - a_n| = |(a_n - g_2) - (a_n - g_1)| \leq$ $|(a_n - g_2)| + |(a_n - g_1)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, dla $n > n_0$. Biorąc za ε (które jest dowolną liczbą dodatnią), na przykład $\varepsilon = \frac{1}{3}|g_1 - g_2|$ otrzymujemy $0 < |g_1 - g_2| < \frac{2}{3}|g_1 - g_2| \Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$, a więc sprzeczność, czyli musi być $g_1 = g_2$.

Można wykazać następujące dwa ważne, a prawie oczywiste intuicyjnie twierdzenia.

Twierdzenie 2. (warunek konieczny zbieżności ciągu a_n)

Jeżeli ciąg (a_n) *jest zbieżny, to jest ograniczony.*

Twierdzenie 3. (warunek dostateczny zbieżności ciągu a_n)

Jeżeli ciąg (a_n) *jest rosnący (malejący) i ograniczony z góry (z dołu), to jest zbieżny.*

Przykład. Z powyższych rozważań wynika, że ciąg $e_n^+ = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny jako rosnący i ograniczony z góry.

Uwaga. Granicę ciągu (e_n^+) oznaczamy literką e na cześć jej odkrywcy szwajcarskiego matematyka L. Eulera. Mamy więc:

(4.1) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718\ldots .$$

Z powyższego wynika oszacowanie dla liczby e :

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} ,$$

skąd można już dla niedużych n otrzymać dość dokładne oszacowanie dla e.

Liczba e jest liczbą niewymierną i służy w matematyce wyższej za podstawę funkcji wykładniczej $y = e^x$ i logarytmicznej $y = log_e x = lnx$.

Logarytmując powyższą nierówność uzyskamy bardzo użyteczną nierówność dla logarytmu naturalnego

(4.2) $$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \frac{1}{n+1} < ln(n+1) - ln\, n < \frac{1}{n} .$$

Twierdzenie **3** pozwala rozstrzygnąć **istnienie** granicy ciągu. W większości przypadków chcemy jednak znać jej wartość. Poniższe dwa twierdzenia o arytmetyce granic oraz twierdzenie o trzech ciągach pozwalają wyznaczyć ją efektywnie w niektórych przypadkach.

Istotną rolę grają tutaj specjalne granice pojawiające się często w decydującym momencie.

Twierdzenie 4. *Jeżeli* (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ *, jest ciągiem stałym, tzn.* $a_n = c \in \mathbb{R}$ *, dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *to* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$*.*

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że ciągi* (a_n) *i* (b_n), $n \in \mathbb{N}$ *są zbieżne i* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, $c \in \mathbb{R}$.

Wtedy zbieżne są ciągi

$$(c \cdot a_n)\ ,\ (a_n \pm b_n)\ ,\ (a_n \cdot b_n)\ ,\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

i mają miejsce wzory:

$$\lim_{n\to+\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n\ ,\quad \lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = (a \pm b)\ ,$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b\ ,\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}\ ,\quad b \neq 0.$$

Twierdzenie 6. (o trzech ciągach)

Załóżmy, że ciągi (a_n) , (b_n) *i* (c_n) , $n \in \mathbb{N}$ *spełniają następujące warunki:*

1. $\forall\limits_{n>n_0}\ b_n \le a_n \le c_n$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = g$ *(liczba skończona).*

Wtedy ciąg (a_n) *jest też zbieżny i* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

Twierdzenie 7. *Mają miejsce następujące wzory:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,, \quad a > 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 1 & \textit{gdy } q = 1 \\ 0 & \textit{gdy } q \in (-1,1) \\ +\infty & \textit{gdy } q > 1 \\ \textit{nie istnieje} & \textit{gdy } q = -1 \ \textit{(ale } (a_n) \textit{ jest ograniczony)} \\ \textit{nie istnieje} & \textit{gdy } q < -1 \ \textit{(ale } (a_n) \textit{ jest nieograniczony)}\,. \end{cases}$$

Ma miejsce bardziej ogólna własność.

Twierdzenie 8. *Niech* $k \in \mathbb{N}$ *będzie ustaloną liczbą i* $x \in (-1,1)$.

Prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k x^n = 0$.

Dowód. Ponieważ $|x| < 1$, więc $|y| = \frac{1}{|x|} > 1$ i możemy napisać, że $|y| = 1 + d\,,\ d > 0$ i stąd $|x|^n = \frac{1}{|y|^n} = \frac{1}{(1+d)^n}$.

Mamy następującą równość na mocy dwumianu Newtona

$$0 < |n^k x^n| = \frac{n^k}{(1+d)^n} = \frac{n^k}{1+nd+\binom{n}{2}d^2+\cdots+\binom{n}{k+1}d^{k+1}+\cdots+d^n} < \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}d^{k+1}}\,,$$

gdyż każdy składnik sumy w mianowniku jest dodatni.

Ale $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k-1)(n-k)}{(k+1)!}$, $n > k$.

Podstawiając do powyższej nierówności otrzymamy

$$\frac{n^k}{\binom{n}{k+1}d^{k+1}} = \frac{n^k(k+1)!}{d^{k+1}n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)} = \underbrace{\frac{(k+1)!}{d^{k+1}}}_{const} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{A_n}(n-k)} =$$

$$= const \cdot \frac{1}{A_n\cdot(n-k)} \to 0\,, \text{ bo } A_n \to 1 \text{ gdy } n \to +\infty\,.$$

Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach, teza jest udowodniona.

4.4 Symbole nieoznaczone

Próbując obliczyć granice ciągu (dotyczy to również w przyszłości granic funkcji) pierwszym krokiem jest obserwacja jak zachowuje się dany ciąg (funkcja) po podstawieniu zmiennej do wzoru definiującego.

Na przykład sensownie jest stwierdzić, że:

$$\lim_{n\to+\infty}(2n^3+n^2-5)=(+\infty)+(+\infty)-5=+\infty\ ;$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-2n^4+5n^3+n+1)=\lim_{n\to+\infty}n^4\left(-2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)=$$

$$=(+\infty)(-2)=-\infty\ .$$

Ale już w następujących granicach ($a>1$),

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}a^n=0\cdot(+\infty)=?\ ,\ \text{czy}\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^{+\infty}=?\ ,$$

nie bardzo wiemy jak interpretować wyrażenia $0\cdot(+\infty)$ czy $1^{+\infty}$.

Poniższe uwagi dotyczą zarówno granicy ciągu jaki i później różnych granic funkcji.

Definicja. *Następujące symbole (wyrażenia) występujące przy obliczaniu granic nazywamy symbolami* ***nieoznaczonymi*** *(jest ich siedem):*

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ ,\quad \frac{0}{0}\ ,\quad 0\cdot(\pm\infty)\ ,\quad (+\infty)-(+\infty)\ ;\quad 1^{\pm\infty}\ ,\quad 0^0\ ,\quad (+\infty)^0\ . \tag{4.3}$$

Wyrażeniom tym nie możemy przypisać od razu wartości liczbowej.

Pozostałe działania na symbolach $(\pm\infty)$ uważamy za oznaczone, na przykład $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$,

$$(+\infty)\pm a=+\infty\ ,\quad a\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty & gdy\ \ a>0\\ -\infty & gdy\ \ a<0\end{cases}\ .$$

Gdy przy obliczaniu granicy spotkamy jeden z powyższych siedmiu symboli nieoznaczonych (innych nie ma), należy tak przekształcić dane wyrażenie, aby pozbyć się występującego symbolu nieoznaczonego, a następnie stosując twierdzenia 1 - 8 obliczyć jego granicę. Podamy niżej cztery przykłady, pozostałe wystąpią w przykładach przy obliczaniu różnych granic ciągów (oraz funkcji w następnych rozdziałach).

Przykłady. Obliczyć granice ciągów:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3-5n+6}{7-n^2+4n^3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{\frac{7}{n^3}-\frac{1}{n}+4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n+4}{-3n^2+7} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{-3+\frac{7}{n^2}} = \frac{0}{-3} = 0$,

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+2}-n) = [(+\infty)-(+\infty)] =$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\frac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1} = 1 .$$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$. Granica ta nie przedstawia symbolu nieoznaczonego, bowiem licznik przyjmuje wartości z przedziału $\langle -1, 1\rangle$, a mianownik dąży do $(+\infty)$. Nie możemy tu zastosować wzoru na granicę iloczynu, bo nie istnieje granica $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$, natomiast możemy napisać oczywistą nierówność:

$\forall\limits_{n\in\mathbb{N}} -\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$, skąd $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ na mocy ***twierdzenia o 3 ciągach***.

4.5 Dalsze przykłady na obliczanie granic ciągów

Przykłady

1. Udowodnić, że liczba $g = \frac{3}{2}$ jest granicą ciągu $a_n = \frac{3n-1}{2n+5}$.

Niech $1 > \varepsilon > 0$ będzie dowolna liczbą. Zgodnie z definicją granicy musimy znaleźć (wyznaczyć, obliczyć) takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > n_0$

$$\left|\frac{3n-1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon .$$

Wyliczenie n_0 polega na rozwiązaniu powyższej nierówności względem n . Mamy

$$\left|\frac{(3n-1)2-3(2n+5)}{2(2n+5)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-10}{2(2n+5)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{2n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{5}n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{5}{2} .$$

Przyjmując $n_0 = \left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$ mamy koniec dowodu.

Na przykład $\varepsilon = \frac{1}{10}$ daje $n_0 = \left[\frac{5}{2} \cdot 9\right] = [22.5] = 22$.

2. Udowodnić, że $\underset{\substack{q\in\mathbb{R} \\ |q|<1}}{\forall} \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Dowód. Skorzystamy z definicji granicy ciągu i nierówności Bernoulliego **(A)**. Dla $q = 0$ powyższa równość zachodzi, niech więc $0 < |q| < 1$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą.

Na mocy nierówności Bernoulliego **(A)** możemy napisać

$$1 < \frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) .$$

Zatem $|q|^n = |q^n| < \frac{|q|}{n(1-|q|)} < \varepsilon$, dla $n > \left[\frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}\right]$, co kończy dowód.

3. Udowodnić, że $\forall_{a>0} \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Mamy $a_n = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n-razy}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$. Jeżeli $a > 0$ jest ustaloną liczbą, to istnieje wtedy $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $n_0 \le a < n_0 + 1$.

Możemy więc napisać

$$0 < a_n = \left(\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n_0}}{n_0!}\right)\left(\frac{a}{n_0+1}\cdot\frac{a}{n_0+2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n}\right) < \left(\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right)\left(\frac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0} =$$

$$= k\cdot q^n \ , \ q = \frac{a}{n_0+1} < 1.$$

Na mocy faktu, że $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ i twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy tezę.

4. Udowodnić, że:

a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$; **b)** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

***Dowód* a).** Niech $a > 1$ (dla $a = 1$ twierdzenie jest oczywiste).

Na mocy nierówności Bernoulliego **(A)** mamy

$$a = \left(1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right)^n > 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right),$$

skąd wynika, że $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}$, co na mocy twierdzenia o trzech ciągach daje tezę.

Przypadek $0 < a < 1$ wynika z faktu, że $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, bo $\frac{1}{a} > 1$, skąd teza.

***Dowód* b).** Wobec faktu, że $\sqrt[n]{n} > 1$ dla $n \ge 2$, możemy napisać $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, gdzie $\alpha_n > 0$. Dowód będzie zakończony gdy wykażemy, że $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Stosując dwumian Newtona do poniższego wyrażenia i nierówność $\alpha_n > 0$, otrzymujemy tezę na podstawie twierdzenia o trzech ciągach, mamy bowiem

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + \binom{n}{1}\alpha_n + \binom{n}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}\alpha_n^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 ,$$

skąd $0 < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, $n \geq 2$, co daje $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

5. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + \pi^n}$, **b)** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie. W przykładach tych zastosujemy twierdzenie o trzech ciągach mamy:

a) $c_n = \pi = \sqrt[n]{\pi^n} < a_n = \sqrt[n]{2^n + \pi^n} < \sqrt[n]{\pi^n + \pi^n} = \pi\sqrt[n]{2} = b_n$

czyli $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$, a stąd $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + \pi^n} = \pi$.

b) Ciąg a_n w tym przykładzie jest sumą n-wyrazów, z których oczywiście każdy dąży do zera, gdy $n \to +\infty$. Nie możemy jednak tutaj stosować twierdzenia o sumie granic, bo gdy $n \to +\infty$, to liczba składników też dąży do $+\infty$. Natomiast oszacujemy a_n z góry i z dołu przez odpowiednio najmniejszy i największy składnik:

$$c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < a_n <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = b_n .$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$, zatem również $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

4.6 Granica ciągu zadanego wzorem $\boldsymbol{a_{n+1} = f(a_n)}$

Wielu ciągów nie da się zapisać w postaci jawnej $a_n = f(n)$, a jedynie przez wzory rekurencyjne, podające zależność kilku wyrazów.

Najprostsza z tych zależności ma postać:

(4.4) $\quad a_{n+1} = f(a_n), \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad$ gdzie a_0 lub a_1 są dane.

Na przykład $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$, $a_{n+1} = a_n + a_n^2$, itd.

Zakładać będziemy przy tym, że funkcja f jest zdefiniowana na zbiorze wartości ciągu (a_n). Aby obliczyć granicę takiego ciągu próbujemy zorientować się jakie ma on własności, wypisując kilka początkowych wyrazów. Daje to pewne sugestie co do stosowania warunku dostatecznego (twierdzenie 3). Z jednoznaczności istnienia granicy ciągu otrzymujemy

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_{n-1} = g\,,$$

co na mocy wzoru (4.4) daje równanie na obliczenie granicy g:

(4.5) $$g = f(g)\,.$$

Często stosujemy najpierw ten drugi krok, aby mieć informację o wartości ewentualnej granicy ciągu (a_n).

Zatem praktycznie problem wyznaczania granicy polega na zbadaniu monotoniczności i ograniczoności ciągu (a_n) oraz rozwiązaniu równania (4.5) i wybraniu właściwej wartości g. Pokazują to poniższe przykłady.

Przykłady. Obliczyć granicę ciągu (a_n) danego wzorem rekurencyjnym:

1. $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right), \ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$; $\qquad$ **2.*** $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{1}{a_n^2}\right), \ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$.

Rozwiązania.

1. Z definicji mamy $a_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, a ponadto:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+5}{2a_n} = \frac{\left(a_n-\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}a_n}{2a_n} = \sqrt{5} + \frac{\left(a_n-\sqrt{5}\right)^2}{2a_n} > \sqrt{5}\ .$$

Następnie $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{2a_n} - a_n = \frac{1}{2a_n}(5 - a_n^2) < 0$, czyli ciąg (a_n) jest malejący i ograniczony z dołu przez $\sqrt{5}$, więc zbieżny. Mamy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{5}$.

2. Oczywiście ciąg (a_n) jest dodatni i ponadto mamy:

$$a_1 = \frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{9}\right) = 1\frac{8}{27} \approx 1.30\ .$$

Zobaczmy kiedy ciąg (a_n) maleje. Mamy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{a_n^3}\right) < 1 \iff 1 + \frac{1}{a_n^3} < \frac{3}{2} \iff \frac{1}{a_n^3} < \frac{1}{2} \iff a_n > \sqrt[3]{2}\ .$$

Można udowodnić indukcyjnie, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n > \sqrt[3]{2}$. Stąd $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt[3]{2}$.

Uwaga. Wzory określające ciągi **1.** i **2.** używa się do programowania kalkulatorów celem obliczenia odpowiednio $\sqrt{5}$ oraz $\sqrt[3]{2}$.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Komentarze. (A) Ciągi wzajemnie zbliżające się (do siebie)

Definicja. Dwa ciągi rzeczywiste (a_n) i (b_n), $n \in \mathbb{N}$ nazywamy „wzajemnie zbliżającymi się” jeżeli spełniają następujące warunki:

1. $(a_n) \uparrow$ i $(b_n) \downarrow$,
2. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n < b_n$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Uwaga. Warunek 2. jest konsekwencją warunków 1. i 3. (uzasadnić). Umieściliśmy go w definicji gdyż ułatwia myślenie przy konstruowaniu takich ciągów.

Następujący wniosek jest kluczowy dlaczego takie ciągi rozważamy i jest intuicyjnie prawie oczywisty, ale jego dowód wykracza poza ramy tej monografii.

Wniosek. Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami wzajemnie zbliżającymi się, to są zbieżne i mają tę samą granicę to znaczy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = g$.

Ponadto ma miejsce nierówność $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_n < g < b_n$.

Uwaga. Pojęcie ciągów wzajemnie zbliżających się do siebie jest często używane w podręcznikach francuskich (np. [9]). Ich ważną zaletą jest nie tylko konkluzja zbieżności obu ciągów, ale również możliwość dość precyzyjnego oszacowania ich wspólnej granicy.

Przykłady

1. Wykazaliśmy już w rozdziale III, że $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ i $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ są wzajemnie zbliżające. Wynika stąd na przykład, oszacowanie:

$$2.59 \approx \left(\frac{11}{10}\right)^{10} < e < \left(\frac{11}{10}\right)^{11} \approx 2.85 .$$

2. Nierówność 6, rozdział III, pokazuje, że ciąg $H_n^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Mała „korekta” powoduje już, że ciągi $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ i $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ są wzajemnie zbliżające, bo oczywiście mamy $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1-2\sqrt{(n+2)(n+1)}+2n+2}{\sqrt{n+1}} > 0$

$\Leftrightarrow 2n+3-2\sqrt{n^2+3n+2} > 0$ gdyż $(2n+3)^2 > 4(n^2+3n+2)$,

więc $(a_n)\uparrow$. Analogicznie $(b_n)\downarrow$ ponieważ

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1-2(n+1)+2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}} < 0$,

bo $4n^2+4n < 4n^2+4n+1$. Zatem $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = g$,

gdzie $g \in (-2,-1)$ na mocy nierówności 6 (rozdział III, strona 51).

Dzięki powyższemu wnioskowi możemy napisać więcej, mianowicie biorąc tylko $n = 3$ otrzymamy, że $g \in (-1.72;\ -1.18)$.

3. Podobna idea znajduje się w konstrukcji ciągów:

$\gamma_n = H_n^{(1)} - ln(n+1)$; $\Gamma_n = H_n^{(1)} - ln(n)$, $H_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{k}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Mamy oczywistą nierówność $\gamma_n < \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$, a wykażemy, korzystając z nierówności (4.2), że ciąg (Γ_n) jest ciągiem malejącym.

Mamy bowiem

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n = \frac{1}{n+1} - ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n+1} - ln\left(\frac{(n+1)}{n}\right) < 0 ,$$

co oznacza, że $(\Gamma_n)\downarrow$.

Analogicznie udowodnimy (rozdział VIII), że $(\gamma_n)\uparrow$.

Wspólna granica obu ciągów $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n = \gamma \approx 0.577$ nazywa się stałą Eulera-Mascheroniego. Oszacowanie stałej γ nie jest sprawą łatwą, ale wykorzystując powyższy wniosek dla $n = 3$ otrzymujemy:

$$0.447 < \gamma < 0.743 .$$

Natomiast wykorzystując wartość $H_n^{(1)}$ dla $n = 10$ i $n = 10^6$ ([5], [3]), odpowiednio otrzymujemy

$$0.5311 < \gamma < 0.6264 ;\ 0.577215 < \gamma < 0.577216.$$

(B) Podciągi i ich granice

Bardziej subtelna analiza wyznaczania granicy ciągu wymaga zdefiniowania pojęcia podciągu. Wynika to z faktu, że klasyczny warunek dostateczny (tw. **3**) nie musi być spełniony, a mimo to ciąg (a_n) jest zbieżny.

Przykładem jest tutaj ciąg

(4.6) $$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,$$

który nie jest monotoniczny, a przecież $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Definicja. *Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych* $(a_n),\ n \in \mathbb{N}$ *, oraz rosnący ciąg liczb naturalnych* $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ *. Nowy ciąg*

$$(b_n):\quad b_1 = a_{k_1}\ ,\ \ b_2 = a_{k_2}\ ,\ \dots\ ,\ \ b_n = a_{k_n}\quad (k_n \geq n),$$

nazywamy ***podciągiem*** *ciągu* (a_n) .

Dwa łatwe przykłady, to podciągi o wskaźnikach parzystych i nieparzystych, czyli a_{2k} i a_{2k-1} oraz o wskaźnikach $3k, 3k+1, 3k+2$, to jest a_{3k} , a_{3k+1} , a_{3k+2} . Dla ciągu $a_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = (-1)^{2k+1} = (-1)$, $a_{2k-1} = (-1)^{2k} = 1$. Dla ciągu (4.6) $a_{2k} = (-1)^{2k+1}\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2k}, a_{2k-1} = (-1)^{2k}\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2k-1},\ k \in \mathbb{N}$.

Następujące twierdzenia są podstawowymi dotyczącymi granic podciągów.

Twierdzenie 9. *Jeżeli ciąg* (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ *jest zbieżny do granicy* g *, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy* g .

Twierdzenie 10. *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.*

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że podciągi* (a_{2k}) *i* $(a_{2k+1}),\ n \in \mathbb{N}$ *ciągu* (a_n) *są zbieżne do tej samej granicy* g *. Wtedy również* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

Dowód. Zastosujemy definicję granicy ciągu. Mamy

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{n_1\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n>n_1}{\forall} |a_{2n} - g| < \varepsilon \,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{n_2\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n>n_2}{\forall} |a_{2n+1} - g| < \varepsilon \,.$$

Zatem biorąc $n_0 = max(2n_1, 2n_2 + 1)$ możemy napisać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n>n_0}{\forall} |a_n - g| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = g \,.$$

Wniosek. Ciąg (a_n) zawierający dwa podciągi zbieżne do różnych granic jest rozbieżny. Na przykład $a_n = (-1)^n$.

Przykłady

1. Jako zastosowanie podamy łatwy dowód rozbieżności ciągu harmonicznego

$$H_n^{(1)} = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \,.$$

Mamy: $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}$.

Gdyby ciąg ten był zbieżny i $\lim_{n\to+\infty} H_n = H$, to również $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} = H$, więc mielibyśmy $\lim_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n) = 0$, a zatem sprzeczność.

2.* Zbadać zbieżność ciągu: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \,, \quad n \in \mathbb{N} \,. \end{cases}$

Oczywiście $x_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, a początkowe wyrazy ciągu (x_n) są równe: $x_0 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_4 = \frac{8}{5}$, $x_6 = \frac{21}{13}$; $x_1 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_5 = \frac{13}{8}$.

Z definicji (x_n) wynika, że jeżeli $\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = g_1$ i $\lim_{n\to+\infty} x_{2n-1} = g_2$, to musi być $g_1 = g_2 = g$. Przechodząc z $n \to +\infty$ w równości $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ otrzymujemy $\lim_{n\to+\infty} x_n = g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(C) Inna definicja liczby e

Wykażemy teraz, że liczba e może być zdefiniowana jeszcze innym wzorem niż (4.1). Niech $2 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Rozważmy ciąg

$$u_k = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Udowodnić, że:

1. $u_k < \frac{1}{k!}$, **2.** $u_{k+1} < u_k \frac{1}{k+1}$,

3. $u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n < \frac{u_k}{k} < \frac{1}{k \cdot k!}$,

4. liczba $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ może być zdefiniowana relacją:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Dowód. Każdy z czynników we wzorze definiującym u_k spełnia oczywistą nierówność $\left(1 - \frac{s}{n}\right) < 1$, $1 \leq s \leq k - 1$, co dowodzi nierówność **1.**

Aby udowodnić nierówność **2.** zauważmy, że:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k!}{(k+1)!} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)} = \frac{1-\frac{k}{n}}{k+1} < \frac{1}{k+1} \text{ , to jest } u_{k+1} < u_k \frac{1}{k+1}.$$

Aby udowodnić **3.** oszacujemy każdy składnik występującej tam sumy.

Na mocy nierówności **2.** mamy:

$u_{k+1} < u_k \frac{1}{k+1}$,

$u_{k+2} < u_{k+1} \frac{1}{k+2} < u_k \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} < u_k \frac{1}{(k+1)^2}$, … , $u_n < u_k \frac{1}{(k+1)^{n-k}}$.

Sumując powyższe nierówności otrzymamy

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n < \frac{u_k}{k+1}\left[1 + \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^{n-k-1}}\right].$$

Suma w nawiasie kwadratowym to suma $(n-k)$ wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie 1 i ilorazie $q = \frac{1}{k+1} < 1$. Suma ta jest mniejsza od sumy nieskończonej wyrazów (ma ona sens bo $0 < q < 1$) tego ciągu, która jest równa

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k} .$$

Stąd $u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_n < \frac{u_k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{u_k}{k} < \frac{1}{k \cdot k!}$, na mocy **1.**

Dowód **4.** przeprowadzimy korzystając z równości

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_n$$

i punktu **3.** Możemy napisać

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - (2 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k) < \frac{1}{k \cdot k!} \text{, na mocy } \mathbf{3}.$$

Gdy $n \to \infty$ $\left(u_k \to \frac{1}{k!}\ ,\ n \to +\infty\right)$ otrzymujemy nierówność

$$0 < e - \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} < \frac{1}{k \cdot k!} ,$$

która może być zapisana w postaci równości

$$e = \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} + \frac{\theta}{k \cdot k!} \ ,\ \theta \in (0,1) ,$$

co implikuje, że gdy $k \to +\infty$, to $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Zadania

Zadanie 1. Uzasadnić, które z poniższych zbiorów $A \in \mathbb{R}$ są ograniczone. Co można powiedzieć o $sup\, A$ i $inf\, A$?

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ x = \frac{n}{2n+1}\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$; b) $A = \left\{x \in \mathbb{R}\colon x = \frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ x = [1 + (-1)^n]n + \frac{1-(-1)^n}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Zadanie 2. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt{16n^2 + 5n + 4} - 4n$; b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n + 1}$;

c) $a_n = \sqrt[n]{4 \cdot 3^n + 5 \cdot 7^n}$; d) $a_n = \sqrt[n]{e^n + \pi^n + 5^{-n}}$;

e) $a_n = \sqrt[n]{3n + 5}$; f) $a_n = \sqrt[n]{3 + sin\,(n)}$; g) $a_n = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n + 3^n \sin^2(n)}$;

h) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n+1}$; i) $a_n = \left(\frac{5n-6}{5n+1}\right)^{3n}$; j) $a_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2-1}\right)^{2+3n^2}$.

Zadanie 3.

Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n),\ n \in \mathbb{N}$ określone są następującymi wzorami rekurencyjnymi:

a) $a_1 = 3\,,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{4} + a_n}$; b) $a_1 = 2\,,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n}$;

c) $a_0 = 3\,,\ a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} - 4$; d) $a_1 = 0\,,\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}\,, n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić, że ciągi (a_n) są zbieżne i obliczyć ich granice.

Zadanie 4. Wykazać, że podane pary ciągów są wzajemnie zbliżające.

a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,,\ \ b_n = a_n + \frac{1}{n!}\ ,\ n \in \mathbb{N}_0$;

b) (S_{2k}) i (S_{2k+1}) gdzie $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$;

c) $a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\ ,\ b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}\,,\ 0 < a_0 = a < b = b_0$.

Uwaga. Wspólną granicę $\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ nazywa się **średnią arytmetyczno-geometryczną Gaussa**. Wielkość μ wyraża się za pomocą nieelementarnej całki, tak zwanej całki eliptycznej.

Rozdział V. GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$ ORAZ W $\pm\infty$. CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI I WŁASNOŚCI FUNKCJI CIĄGŁYCH. ASYMPTOTY WYKRESU FUNKCJI $\boldsymbol{y = f(x)}$

5.1 Granica funkcji i granice jednostronne funkcji w punkcie skończonym $\boldsymbol{x_0}$

Definicja. *Załóżmy, że* $x_0 \in \mathbb{R}$ *jest ustalonym, skończonym punktem na osi liczbowej. Zbiór* $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ *nazywamy* ***otoczeniem punktu*** $\boldsymbol{x_0}$ *. Natomiast* ***sąsiedztwem punktu*** $\boldsymbol{x_0}$ *będziemy nazywać zbiór:* $S_\delta(x_0) = \{x : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \setminus \{x_0\}$ *, gdzie* $\delta > 0$ *jest dowolną liczbą.*

Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Porównując różne zachowania się funkcji f (to znaczy analizując jakie funkcja przyjmuje wartości) w dowolnie małym sąsiedztwie punktu x_0, dochodzimy do pojęcia granicy funkcji f w punkcie x_0 .

Definicja. *Mówimy, że funkcja* f *ma w punkcie* x_0 *skończoną granicę* g *i piszemy:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x \in S_\delta(x_0)}{\forall} |f(x) - g| < \varepsilon$.

Gdy $x \in S_\delta(x_0)$ *i* $x > x_0$ *, to mówimy o granicy prawostronnej* ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$) *, a gdy* $x \in S_\delta(x_0)$ *i* $x < x_0$ *, to mówimy o granicy lewostronnej* ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$).

Wniosek. Granica funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne i są sobie równe.

Uwaga 1. Powyższa definicja granicy funkcji to tak zwana definicja Cauchy'ego. Wygodną jest również definicja równoważna - definicja Heinego, określona za pomocą granicy ciągu, a mianowicie:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{x_0 \neq x_n \in D_f} \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g \ .$$

Uwaga 2. Dla granic funkcji, analogicznie jak dla granic ciągów prawdziwe są twierdzenia o działaniach na granicach skończonych i twierdzenie o trzech funkcjach. Granice $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ rozumiemy analogicznie, jak to było w przypadku granicy ciągu.

Twierdzenie 1. *Jeżeli* $\lim_{x\to x_0} f(x) = g_1$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x) = g_2$ *, to mają miejsce następujące wzory:*

a) $\lim_{x\to x_0}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)\ ,\ c\in\mathbb{R}$,

b) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = g_1 \pm g_2$,

c) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = g_1\cdot g_2$,

d) $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g_1}{g_2}\ ,\ g_2 \neq 0$.

Uwaga 3. Pojęcie granicy rozszerzamy na przypadek gdy funkcja jest nieograniczona w $S_\delta(x_0)$ (tak jak ma to miejsce na przykład dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w $S_\delta(0)$); są to tak zwane granice niewłaściwe. Zapisujemy:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty\ ,\ \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty\ ,\ \text{itd.}$$

5.2 Praktyczne obliczanie granic funkcji

Idea postępowania przy obliczaniu granic funkcji jest prawie identyczna jak przy obliczaniu granic ciągów, a więc:

1. Podstawiamy x_0 do funkcji i określamy symbol z jakim mamy do czynienia.
2. Przekształcamy funkcję w taki sposób, aby pozbyć się nieoznaczoności, stosując przy tym różne przekształcenia i działania (wzory skróconego mnożenia, domnażanie przez odpowiednie wyrażenia, wzory trygonometryczne, itp.). Ewentualnie stosujemy twierdzenie o trzech funkcjach.
3. Wykorzystujemy twierdzenia o granicach, analogicznie jak dla ciągów oraz stosujemy „bardzo ważne" granice:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \ , \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} \ , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \ ,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \ , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \ .$$

4. ***Twierdzenie 2. (o trzech funkcjach)***

   Załóżmy, że trzy funkcje f, g , h są określone w pewnym sąsiedztwie $S_\delta(x_0)$ punktu x_0 , oraz, że dla każdego $x \in S_\delta(x_0)$ mają miejsce nierówności: $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

   Jeżeli ponadto istnieją skończone granice $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$, to również $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Przykłady

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{4}{3}$,

2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\begin{bmatrix}m,n\in\mathbb{N}\\ m,n\geq3\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}=\frac{m}{n}$,

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0$, bo $\underset{x\geq1}{\forall}\ ln\,x\leq\sqrt{x-1}\Rightarrow\frac{ln\,x}{x}<\frac{\sqrt{x-1}}{x}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$.

Wniosek: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-ln\,x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{ln\,x}{x}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}x\,ln\,x=0$.

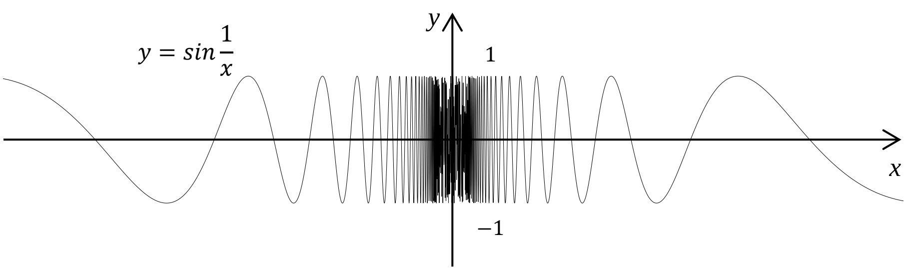
4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=[x=t^n]=\lim\limits_{t\to1}\frac{1-t}{1-t^n}=\lim\limits_{t\to1}\frac{1-t}{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}=\frac{1}{n}$,

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt{1+x^2})$. Gdy $x\to-\infty$ to mamy $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{1+x^2})=$ $-\infty$, ale gdy $x\to+\infty$, to $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=0$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}sinx$ nie istnieje, bo wybierając dwa ciągi $x_n'=n\pi\to+\infty$ i $x_n''=\frac{\pi}{2}+2n\pi\to+\infty$, otrzymamy $sinx_n'=0$, $sinx_n''=1$. Zatem $\lim\limits_{x\to+\infty}sinx$ nie istnieje, bo granica jest wyznaczona jednoznacznie.

Również podstawiając $x=\frac{1}{t}$ widzimy, że nie istnieje granica $\lim\limits_{t\to0}sin\frac{1}{t}$.

Wykres „ściśniętej sprężyny” tzn. wykres funkcji $f(x)=sin\frac{1}{x}$ pokazuje graficznie zaistniałą sytuację w otoczeniu punktu $x=0$.



7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 sin\frac{1}{x} = 0.$

W tym przykładzie nie możemy stosować twierdzenia o iloczynie granic bo granica $\lim\limits_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$ nie istnieje. Możemy natomiast napisać następującą nierówność, prawdziwą w dowolnie małym sąsiedztwie punktu $x = 0$,

$$0 < \left|x^2\, sin\frac{1}{x}\right| = |x^2|\left|sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \,,$$

skąd na mocy twierdzenia o trzech funkcjach otrzymujemy tezę.

5.3 Ciągłość funkcji w punkcie

Definicja. *Załóżmy, że funkcja rzeczywista* f *, jest określona w pewnym otoczeniu punktu* x_0 *, to jest* $x \in O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ \ \delta > 0$.

Mówimy, że f *jest ciągła w punkcie* x_0 *, jeżeli istnieje granica* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*. Zatem, aby miała miejsce ciągłość w punkcie* x_0 *muszą być spełnione trzy warunki:*

1. *istnieje* $f(x_0)$ *, czyli* $x_0 \in D_f$ *,*
2. *istnieje* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *,*
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *.*

Jeżeli jeden z powyższych warunków nie jest spełniony to mówimy, że x_0 jest punktem nieciągłości funkcji f.

Uwaga 1. Punkty nieciągłości mogą mieć różny charakter:

1. x_0 jest punktem nieciągłości I rodzaju gdy:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = B,$ ale $A \neq B,$ np. $f(x) = sgn\,x\,, x_0 = 0$.

2. x_0 jest punktem nieciągłości II rodzaju, gdy co najmniej jedna z granic jednostronnych jest niewłaściwa lub nie istnieje, na przykład $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ dla $x \to 0^{\pm}$; $f(x) = ln\,x$ dla $x \to 0^+$; $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, dla $x \to 1$.

3. x_0 jest punktem nieciągłości III rodzaju, gdy istnieje $f(x_0)$ i istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ale $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x).$

Jest to jedyny przypadek nieciągłości funkcji f, w którym może być ona „naprawiona”. Przyjmując bowiem, że

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & dla\ x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & dla\ x = x_0 \end{cases} \qquad ,$$

widzimy, że g jest już funkcją ciągłą w punkcie x_0.

Na przykład $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ nie jest określona dla $x = 0$, ale

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & dla\ x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & dla\ x = 0 \end{cases}$$

jest już funkcją ciągłą w $x = 0$.

Analogicznie dla funkcji $f(x) = \frac{sin\,x}{x}$ w punkcie $x = 0$. Mówimy, że może być ona przedłużona w sposób ciągły na $x = 0$, bo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin\,x}{x} = 1$. W przyszłości będziemy zawsze przyjmować, że $\left.\frac{sin\,x}{x}\right|_{x=0} = 1$.

Uwaga 2. Definicja. *Mówimy, że funkcja* $f\colon \langle x_0, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$ *jest prawostronnie ciągła w* x_0 , *gdy* $\lim\limits_{x_0 \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ *(analogicznie definiujemy ciągłość lewostronną).*

Uwaga 3. Warunek ciągłości **3.** można zapisać równoważnie

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \iff \lim_{h\to 0}[f(x_0+h) - f(x_0)] = 0 .$$

Powyższa równość oddaje ideę ciągłości funkcji f. Gdy x zmienia się dostatecznie „mało", w sąsiedztwie punktu x_0 , to $y = f(x)$ zmienia się również dostatecznie „mało" w otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$.

Definicja. *Mówimy, że funkcja* f *jest ciągła w przedziale otwartym* (a, b) *jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.*

Natomiast f *jest ciągła w przedziale domkniętym* $\langle a, b\rangle$ *gdy dodatkowo mają miejsce równości:* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ *i* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Z własności granic otrzymujemy natychmiast:

Twierdzenie 3. *Jeżeli* f *i* g *są ciągłe w zbiorze* $A \subset \mathbb{R}$, *to* $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, $(f \pm g)$, $(f \cdot g)$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ *są ciągłe w* A *(dla ilorazu poza punktami* $x \in A$ *gdzie* $g(x) \neq 0$*). Ponadto funkcja złożona* $f[g(x)]$ *(gdy złożenie ma sens) jest ciągła w* A.

Następujące twierdzenia podają listę podstawowych własności funkcji ciągłych.

Twierdzenie 4. *Jeżeli* $f(x)$ *jest funkcją ciągłą w* x_0 *i* $f(x_0) > 0$, *to istnieje takie* $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, *że dla każdego* $x \in O_\delta(x_0)$ *również* $f(x) > 0$.

Twierdzenie 5. *Wszystkie funkcje „podstawowe" są ciągłe w swoich dziedzinach.*

Twierdzenie 6. *Jeżeli f jest funkcją ciągłą i ściśle rosnącą w (a, b), $f: (a, b) \to (m, M)$, to istnieje funkcja odwrotna do f , $f^{-1}: (m, M) \to (a, b)$, która jest ciągła i ściśle rosnąca w (m, M), gdzie*

$$m = \inf_{x \in (a,b)} f(x)\,, \quad M = \sup_{x \in (a,b)} f(x).$$

Funkcje **ciągłe w przedziale domkniętym** mają bardzo ważne własności.

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$.*

Wtedy:

1. *f jest ograniczona w $\langle a, b \rangle$;*
2. $\exists_{x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle} f(x_1) = \underset{x \in \langle a,b \rangle}{Max} f(x) = M, \;\; f(x_2) = \min_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) = m$ *, to znaczy, że $f(x)$ przyjmuje w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ swoją wartość największą i najmniejszą (ekstrema globalne);*
3. *f przyjmuje w $\langle a, b \rangle$ wszystkie swoje wartości pośrednie pomiędzy m i M, to znaczy możemy napisać: $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$.*

Uwaga 1. Ostatnia własność (przyjmowanie wartości pośrednich - własność Darboux), oddaje intuicyjną własność funkcji ciągłej w przedziale (uzasadniając jej nazwę); wykres funkcji ciągłej w przedziale da się narysować bez odrywania ołówka - to znaczy jest linią ciągłą. Intuicja ta jest dobra na nasz użytek w prostych przykładach.

Uwaga 2. Oba założenia: ciągłość f i domkniętość przedziału w twierdzeniu 7 są niezbędne. Wystarczy bowiem rozważyć następujące przykłady: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$, do punktu **1.** ; $f(x) = x^2, x \in \langle 0,1\rangle$ lub $x \in (0,1)$, do punktu **2.** ; $f(x) = sgnx$, $x \in \langle -1,1\rangle$, do punktu **3.**

Wniosek. Praktyczne znaczenie ma następująca wersja własności **3.**:

Jeżeli $f(x)$ jest ciągła w $\langle a,b\rangle$ i $f(a)\cdot f(b) < 0$, to

$$\underset{x_0\in(a,b)}{\exists} f(x_0) = 0.$$

Chodzi o to, że wykres funkcji ciągłej mającej różne znaki na końcach przedziału musi przeciąć oś OX, to znaczy istnieje miejsce zerowe funkcji f, $x_0 \in (a,b)$, czyli $f(x_0) = 0$.

Przykład

Zlokalizować pierwiastki równania $x^3 + 3x^2 - x - 2 = 0$ w przedziałach o długości 1. Wyznaczyć $x_1 \in (0,1)$ z dokładnością do 0.1.

Funkcja $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$ jest ciągła w $\mathbb{R}$, a więc również w dowolnym przedziale domkniętym. Mamy:

$f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow x_1 \in (0,1)$,

$f(-1) = 1 > 0 \Rightarrow x_2 \in (-1,0)$,

$f(-4) = -14 < 0$, $f(-3) = 1 > 0 \Rightarrow x_3 \in (-4,-3)$.

Aby znaleźć x_1 z dokładnością 0.1 , dzielimy przedział $\langle 0,1\rangle$ na dziesięć równych części i badamy znak funkcji f w punktach podziału. Mamy $f(0.9) > 0$, $f(0.8) < 0 \Rightarrow x_1 \in (0.8;0.9)$.

5.4 Zastosowanie granic funkcji – asymptoty wykresu funkcji

Definicja. *Jeżeli* $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ *, to prosta* $x = x_0$ *jest asymptotą pionową wykresu funkcji* $f(x)$*. Funkcja* f *musi być określona w pewnym* $S_\delta(x_0)$ *, przynajmniej jednostronnym.*

Definicja. *Jeżeli* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ *, to prosta* $y = b$ *jest asymptotą poziomą wykresu funkcji* $y = f(x)$ *w* $(\pm\infty)$ *(obie granice liczymy oddzielnie).*

Definicja. *Jeżeli istnieją skończone granice:* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ *oraz* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$ *, to prosta* $y = ax + b$ *jest asymptotą ukośną wykresu funkcji w* $(\pm\infty)$ *.*

Uwaga . W powyższych definicjach należy rozważać wszystkie cztery kombinacje znaków " $\pm$ ".

Przykłady. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresów następujących funkcji (o ile istnieją):

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, **b)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$, **c)** $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$, **d)** $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$,

e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, **f)** $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, **g)** $f(x) = x - \sqrt{x^2+4}$.

Mamy w **a)** $D_f = (0, +\infty)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, co oznacza, że wykres tej funkcji ma asymptotę pionową prawostronną $x = 0$; natomiast $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, co implikuje, że wykres funkcji ma asymptotę poziomą $y = 0$ w $(+\infty)$.

W **b)** $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, a ponieważ $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^2}{x^2-4} = \pm\infty$, więc proste $x = \pm 2$ są asymptotami pionowymi obustronnymi (skorzystaliśmy z parzystości funkcji f). Mamy ponadto $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$, co oznacza, że wykres funkcji ma asymptotę poziomą $y = 1$ w $(\pm\infty)$.

W **f)** $D_f = \mathbb{R}$, zatem wykres f nie ma asymptot pionowych. Natomiast $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \pm\infty$, oraz $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = 0$, co oznacza, że prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $(\pm\infty)$.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Zadanie 1. Zbadać ciągłość poniższych funkcji i naszkicować ich wykresy:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & dla \;\; x \le 0 \\ 1 + sinx & dla \;\; x > 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 0 & dla \;\; x < 0 \\ e^{-x} & dla \;\; x \ge 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; d) $f(x) = e^{\frac{x}{|x|}}$; e) $f(x) = [x]\, sin\, \pi x$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} & dla \;\; x \ne 0 \\ 1 & dla \;\; x = 0 \end{cases}$; g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & dla \;\; x < 0 \\ x^3 - 1 & dla \;\; x \ge 0 \end{cases}$;

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{|1-x|}{\sqrt{x}-1} & dla \quad x \in \langle 0,1) \cup (1,+\infty) \\ -1 & dla \qquad x = 1 \end{cases}$; i) $f(x) = \left| \frac{x}{|x|} - x^2 \right|$.

Zadanie 2. Wyznaczyć wykresy poniższych funkcji, zadanych jako granica ciągu, zależnego od parametru $x \in \mathbb{R}$. Zbadać ich ciągłość.

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$, $x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + x^n}$, $x \ge 0$.

Zadanie 3. Dobrać stałe $a, b \in \mathbb{R}$, tak aby poniższe funkcje były ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych:

a) $f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x & dla \;\; x > 0 \\ x^2 + b & dla \;\; x \leq 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & dla \;\; x \geq 0 \\ x^3 + 1 & dla \;\; x < 0 \end{cases}$.

Zadanie 4. Zlokalizować pierwiastki poniższych równań i wyznaczyć jeden z nich z dokładnością do 0.1:

a) $x^3 - 3x - 1 = 0$; b) $2^x = 4x$; c) $x^5 - 5x + 2 = 0$.

Zadanie 5. Wykazać, że równanie $e^{-x^2} = x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x_0 > 0$.

Zadanie 6. Wyznaczyć asymptoty wykresów funkcji:

a) $y = x^3 - 3x^2$; b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; c) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;

d) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; e) $y = e^{-x^2}$; f) $y = \frac{e^{-x}}{x}$;

g) $y = \frac{x}{lnx}$; h) $y = x^2 \ln x$; i) $y = (1-x)\sqrt{1-x^2}$;

j) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$; k) $y = x - arctg\, x$; l) $y = arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Zadanie 7. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w (a, b) . Uzasadnić, że funkcje $max\,(f, g)$ i $min(f, g)$ są również ciągłe w (a, b).

Zadanie 8. Uzasadnić, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem:

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} f(x) = [x] - x + (x - [x])^2$$

jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$.

Rozdział VI. POCHODNA FUNKCJI. INTERPRETACJE – FIZYCZNA, EKONOMICZNA I GEOMETRYCZNA. CZĘŚĆ I. PODSTAWOWE WZORY I ZASTOSOWANIA POCHODNYCH

6.1 Pochodna. Interpretacja fizyczna pochodnej funkcji

Definicja. *Niech* $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ *i* $x_0 + h \in (a, b)$.

Wielkość (funkcję zmiennej h*)*

(6.1) $$h \to \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

nazywamy ***ilorazem różnicowym*** *funkcji* f *w punkcie* x_0 *dla przyrostu* h *(*h *może być liczbą dodatnią lub ujemną).*

Celem praktycznego wprowadzenia pojęcia pochodnej, podobnie jak to zrobił historycznie Newton zechcemy zdefiniować prędkość chwilową punktu materialnego w chwili t_0.

Załóżmy, że droga $S(t)$ przebyta przez punkt materialny jest funkcją czasu t.

Prędkość średnia od momentu t_0 do $t_0 + h$ jest określona wzorem

(6.2) $$V_{śr}(h) = \frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{(t_0+h)-t_0} = \frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}.$$

Definiując prędkość chwilową $V_{ch}(t_0)$ w punkcie t_0 (to jest to co nasze oko widzi na liczniku) jako prędkość średnią w dowolnie krótkim czasie (to znaczy h - dowolnie małe, czyli $h \to 0$) , możemy napisać

(6.3) $$V_{ch}(t_o) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}.$$

Jeżeli teraz we wzorze (6.3) drogę $S(t)$ zastąpimy dowolną funkcją f, to analogiczną granicę (zakładamy, że ona istnieje i jest skończona) nazywamy **pochodną funkcji** f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$, czyli

Definicja.

(6.4) $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad .$$

Uwaga 1. Oczywiście $f'(x_0)$ jest liczbą rzeczywistą. Jeżeli x_0 będzie dowolną liczbą $x \in (a,b)$, to $f'(x)$ jest nową funkcją otrzymaną według wzoru (6.4).

Uwaga 2. Jeżeli funkcja f ma skończoną pochodną w punkcie x_0 to mówimy, że f jest funkcją **różniczkowalną** w punkcie x_0.

Uwaga 3. Ponieważ $f'(x_0)$ jest specjalną granicą postaci (6.4) to granica ta istnieje, gdy istnieje granica prawostronna i granica lewostronna.

(6.5)
$$f_+'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{(pochodna prawostronna w } x_0) ,$$
$$f_-'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{(pochodna lewostronna w } x_0) ,$$

oraz ma miejsce równość $f_+'(x_0) = f_-'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0)$.

Uwaga 4. Zgodnie z definicją (6.3) oraz (6.4) otrzymujemy **interpretację fizyczną** pochodnej

$$S'(t_0) = V_{ch}(t_0) ,$$

czyli prędkość chwilowa w momencie t_0 jest pochodną „po czasie” drogi w momencie t_0.

Wzór (6.4) jest kluczem do otrzymywania wzorów na $f'(x)$ w przypadku łatwych granic.

Przykłady

1. $f(x) = x^3\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,.$

Według (6.4) mamy

$$f'(x) = (x^3)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2\,,$$

czyli $(x^3)' = 3x^2.$

2. Stosując dwumian Newtona, analogiczne rachunki dają dla dowolnego naturalnego n:

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

3. Oczywiście z (6.4) wynika natychmiast, że dla dowolnej funkcji stałej $f(x) = c \in \mathbb{R}\,,\ x \in (a,b)$ mamy

$$(c)' = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

4. $f(x) = \sin x\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$

$$f'(x) = (\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} = \cos x\,,$$

dzięki znanej nam granicy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$, czyli $(\sin x)' = \cos x.$

5. $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ \ x > 0\ \ \left(D_f = \langle 0, +\infty)\right)$,

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,$$

czyli $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, dla $x \in (0, +\infty)$.

Zauważmy, że $D_{f'} = (0, +\infty) \neq D_f = \langle 0, +\infty)$, co oznacza, że będą istnieć takie funkcje dla których $D_{f'} \neq D_f$.

6. Następujący przykład jest bardzo ważny, gdyż pokazuje obliczanie $f'(x)$ w przypadkach, gdy funkcja dana jest kilkoma wzorami.

Niech $f(x) = |x|$, wtedy mamy $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$.

W punkcie $x_0 = 0$, gdzie zmienia się wzór definiujący, obliczamy oddzielnie $f'_+(0)$ i $f'_-(0)$. Mamy

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1\ ,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\ \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1\ ,$$

czyli $f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$, zatem $f(x) = |x|$ **nie jest** funkcją różniczkowalną w punkcie $x_0 = 0$.

Analogicznie dla funkcji $f(x) = x^2|x|$, czyli

$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$, mamy $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } x > 0 \\ -3x^2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$,

a w punkcie $x_0 = 0$, $f'(0)$ liczymy oddzielnie, z definicji pochodnej:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{3h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 3h = 0\ ,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{-3h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-3h) = 0\ ,$$

czyli $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$ i możemy napisać

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}.$$

Tym razem widzimy, że f jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

Zauważmy, że w obu przypadkach powyższe funkcje są funkcjami ciągłymi w $\mathbb{R}$.

Zależność pojęć ciągłości i różniczkowalności funkcji w punkcie $x_0 \in D_f$ oddaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Jeżeli f jest funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 , to f jest funkcją ciągłą w x_0.*

Dowód. Istnienie $f'(x_0)$ oznacza istnienie granicy (6.4). Ciągłość $f(x)$ w punkcie x_0 oznacza istnienie granicy $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Pisząc ostatnią równość jak niżej i wykorzystując wzór (6.4), mamy

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0 ,$$

co dowodzi ciągłości f w punkcie x_0.

Powyższy przykład funkcji $f(x) = |x|$ pokazuje, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, bo w punkcie $x = 0$, funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie ma w tym punkcie pochodnej, zatem własność różniczkowalności jest własnością mocniejszą niż ciągłość.

Na zakończenie podamy tabelkę dla pochodnych funkcji „podstawowych”. Niektóre ze wzorów można uzyskać z (6.4).

Tabelka pochodnych funkcji podstawowych

$f(x)$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$f(x)$	$\boldsymbol{f'(x)}$
$c = const$	$\mathbf{0}$	$\sin x$	$\boldsymbol{\cos x}$
$x^{\alpha}, \quad x > 0$	$\boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}, \alpha} \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$\boldsymbol{-\sin x}$
$\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$	$\boldsymbol{-\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0}$	$tg\, x$	$\boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 x}}$
$\sqrt{x}, \ x \geq 0$	$\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0}$	$ctg\, x$	$\boldsymbol{-\frac{1}{\sin^2 x}}$
e^x	$\boldsymbol{e^x}$	$\arcsin x$ $x \in \langle -1,1 \rangle$	$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $x \in (-1,1)$
$\ln x, \quad x > 0$	$\boldsymbol{\frac{1}{x}, \quad x \neq 0}$	$\arccos x$ $x \in \langle -1,1 \rangle$	$\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $x \in (-1,1)$
$a^x, \ a > 0$	$\boldsymbol{a^x \ln a, \ a > 0}$	$arctg\, x$	$\boldsymbol{\frac{1}{1+x^2}}$
$\log_a x, \ x > 0,$ $a > 0, \ a \neq 1$	$\boldsymbol{\frac{1}{x \ln a}, \ x \neq 0}$ $a > 0, \ a \neq 1$	$arcctg\, x$	$\boldsymbol{-\frac{1}{1+x^2}}$

6.2 Podstawowe wzory na obliczanie pochodnej. Przykłady

Obliczanie pochodnych z definicji nie jest sprawą łatwą, bo wymaga obliczania granic funkcji będących symbolem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Jednakże znajomość twierdzeń dotyczących granic funkcji pozwala udowodnić następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w przedziale (a,b), $a < b$. Wtedy różniczkowalne są funkcje: $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$ i mają miejsce wzory.*

(6.6) $$[c \cdot f(x)] = cf'(x), c \in \mathbb{R}$$

(6.7) $$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

(6.8) $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0, x \in (a,b).$$

Ponadto jeżeli ma sens funkcja złożona $f[g(x)]$, to mamy

(6.9) $$(f[g(x)])' = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Przykłady. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 3\sin x$, b) $f(x) = \sqrt{x} - 2\ln x$, c) $f(x) = \sqrt[3]{x}e^x$,

d) $f(x) = x^2 \ln x$, e) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$, f) $f(x) = \sqrt{x}\ln^3 x$,

g) $f(x) = \sin^3 2x$, h) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, j) $f(x) = (\sin x)^{tg\,x}$.

Rozwiązanie. Na mocy wzorów z twierdzenia 2 otrzymujemy:

w przypadku funkcji e) $f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot(1+x^2)-2x\cdot e^{-x}}{(1+x^2)^2}$;

w przypadku funkcji f) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot ln^3 x + \sqrt{x} \cdot 3\, ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$;

w przypadku funkcji g) $f'(x) = 3\, sin^2 2x \cdot cos\, 2x \cdot 2$;

w przypadku funkcji h) $f'(x) = 4\, sin^3 x \cdot cos\, x - 4\, cos^3 x \cdot sin\, x$.

Definicja. *Jeżeli* $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$, *to funkcję*

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = [ln\, f(x)]' ,$$

nazywamy pochodną logarytmiczną funkcji f. *Mamy wtedy*

$$f'(x) = f(x) \cdot [ln\, f(x)]' .$$

Uwaga. Stosując pochodną logarytmiczną łatwiej oblicza się pochodną funkcji wykładniczo-potęgowej:

$$[f(x)]^{g(x)} ,\ f(x) > 0 .$$

Na przykład, jeżeli

$f(x) = (tg\, x)^{sin\, x}, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, $ln\, f(x) = ln\big(tg(x)\big)^{sin\, x} = sin\, x \cdot ln\, tg\, x$,

a różniczkując stronami otrzymujemy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = cos\, x \cdot ln\ tg\, x + \frac{1}{cos\, x} ,$$

skąd $f'(x) = (tg\, x)^{sin\, x}\left[cos\, x \cdot ln\, tg\, x + \frac{1}{cos\, x}\right]$.

Poniższe twierdzenie podaje wzór na pochodną funkcji odwrotnej, o ile ona istnieje (na przykład gdy f jest ciągła i ściśle monotoniczna).

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że funkcja* $y = f(x)$ *, odwzorowuje w sposób różnowartościowy przedział* (a, b) *na* (c, d) *i jest funkcją różniczkowalną oraz* $f'(x) \neq 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$ *, wtedy funkcja odwrotna* $x = g(y) = f^{-1}(y)$ *jest również różniczkowalna i ma miejsce wzór*

$$g'(y) = [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}\bigg|_{x=f^{-1}(y)} .$$

Np. gdy $y = f(x) = tg\, x\,, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, to $f^{-1}(y) = arctg\, y$ i mamy $(arctg\, y)' = cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}\bigg|_{x=arctg\, y} = \frac{1}{1+y^2}$, czyli $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

6.3 Interpretacja ekonomiczna pochodnej

Niech f będzie dowolną funkcją o znaczeniu ekonomicznym (popyt, podaż, dochód, koszt całkowity, itd.).

Najłatwiej, naszym zdaniem, jest zrozumieć pochodną w ekonomii, na przykładzie funkcji kosztu całkowitego $K_c(x)$ wyprodukowania x - sztuk (jednostek) pewnego dobra materialnego. Zauważmy wcześniej, że koszt przeciętny $K_p(x)$ wyprodukowania jednej jednostki dany jest wzorem

$$K_p(x) = \frac{K_c(x)}{x} .$$

Na mocy definicji (6.4) dla $f(x) = K_c(x)$ możemy napisać

$$K_c'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{K_c(x_0+h) - K_c(x_0)}{h} .$$

Ekonomiści powyższy wzór upraszczają pisząc $K_c'(x_0) \approx \frac{K_c(x_0+h)-K_c(x_0)}{h}$, h - małe, przy czym h - małe oznacza $h = 1$.

Mamy więc

$$K_c'(x_0) = K_c(x_0 + 1) - K_c(x_0) , \tag{6.10}$$

(ekonomiści piszą w powyższym wzorze równość, a matematycy napisaliby znak równości przybliżonej „≈”).

Interpretacja wzoru (6.10) jest następująca: lewa strona to wielkość, która nas interesuje czyli $K_c'(x_0)$, a prawa to koszt produkcji jednej sztuki, ale nie dowolnej (jak to jest w koszcie przeciętnym), tylko sztuki (x_0+1) - ej.

Na przykład, przy wyprodukowaniu stu par butów $(x_0 = 100)$, $K_c'(100) = K_c(101) - K_c(100) =$ koszt całkowity wyprodukowania pary 101-ej.

W ekonomii pochodną $f'(x)$ funkcji $f(x)$ nazywamy funkcją marginalną (krańcową). Zatem $K_c'(x)$ jest to koszt marginalny (krańcowy) kosztu całkowitego.

Uwaga. Ważnymi pojęciami w ekonomii, w których występuje również pochodna są

(6.11) elastyczność funkcji $f(x)$: $E_f = \frac{xf'(x)}{f(x)}$

oraz

(6.11’) tempo wzrostu funkcji $f(x)$: $T_f = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Przykład 1. Koszt całkowity wyprodukowania x sztuk pewnego dobra dany jest wzorem: $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x$.

a) Jaki jest koszt przeciętny dla $x = 10$?
b) Jaki jest koszt krańcowy dla $x = 10$?
c) Porównać koszt krańcowy z wielkością $\frac{K(11)-K(10)}{11-10}$.
d) Porównać wielkości $[K(x_0+1) - K(x_0)]$ i $K'(x_0)$.

Wszystkie wielkości obliczamy według podanych wzorów, na przykład koszt krańcowy kosztu całkowitego dany jest wzorem $K'(x) = 3x^2 - 60x$ itd.

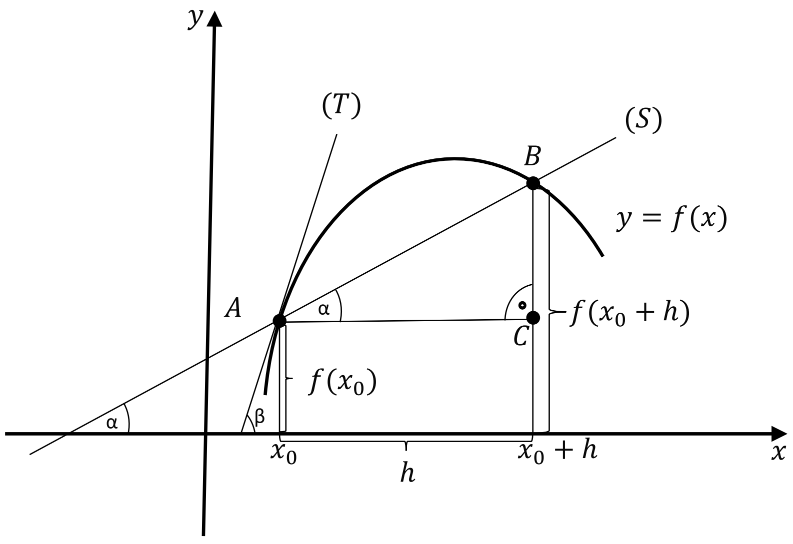
Przykład 2. Funkcja $s(p) = \frac{2p^2+8}{3p+2}$ jest funkcją podaży pewnego dobra, a funkcja $d(p) = \frac{2p^2-p+10}{3p+2}$ jest funkcją popytu (p – cena). Określić cenę równowagi (tj. $s(p) = d(p)$) oraz elastyczność podaży dla ceny równowagi.

Obliczenie ceny równowagi jest oczywiste przez rozwiązanie powyższego równania, a elastyczność podaży jest dana jest wzorem $E_s = \frac{p \cdot s'(p)}{s(p)} = \frac{p(3p^2+4p-12)}{(3p+2)(p^2+4)}$, $E_s(2) = \frac{2(12+8-12)}{8 \cdot 8} = 0.25\%$.

6.4 Interpretacja geometryczna pochodnej

Wiemy już co się dzieje z wykresem funkcji f w takim punkcie x_0 gdzie funkcja jest nieciągła. Zobaczymy teraz co oznacza dla wykresu funkcji f fakt, że istnieje $f'(x_0)$.

Przeanalizujemy wzór (6.4) w małym otoczeniu punktu x_0 .



Niech na wykresie funkcji f będą dane dwa punkty $A = (x_0, f(x_0))$ oraz $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Prostą przechodzącą przez punkty A i B nazywa się sieczną wykresu funkcji f. Tworzy ona kąt α z dodatnim kierunkiem osi OX. W powstałym trójkącie prostokątnym ABC, $\sphericalangle CAB = \alpha$, natomiast $tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ jest współczynnikiem kierunkowym siecznej AB.

Gdy $h \to 0$, to punkt B zbliża się dowolnie blisko do $A = (x_0, f(x_0))$, a w granicy (zakładamy, że istnieje i jest skończona) mamy

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = tg\beta =$ współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $A = (x_0, f(x_0))$.

Zatem geometrycznie, istnienie pochodnej $f'(x_0)$ oznacza istnienie stycznej (T) do wykresu $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Styczna (T) jest więc prostą o równaniu

(6.12) $\qquad (T) \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

Oczywiście w takim punkcie wykres funkcji f nie może się rozerwać.

Przykłady

1. Wyznaczyć kąt jaki tworzy styczna w punkcie (0,0) do wykresu funkcji

a) $f(x) = x^3$, $\qquad$ b) $g(x) = tg\, x$.

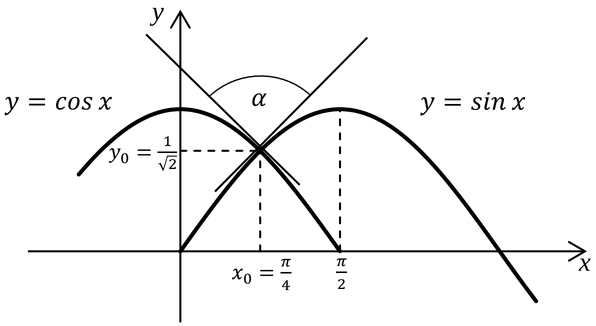
Mamy $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$; $g'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$, $g'(0) = 1$.

a) $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 0 \cdot x \Rightarrow y = 0$ (oś OX),

b) $y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Rightarrow y = x$.

Zauważmy, że w przypadku funkcji $f(x) = x^3$ styczna jest osią OX i przecina ona wykres funkcji w punkcie (0,0).

2. Wyznaczyć kąt pod jakim przecinają się krzywe $y = sin\, x$ i $y = cos\, x$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{4}$.



Przez kąt pomiędzy krzywymi rozumie się kąt pomiędzy stycznymi w punkcie przecięcia się tych krzywych.

Mamy

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_0 = cos\frac{\pi}{4} = sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$(sin\, x)' = cos\, x \rightarrow cos\frac{\pi}{4} = tg\, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$(cos\, x)' = -\, sin\, x \rightarrow -sin\frac{\pi}{4} = tg\, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kąt ostry pomiędzy prostymi:

l_1: $y = m_1 x + b_1$ $\quad m_1 = tg\, \alpha_1$ oraz l_2: $y = m_2 x + b_2$ $\quad m_2 = tg\, \alpha_2$,

dany jest wzorem $tg\, \alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}\right| = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$,

czyli $\alpha = arctg(2\sqrt{2})$.

6.5 Pochodne wyższych rzędów

Pierwsza pochodna f' funkcji f, jako nowa funkcja, może być rozpatrywana dalej pod względem możliwości obliczenia z niej pochodnej.

Definicja. *Jeżeli f' jest funkcją różniczkowalną, to pochodną tej pochodnej nazywamy pochodną rzędu drugiego funkcji f i piszemy*

$$f''(x) = (f'(x))', \;\; x \in D_{f'},$$

(czytamy f „bis”).

Ogólnie *n*-tą pochodną funkcji f , $n \in \mathbb{N}$, definiujemy wzorem

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Oczywiście $f^{(n)}$ ma sens gdy $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna. Przyjmujemy, że $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Przykłady

1. Niech $f(x) = ln\, x$, $x > 0$.

Mamy kolejno $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$,

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3},$$

$$f^{IV}(x) = \left(f'''(x)\right)' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -2 \cdot 3x^{-4}, \;\; itd.$$

Łatwo zgadnąć ogólnie (lub udowodnić indukcyjnie), że

$$(ln\, x)^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \;.$$

2. $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Oczywiście $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$.

3. $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, $x \neq 1$.

Mamy $f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$, …, $f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

Uwaga 1. W przypadku interpretacji fizycznej pochodnej prędkość chwilowa w punkcie t_0 dana jest wzorem $V_{ch}(t_o) = S'(t_0)$.

Ponieważ przyspieszenie $a(t)$ ruchu danego równaniem $S = S(t)$ jest to zmiana prędkości w jednostce czasu, mamy więc wzór

$$a(t) = \big(S'(t)\big)' = S''(t) .$$

Przykład. Punkt materialny porusza się po prostej, a droga przebyta przez niego w czasie t sekund dana jest wzorem: $S(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$, $t \geq 0$.

a) Obliczyć prędkość punktu dla $t = 4$.
b) Obliczyć przyspieszenie tego punktu dla $t = 6$.
c) Kiedy prędkość ruchu jest maksymalna?
d) Kiedy przyspieszenie ruchu jest minimalne?
e) W jakim przedziale czasowym prędkość zmienia swój kierunek?

W naszym przykładzie mamy $V(t) = S'(t) = t(t^2 - 12t + 32) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t_1 = 4$, $t_2 = 8$. Zatem $V(4) = 0$; $V(t) \leq 0$ dla $t \in \langle 4, 8 \rangle$ i w tym przedziale prędkość ma znak ujemny.

Przyspieszenie jest dane wzorem $a(t) = 3t^2 - 24t + 32$ i jego minimalna wartość jest osiągnięta dla $t = 4$.

Uwaga 2. Często celem skrócenia dowodu, bądź łatwiejszej interpretacji czynimy mocniejsze założenia o funkcji niż różniczkowalność.

Definicja. *Niech* $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ *. Mówimy, że funkcja* f *jest* ***klasy*** $\boldsymbol{C^1}$ *w* (a,b) *pisząc* $f \in C^1(a,b)$ *, gdy jest ona różniczkowalna w* (a,b) *i gdy jej pochodna* f' *jest funkcją ciągłą w* (a,b) *.*

Analogicznie $f \in C^2(a,b)$ gdy f jest dwukrotnie różniczkowalna w (a,b) i f'' jest funkcją ciągłą w (a,b) .

Ogólnie: $f \in C^n(a,b), n \in \mathbb{N}$ gdy istnieje $f^{(n)}$ oraz $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą w (a,b). Mamy oczywistą relację (na mocy twierdzenia 1)

$$f \in C^n(a,b) \to f \in C^{n-1}(a,b)\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Przykłady

1. $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, jest funkcją ciągłą w $\mathbb{R}$ i również różniczkowalną bo:

$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ oraz

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^2 \sin\frac{1}{h} = 0$.

Ale $f \notin C^1(a,b)$ bo $f'(x)$ nie jest ciągła w $x = 0$, gdyż nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

2. Udowodnimy, że funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \end{cases}$ jest klasy C^1 w przedziale $\langle 0, +\infty)$, ale f nie należy do klasy C^2 w $\langle 0, +\infty)$.

Oczywiście dla $x \neq 0$ funkcja f jest dowolnej klasy, bo pochodne istnieją jako iloczyn funkcji różniczkowalnych. Problemem jest punkt $x = 0$. Dla $x \neq 0$ mamy $f'(x) = 2x \ln x + x$ i $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. Zatem przyjmując $f'(0) = 0$ widzimy, że $f \in C^1$ w przedziale $\langle 0, +\infty)$. Drugą część konkluzji dowodzimy analogicznie.

Twierdzenie 4. (wzór Leibniza)

Jeżeli funkcje f i g mają skończone pochodne do rzędu n-tego włącznie w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, to ich iloczyn$(f \cdot g)$ ma też skończoną pochodną rzędu n-tego i zachodzi wzór:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0) \,. \tag{6.13}$$

Powyższy wzór znajduje ładne zastosowanie w teorii wielomianów ortogonalnych definiując je za pomocą, tak zwanego wzoru Rodriguesa.

Przykłady. Podać wzór na n-tą pochodną następujących funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$, $x \neq a, b$, $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Zapisując funkcję f w postaci

$$f(x) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)$$

i zauważając, że $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = [(x-a)^{-1}]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ otrzymujemy

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{a-b}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-b)^{n+1}}\right) .$$

b) $f(x) = x^2 e^{px}$, $p \in \mathbb{N}$.

Na mocy wzoru Leibniza mamy

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^{px})^{(n-k)} =$$

$$= x^2 p^n e^{px} + 2xnp^{n-1} e^{px} + n(n-1)p^{n-2} e^{px} ,$$

ponieważ wszystkie wyrazy o wskaźnikach $k \geq 3$ są równe 0 .

Zadania, uzupełnienia i komentarze

Zadanie 1. Obliczyć f' i f'' dla następujących funkcji:

a) $y = x^3 - 3x^2$; b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; c) $y = x + \frac{1}{x}$;

d) $y = \sqrt[5]{x^4}$; e) $y = e^{-x^2}$; f) $y = \frac{e^{-x}}{x}$;

g) $y = \frac{x}{lnx}$; h) $y = x^2 lnx$; i) $y = (1-x)\sqrt{1-x^2}$;

j) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$; k) $y = x - arctg\, x$; l) $y = arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;

m) $f(x) = x^3 \sin x$; n) $f(x) = cos^5 x$; o) $f(x) = e^{tg\, x}$;

p) $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; q) $f(x) = ln\, cos^2 x$; r) $f(x) = (arcsin\, x)^2$;

s) $f(x) = (sin\, x)^{tg\, x}$; t) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$; u) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Zadanie 2. (uwagi i komentarze)

1. W przypadku gdy $x_0 \in D_f$, ale nie istnieje $f'(x_0)$, to bądź $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ (liczby skończone) lub $f'(x_0) = \pm\infty$. W pierwszym przypadku mamy sytuację stycznej prawostronnej różnej od stycznej lewostronnej, a w drugim stycznej prostopadłej do osi OX. Oto dwa przykłady.

a) $f(x) = arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Stosując twierdzenie 2 i tabelę pochodnych obliczamy, że

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & dla \quad x \in (-1,1) \\ \frac{-2}{1+x^2} & dla \quad x \notin (-1,1) \end{cases} .$$

Wtedy równanie stycznej prawostronnej w punkcie $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ ma postać $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}(x-1)$, a stycznej lewostronnej $y-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(x-1)$, bo $f'_-(1)=\frac{\pi}{2}$, $f'_+(1)=-\frac{\pi}{2}$.

Ponadto można wykazać, że

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{-4x}{(1+x^2)^2} & dla \quad x\in(-1,1)\\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & dla \quad x\notin(-1,1)\end{cases},$$

oraz, że f' i f'' nie istnieją w punktach $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-1,-\frac{\pi}{2}\right)$.

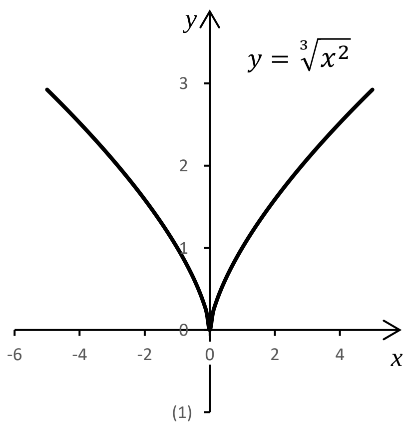
b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$, $D_f=\mathbb{R}$.

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\neq 0$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=+\infty$,

$f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\infty.$

Zatem w punkcie (0,0) mamy styczną prostopadłą do osi OX (jest to oczywiście oś OY) (rysunek niżej).



Zadanie 3. Stosując wzór Leibniza obliczyć n-tą pochodną następujących funkcji:

a) $f(x) = x^n e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; **b)** $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

W przykładzie **b)** obliczyć n-tą pochodną jako pochodną funkcji potęgowej, a porównując wynik ze wzorem Leibniza dla $x^{2n} = x^n \cdot x^n$, otrzymać wzór dla sumy $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Zadanie 4. Całkowity miesięczny koszt produkcji komputerów w pewnej firmie zależy od liczby x wyprodukowanych komputerów i dany jest wzorem: $K_c(x) = 0{,}01x^3 - 8x^2 + 8000x$.

a) Znaleźć liczbę sztuk wyprodukowanych komputerów, dla której koszt przeciętny będzie minimalny. Dla tej wielkości produkcji obliczyć:

b) koszt przeciętny, c) koszt krańcowy, d) elastyczność kosztu całkowitego.

Podać interpretację otrzymanych wyników.

Zadanie 5. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie a. Obliczyć $\lim\limits_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Zadanie 6. Niech $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = min\left(x^2, \frac{1}{|x|}\right).$$

a) Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji f.

b) Podać wykres funkcji f oraz wyznaczyć jej ekstrema lokalne i globalne.

Zadanie 7. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 \cdot |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Podać zbiór tych x, dla których f należy do klasy C^k, $k = 0, 1, \ldots, 4$.

Rozdział VII. ZASTOSOWANIA POCHODNYCH. CZĘŚĆ II. TWIERDZENIA O WARTOŚCI ŚREDNIEJ. EKSTREMA. REGUŁA DE L'HOSPITALA

7.1 Ekstrema globalne i lokalne funkcji

Definicja. *Niech* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}\,,\ a < b$.

Wartość największą: $\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ *i najmniejszą:* $\min\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ *funkcji* f *w przedziale* (a,b) *nazywamy ekstremami globalnymi funkcji* f *w* (a,b).

Jak wiemy z rozdziału IV, gdzie omawiane były własności funkcji ciągłych, w przypadku funkcji **ciągłej** w przedziale **domkniętym** $\langle a,b\rangle$ ekstrema globalne są **zawsze** osiągnięte. Gdy taka sytuacja nie zachodzi to mówimy o $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ i $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$.

Na przykład gdy:

1. $f(x) = \frac{1}{x}\,,\ x \in (0,1)$,

to $\sup\limits_{x\in(0,1)} f(x) = +\infty$, $\inf\limits_{x\in(0,1)} f(x) = 1$.

2. $f(x) = \frac{2x}{x+1}\,,\ x \in \langle 0,+\infty)$,

to $\sup\limits_{x\in\langle 0,+\infty)} f(x) = 2$ oraz $\inf\limits_{x\in\langle 0,+\infty)} f(x) = 0 = \min\limits_{x\in\langle 0,+\infty)} f(x)$.

Definicja. *Niech* $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ *i niech* $x_0 \in (a,b)$ *oraz* $\delta > 0$.

Jeżeli istnieje takie otoczenie $O_\delta(x_0)$ *punktu* x_0 *, że:*

(7.1) $$\underset{x \in O_\delta(x_0)}{\forall} f(x_0) \geq f(x) \quad \big(f(x_0) \leq f(x)\big),$$

to mówimy, że funkcja f *ma w punkcie* x_0 *maksimum (minimum) lokalne.*

Oczywiście gdy funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum globalne, to jest to jednocześnie ekstremum lokalne.

Twierdzenie 1. (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)

Jeżeli funkcja f *ma w punkcie* x_0 *ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to*

(7.2) $$f'(x_0) = 0 .$$

Dowód. Załóżmy, że w punkcie x_0 funkcja f ma maksimum lokalne. Wtedy istnieje $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta :$ $f(x_0) \geq f(x_0 + h)$. A więc możemy napisać:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} \leq 0 \quad \text{dla} \quad h > 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{dla} \quad h < 0 .$$

Przechodząc do granicy z $h \to 0$ otrzymujemy z powyższych nierówności

$$f'_+(x_0) \leq 0 \ \text{ i } \ f'_-(x_0) \geq 0 .$$

Ale f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , więc $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, zatem na mocy powyższych nierówności mamy $f'(x_0) = 0$.

Przypadek minimum lokalnego dowodzi się analogicznie.

Miejsca zerowe $f'(x)$ nazywamy punktami stacjonarnymi funkcji f .

Przykład. Oczywistym jest, że dla $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ mamy $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$, z równością tylko dla $x = 0$. Oznacza to, że w punkcie $x = 0$ funkcja f ma minimum globalne, a więc i lokalne. Zatem na mocy powyższego twierdzenia $f'(0) = 0$, co istotnie ma miejsce bo $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Na odwrót oczywiście tak być nie musi, na przykład dla $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ale f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $x = 0$, bo $f(0) = 0$, ale dla dowolnego $\delta > 0$ mamy $f(x) > 0$ dla $x \in (0, \delta)$ oraz $f(x) < 0$ dla $x \in (-\delta, 0)$.

Uwaga. W przypadku gdy funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0, ale $x_0 \in D_f$, to w takim punkcie może wystąpić ekstremum lokalne.

Przykładem niech będzie funkcja $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ dla której $f'(0)$ nie istnieje, ale w punkcie $x_0 = 0$ jest minimum globalne (więc również lokalne), gdyż $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $f(0) = 0$.

7.2 Twierdzenie Rolle'a

Omówimy cztery twierdzenia o wartości średniej (nazwa bierze się stąd, że występuje w nich punkt pośredni przedziału). Twierdzenie Rolle'a jest najprostszym z nich, a dowody pozostałych sprowadzają się do niego, przez odpowiednie triki rachunkowe.

Twierdzenie 2. (Rolle'a)

Załóżmy, że funkcja $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $a < b$, *spełnia następujące warunki:*

1. f *jest ciągła w* $\langle a, b \rangle$,
2. f *jest różniczkowalna w* (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Wtedy

(7.3) $$\underset{c \in (a,b)}{\exists} f'(c) = 0.$$

Dowód. Gdy f jest funkcja stałą, to konkluzja twierdzenia jest oczywista. Załóżmy więc, że $M = sup\, f(x) = max\, f(x) > f(a)$. Na mocy ciągłości funkcji f istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = M$ ($c \neq b$, bo $f(a) = f(b)$). Na mocy poprzedniego twierdzenia jest $f'(c) = 0$, c.n.d.

Przykład. Niech $W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_k, x \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$, będzie wielomianem mającym n zer rzeczywistych: $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$. Udowodnimy, że pomiędzy sąsiednimi zerami wielomianu W_n leży zero pochodnej $W_n{}'$.

Jest to bezpośredni wniosek z twierdzenia Rolle'a, bowiem jeżeli x' oraz x'', $x' < x''$ są sąsiednim zerami wielomianu $W_n(x)$, to

$$W_n(x') = W_n(x'') = 0 \quad \text{i} \quad \underset{t_0 \in (x', x'')}{\exists} W_n'(t_0) = 0.$$

Ogólnie jeżeli $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1}$ są zerami $W_n{}'(x)$, to $x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < t_{n-1} < x_n$.

7.3 Twierdzenie Lagrange'a i jego zastosowania

Opuszczając warunek $f(a) = f(b)$ w twierdzeniu Rolle'a otrzymujemy

Twierdzenie 3. (Lagrange'a)

Załóżmy, że funkcja $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $a < b$, *spełnia następujące warunki:*

1. f *jest ciągła w przedziale domkniętym* $\langle a, b \rangle$,
2. f *jest różniczkowalna w przedziale otwartym* (a, b).

Wtedy ma miejsce wzór Lagrange'a:

(L)
$$\underset{c \in (a,b)}{\exists} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Przykłady

1. Stosując twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(t) = \sin t$ w przedziale $\langle x, y \rangle$, $x < y$ otrzymamy $\sin y - \sin x = (y - x) \cdot \cos c$, $c \in (x, y)$. Szacując $f'(c)$ otrzymujemy ze wzoru (**L**) odpowiednie nierówności. W naszym przypadku $|\cos c| \leq 1$ co daje

$$\underset{x,y \in \mathbb{R}}{\forall} \quad |\sin y - \sin x| \leq |y - x|.$$

2. Udowodnimy, że $\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} e^x \geq x + 1$.

Niech $x > 0$. Stosując twierdzenie Lagrange'a dla funkcji $f(t) = e^t$ w przedziale $\langle 0, x \rangle$, otrzymujemy $\underset{c \in (0,x)}{\exists} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^c$ to jest

$$e^x - 1 = xe^c \geq x \Leftrightarrow e^x \geq 1 + x.$$

Gdy $x < 0$ to w przedziale $\langle x, 0 \rangle$ mamy $\frac{e^0 - e^x}{0 - x} = e^c$, $c \in (x, 0)$. Ale dla $c < 0$ mamy $e^c < 1$, skąd wynika teza. Znak równości ma miejsce tylko dla $x = 0$, a interpretacja geometryczna nierówności jest oczywista, wykres funkcji $f(x) = e^x$ leży nad styczną w punkcie $(0, 1)$.

3. Udowodnić, że $\underset{0<a<b}{\forall} \frac{b-a}{b} \leq ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b-a}{a}$.

Stosując wzór $(\boldsymbol{L})$ do funkcji $f(t) = ln\,t$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, $0 < a < b$ otrzymujemy: $ln\,b - ln\,a = \frac{1}{c} \cdot (b-a)$, gdzie $c \in (a,b)$, skąd wynika powyższa nierówność.

Uwaga. Kładąc $\frac{b}{a} = 1 + x$, $x > 0$ otrzymujemy:

$$\underset{x\geq 0}{\forall} \frac{x}{x+1} \leq ln(1+x) \leq x .$$

Znak równości ma miejsce tylko dla $x = 0$.

Wniosek 1. Oznaczając $a = x$, $b = x + h$, wzór Lagrange'a (**L**) można zapisać w postaci:

(**L'**) $$\underset{\theta\in(0,1)}{\exists} f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x + \theta \cdot h).$$

Uwaga. Liczba θ we wzorze (**L**) w ogólności zależy od x, to jest $\theta = \theta(x)$. Na przykład stosując wzór (**L**) do funkcji $f(t) = \sqrt{t}$, w przedziale $\langle x, x+1\rangle$, $x > 0$ otrzymamy $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$.

Wyliczając θ z powyższego wzoru można wykazać, że $\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{2}$.

Wniosek 2. Jeżeli oznaczymy $\underset{x\in(a,b)}{sup} f'\ (inf\ f') = M'(m')$ to

(7.4) $$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M'(b-a),$$

lub ogólnie, gdy $|f'(x)| \leq K$ dla każdego $x \in (a,b)$, to

(7.5) $$|f(b) - f(a)| \leq K(b-a).$$

Uwaga. Twierdzenie Lagrange'a jest najczęściej stosowanym twierdzeniem o wartości średniej. Wynika to między innymi z faktu prostych i łatwych do sprawdzenia założeń. Dowód twierdzenia Lagrange'a sprowadza się do wykorzystania twierdzenia Rolle'a dla funkcji:

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

która jak łatwo sprawdzić spełnia założenia twierdzenia Rolle'a.

Wniosek 3. Jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, $a < b$, to $f(x) = const$ w (a, b).

Wniosek 4. Jeżeli $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$, $a < b$, to $f(x) = g(x) + const$, czyli $f(x)$ i $g(x)$ różnią się stałą.

Przykłady. Wnioski **3.** i **4.** mają bardzo ładne zastosowania do dowodu tożsamości dla funkcji cyklometrycznych.

1. Udowodnić wzór:

(7.6) $$\underset{x \in \langle -1,1 \rangle}{\forall} \ arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Oznaczając $f(x) = arcsin\, x + arccos\, x$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$, widzimy, że $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$, $x \in (-1, 1)$ i $g'(x) = 0$, zatem $f(x) = g(x) + c$, dla wszystkich $x \in (-1, 1)$.

Dla $x = 0$, mamy $f(0) = arcsin\, 0 + arccos\, 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, $g(0) = \frac{\pi}{2}$, czyli $c = 0$ i stąd prawdziwość wzoru (7.6), nawet dla $x \in \langle -1,1 \rangle$, bo równość (7.6) dla $x = \pm 1$ sprawdzamy bezpośrednio.

2. Udowodnić wzór:

(7.7)
$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \\ = \begin{cases} \pi - 2arctg\,x & dla \quad x \geq 1 \\ 2arctg\,x & dla \quad x \in \langle -1,1\rangle \\ -\pi - 2arctg\,x & dla \quad x \leq -1 \end{cases}.$$

Oznaczając: $f(x) = arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, $g(x) =$ prawa strona powyższego wzoru, mamy

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & dla \quad |x| < 1 \\ \frac{-2}{1+x^2} & dla \quad |x| > 1 \end{cases}, \quad g'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & dla \quad |x| < 1 \\ \frac{-2}{1+x^2} & dla \quad |x| > 1 \end{cases},$$

natomiast w punktach $x = \pm 1$ pochodne f' i g' nie istnieją, czyli $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. Stąd

$$\underset{x\in\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}}{\forall}\ f(x) = g(x) + c\,.$$

Dla $x = 0$ mamy $f(0) = g(0) + c \Leftrightarrow 0 = c \Rightarrow c = 0$, więc wzór środkowy jest prawdziwy. Dla $x \to \pm\infty$ mamy:

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ g(+\infty) = \pi - 2\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow c = 0\,,$$

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ g(-\infty) = -\pi + 2\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow c = 0\,.$$

Zatem wzór (7.7) jest prawdziwy dla każdego $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. Dla $x = \pm 1$ prawdziwość wzoru sprawdzamy przez bezpośrednie podstawienie.

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że funkcja* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest funkcją różniczkowalną w* (a,b). *Wtedy*

(7.8)
$$f \uparrow_{(a,b)} \Leftrightarrow \underset{x\in(a,b)}{\forall}\ f'(x) \geq 0$$
$$(f \downarrow_{(a,b)} \Leftrightarrow \underset{x\in(a,b)}{\forall}\ f'(x) \leq 0)\,.$$

Dowód. Fakt, że monotoniczność funkcji f implikuje $\underset{x\in(a,b)}{\forall} f'(x) \geq 0$, wynika z definicji monotoniczności f bo:

$$f \uparrow_{(a,b)} \Leftrightarrow \underset{x,h\in(a,b)}{\forall} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} > 0 \underset{h\to 0}{\Longrightarrow} f'(x) \geq 0 .$$

Wzór Lagrange'a zapisany w postaci $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $c \in (x_1, x_2)$ dla każdego $x_1, x_2 \in (a, b)$ i $x_1 < x_2$, daje $f(x_2) > f(x_1)$, dzięki założeniu $f'(c) > 0$, zatem funkcja f jest rosnąca w (a, b).

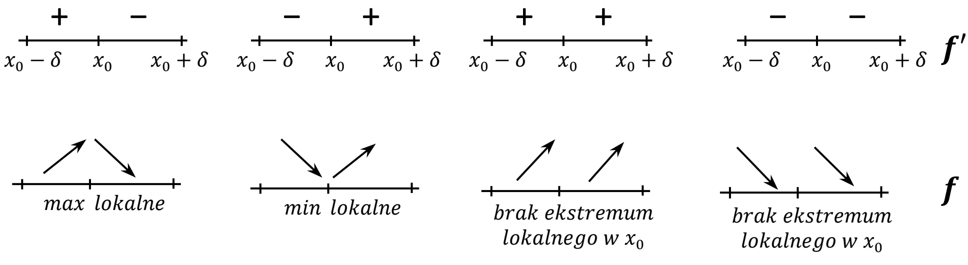
Powyższe twierdzenie oraz definicja ekstremum lokalnego dają następujący bardzo ważny wniosek praktyczny.

Wniosek. *(warunek dostateczny na ekstremum lokalne funkcji)*
Załóżmy, że funkcja f spełnia następujące warunki:

1. jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$;
2. $f'(x_0) = 0$;
3. $f'(x)$ ma różne znaki w otoczeniach $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$.

Wtedy funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 (maksimum gdy f' zmienia znak z „+" na „−"; minimum gdy zmienia znak z „−" na „+"). W przypadku gdy nie nastąpi zmiana znaku f' w x_0, ekstremum lokalne nie istnieje.

Poniższy szkic obejmuje wszystkie przypadki wspomniane wyżej.



Przykład. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Mamy $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0$, zatem punktami stacjonarnymi są $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 3$. W sąsiedztwie punktu x_2 , pochodna f' zmienia znak z „$-$” na „+” , więc w tym punkcie jest minimum lokalne. Natomiast w sąsiedztwie punktu $x_1 = 0$, f' nie zmienia znaku, zatem w tym punkcie ekstremum lokalne nie wystąpi.

7.4 Twierdzenie Cauchyego i reguła de l'Hospitala

Uogólnieniem twierdzenia Lagrange'a na dwie funkcje jest twierdzenie Cauchyego, które pozwala udowodnić tak zwaną regułę de l'Hospitala, niesłychanie ważną przy obliczaniu granic funkcji.

Twierdzenie 5. (Cauchyego)

Załóżmy, że funkcje f i g są:

1. *ciągłe w* $\langle a,b\rangle$, $a<b$,
2. *różniczkowalne w* (a,b) ,
3. $g'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a,b)$.

Wtedy ma miejsce wzór

(7.9)
$$\underset{c\in(a,b)}{\exists} \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$h(x) = [f(a) - f(x)] + [g(x) - g(a)]\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} .$$

Funkcja ta jest dobrze zdefiniowana w $\langle a, b\rangle$ oraz jak łatwo sprawdzić spełnia założenia twierdzenia Rolle'a $(g(b) - g(a) \neq 0$ jest konsekwencją faktu $g'(x) \neq 0$ i twierdzenia Lagrange'a dla funkcji g), zatem

$$\underset{c\in(a,b)}{\exists} h'(c) = 0 \Leftrightarrow (7.9)\,,$$

co kończy dowód. W przypadku $g(x) = x$ otrzymujemy wzór Lagrange'a.

Twierdzenie 6. (Reguła de l'Hospitala dla symbolu $\left[\frac{0}{0}\right]$**)**

Załóżmy, że funkcje rzeczywiste f i g spełniają następujące warunki:

1. *są ciągłe w przedziale* $\langle x_0, x_0 + \delta\rangle$, $\delta > 0$;
2. *różniczkowalne w przedziale* $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$;
3. $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
4. $g(x) \neq 0$ *w* $\langle x_0, x_0 + \delta\rangle$
5. *istnieje granica* $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Wtedy istnieje granica (skończona lub nieskończona)

(7.10) $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i ma miejsce wzór:* $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Uwagi.

1. Reguła de l'Hospitala **(RH)** pozostaje prawdziwa dla granicy funkcji $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i granicy lewostronnej $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.

2. Reguła de l'Hospitala pozostaje prawdziwa dla symbolu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

3. Założenia **(RH)** 1 - 4 są natychmiastowo sprawdzalne, obliczeń wymaga tylko granica ilorazu pochodnych. Założenie 5 nie musi być spełnione, a mimo to istnieje granica ilorazu funkcji. Przykładem jest tutaj granica

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 1\cdot 0 = 0 .$$

Reguły de l'Hospitala w tym przykładzie nie można stosować, nie istnieje bowiem granica $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$.

Przykłady. Obliczyć granice następujących funkcji:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \frac{1}{2}$;

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}\ (m,n\in\mathbb{N}\,, m,n>2) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}$;

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$;

d) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-tg\,x}{xtg\,x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{tg\,x + x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x-1}{\sin x\cdot\cos x + x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos x\cdot\cos x + \sin x(-\sin x)+1} = \frac{0}{2} = 0$;

e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{x-tg\,x}{xtg\,x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 x-1}{\sin x\cdot\cos x + x} = \frac{0-1}{1\cdot 0+\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$;

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ \ (n\in\mathbb{N}) = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n} = 0$;

g) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = [(+\infty)-(+\infty)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = [(+\infty)-(-\infty)] = +\infty$,

czyli ten przypadek nie wymagał stosowania (**RH**) ;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = [(+\infty)\cdot 0] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \cdots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\cdot2\cdot1}{e^x} = 0$;

i) $\lim\limits_{x\to1^+} (2-x)^{\frac{1}{x-1}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\ln(2-x)} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln(2-x)}{x-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{-1}{2-x}}{1}} = e^{-1}$;

j) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x} = [0^0] = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\sin x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x} = e^0 = 1$, bo

$\lim\limits_{x\to0^+} \sin x\cdot\ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cos x} =$

$= -\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin^2 x}{x}\cos x = -\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x}\sin x\cos x = -1\cdot1\cdot0\cdot1 = 0$.

7.5 Wzór Taylora

Wzór Taylora dla wielomianu

Rozważmy wielomian stopnia n-tego ($a_n \neq 0$):

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\ ,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ a_k\in\mathbb{R}\ ,\ k = 0,1,\ldots,n.$$

Dla dowolnego $x_0\in\mathbb{R}$ wielomian $P(x)$ możemy również zapisać w postaci $P(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n$, gdzie współczynniki A_k można wyznaczyć, zauważając, że

$P(x_0) = A_0$

$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + \cdots + nA_n(x-x_0)^{n-1}$, $P'(x_0) = A_1$,

$P''(x) = 2A_2 + \cdots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}$, $P''(x_0) = 2A_2$

i ogólnie $P_n(x_0) = n!\,A_n$.

Zatem dla dowolnego $x_0\in\mathbb{R}$, wielomian $P(x)$ przyjmuje postać

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Jak więc widzimy dowolny wielomian $P(x)$ jest zadany w sposób jednoznaczny przez wartości P, $P', \ldots, P^{(n)}$ w dowolnym punkcie x_0.

Powstaje pytanie czy analogicznie nie da się przedstawić dowolnej, odpowiednio regularnej funkcji f. Okazuje się, że jest to możliwe przy pewnych ograniczeniach.

Twierdzenie 7. (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a)

Załóżmy, że funkcja $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ *spełnia następujące warunki:*

1. *ma w* $\langle a, b \rangle$ *ciągłe pochodne do rzędu* n *;*
2. *ma w* (a, b) *pochodną rzędu* $(n+1)$ *.*

Wtedy

(7.11)
$$\underset{c \in (a,b)}{\exists} f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots +$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \boldsymbol{R_n}(a, b), \quad \textit{gdzie}$$

(7.12)
$$\boldsymbol{R_n}(a, b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

W szczególności gdy $a = 0$, $b = x$, otrzymujemy tzw. wzór Maclaurina

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Uwaga. Istnieje wiele postaci wzorów Taylora dla funkcji klasy C^{n+1}. Ogólnie można je zapisać w postaci $f(x) = W_n(x) + \boldsymbol{R_n}$, gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem jak wyżej, a $\boldsymbol{R_n}$ nazywa się resztą wzoru Taylora i ma różną postać w zależności od metody użytego dowodu (reszta w postaci całkowej, Cauchy'ego, itd. [3]).

Wśród rozlicznych zastosowań wzoru Taylora podamy dwa: są to dowodzenie nierówności oraz przybliżone obliczanie wartości funkcji.

Przykłady

1. Obliczyć wartość $\sqrt{e}$ z dokładnością do 10^{-4}.

Zadanie sprowadza się do oszacowania reszty $\boldsymbol{R_n}$ we wzorze Maclaurina dla funkcji $f(x) = e^x$ oraz $x = \frac{1}{2}$. Mamy:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} + \boldsymbol{R_n}.$$

Szacując resztę w postaci Lagrange'a otrzymujemy kolejno

$$\boldsymbol{R_n} = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{\sqrt{e}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)!2^{n+1}} = \frac{1}{2^n(n+1)!} < \frac{1}{10000} \Leftrightarrow$$

$2^n(n+1)! > 10^4$.

Sprawdzamy bezpośrednio, że dla

$n = 3$, $2^3 = 8$, $4! = 24$; $n = 4$, $2^4 = 16$, $5! = 120$;

$n = 5$, $2^5 = 32$, $6! = 720$. Zatem wystarczy wziąć sześć wyrazów wzoru Taylora aby z dokładnością 10^{-4} otrzymać wartość $\sqrt{e}$, czyli mamy: $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$.

2. Udowodnić nierówność:

$$\underset{x\geq 0}{\forall} \quad 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \leq \sqrt[3]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3$$

Należy napisać wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ z resztą $\boldsymbol{R_2}$ oraz $\boldsymbol{R_3}$ i uwzględnić znaki tych reszt.

Wzór Taylora pozwala udowodnić następujący ogólny warunek dostateczny na ekstremum lokalne funkcji.

Twierdzenie 8. (warunek dostateczny na ekstremum lokalne)

Załóżmy, że funkcja f spełnia następujące warunki:

1. *funkcja f jest klasy C^n w otoczeniu punktu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$;*
2. $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0$ *;*
3. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Wtedy w punkcie x_0 jest:

1. *minimum lokalne funkcji f gdy $n = 2k$ i $f^{(n)}(x_0) > 0$;*
2. *maksimum lokalne funkcji f gdy $n = 2k$ i $f^{(n)}(x_0) < 0$;*
3. *nie ma ekstremum funkcji f gdy $n = 2k + 1$.*

Dowód. Ze wzoru Taylora z resztą Lagrange'a mamy

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n ,$$

$$x_0 < c < x \text{ lub } x < c < x_0 ,\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Prawa strona zależy tylko od znaku $f^{(n)}(c) = f^{(2k)}(c)$ oraz $(x - x_0)^{2k}$. Ciągłość $f^{(n)}$ zapewnia nam ten sam znak $f^{(n)}$ w punkcie c, co w punkcie x_0 , co kończy dowód.

Wniosek. Przypadek $n = 2$ jest szczególnie ważny, ze względu na przyszłą analogię dla funkcji wielu zmiennych. Zatem, gdy funkcja f jest klasy C^2 w otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ punktu x_0 i $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) \neq 0$, to w punkcie x_0 funkcja f ma ekstremum lokalne (minimum gdy $f''(x_0) > 0$; maksimum gdy $f''(x_0) < 0$) .

Przykład. Nawet tak zaawansowane kryterium nie rozstrzyga wszystkich problemów istnienia ekstremów lokalnych. Na przykład funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & dla \quad x \neq 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \end{cases},$$

ma oczywiście minimum lokalne (a nawet najmniejszą wartość) w punkcie $x = 0$. Jest to funkcja klasy C^∞ (to znaczy ma pochodne wszystkich rzędów), ale dowodzi się niełatwo, że $f'(0) = f''(0) = \cdots = 0$.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Zadanie 1. Stosując regułę de l'Hospitala obliczyć granicę funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+3x-4}{x^2-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{1-\cos x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x-\sin x}{x\cdot \sin x}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(tg\,\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$; h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$; i) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

Zadanie 2. Sprawdzić czy funkcje

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & dla \quad x \leq 0 \\ 1 - x^3 & dla \quad x \geq 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

spełniają założenia twierdzenia Rolle'a w przedziale $\langle -1, 1\rangle$.

Zadanie 3.* Uzasadnić, że każda z następujących funkcji $g \in C^1 \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$:

a) $g(x) = tg\,\frac{x}{2}$; b) $g(x) = \frac{x}{\sin x}$; c) $g(x) = \frac{x-\sin x}{x\cdot \sin x}$; d) $g(x) = \frac{x-tg\,x}{x\cdot tg\,x}$.

Wskazówka. Obliczyć $g(0)$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $g'(0)$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (ewentualnie jako odpowiednie granice) oraz $g'(x)$.

Na przykład w punkcie d) mamy

$$g(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - tg\,x}{x\cdot tg\,x} = 0\,, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{x - tg\,x}{xtg\,x} = -\frac{2}{\pi}\,,$$

na mocy przykładów d) i e) ze strony 128. Ponadto mamy

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{sin^2\,x}\ ,$$

skąd otrzymujemy $g'(0) = \lim_{x\to 0} g'(x) = -\frac{1}{3}$, na mocy reguły de l'Hospitala.

Zadanie 4. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - x^2) & dla \quad x \in \langle 0, 1\rangle \\ \frac{1}{x} & dla \quad x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$.

Zastosować wzór (**L**) do funkcji f w przedziale $\langle 0, 2\rangle$ i wyliczyć wartość pośrednią c .

Zadanie 5. Stosując wzór Taylora - Maclaurina dla odpowiednich funkcji udowodnić nierówności:

a) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \left|sin\,x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le \frac{|x|^5}{5!}$; b) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \left|cos\,x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^4}{4!}$.

Zadanie 6. Stosując odpowiednio wzór Taylora - Maclaurina dla funkcji $f(x) = ln(1 + x)\,, x > 0$, udowodnić nierówności

a) $\underset{x\ge 0}{\forall}\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \le ln(1 + x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

b) Ile należy wziąć wyrazów we wzorze Taylora - Maclaurina dla funkcji $f(x) = ln(1 + x)$, aby otrzymać wartość $ln\,2$ z dokładnością do 0.001.

c) Jaką dokładność dają nierówności z punktu a) dla wartości $ln\,2$.

Rozdział VIII. ZASTOSOWANIA POCHODNYCH. CZĘŚĆ III. DOWODZENIE NIERÓWNOŚCI

Jednym z najważniejszych zastosowań pochodnych jest dowodzenie nierówności. Mogą one mieć rożny zapis oraz być zależne od jednej, bądź wielu zmiennych.

Wyróżnimy cztery metody i pokażemy kilka przykładów na każdą z nich.

8.1 Metoda I. Zastosowanie monotoniczności funkcji

Niech f i g będą ciągłe w $\langle a, b\rangle$ i różniczkowalne w (a, b). Najbardziej typowa nierówność ma postać:

(8.1) $$\underset{x\in\langle a,b\rangle}{\forall} f(x) \geq g(x)\ ,$$

co oznacza, że wykres funkcji $f(x)$ leży nad wykresem $g(x)$ w całym przedziale $\langle a, b\rangle$. Punkty końcowe $x = a$ i $x = b$ sprawdzamy oddzielnie, a ponadto ważną rzeczą jest przypadek równości w (8.1), który również powinien być dyskutowany. Nierówność (8.1) zapiszmy w postaci:

(8.2) $$\underset{x\in\langle a,b\rangle}{\forall} f(x) - g(x) = h(x) \geq 0,$$

która zachodzi (co łatwo widać z ilustracji graficznej), o ile spełnione są następujące warunki:

(8.3) $$\begin{cases} 1. \ \ h(a) \geq 0 \\ 2. \ \underset{x\in(a,b)}{\forall} h'(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow h(x)\uparrow_{(a,b)} \Rightarrow \underset{x\in\langle a,b\rangle}{\forall} h(x) \geq 0.$$

Nazwijmy tę metodę „metodą startującego samolotu”.

Przykłady

1. Udowodnić nierówności:

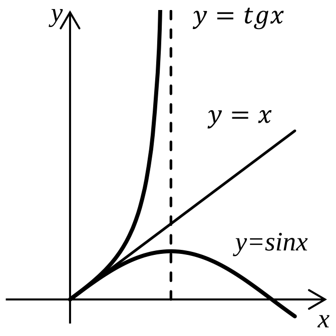
$$\underset{x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right)}{\forall} \quad \sin x \le x \le tg\, x\ .$$

Nierówność $\sin x \le x$ jest równoważna nierówności $f(x) = x - \sin x \ge 0,\ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Mamy: $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ co implikuje $f(x) \ge 0$ dla $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Analogicznie: $x \le tg\, x \Leftrightarrow g(x) = tg\, x - x \ge 0, x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mamy $g(0) = 0$ i $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, co implikuje $g(x) > 0$ dla $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$. Zatem obie nierówności **1** są prawdziwe, a znak równości zachodzi tylko dla $x = 0$.



Interpretacja geometryczna nierówności **1.** oznacza, że prosta $y = x$ jest styczną, do wykresów funkcji $y = \sin x$ i $y = tg\, x$ w punkcie (0,0) , rozdzielając przy tym te wykresy.

Wniosek. Z prawej strony nierówności **1.** wynika, że $\frac{\sin x}{x} \ge \cos x\ , x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Uwaga. Często spotykać będziemy różne „wzmocnienia” znanych nierówności. Na przykład interesującym wzmocnieniem nierówności **1.** jest tak zwana **nierówność Huyghens'a**:

2. $\underset{x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right)}{\forall} \; 2\sin x + tg\, x \geq 3x$.

Istotnie, jeżeli oznaczymy $f(x) = 2\sin x + tg\, x - 3x$, to $f(0) = 0$ oraz $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = [t = \cos x] =$ $= \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{t^2} = \frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2} > 0$ dla $t > 0$, to jest dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Zatem metoda „startującego samolotu" dowodzi prawdziwości **2.**

3. $\underset{x\geq 0}{\forall} \; x - \frac{1}{2}x^2 \leq ln\,(1+x) \leq x$.

Znak równości ma miejsce tylko dla $x = 0$.

Oznaczmy $f(x) = ln\,(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$. Mamy: $f(0) = 0$ oraz $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1+x^2-x+x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0$ dla $x > 0$, co implikuje $f(x) \geq 0$. Analogicznie, gdy $g(x) = x - ln\,(1+x)$, to $g(0) = 0$ oraz $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$ dla $x > 0$, co implikuje $g(x) \geq 0\,, x \geq 0$.

4. Przedstawiając prawą stronę nierówności **3.** w postaci

$$\underset{x>0}{\forall} \; ln\, x \leq x - 1 ,$$

(ze znakiem równości tylko dla $x = 1$) możemy z niej otrzymać inną ważną nierówność. Otóż podstawienie $x = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ daje: $ln\, e^t \leq e^t - 1$, co oznacza prawdziwość nierówności

5. $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; e^x \geq x + 1$,

ze znakiem równości tylko dla $x = 0$.

Uwaga. Pokażemy teraz, jak z nierówności $\ln x \leq x - 1$ przez odpowiedni dobór $x > 0$ można otrzymać elegancki dowód **nierówności Cauchy'ego**:

6. $\underset{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \\ n \geq 2}}{\forall} \; G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A_n$.

Napiszmy nierówność: $\ln x \leq x - 1, \; x \in (0, +\infty)$ dla:

$$x = \frac{x_1}{A_n}, \; x = \frac{x_2}{A_n}, \ldots, x = \frac{x_n}{A_n}, \text{ gdzie } x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Otrzymamy: $\ln \frac{x_1}{A_n} \leq \frac{x_1}{A_n} - 1$, $\ln \frac{x_2}{A_n} \leq \frac{x_2}{A_n} - 1$, … , $\ln \frac{x_n}{A_n} \leq \frac{x_n}{A_n} - 1$.

Dodając stronami powyższe nierówności oraz wykorzystując prawa działań na logarytmach i definicję A_n otrzymujemy:

$$\ln \frac{x_1}{A_n} + \ln \frac{x_2}{A_n} + \cdots + \ln \frac{x_n}{A_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{A_n} - n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A_n^n} \leq \frac{n A_n}{A_n} - n = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 x_2 \cdots x_n \leq A_n^n \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad ,$$

a znak równości ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$1 = \frac{x_1}{A_n} = \frac{x_2}{A_n} = \cdots = \frac{x_n}{A_n} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n \, .$$

Uwaga. Istnieje wiele dowodów nierówności $G_n \leq A_n$, a przedstawiony powyższy dowód jest jednym z najprostszych. Pokazuje on z jednej strony ładne zastosowanie nierówności $\ln x \leq x - 1$ do otrzymania nierówności dla funkcji wielu zmiennych, a z drugiej strony rozstrzyga ważny przypadek znaku równości.

7. $\underset{\substack{a,b>0 \\ p\in\langle 0,1\rangle}}{\forall} \ (a+b)^p \le a^p + b^p$.

Nierówność **7.** jest oczywiście prawdziwa dla $p=0$, a przypadek $p=1$ daje znak równości, więc możemy założyć, że $p\in(0,1)$. Zawsze możemy założyć, że na przykład $a>b \Rightarrow \frac{b}{a} = x\in(0,1)$.

Dzieląc **7.** przez a^p otrzymujemy:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^p \le 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p \ \Leftrightarrow \ \underset{\substack{x\in(0,1) \\ p\in(0,1)}}{\forall} \ (1+x)^p \le 1^p + x^p \ .$$

Wykażemy, że

$$\underset{x\in(0,1)}{\forall} \ f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p \ge 0 \ ,$$

stosując „metodę startującego samolotu”.

Mamy

$f(0)=0$, $f'(x) = px^{p-1} - p(1+x)^{p-1} = p[x^{p-1} - (1+x)^{p-1}] =$ $= p\left[\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right]$. Z ostatniej postaci $f'(x)$ wynika, że $f'(x)>0$ dla $x\in(0,1)$ i $p\in(0,1)$, a zatem istotnie $f(x)\ge 0$ dla $x\in\langle 0,1\rangle$.

Szczególnie ważnym przypadkiem nierówności **7.** jest $p=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Otrzymujemy wtedy nierówność $\sqrt[n]{a+b} \le \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

8. $\underset{0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}}{\forall} \ \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta}$; $\frac{tg\,\alpha}{\alpha} < \frac{tg\,\beta}{\beta}$.

Powyższe nierówności oznaczają, że funkcja $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ jest funkcją malejącą, a funkcja $g(t) = \frac{tg\,t}{t}$ jest funkcją rosnącą w przedziale $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Mamy $f'(t) = \frac{\cos t \cdot t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t \cdot (t - tg\, t)}{t^2} < 0$ ponieważ $tg\, t > t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, skąd wynika, że $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ jest funkcją malejącą w $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Analogicznie dla $g(t) = \frac{tg\, t}{t}$ mamy:

$$g'(t) = \frac{\frac{1}{\cos^2 t} \cdot t - tg\, t}{t^2} = \frac{t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin t}{\cos t}}{t^2} = \frac{t - \sin t \cdot \cos t}{t^2 \cos^2 t} \geq \frac{\sin t (1 - \cos t)}{t^2 \cos^2 t} > 0,$$

skąd wynika, że $g(t)$ jest funkcją rosnącą w $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ to jest $\frac{tg\, \beta}{\beta} > \frac{tg\, \alpha}{\alpha}$, na mocy definicji monotoniczności funkcji.

8.2 Metoda II. Zastosowanie twierdzeń o wartości średniej

Najczęściej stosowanym twierdzeniem o wartości średniej do dowodu nierówności jest **wzór Lagrange'a**, dający możliwość nierówności „dwupunktowych”:

Twierdzenie. (Lagrange'a)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w $\langle a, b\rangle$ i różniczkowalna w (a, b), to ma miejsce równość (wzór Lagrange'a):

(L)
$$\underset{c \in (a,b)}{\exists} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \ .$$

Oznaczając $m'(M') = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} (\sup f'(x))$, możemy napisać nierówność:

(8.4)
$$m' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M' \ .$$

Przykłady

1. $\underset{x\geq 0}{\forall}\ \frac{x}{1+x^2} \leq arctg\, x \leq x$.

Niech $f(t) = arctg\, t$, $t \in \langle 0, x\rangle$, $x > 0$. Wzór (**L**) daje:

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{1+c^2}$, $c \in (0, x)$. Ale $1 < 1 + c^2 < 1 + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq arctg\, x \leq x$.

Dla $x = 0$ zachodzi znak równości.

2. $\underset{x\geq 0}{\forall}\ \frac{x}{1+x} \leq ln(1 + x) \leq x$.

Niech $f(t) = ln(1 + \mathrm{t})$, $t \in \langle 0, x\rangle$, $x > 0$. Wzór (**L**) daje:

$\frac{ln(1+x)-ln\, 1}{x-0} = \frac{1}{1+c}$, $c \in (0, x)$, to jest $\frac{ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}$.

Ale $\frac{1}{1+c} < 1$ i $\frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+x}$ bo $c \in (0, x)$, skąd otrzymujemy nierówność **2**. Dla $x = 0$ mamy znak równości.

Wniosek. Kładąc $x = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ otrzymamy:

(8.5) $$\frac{1}{k+1} < ln(k + 1) - ln(k) < \frac{1}{k} \quad .$$

Przykłady

1. Nierówność (8.5) ma ładne zastosowanie do zbadania zbieżności trzech ciągów:

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$, $\quad \gamma_n = H_n - ln(n + 1)$, $\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Stosując nierówności (8.5) dla $k = 1,2, \dots, n$ otrzymujemy

$\frac{1}{2} < ln\, 2 - ln\, 1 < 1$,

$\frac{1}{3} < ln\, 3 - ln\, 2 < \frac{1}{2}$,

$\vdots$,

$\frac{1}{n+1} < ln(n+1) - ln\, n < \frac{1}{n}$,

skąd po dodaniu otrzymujemy

$$H_{n+1} - 1 = H_n - \frac{n}{n+1} < ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n .$$

Z powyższych nierówności wynikają następujące wnioski.

1. $H_n > ln(n+1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > ln(n+1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, a więc ciąg (H_n) jest rozbieżny do $(+\infty)$.

2. Z drugiej strony otrzymujemy $\gamma_n = H_n - ln(n+1) > 0$ oraz $H_n - ln(n+1) < \frac{n}{n+1} < 1$, co oznacza, że ciąg (γ_n) jest ograniczony z góry przez 1. Wykażemy, że ciąg (γ_n) jest rosnący.

Mamy: $\gamma_n = H_n - ln(n+1)$, $\gamma_{n+1} = H_{n+1} - ln(n+2)$.

Zatem $\gamma_n - \gamma_{n+1} = H_n - ln(n+1) - H_{n+1} + ln(n+2) =$

$= ln\frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1} = ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} < 0$ na mocy (8.5). Oznacza to, że

$\gamma_n - \gamma_{n+1} < 0 \Leftrightarrow \gamma_{n+1} > \gamma_n \Rightarrow (\gamma_n) \uparrow$, a więc ciąg (γ_n) jako rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.

Oznaczając $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$, mamy $\gamma \in (0,1)$. Stała γ nosi nazwę stałej Eulera-Mascheroniego i jej wartość przybliżona wynosi $\gamma \approx 0.577 \dots$.

Nie wiadomo czy γ jest liczbą wymierną, czy niewymierną.

3. Niech $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Wykażemy, że ciąg (s_n) jest zbieżny oraz, że $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = ln\,2$.

Podstawiając do nierówności (8.5) $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$, otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} < ln(n+1) - ln(n) < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+2} < ln(n+2) - ln(n+1) < \frac{1}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+n} < ln(2n) - ln(2n-1) < \frac{1}{2n-1} \end{array}\right\} .$$

Sumując powyższe nierówności stronami otrzymujemy

$$s_n < ln\left(\frac{2n}{n}\right) = ln\,2 < s_n + \frac{1}{2n} ,$$

skąd wynika, że $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = ln\,2$. Zauważmy, że $s_n = H_{2n} - H_n$.

Przykłady. Uogólnieniem wzoru Lagrange'a jest wzór Taylora uwzględniający pochodne wyższych rzędów niż jeden. Otrzymywanie odpowiednich nierówności sprowadza się do określenia znaku reszty.

1. Udowodnić nierówność $\underset{x\geq 0}{\forall}\ e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Wykorzystując wzór Taylora - Maclaurina możemy napisać:

$$\underset{x\geq 0}{\forall}\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^{\theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ ,\ \theta \in (0,1)\ .$$

Dodatniość reszty implikuje prawdziwość nierówności.

2. Udowodnić $\underset{x\geq 0}{\forall}\ 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

Napisać wzór Taylora - Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$ i zauważyć, że kolejne reszty $\boldsymbol{R_1}$ i $\boldsymbol{R_2}$ mają różne znaki.

8.3 Metoda III. Zastosowanie teorii ekstremów

Zapisując niektóre nierówności w postaci: $\underset{x\in\langle a,b\rangle}{\forall} \ m \le f(x) \le M$, widzimy, że dowód powyższej nierówności sprowadza się do wyznaczenia:

$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \text{ i } \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) .$$

Przykłady

1. $\underset{x\geq\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle}{\forall} \ \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$.

Napiszmy naszą nierówność w postaci: $\underset{x\geq\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle}{\forall} \ \frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$.

Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$ i $f(0) = 1$.

Jak wykazaliśmy wyżej funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ jest malejąca w $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ i ciągła, gdy przyjmiemy $f(0) = 1$. Stąd $\max_{x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} f(x) = f(0) = 1$ oraz $\min_{x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, co kończy dowód.

2. $\underset{\substack{x\in\langle 0,1\rangle \\ p>1}}{\forall} \ \frac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1$.

Funkcja $f(x) = x^p + (1-x)^p$ jest ciągła w $\langle 0,1\rangle$ i różniczkowalna w $(0,1)$, a przy tym $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.

Ponadto $f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} =$

$$= p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}] = 0 \ \Leftrightarrow x = 1 - x \ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ .$$

Zatem $f\left(\frac{1}{2}\right) = f_{min}(x) = \min_{x\in\langle 0,1\rangle} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p = 2\cdot\frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$.

Oczywiście $\max_{x\in\langle 0,1\rangle} f(x) = 1 = f(0) = f(1)$.

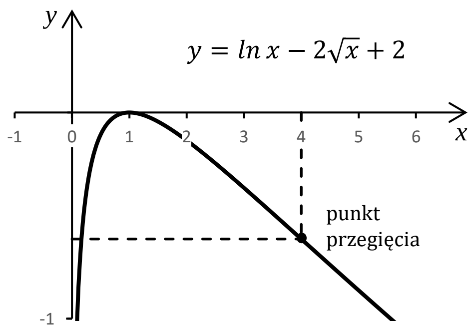
Nieco ulepszoną wersją nierówności $\ln x \le x - 1$, $x > 0$ jest nierówność

3. $\forall_{x>0}\ \ln x \le 2\sqrt{x} - 2 = 2(\sqrt{x} - 1)$.

Mamy wykazać, że: $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$, $x > 0$, co oznacza, że wystarczy wykazać nierówność

$$\sup_{x>0} f(x) \le 0 .$$

Mamy $f(1) = \ln 1 - 2 + 2 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 1$, stąd $\max_{x>0} f(x) = f(1) = 0$, bo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ oraz $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x - 2\sqrt{x} + 2\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$ co kończy dowód, a ilustracja graficzna jest podana niżej.



8.4 Metoda IV. Zastosowanie wypukłości funkcji

Definicja. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą określoną w przedziale (a,b), $a<b$. Mówimy, że funkcja f jest wypukła w (a,b) (wypukła do dołu) jeżeli*

(8.6) $$\underset{\substack{x_1,x_2\in(a,b)\\ \lambda_1,\lambda_2\in\langle 0,1\rangle\\ \lambda_1+\lambda_2=1}}{\forall} f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)\,.$$

Uwaga 1. *Mówimy, że funkcja f jest wklęsła w (a,b) (wypukła do góry), gdy $(-f)$ jest wypukła.*

Niech W_f oznacza wykres funkcji $y=f(x)$, $x\in(a,b)$.

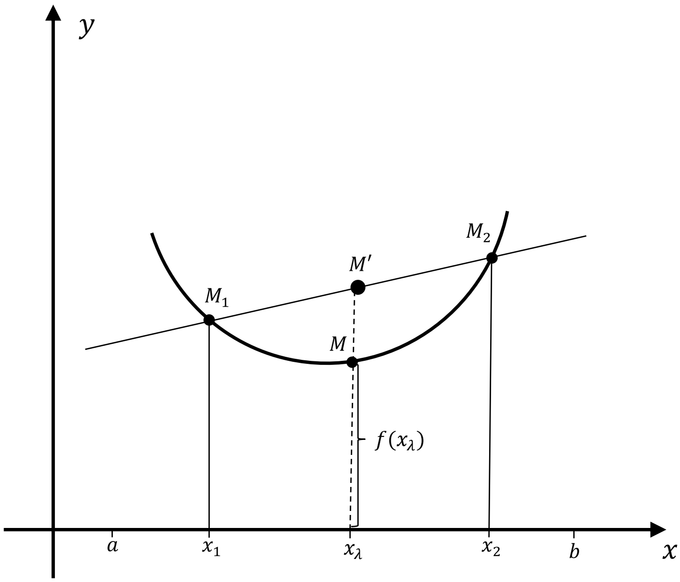
Uwaga 2. Terminy wypukła do dołu i wypukła do góry używać będziemy ze względu na kształt wykresu W_f funkcji f , co będzie rozważane niżej.

Uwaga 3. W definicji (8.6) funkcji wypukłej nie ma mowy o żadnych innych własnościach funkcji. Dla prostoty ilustracji graficznych zakładać będziemy ciągłość funkcji f w (a,b) , ma bowiem miejsce własność

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja rzeczywista f jest wypukła w (a,b) , to jest ona ciągła w (a,b).*

Podamy teraz interpretację geometryczną warunku wypukłości (8.6). Jak pamiętamy z twierdzenia Lagrange'a przy dowolnych punktach $x_1,x_2\in(a,b)$ oraz $\lambda_1,\lambda_2\in\langle 0,1\rangle$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, punkt $x_\lambda=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$, jest dowolnym punktem przedziału (a,b).

Analogicznie $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in (f(x_1), f(x_2))$.



Liczba $f(x_\lambda)$ to wartość funkcji f w punkcie x_λ , czyli punkt $M = (x_\lambda;\ f(x_\lambda))$ należy do wykresu funkcji $y = f(x)$. Natomiast punkt $M' = (x_\lambda;\ \lambda_1 f(x_\lambda) + \lambda_2 f(x_\lambda))$ leży na cięciwie łączącej punkty $M_1 = (x_1, f(x_1))$ i $M_2 = (x_2, f(x_2))$. Nierówność (8.6) oznacza więc, że dla funkcji wypukłej f każdy łuk wykresu W_f funkcji $y = f(x)$ łączący punkty M_1 i M_2 leży poniżej cięciwy łączącej te punkty.

Najlepszym przykładem funkcji wypukłej w $\mathbb{R}$ jest funkcja $f(x) = x^2$, której wypukłość można udowodnić z definicji.

Warunek (8.6) można rozszerzyć na n - punktów $x_1, x_2, \dots x_n \in (a, b)$. Nietrudny dowód indukcyjny pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 2. (Nierówność Jensena)

Jeżeli f jest funkcją wypukłą w (a,b), to

(8.7) $$\underset{\substack{x_1,x_2,\dots,x_n\in(a,b)\\ n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}\\ \lambda_k\geq 0,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1}}{\forall} \quad f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

Uwaga. Znaczenie nierówności Jensena jest nie do przecenienia, bowiem ma ona miejsce dla każdej funkcji wypukłej i rozszerza nierówność (8.6) na n-punktów. Ponadto mamy możliwość dobierania wartości parametrów λ_k, które często są nazywane „wagami”. Ilustrację pokażemy niżej na kilku przykładach.

Zamknijmy teorię funkcji wypukłych dwoma twierdzeniami pokazującymi własności funkcji wypukłych przy założeniach różniczkowalności funkcji f, co daje dalsze możliwości zastosowań (nieco mocniejsze założenia dotyczące f ułatwią nam ilustrację graficzną - zresztą we wszystkich przykładach niżej, będą one spełnione).

Twierdzenie 3. *Funkcja f klasy $C^1(a,b)$ jest wypukła w (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres W_f leży nad dowolną styczną do tego wykresu w punkcie $x_0\in(a,b)$ to znaczy, że jest spełniona nierówność:*

(8.8) $$\underset{x,x_0\in(a,b)}{\forall} \quad y=f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Twierdzenie 4. *Funkcja f klasy $C^2(a,b)$, jest wypukła w (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy*

(8.9) $$\underset{x\in(a,b)}{\forall} \quad f''(x)\geq 0,$$

i nie zeruje się na żadnym podprzedziale przedziału (a,b).

Wniosek. Warunek (8.9) daje analityczną charakteryzację wypukłości szerokiej klasy funkcji (z definicji wypukłość jest trudna do sprawdzenia). Stosując wtedy twierdzenie 3 i nierówność Jensena (twierdzenie 2) oraz definicję funkcji wypukłej mamy możliwość uzyskania nieograniczonej ilości rozmaitych nierówności.

Przykłady funkcji wypukłych:

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$; **b)** $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = -\ln x$, $x > 0$; **d)** $f(x) = -\sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Wypukłość powyższych funkcji stwierdzamy stosując twierdzenie 4.

Kilka innych przykładów funkcji wypukłych poznamy niżej, w konkretnych nierównościach.

Przykłady

1. Funkcja $y = \ln x$, $x > 0$ jest wypukła do góry w $(0, +\infty)$ bo $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, więc jej wykres leży pod dowolną styczną dla $x > 0$.

Na przykład styczna w punkcie $(1, 0)$ ma równanie $y - 0 = 1(x - 1)$, to jest $y = x - 1$, czyli mamy nierówność

$$\underset{x \in (0, +\infty)}{\forall} \ln x \leq x - 1 ,$$

z równością tylko dla $x = 1$.

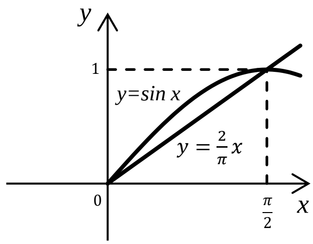
Biorąc styczną w punkcie $(e, 1)$, której równanie jest następujące $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e} - 1 \Rightarrow y = \frac{x}{e}$, otrzymujemy kolejną nierówność:

$$\underset{x \in (0, +\infty)}{\forall} \ln x \leq \frac{x}{e} ,$$

z równością tylko dla $x = e$, itd.

Biorąc sieczną przechodzącą przez punkty $(1,0)$ i $(e,1)$ otrzymalibyśmy odpowiednie oszacowanie od dołu dla $f(x) = ln\,x$ dla $x \in \langle 1, e\rangle$.

2. Wypukłość do góry wykresu funkcji $f(x) = sin\,x$ w $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ daje położenie siecznej łączącej punkty $(0,0)$ i $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ pod wykresem funkcji $y = sin\,x$, co oznacza wykazaną wcześniej nierówność:



$$\underset{x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle}{\forall} \; sin\,x \geq \frac{2}{\pi}x \; .$$

3. $f(x) = sin\,x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$ jest wypukła do góry, bo $f'(x) = cos\,x$, $f''(x) = -\,sin\,x < 0$, $x \in (0, \pi)$, stąd na mocy nierówności Jensena

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\dots,x_n\in\langle 0,\pi\rangle \\ n\geq 2 \\ \lambda_k\geq 0\,,\;\; \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1}}{\forall} \; -\,sin\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leq -\textstyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k sin\,x_k \; .$$

W szczególności dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ mamy:

$$\underset{\substack{n\geq 2 \\ x_1,x_2,\dots,x_n\in\langle 0,\pi\rangle}}{\forall} \; sin\,\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \frac{sin\,x_1 + sin\,x_2 + \dots + sin\,x_n}{n} \; .$$

4. Również nierówność Jensena zastosowana do funkcji wypukłej $f(x) = -\,ln\,x\,, x > 0$ daje uogólnioną nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną.

Mianowicie mamy

$$-ln\,(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k) \le -(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k ln\,x_k) \iff$$

$$\iff ln\,(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k) \ge \sum_{k=1}^{n} ln\,x_k^{\lambda_k} = ln\left(x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}\right) \iff$$

(8.10) $$x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\,,$$

gdzie $x_k > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\lambda_k \ge 0$ oraz $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$.

W szczególności dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ mamy klasyczną nierówność $G_n \le A_n$; natomiast biorąc $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1-\alpha$, $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ otrzymujemy z (8.10):

(8.11) $$x_1^{\alpha}\, x_2^{1-\alpha} \le \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\,.$$

Powyższe uogólnienie nierówności $G_2 \le A_2$ przez położenie $\alpha = \frac{1}{p}$, $1-\alpha = \frac{1}{q}$, $p,q > 1$ oraz zastąpienie $x_1 \to x^p$, $x_2 \to y^q$, daje znaną nierówność

(8.12) $$\underset{\substack{x,y>0\\ p,q>1\\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}}{\forall}\; x\cdot y \le \frac{1}{\mathrm{p}}x^p + \frac{1}{q}y^q\,,$$

wykorzystywaną do dowodu **nierówności Höldera**:

(***H***) $$\underset{\substack{a_k,b_k>0\\ k=1,2,\ldots,n\\ n\ge 2\\ p,q>1;\\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}}{\forall}\; \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\,.$$

Nierówność Höldera dla $p = q = 2$ daje znaną nierówność **CBS**. Z nierówności Höldera możemy otrzymać też nierówność Minkowskiego:

$$(\boldsymbol{M}) \qquad \underset{\substack{a_k, b_k > 0 \\ k=1,2,\dots,n \\ p>1}}{\forall} \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Udowodnimy teraz nierówność Höldera i pokażemy jej wykorzystanie do udowodnienia nierówności Minkowskiego.

Dowód. Zacznijmy od nierówności (8.12).

Pisząc nierówność (8.12) dla $x = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ i $y = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, $k = 1, 2, \dots, n$ i sumując otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow (\boldsymbol{H}) .$$

Zastosujmy teraz nierówność Höldera $(\boldsymbol{H})$ do dowodu nierówności Minkowskiego $(\boldsymbol{M})$.

Mamy: $(a_k + b_k)^p = (a_k + b_k)^{p-1}(a_k + b_k) =$

$$= a_k(a_k + b_k)^{p-1} + b_k(a_k + b_k)^{p-1} \quad \Rightarrow$$

$$L_M = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k + b_k)^{p-1} \overset{(\boldsymbol{H})}{\leq}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left| \begin{array}{c} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \\ q(p-1) = p \end{array} \right| = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Czyli mamy kolejno

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1-\frac{p-1}{p}=\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} = P_M .$$

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Zadanie. Stosując dowolną metodę udowodnić następujące nierówności, a w przypadku jednej zmiennej podać ich interpretację geometryczną. Wyjaśnić przypadek znaku równości.

a) $\underset{x \ge 0}{\forall} \; x - \frac{x^2}{2} \le ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$; b) $\underset{x \ge 1}{\forall} \; 2\frac{x-1}{x+1} \le ln\, x \le \frac{x-1}{\sqrt{x}}$;

c) $\underset{x \in \langle 0,1 \rangle}{\forall} \; x + 1 \le e^x \le (e-1)x + 1$; d) $\underset{x \ge 1}{\forall} \; ln\, x \le \sqrt{x-1}$;

e) $\underset{x \in \langle 0, \frac{\pi}{2})}{\forall} \; tg\, x \ge x - \frac{x^3}{6}$; f) $\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \; e^x \ge ex$;

g) $\underset{x \ge 0}{\forall} \; x - \frac{x^3}{3} \le sin\, x \le x$; h) $\underset{x \ge 0}{\forall} \; cos\, x \ge 1 - \frac{x^2}{2}$;

i) $\underset{0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}}{\forall} \; \frac{\alpha-\beta}{cos^2 \beta} \le tg\, \alpha - tg\, \beta \le \frac{\alpha-\beta}{cos^2 \alpha}$; j) $\underset{x \ge 1}{\forall} \; 2\sqrt{x} \ge 3 - \frac{1}{x}$;

k) $\underset{x \in \langle 0,1 \rangle}{\forall} \; x - \frac{x^3}{3} \le arctg\, x \le x - \frac{x^3}{6}$; l) $\underset{x \in \langle 0,1)}{\forall} 1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$;

m) $\underset{\substack{i=1,2,\dots,n \\ x_i>0 \\ k \in \mathbb{N}}}{\forall} \; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{2k} \le n^{2k-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}$.

Uzupełnienie. Uwagi dotyczące nierówności logarytmicznych

W dowodzeniu wielu konkretnych i ważnych nierówności, nierówności logarytmiczne grają szczególnie ważną rolę. Znajdują się one w treści wykładu, jak również w powyższych zadaniach. Zauważmy, że dotyczą one funkcji $f(x) = ln(1+x)$ lub $g(x) = ln\,x$ przedziałach $(0,+\infty)$, $\langle 1,+\infty)$ i każda z nich ma swoją specyfikę i nie zawsze transformują się elegancko z funkcji f na g i vice versa. Każdą z nich często można udowodnić kilkoma metodami (monotoniczność, wypukłość, wzór Lagrange'a czy Taylora). Jedną z najważniejszych nierówności jest

$$\underset{x\geq 0}{\forall}\ \frac{x}{x+1} \leq ln(1+x) \leq x \xrightarrow{x=\frac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} < ln(k+1) - ln(k) < \frac{1}{k},$$

której kilka zastosowań podaliśmy wyżej.

Chcielibyśmy zwrócić jeszcze uwagę na trzy proste nierówności:

a) $\underset{x>0}{\forall}\ ln\,x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ (zad. 1 (c)), która zastosowana dla $x = 2, 3, \ldots, n$ daje niezłe i proste oszacowanie dla $ln(n!)$:

$ln(n!) < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < (A_n < K_n) <$

$< n \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2}} + 2 - 2\sqrt{n+1} < 2 + (n-2)\sqrt{n+1}\,,\ n \geq 2\,.$

b) $\underset{x\in\langle 1,e\rangle}{\forall}\ \frac{x-1}{e} \leq ln\,x \leq \frac{x}{e}$, która wynika z własności wypukłości funkcji $f(x) = ln\,x$ w $\langle 1, e\rangle$ (położenie wykresu funkcji $f(x) = ln\,x$ nad sieczną łączącą punkty $(1,0)$ i $(e,1)$ i pod styczną w punkcie $(e,1)$).

c) $\underset{x\in\langle 0,1)}{\forall}\ ln(1+x) \leq x \leq -ln(1-x),$

której dowód wynika wprost z wykresu i własności wypukłości.

Rozdział IX. ZASTOSOWANIA POCHODNYCH. CZĘŚĆ IV. OPTYMALIZACJA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Wyznaczanie wartości ekstremalnych funkcji $y = f(x)$ w danym zbiorze $A \subset \mathbb{R}$ jest praktyczną ilustracją zastosowania pochodnych. Podamy poniżej kilka praktycznych zastosowań (z codziennego punktu widzenia), które ilustrują w sposób przejrzysty do czego może również służyć rachunek różniczkowy. Nasze przykłady poprzedzimy punktem omawiającym podstawowe własności krzywych stopnia II na płaszczyźnie, znajomość których jest potrzebna każdemu studentowi.

9.1 Krzywe stopnia II na płaszczyźnie

Ogólne równanie krzywej stopnia I na płaszczyźnie kartezjańskiej OXY ma postać

(9.1) $$Ax + By + C = 0\,,\ \ A^2 + B^2 > 0\,.$$

Jest to ogólne równanie prostej (l), dla której wektor $\vec{n} = [A, B] \neq \vec{0}$ jest wektorem normalnym (to znaczy $\vec{n} \perp l$).

Inne postaci równania prostej (l) na płaszczyźnie:

- kierunkowe $y = mx + k$, gdzie $m = tg\,\alpha$ nazywa się współczynnikiem kierunkowym prostej (l), gdyż α jest miarą kąta jaki prosta (l) tworzy z dodatnim kierunkiem osi OX,
- odcinkowe $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, gdzie $A = (a, 0)$ i $B = (0, b)$ są punktami przecięcia prostej (l) z osiami układu współrzędnych,

są znane czytelnikowi i w razie konieczności będziemy je również stosować.

Można udowodnić (kurs geometrii), że:

Twierdzenie 1. *Równanie o współczynnikach rzeczywistych i zmiennych* $x, y \in \mathbb{R}$ *, mające postać*

(9.2) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0\,,$$

przedstawia na płaszczyźnie OXY*:*

a) krzywe niezdegenerowane: okrąg, elipsę, hiperbolę lub parabolę, lub

b) krzywe zdegenerowane: dwie proste lub prostą podwójną, lub

c) punkt lub zbiór pusty.

Przykłady

1. $x^2 + y^2 = 2$ - okrąg o środku (0,0) i promieniu $r = \sqrt{2}$.

2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ - okrąg o środku $(1, -2)$ i promieniu $r = 4$.

3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ - elipsa o środku (0,0) i półosiach $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, której osiami symetrii są osie układu współrzędnych.

4. $x^2 - y^2 = 2$ - hiperbola równoosiowa, której osiami symetrii są osie układu współrzędnych.

5. $y^2 = 4x$ - parabola o wierzchołku (0,0) i gałęziach symetrycznych względem osi OX.

6. $x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}y \vee x = -\sqrt{2}y$ - dwie proste przecinające się.

7. $(x - 2y)^2 = 0$ - prosta podwójna $y = \frac{1}{2}x$.

8. $x^2 + y^2 = 0$ - punkt (0,0) .

9. $x^2 + y^2 = -1$ - zbiór pusty .

Podstawowym naszym zainteresowaniem będą cztery krzywe niezdegenerowane, dla których będziemy używać równań w tak zwanej **postaci kanonicznej** (celem prostoty obliczeń, co nie będzie zmniejszać ogólności rozważań):

1. Okrąg $\mathcal{O}\big((x_0, y_0); r\big)$ o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu $r > 0$:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$

2. Elipsa $\mathcal{E}$ o półosiach a oraz b , której osiami symetrii są osie układu współrzędnych OXY :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

3. Hiperbola $\mathcal{H}$ o półosiach a i b , której osiami symetrii są osie układu współrzędnych OXY :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

4. Parabola $\mathcal{P}$ o wierzchołku w punkcie (0,0) i ognisku $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$:
$$y^2 = 2px \ .$$

Osią symetrii jest oś OX , a parametr p jest dodatni gdy $x > 0$ (ujemny gdy $x < 0$).

Wzory na parametry tych krzywych, takie jak mimośród, ogniska, asymptoty, kierownice itp. będziemy podawać w konkretnych zadaniach, gdy będzie taka potrzeba.

Przypomnimy na zakończenie bardzo ważne własności tych krzywych, które służą do uzyskania wyżej wymienionych równań:

Definicja. Okrąg *jest to zbiór punktów na płaszczyźnie równoodległych o stałą wielkość* $r > 0$ (r*-promień okręgu*) *od ustalonego punktu zwanego środkiem okręgu.*

Definicja. ***Elipsa*** *jest to zbiór punktów na płaszczyźnie spełniających warunek, że suma odległości każdego z punktów tej krzywej od dwóch ustalonych punktów (ogniska elipsy) jest stała.*

Definicja. ***Hiperbola*** *jest to zbiór punktów na płaszczyźnie spełniających warunek, że wartość bezwzględna różnicy odległości każdego z punktów tej krzywej od dwóch ustalonych punktów (ogniska hiperboli) jest stała.*

Definicja. ***Parabola*** *jest to zbiór punktów na płaszczyźnie spełniających warunek, że odległość dowolnego punktu krzywej od ustalonej prostej (kierownica) jest równa odległości od ustalonego punktu (ognisko).*

9.2 Przykłady praktyczne optymalizacji funkcji $y = f(x)$

Podamy niżej 10 przykładów optymalizacji funkcji $y = f(x)$, $x \in A \subset \mathbb{R}$, wynikających z potrzeb „praktycznych".

Zadanie 1. Niech $K_c(x) = x^3 - 5x + 250$ będzie kosztem całkowitym wyprodukowania x jednostek pewnego dobra. Wyznaczyć wielkość produkcji dla której koszt przeciętny jest najmniejszy. Dla tej wielkości produkcji obliczyć wartość kosztu krańcowego i elastyczność kosztu całkowitego. Podać interpretację otrzymanych wyników.

Rozwiązanie. Mamy $K_p(x) = f(x) = \frac{K_c(x)}{x} = x^2 - 5 + \frac{250}{x}$, $x > 0$,

$f'(x) = 2x - \frac{250}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-250}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(5) = \min_{x>0} f(x) = 70$, $K_p(5) = 70$.

Koszt krańcowy $K_c'(x) = 3x^2 - 5$, $K'(5) = 75 - 5 = 70$, a elastyczność $E_f\big(K_c(x)\big) = x\frac{K_c'(x)}{K_c(x)}\Big|_{x=5} = \frac{70}{70} = 1\%$.

Zadanie 2. Ciśnienie krwi u pacjenta zmniejsza się o wielkość $D(x) = 0.025x^2(30 - x)$ po podaniu ilości x pewnego leku. Jaka ilość leku powoduje największy spadek ciśnienia? Jaki spadek ciśnienia nastąpi wtedy u pacjenta?

Rozwiązanie. Niech $f(x) = x^2(30 - x) = 30x^2 - x^3$, $x \in \langle 0, 30 \rangle$. Mamy $f(0) = 0$, $f(30) = 0$ oraz $D'(x) = 60x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$, zatem $max\, f(x) = f(20) = 400 \cdot 10 = 4000 \rightarrow D(20) = 100$,
czyli dawka leku $x = 20$ spowoduje maksymalny spadek ciśnienia o 100.

Zadanie 3. Dwa kominy fabryczne A i B o tej samej wysokości położone są w odległości $21\, km$. Łączne stężenie zanieczyszczeń emitowanych przez te dwa kominy na odcinku AB dane jest wzorem: $S(x) = \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{(21-x)^2}$, gdzie x jest odległością od jednego z kominów, natomiast k_1 i k_2 są dodatnimi stałymi zależnymi od ilości zanieczyszczeń emitowanych przez każdy z kominów. W jakim punkcie x odcinka AB koncentracja zanieczyszczeń jest najmniejsza? (dla uproszczenia przyjąć $k_1 = 8k_2$)

Rozwiązanie.

Mamy wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji $S(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(21-x)^2}$, dla $x \in (0, 21)$.

$S'(x) = -\frac{16}{x^3} + \frac{2}{(21-x)^3} = \frac{2}{x^3(21-x)^3}[x^3 - 8(21 - x)^3] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2(21 - x) \Rightarrow x = 14$, czyli $S_{min} = S(14) = \min\limits_{x\in(0,21)} S(x)$.

Zatem w odległości $x = 14\, km$ od komina A stężenie zanieczyszczeń będzie najmniejsze.

Zadanie 4. Dokonano n pomiarów pewnej wielkości i otrzymano wyniki $x_1, x_2, \dots x_n$. Przyjmuje się, że „najlepszą” wartość przybliżenia daje taka wartość x , która realizuje najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2 .$$

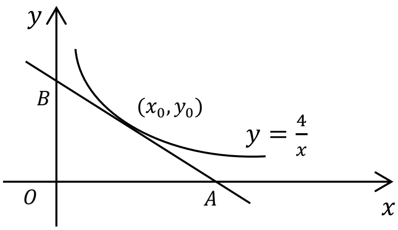
Wyznaczyć x .

Rozwiązanie.

Mamy $f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \cdots + 2(x - x_n) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow nx = x_1 + x_2 + \cdots x_n \Rightarrow x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots x_n)$.

Czyli średnia arytmetyczna wyników pomiarów daje minimum błędu odchylenia kwadratowego, który reprezentuje funkcja $f(x)$.

Zadanie 5. Która ze stycznych do hiperboli $xy = 4$ tworzy z osiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu (rozważyć część hiperboli leżącą w pierwszej ćwiartce)?



Równanie stycznej do krzywej $y = f(x) = \frac{4}{x}$ ma postać

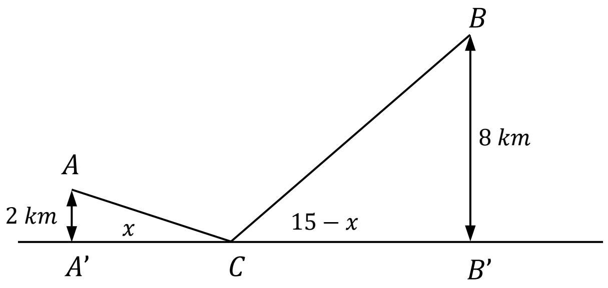
$$y - \frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0) .$$

Zatem punktami przecięcia stycznej z osiami układu są:

$A = (2x_0, 0)$ i $B = \left(0, \frac{8}{x_0}\right)$. Stąd pole ΔOAB jest równe $P_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{8}{x_0} = 8 = \text{stała}$. Zatem pole trójkąta nie zależy od położenia stycznej (to znaczy od punktu styczności) do hiperboli i ma dla każdej stycznej taką samą wartość równą 8.

Zadanie 6. Firma budowlana ma zbudować zakład produkcyjny C przy drodze $A'B'$ położony tak, aby łączne koszty transportu materiału budowlanego z A do C i koszty transportu z C do B (stacja kolejowa) były najmniejsze. Odpowiednie wielkości są podane na poniższym rysunku.

Rozwiązanie.



Koszty transportu będą najmniejsze, gdy długość drogi $(AC + CB)$ będzie najmniejsza. Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle AA'C$ i $\triangle BB'C$ mamy

$$AC = \sqrt{x^2 + 4}\,,\ BC = \sqrt{(15 - x)^2 + 64}\,.$$

Zatem nasz problem to wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(15 - x)^2 + 64} \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, 15 \rangle\,.$$

Mamy $f(0) = 2 + \sqrt{225 + 64} = 19$; $f(15) = \sqrt{229} + 8 \approx 23.1$. Obliczamy $f'(x)$ i rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0$ celem wyznaczenia punktów stacjonarnych (podejrzanych o ekstrema lokalne) funkcji $f(x)$.

Mamy $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+64}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{15-x}{\sqrt{(15-x)^2+64}} \Leftrightarrow x = 3.$

Łatwo zauważamy, że $f'(x)$ w otoczeniu punktu $x = 3$ zmienia znak z minusa na plus, zatem w punkcie $x = 3$ funkcja $f(x)$ ma minimum lokalne. Ponieważ $f(3) = \sqrt{13} + \sqrt{108} \approx 18$ jest to więc również minimum globalne. Zatem zakład C należy zbudować w odległości 3 km od punktu A'.

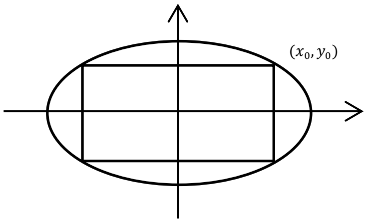
Zadanie 7.

A) Wyznaczyć boki prostokąta o największym polu, który jest wpisany w elipsę $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

B) Wyznaczyć elipsę opisaną na danym prostokącie, która ma najmniejsze pole (pole elipsy $S=\pi ab$).

Uwaga. W obu zadaniach zakładamy, że prostokąt ma boki równoległe do osi układu współrzędnych.

Rozwiązanie.



A) Niech $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}, x, y > 0$. Pole prostokąta jest równe $P = 4x_0y_0$.

Ale $(x_0, y_0) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$, a więc

$$P = 4x_0\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2} = 4\frac{b}{a}x_0\sqrt{a^2-x_0^2} .$$

Mamy więc wyznaczyć $\max\limits_{x\in\langle 0,a\rangle} f(x)$, gdzie $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2}$.

Mamy $\quad f'(x) = \sqrt{a^2-x^2} - x\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

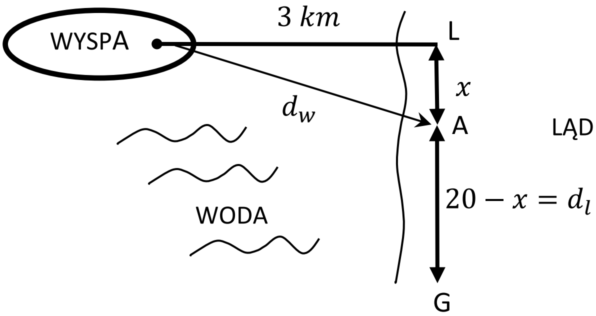
skąd $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$. Oczywista zmiana znaku $f'(x)$ implikuje, że w punkcie $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ jest największa wartość $f(x)$, bo $f(0)=f(a)=0$. Zatem największe pole ma prostokąt o wierzchołkach $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

B) Zadanie ma charakter dualny do **(A)**. Rozwiązanie pozostawiamy czytelnikowi.

Zadanie 8. (patrz rysunek)

Ptak ma gniazdo na lądzie w punkcie G, ale żywność musi „przywieźć” z wyspy W położonej 3 km od lądu, jak na rysunku. Wiadomo, że prędkość lotu ptaka nad lądem wynosi $10\,km/h$, a nad wodą $6\,km/h$. Jaką drogą (złożoną z odcinków) powinien lecieć ptak, aby dostarczyć pokarm z wyspy do piskląt w gnieździe G w jak najkrótszym czasie?

Rozwiązanie



Oznaczmy $LA = x$.

$V_l = 10\frac{km}{h}$, $V_w = 6\frac{km}{h}$, $d_w = \sqrt{x^2+9}$, $d_l = (20-x)$,

$t_w = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$, $t_l = \frac{(20-x)}{10}$, $t = t_w + t_l \quad \rightarrow \quad min = ?$

$t = t(x) = \frac{1}{6}\sqrt{x^2+9} + \frac{1}{10}(20-x)$, $x \in \langle 0{,}20\rangle$. Obliczamy kolejno:

$t(0) = \frac{1}{2} + 2 = 2.5$, $t(20) = \frac{1}{6}\sqrt{409} \approx 3.37$,

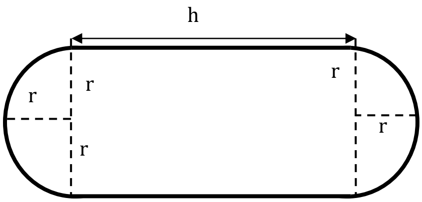
$t'(x) = \frac{1}{6}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+9} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$.

$t\left(\frac{9}{4}\right) = t_{min} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{81}{16}+9} + \frac{1}{10}\left(20-\frac{9}{4}\right) = 2.4\ h$.

Najkrótszy czas lotu ptaka $(2.4\ h)$ będzie realizowany wzdłuż drogi $(d_w + d_l)$ dla $x = 2.25\ km$.

Zadanie 9. Pojemnik metalowy o objętości $(30\pi)\ m^3$ używany do transportu odpadów nuklearnych ma kształt walca zakończonego dwiema półkulami. Koszt 1 m^2 metalu używanego na część walcową jest dwukrotnie mniejszy od kosztu metalu używanego na półkule. Jakie powinny być wymiary pojemnika, aby koszt materiału do produkcji pojemnika był najmniejszy?

Rozwiązanie.



Pojemnik składa się z walca i dwóch półkul (jedna kula). Oznaczając przez r promień podstawy walca i kuli oraz przez h jego wysokość, otrzymujemy $V = 30\pi = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2\left(h + \frac{4}{3}r\right)$.

Koszt użytego materiału jest wprost proporcjonalny do powierzchni P z uwzględnieniem współczynnika 2 na powierzchni kuli. Mamy więc

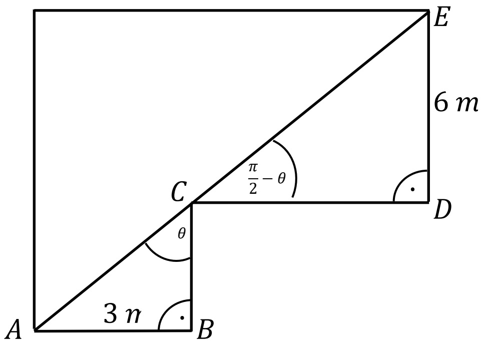
$$P = 2(4\pi r^2) + 2\pi r h = 2\pi r(4r + h).$$

Ze wzoru na objętość otrzymujemy: $\frac{30}{r^2} = h + \frac{4}{3}r \Rightarrow h = \frac{30}{r^2} - \frac{4}{3}r$, stąd

$$P = 2\pi r\left(4r + \frac{30}{r^2} - \frac{4}{3}r\right) = 4\pi r\left(\frac{15}{r^2} + \frac{4r}{3}\right).$$

Mamy zatem znaleźć najmniejszą wartość funkcji $f(r) = \frac{15}{r} + \frac{4r^2}{3}$ dla $r > 0$. Obliczamy $f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2r = \sqrt[3]{45} \rightarrow h = 2\sqrt[3]{45}$. Dla powyższej wartości r mamy najmniejszą wartość funkcji f, zatem długość części walcowej pojemnika w przypadku ekstremum musi być 2 razy większa od średnicy, aby koszt materiału na jego budowę był najmniejszy.

Zadanie 10. (spławianie drewna) Drzewa są spławiane do tartaku dwoma prostopadłymi kanałami o szerokości 3 i 6 m. Jakiej maksymalnej długości (z dokładnością do 1 m) drzewo da się spławić, aby nie nastąpiła blokada w punkcie połączenia kanałów?



Rozwiązanie. Długość spławianego drewna to $AE = AC + CE$. Stąd najdłuższe drewno odpowiada najkrótszemu odcinkowi $(AC + CE)$. Mamy:

z ΔABC: $\frac{AB}{AC} = \sin\theta \;\Rightarrow\; AC = \frac{3}{\sin\theta}$,

z ΔCDE: $\frac{ED}{CE} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\Rightarrow\; CE = \frac{6}{\cos\theta}$,

a więc $AE = \frac{3}{\sin\theta} + \frac{6}{\cos\theta} = 3\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{2}{\cos\theta}\right)$. Mamy więc wyznaczyć $\min\limits_{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} f(\theta)$, gdzie $f(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{2}{\cos\theta}$. Stosując znane wzory otrzymujemy:

$$f'(\theta) = \frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos^3\theta\,\sin^2\theta} = 0 \;\Leftrightarrow\; tg^3\,\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_0 = arctg\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.794 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg^2\,\theta = 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos^2\theta_0 \approx 0.783 \Rightarrow \sin^2\theta_0 \approx 0.621$ i ostatecznie

$$f_{min} = 3\left(\frac{1}{\sin\theta_0} + \frac{1}{\cos\theta_0}\right) \approx 12.48\,.$$

Zatem na pewno da się spławiać drzewa krótsze niż 12 m.

Zadania, uzupełnienia i komentarze

Zadanie 1. Wyznaczyć $\sup\limits_{x\in A}(\max) f(x)$ i $\inf\limits_{x\in A}(\min) f(x)$ dla:

a) $f(x) = x^3e^{-x}$, $A = \langle 0, +\infty)$; b) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1}$, $A = \langle 2, +\infty)$;

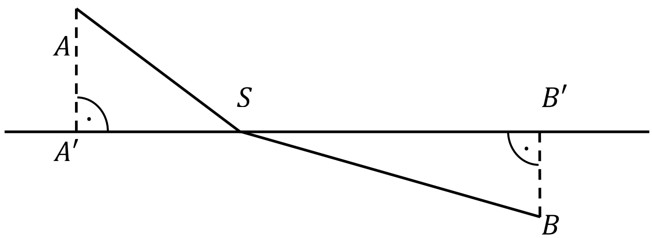
c) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}\left(100 - \frac{1}{8}x\right)^{\frac{3}{4}}$, $A = \langle 0,800\rangle$; d) $f(x) = x^2 - x^4$, $A = \langle 0,1\rangle$;

e) $f(x) = x^2 \ln x$, $A = \langle 1, e\rangle$; f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $A = \langle 0, +\infty)$.

Zadanie 2. Koszt całkowity produkcji pewnego towaru dany jest wzorem $K(x) = 2x^3 - 3x^2 + 400x$, a dochód $R(x) = 4000x - 33x^2$ (x – ilość sztuk). Wyznaczyć wielkość produkcji, która daje największy zysk.

Zadanie 3. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność $22{,}5\, m^3$ i kwadratową podłogę. Koszt $1\, m^2$ blachy potrzebnej do wykonania jego podłogi i pokrywy wynosi 20 *zł* a ścian bocznych 30 *zł* Jakie powinny być wymiary kontenera aby koszt jego budowy był najmniejszy?

Zadanie 4. Dwa miasta A i B leżą po przeciwnej stronie rzeki $A'B'$ z odpowiednimi odległościami jak na rysunku. W którym punkcie należy zbudować stację pomp aby koszt rurociągu $AS + SB$ był najmniejszy?
$A'B' = 20\, km$, $AA' = 8\, km$, $BB' = 12\, km$.



Zadanie 5. Który z prostokątów mających pole S ma najmniejszy obwód?

Zadanie 6. Który ze stożków wpisanych w kulę o promieniu r ma największą objętość?

Zadanie 7. Przez punkt $P=(1,4)$ poprowadzono rodzinę prostych (l) , z których każda przecina osie układu współrzędnych w punkcie $A=(a,0)$, $a>0$ oraz $B=(0,b)$, $b>4$. Jaka prosta l tej rodziny ma tę własność, że suma długości odcinków $(AP+BP)$ ma wartość najmniejszą? (Wykorzystać równanie odcinkowe prostej l).

Zadanie 8. Wśród trójkątów mających podstawę o długości a i kącie przeciwległym α wyznaczyć ten, który ma największe pole.

Zadanie 9. W jakim punkcie $P=(x_0,y_0)\in \mathcal{E}$ należy poprowadzić styczną do elipsy $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, aby długość odcinka AB tej stycznej, zawartej pomiędzy osiami układu współrzędnych była najmniejsza?

Zadanie 10. Przez jaki punkt elipsy $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$ leżący w I ćwiartce, należy poprowadzić styczną, aby pole trójkąta utworzonego przez odcinek tej stycznej zawarty między osiami układu współrzędnych i odcinkami jakie ta styczna tworzy na osiach układu współrzędnych było najmniejsze?

Uwagi i komentarze

Kończąc wykłady dotyczące rachunku różniczkowego, chcielibyśmy zwrócić uwagę na ważne psychologicznie, podawanie praktycznych interpretacji rozważanych zagadnień. Chodzi o udzielanie odpowiedzi na ciągle pojawiające się pytania studentów: po co nam to? dlaczego właśnie taka funkcja jak np. $-f(p)=p\,ln\,p+(1-p)\,ln(1-p)$, $p\in(0,1)$?

Na przykład, funkcja homograficzna jest istotna w zagadnieniach dochód-popyt (funkcje Törnquista), a wielomiany stopnia trzeciego opisują funkcję kosztów całkowitych. Ważną rolę odgrywa funkcja wykładnicza (rosnąca i malejąca) modelująca zjawiska epidemiologiczne, bądź rozpadu promieniotwórczego. W wielu zagadnieniach ekonomicznych, biologicznych i ekologicznych (na przykład rozwój populacji wielorybów w danym środowisku) występuje funkcja logistyczna (np. [1]) $f(t)=\frac{a}{1+be^{-ct}}$, $a>0,\ b>1$, $c>0$; $t\geq 0$, czy jej dyskretny odpowiednik ciąg (x_t) określony wzorem $x_{t+1}=ax_t(1-x_t),\ t\in\mathbb{N}$, $a>0$, $x_0\in(0,1)$.

Użytecznym dla dalszej edukacji matematycznej i statystycznej może być zbadanie pewnych funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, w szczególności $f(x)=e^{-x^2}, x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x^3}$, $x\geq 0$ (rozkład Weibulla), podając do opisu jakich zjawisk są używane.

Podkreślamy znaczenie ciągu geometrycznego w wielu miejscach tej monografii (na przykład w rozdziałach III, IV i XV).

Ważnym jest historyczny fakt i sposób pojawienia się liczby „e” w matematyce, która ma swoje źródło w matematyce finansowej jako granica ciągu: $\lim\limits_{m\to+\infty} K_n^{(m)}=\lim\limits_{m\to+\infty} K_0\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^{m\cdot n}=e^{\frac{n\cdot p}{100}},\ m,n\in\mathbb{N}$, $K_0>0$, $p>0$, gdzie $K_n^{(m)}$ oznacza wielkość lokaty po n-latach przy m równych okresach kapitalizacji i nominalnej stopie procentowej p w skali roku.

Wspomniane wyżej komentarze, a często tylko dygresje o praktycznym i historycznym znaczeniu rozważanych problemów matematycznych, znacznie ułatwiają proces dydaktyczny, czego wielokrotnie doświadczyliśmy w naszej pracy.

Rozdział X. ZASTOSOWANIA POCHODNYCH. CZĘŚĆ V. KONSTRUKCJA WYKRESU FUNKCJI $y = f(x)$

Istotnym zastosowaniem rachunku różniczkowego jest możliwie jak najbardziej precyzyjna konstrukcja wykresu funkcji danej wzorem $y = f(x)$.

Przedstawiony plan „badania funkcji" ma na celu pokazać praktyczne (dynamiczne) powstawanie wykresu funkcji, jako wynik odpowiednich rachunków; jest krótki i łatwy do zapamiętania. Składa się on z dwóch części: pierwsza zawiera dwa punkty i pozwala podać przybliżony wykres, druga (3 punkty) udokładnia i uzupełnia wykres przez zastosowanie pochodnych. Nazywać go będziemy metodą „pinezek i strzałek". Pinezki są to: punkty nie należące do dziedziny funkcji, miejsca zerowe, ekstrema, punkty przegięcia, natomiast strzałki i ich kształt pokazują monotoniczność, kształt wypukłości i położenie wykresu funkcji w stosunku do ewentualnych asymptot.

Przedstawiona kolejność punktów planu może w konkretnym zadaniu ulec zmianie, bo na przykład już przy wyznaczaniu D_f zauważymy, że funkcja jest dodatnia w całej dziedzinie, a więc problem istnienia miejsc zerowych i położenia wykresu jest wtedy rozstrzygnięty.

W przedstawionych 12 przykładach staraliśmy się wskazać wszystkie niuanse, które można spotkać przy konstrukcji wykresu (na przykład ekstrema lokalne w takim punkcie, gdzie $f'(x_0)$ nie istnieje, ale $x_0 \in D_f$; oraz położenie stycznej do wykresu w takim punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Oto plan (stosowane będą „skróty językowe" celem uproszczenia zapisu i lepszego zrozumienia):

Część A:

1. Dziedzina funkcji D_f i ciągłość oraz własności dodatkowe, które można łatwo wywnioskować z obserwacji wzoru definiującego $y = f(x)$ (na przykład parzystość, ograniczoność, okresowość, miejsca zerowe, znak funkcji itd.).
2. Granice funkcji i asymptoty wykresu funkcji.
   W trakcie pracy nanosimy wszystkie znalezione fakty na układ współrzędnych i na tej podstawie podajemy przybliżony wykres, po tej części obliczeń.

Część B:

3. $f(x) = 0$ i $f(x) > 0$ czyli miejsca zerowe i znak funkcji;
4. $f'(x) = 0$ i $f'(x) > 0$ czyli ekstrema lokalne i monotoniczność funkcji (ewentualnie gdzie $f'(x_0)$ nie istnieje, ale $x_0 \in D_f$);
5. $f''(x) = 0$ i $f''(x) > 0$ czyli punkty przegięcia i kształt wykresu funkcji (wypukłość).

Uwaga. Uważamy za zbyteczne wykonywanie tabelki, bowiem otrzymane informacje są prawie kompletne; można ewentualnie obliczyć kilka łatwych wartości funkcji na przykład punkty przecięcia z osią OY. Symbol gwiazdka (*) oznacza „kierunek” wykresu funkcji, a nie konkretny punkt na wykresie. Gwiazdki umieszczane są najczęściej przy asymptotach i w $(\pm\infty)$.

W przedstawionych przykładach, odpowiednie obliczenia będą numerowane jak w powyższym planie. Staraliśmy się zademonstrować odpowiednią redakcję, jaką powinien zaprezentować student. Komentarze ograniczamy do minimum, aby ich zwięzłość przyspieszyła konstrukcję wykresu funkcji.

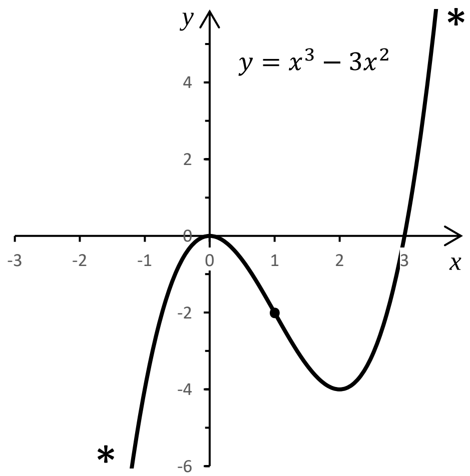
Przykłady. Zbadać przebieg zmienności oraz wykreślić funkcję $y = f(x)$. Wykres powinien być uzasadniony wyznaczeniem takich elementów funkcji jak: dziedzina, odpowiednie granice, asymptoty, miejsca zerowe, ekstrema lokalne, punkty przegięcia, przedziały monotoniczności i wypukłości, itd.

Rozwiązania.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. $D_f = \mathbb{R}$, f jest funkcją ciągłą w $D_f = \mathbb{R}$ jako wielomian; wykresy funkcji będących wielomianami nie mają żadnych asymptot.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;



3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$, ($x = 0$ jest zerem dwukrotnym); $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$, położenie wykresu funkcji jest oczywiste.

4. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ $(f \uparrow)$;

zatem $f_{max} = f(0) = 0$, $f_{min} = f(2) = -4$.

5. $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f_{pp} = f(1) = -2$, zatem punktem przegięcia wykresu funkcji f jest punkt $(1, -2)$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ $(f \cup)$ (wykres funkcji f jest wypukły do dołu).

b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

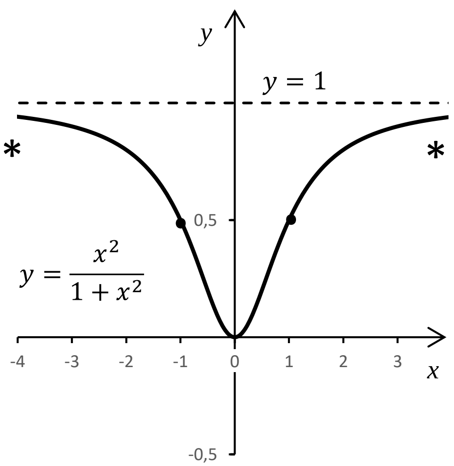
1. $D_f = \mathbb{R}$, funkcja ciągła w $\mathbb{R}$ jako iloraz funkcji ciągłych; brak asymptot pionowych. Widzimy, że $f(-x) = f(x)$, to znaczy f jest funkcją parzystą, czyli wykres f jest symetryczny względem osi OY. Ponadto $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; 0 \le \frac{x^2}{1+x^2} < 1$, co oznacza, że $f(0) = 0 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, $x = 0$ jest więc podwójnym miejscem zerowym i punktem minimum globalnego funkcji f; ponadto f jest ograniczona z góry przez 1, czyli wykres funkcji f leży w pasie $0 \le y < 1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \;\Rightarrow$ wykres f ma asymptotę poziomą $y = 1$ w $(\pm\infty)$. Stąd wykres ma kształt jak niżej.

3. Miejsca zerowe i położenie wykresu funkcji f rozstrzygnięto wyżej.

4. $f'(x) = \frac{2x(1+x^2)-x^2(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \;\Leftrightarrow x = 0$;

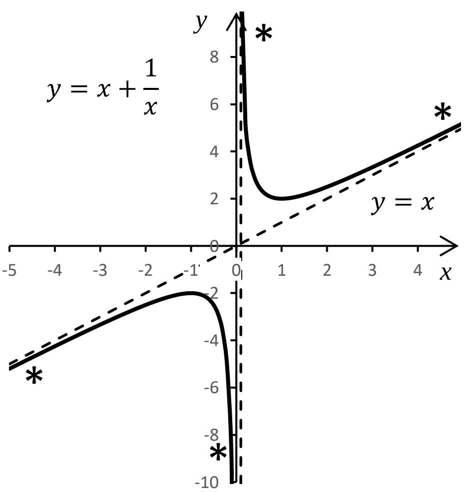
$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow x \in (0,+\infty)$, $(f \uparrow)$; $f_{min} = f(0) = 0$.



5. $f''(x) = \frac{2(1+x^2)^2 - x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$ $= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$ $x = 1 \vee x = -1$; zatem punktami przegięcia wykresu są punkty $\left(\pm 1, \frac{1}{2}\right)$ bo $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$; wykres f jest wypukły do dołu gdy $f''(x) > 0$ $\Leftrightarrow x \in (-1,1)$, (f $\cup$).

c) $y = x + \frac{1}{x}$

1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, funkcja f jest ciągła w D_f jako suma funkcji ciągłych; ze wzoru widać natychmiast, że f jest funkcją nieparzystą, zatem wykres wystarczy wykonać dla $x > 0$; ponadto widzimy, że $\underset{x>0}{\forall}\ f(x) > 0$, czyli f nie ma miejsc zerowych w D_f bo $f(x) < 0$ dla każdego $x < 0$.
   Wiadomo, że $\underset{x>0}{\forall}\ x + \frac{1}{x} \geq 2$ z równością tylko dla $x = 1$, a zatem $f_{min} = \min\limits_{x>0} f(x) = f(1) = 2$; $f_{max} = \max\limits_{x<0} f(x) = f(-1) = -2$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$; czyli prosta $x = 0$ (oś OY) jest asymptotą pionową; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, ale $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = a$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 = b,$ zatem wykres funkcji f ma asymptotę ukośną w $(\pm\infty)$ o równaniu $y = x$.



4. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$ $x = \pm 1$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, zatem $f_{min} = f(1) = 2$, $f_{max} = f(-1) = -2$.
5. $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ dla $x > 0$; co oznacza, że wykres funkcji nie ma punktów przegięcia w D_f , a dla $x > 0$ wykres funkcji f jest wypukły do dołu. Dla $x > 0$ wykres f leży nad asymptotą ukośną $y = x$.

d) $y = \sqrt[5]{x^4}$

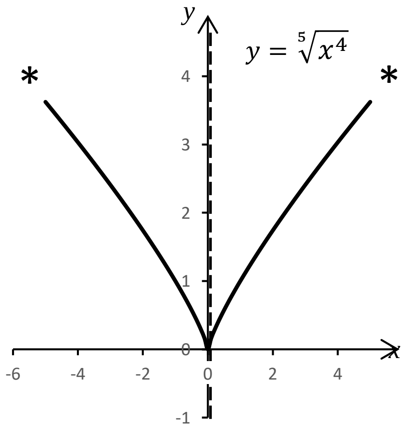
1. $D_f = \mathbb{R}$, f jest funkcją ciągłą w $\mathbb{R}$ jako funkcja potęgowa; brak asymptot pionowych; $f(-x) = f(x)$, to znaczy f jest funkcją parzystą, czyli wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY, wystarczy go więc wykonać dla $x \geq 0$. Ponadto mamy $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ f(x) \geq 0$ oraz $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, co oznacza, że $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$.

2. Mamy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ i mimo, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x} = 0$, to wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej ani ukośnej ($b = +\infty$).

4. $f'(x) = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$. Zatem pochodna nie istnieje dla $x = 0$, ale $f(0) = 0$ i $f'(x) > 0$ dla $x > 0$ i $f'(x) < 0$ dla $x < 0$.

   Stąd w punkcie $x = 0$ funkcja f ma minimum lokalne, które jest jednocześnie minimum globalnym, a styczna do wykresu funkcji w punkcie (0,0) jest prostopadła do osi OX, bo $f'(0) = \pm\infty$.

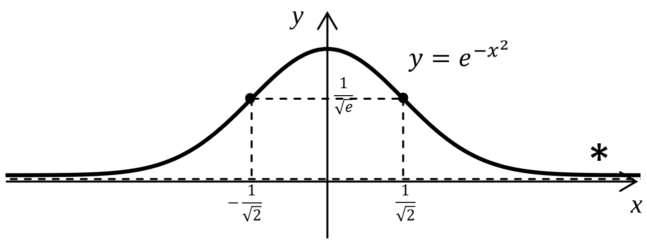
5. $f''(x) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) x^{-\frac{6}{5}} = -\frac{4}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} < 0$, dla każdego $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ czyli



wykres f jest wypukły do góry w D_f; brak punktów przegięcia.

e) $y = e^{-x^2}$

1. Oczywiste fakty to: $D_f = \mathbb{R}$ oraz że f jest funkcją ciągłą w $\mathbb{R}$ jako złożenie funkcji ciągłych; $\underset{x \in D_f = \mathbb{R}}{\forall} \; f(x) > 0$; $f(-x) = f(x)$, to znaczy $f(x)$ jest funkcją parzystą i dlatego wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY; ponadto mamy oczywistą nierówność wynikającą z własności funkcji wykładniczej: $\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \; 0 < e^{-x^2} \leq 1$ z równością tylko dla $x = 0$, czyli $\underset{x \in \mathbb{R}}{sup}\, f(x) = \underset{x \in \mathbb{R}}{max}\, f(x) = 1 = f(0)$, $\underset{x \in \mathbb{R}}{inf}\, f(x) = 0$, a zatem wykres funkcji f jest położony w pasie $0 < y \leq 1$.
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ jest asymptotą poziomą w $(\pm\infty)$ i stąd wykres funkcji f ma kształt jak niżej.



4. $f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0)$ $(f \uparrow)$, zatem $f_{max} = f(0) = 1$, co wynika już z powyższych uwag (punkt 1).
5. $f''(x) = e^{-x^2}4x^2 - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, zatem punktami przegięcia są $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, bo

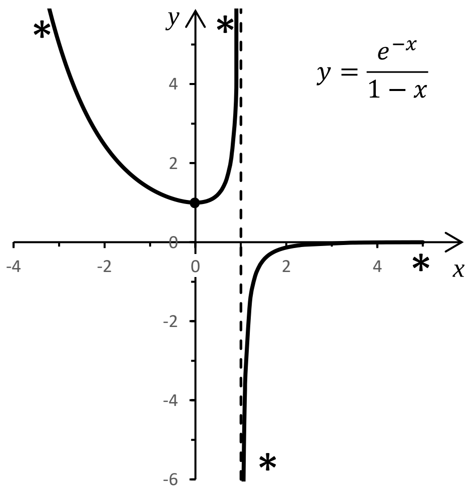
   $f_{pp} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6$.

   $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

   W tych przedziałach wykres funkcji f jest wypukły do dołu.

f) $y = \frac{e^{-x}}{1-x}$

1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; funkcja f jest ciągła w D_f jako iloraz funkcji ciągłych, $x = 1$ jest punktem nieciągłości; ponieważ licznik jest dodatni, zatem funkcja f nie ma miejsc zerowych i mamy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$.



2. Pisząc $f(x) = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{1-x}$, widzimy, że $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, czyli w $(+\infty)$ wykres funkcji f ma asymptotę poziomą $y = 0$. Natomiast

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} \underset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{-1} = +\infty,$$

czyli w $(-\infty)$ wykres funkcji f nie ma asymptoty. Ponadto

$$\lim_{x\to1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty \text{ i } \lim_{x\to1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty,$$

zatem wykres funkcji f ma asymptotę pionową $x = 1$, a jego położenie jest jak na rysunku wyżej $(f(0) = 1)$.

4. $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x)+e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ $(f \uparrow)$; $f_{min} = f(0) = 1$.

5. $f''(x) = \frac{(e^{-x}-xe^{-x})(1-x)^2+2xe^{-x}(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{e^{-x}}{(1-x)^3}(1 + x^2)$. Zatem

$f''(x) \neq 0$ w D_f i $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$, czyli w tym przedziale wykres funkcji f jest wypukły do dołu, a dla $x \in (1, +\infty)$ wypukły do góry; wykres funkcji f nie ma punktów przegięcia.

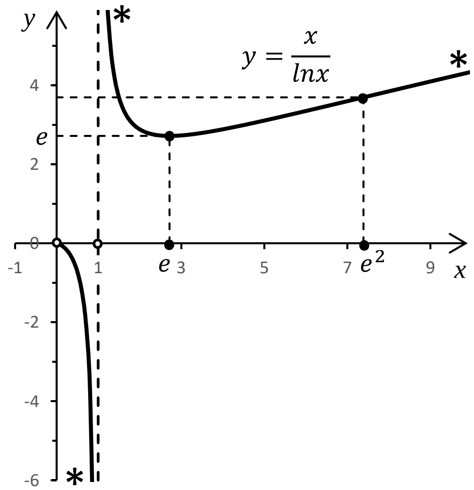
g) $y = \frac{x}{ln\,x}$

1. $D_f = (0,+\infty)\backslash\{1\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$, mamy ponadto $f(x) \neq 0$, dla $x \in D_f$ i $f(x) > 0 \Leftrightarrow ln\,x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{ln\,x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x\frac{1}{ln\,x} = 0$, zatem wykres f nie ma asymptoty pionowej $x = 0$. Mamy $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{ln\,x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{ln\,x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$, czyli wykres funkcji f ma asymptotę pionową $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{ln\,x} \underset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$ i mimo, że $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ to wykres funkcji f nie ma asymptoty ukośnej.

4. $f'(x) = \frac{ln\,x - x\cdot\frac{1}{x}}{ln^2 x} = \frac{lnx-1}{ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow x = e$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e \Rightarrow$



$\Rightarrow f_{min} = f(e) = e$ oraz (f ↑) dla $x > e$.

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{ln\,x} = 0$, czyli styczną prawostronną do wykresu funkcji f w punkcie (0,0) jest oś OX.

5. $f''(x) = \left(\frac{ln\,x-1}{ln^2 x}\right)' =$

$= \frac{1}{xln^3 x}(2 - ln\,x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ln\,x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$,

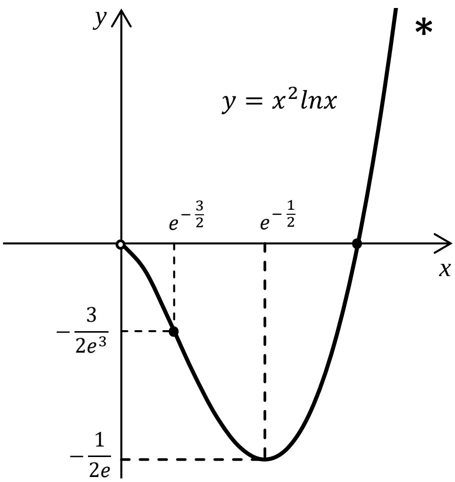
zatem punktem przegięcia wykresu funkcji f jest punkt $\left(e^2, \frac{1}{2}e^2\right)$, ponadto $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (2 - ln\,x)\,ln^3 x > 0 \Leftrightarrow x \in (1, e^2)$, ($f$ $\underline{\cup}$).

h) $y = x^2 \ln x$

1. $D_f = (0, +\infty)$, funkcja f jest ciągła w D_f jako iloczyn funkcji ciągłych. Ze wzoru definiującego łatwo widać, że $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ i $f(x) > 0$ dla $x > 1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^2}} = 0$, zatem nie istnieje asymptota pionowa $x = 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ zatem wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej, ani ukośnej.



4. $f'(x) = 2x \ln x + x = 0$,

$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{min} = f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$ oraz

$(f \uparrow)$ dla $x \in \left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

5. $f''(x) = (2x \ln x + x)' =$

$= 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$;

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$,

wykres funkcji f jest więc wypukły do dołu dla $x \in \left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, f ($\cup$).

Obliczając $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$ otrzymujemy współrzędne punktu przegięcia wykresu funkcji $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$.

i) $y = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$

1. $D_f = \{x: 1 - x^2 \geq 0\} = \langle -1,1 \rangle$, funkcja f jest ciągła w D_f jako iloczyn funkcji ciągłych dla $x \in \langle -1,1 \rangle$. Nie istnieją żadne asymptoty.

   Mamy dalej: $f(1) = f(-1) = 0$ i $\underset{x \in (-1,1)}{\forall} f(x) > 0$, a zatem

$$\min_{x \in D_f} f(x) = 0 = f(1) = f(-1).$$

   Uwaga. Dziedzina funkcji jest symetryczna względem $x = 0$, ale nie ma miejsca własność parzystości czy nieparzystości. Oczywiście wobec ciągłości f w $\langle -1,1 \rangle$ i faktów: $f(1) = f(-1) = 0$ i $\underset{x \in (-1,1)}{\forall} f(x) > 0$, wewnątrz przedziału istnieje maksimum globalne funkcji.

4. $f'(x) = -\frac{(1-x)(1+2x)}{\sqrt{1-x^2}} = -(1 + 2x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$,

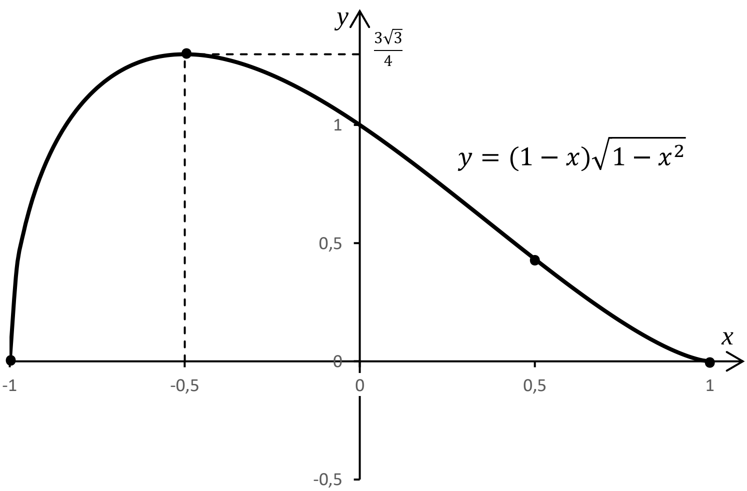
   $f'(x) > 0$ dla $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ $(f \uparrow)$, skąd otrzymujemy, że

   $f_{max} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \max\limits_{x \in \langle -1,1 \rangle} f(x)$. Ponadto $f'(x)$ nie istnieje dla $x = -1$, $f'(-1) = +\infty$, co oznacza, że w punkcie $(-1, 0)$ wykres funkcji f ma styczną pionową. W punkcie $(1, 0)$ wykres f ma styczną poziomą (oś OX), bo $f'(1) = 0$.

5. $f''(x) = -\left\{2 \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + (1 + 2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right\} =$

   $= 2 \cdot \frac{(2x-1)}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$, $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Ponadto $f''(x)$ nie istnieje dla $x = \pm 1$ oraz $f'' > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, czyli w przedziale $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

wykres funkcji f jest wypukły do dołu. Ostatecznie wykres f ma kształt jak niżej.



j) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. $D_f = \{x\colon\ x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$, ponadto dla $x \geq 1$ oczywiście mamy $f(x) \geq 1$; zauważmy, że $f(1) = 1$; $f(-1) = -1$; funkcja f jest ciągła w D_f , więc wykres f nie ma asymptoty pionowej;

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) = 1 + 1 = 2,$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2 \cdot x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0,$

   a więc wykres funkcji f ma asymptotę ukośną $y = 2x$ w $(+\infty)$.

   W $(-\infty)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0,$

   a więc wykres funkcji f ma asymptotę poziomą $y = 0$ (oś OX) w $(-\infty)$.

   Wykres f leży pod asymptotą $y = 2x$ dla $x > 1$, bo wtedy $f(x) < 2x$.

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = -x$ (co jest ewentualnie możliwe dla $x < 0$); podnosząc do kwadratu mamy sprzeczność $x^2 - 1 = x^2$; dla $x \leq -1$, $f(x) < 0$, co oznacza, że funkcja f nie ma miejsc zerowych.

4. $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \neq 0$, co daje

   $f'(x) > 0$ dla $x > 1$, $(f \uparrow)$, $f'(x) < 0$ dla $x < -1$, $(f \downarrow)$;

   $f'(x)$ nie ma miejsc zerowych; $f'(x)$ nie istnieje dla $x = \pm 1$, ale

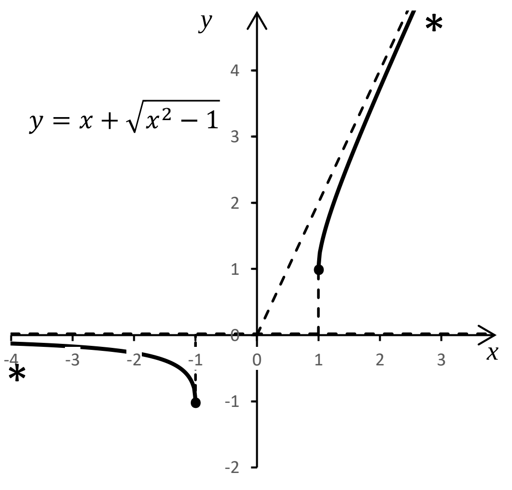
   $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$, (styczna prostopadła do osi OX w punkcie $x = 1$)

   $\lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty$, (styczna prostopadła do osi $OX,$ w punkcie $x = -1$);

   zatem w punktach $x = \pm 1$ występują tzw. lokalne minima brzegowe.

5. $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3} < 0$ dla każdego $x \in D_f$, a więc

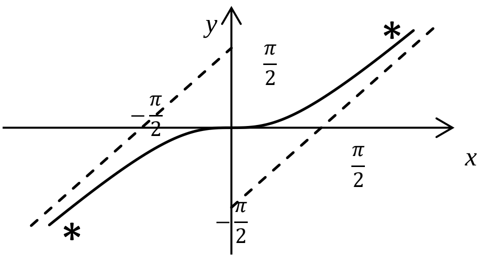
   wykres funkcji f jest wypukły do góry w całej D_f.



k) $y = x - arctg\, x$

1. Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$, f jest funkcją ciągłą w $\mathbb{R}$ (więc wykres nie ma asymptot pionowych) i nieparzystą, zatem wystarczy wykonać wykres dla $x \geq 0$. Ponadto w rozdziale VIII udowodniono, że $\underset{x\geq 0}{\forall}\, arctg\, x \leq x$ z równością tylko dla $x = 0$, czyli $f(0) = 0$ i $\underset{x>0}{\forall}\ f(x) > 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - arctg\, x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{arctg\, x}{x}\right) = 1 = a$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - a\cdot x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-\, arctg\, x) = -\frac{\pi}{2}$, zatem istnieje asymptota ukośna $y = x - \frac{\pi}{2}$ w $(+\infty)$, a przez symetrię w $(-\infty)$ wykres funkcji f ma asymptotę ukośną $y = x + \frac{\pi}{2}$.



4. $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} =$
$= \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, czyli $f'(x) \geq 0$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $(f\uparrow)$ w $\mathbb{R}$.

5. $f''(x) = \frac{2x(1+x^2)-x^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow$ punkt (0,0) jest punktem przegięcia wykresu funkcji f , a ponieważ $f''(x) > 0$ dla $x > 0$, wykres funkcji f jest wypukły do dołu dla $x > 0$.

Ponadto dla $x > 0$, $f(x) > x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x - arctg\, x > x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow arctg\, x < \frac{\pi}{2}$, zatem dla $x > 0$ wykres funkcji f leży nad asymptotą ukośną $y = x - \frac{\pi}{2}$, a dla $x < 0$ wykres funkcji f leży pod asymptotą ukośną $y = x + \frac{\pi}{2}$.

l) $y = arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1. $D_f = \mathbb{R}$, bo dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy:

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 \geq 0$ i $(1-x)^2 \geq 0$, z równością tylko dla $x = \pm 1$.

Ponadto f jest funkcją nieparzystą, bo $arcsin(-t) = -arcsin\, t$.

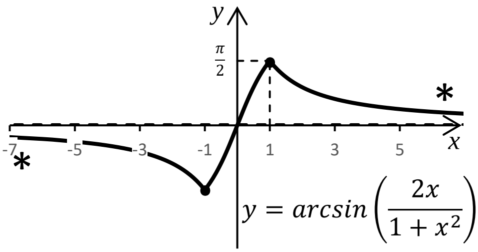
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ zatem wykres f ma asymptotę poziomą $y = 0$.

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

4. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} =$

$= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & dla \quad x \in (-1,1) \\ \frac{-2}{1+x^2} & dla \quad x \notin (-1,1) \end{cases}$. Zauważmy, że f' nie istnieje dla $x = \pm 1$

oraz $f'_-(1) = \frac{\pi}{2}$, $f'_+(1) = -\frac{\pi}{2}$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (-1,1)$ ($f \uparrow$).



5. $f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} & dla \quad x \in (-1,1) \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & dla \quad x \notin (-1,1) \end{cases}$,

czyli $f''(x) > 0$ dla $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, zatem wykres funkcji f jest wypukły do dołu w tych przedziałach. Punktami przegięcia wykresu funkcji f są punkty (0,0), $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Zadanie 1. Zbadać przebieg zmienności oraz wykreślić funkcję $y = f(x)$. Wykres powinien być uzasadniony wyznaczeniem takich elementów funkcji jak: dziedzina, odpowiednie granice, asymptoty, miejsca zerowe, ekstrema lokalne, punkty przegięcia, przedziały monotoniczności i wypukłości, itd.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2$; b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; c) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}$;

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$; e) $f(x) = x - \frac{1}{x}$; f) $f(x) = x\sqrt[3]{1-x}$;

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; h) $f(x) = x^2(1 \pm \sqrt{x})$; i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$;

j) $f(x) = ln(1 + e^{-x})$; k) $f(x) = x^n e^{-x}, n = 1\ i\ n = 2$; l) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$.

Następujące przykłady pokazują konstrukcję wykresu funkcji $y = f(x)$ wykorzystującą definicję funkcji oraz zastosowanie znanych własności funkcji podstawowych. Stosowanie pochodnych w tych przykładach okazuje się niepotrzebne lub trudniejsze rachunkowo.

Zadanie 2. Zbadać przebieg zmienności i skonstruować wykres funkcji $y = f(x)$:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (wykorzystać fakt, że $x^2 + y^2 = 1$) ;

b) $f(x) = sgn(\sin x)$ (wykorzystać definicję funkcji $signum$ oraz własności funkcji $sinus$) ;

c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ (wykorzystać wzory: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$) ;

d) $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$
(wykorzystać definicję wartości bezwzględnej).

Rozdział XI. CAŁKA NIEOZNACZONA

11.1 Funkcja pierwotna

Definicja. *Niech* f *będzie funkcją rzeczywistą określoną w pewnym przedziale* (a,b), $a<b$ *. Każdą funkcję różniczkowalną* F *w przedziale* (a,b) *i spełniającą równość*

(11.1) $$F'^{(x)} = f(x)\,,\ \ x \in (a,b)$$

nazywamy ***funkcją pierwotną*** *funkcji* f *.*

Na przykład, jeżeli $f(x)=x^2$, to $F(x)=\frac{1}{3}x^3$; $f(x)=\sqrt{x}\,, x\geq 0$, to $F(x)=x^{\frac{3}{2}}$; $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, to $F(x)=ln\,|x|$, itd.

Uwaga 1. Wobec faktu, że pochodna stałej jest równa zeru, to dla danej funkcji całkowalnej f (to znaczy że istnieje dla niej funkcja pierwotna) mamy zawsze rodzinę funkcji pierwotnych

$$F(x)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Zatem dwie dowolne funkcje pierwotne funkcji f różnią się o stałą rzeczywistą.

Definicja. *Rodzinę funkcji pierwotnych* $F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$ *nazywamy* ***całką nieoznaczoną*** *z funkcji* f *i piszemy*

(11.2) $$\int f(x)dx = F(x)+c$$ (czytamy całka z $f(x)dx$) .

Możemy więc napisać

(11.3) $$F'(x) = [\int f(x)dx]' = f(x).$$

Uwaga 2. Symbol różniczkowania (obliczanie pochodnej) to znak prim „ $'$ ”. Symbol całkowania to znak $\int$ oraz dx . Uzasadnienie historyczne tego symbolu będzie podane przy całce oznaczonej.

Jak więc widzimy operacja wyznaczania funkcji pierwotnej, którą nazywamy całkowaniem, jest operacją odwrotną do różniczkowania.

Uwaga 3. Przykład funkcji dla której nie istnieje funkcja pierwotna.

Funkcja

$$f(x) = sgn\, x = \begin{cases} 1 & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \\ -1 & dla \quad x < 0 \end{cases}, \tag{11.4}$$

posiada funkcję pierwotną w każdym przedziale nie zawierającym punktu $x = 0$, ale nie posiada funkcji pierwotnej w każdym przedziale zawierającym $x = 0$. Istotnie mamy:

a) na przykład w przedziale $\langle 1, 2\rangle$ $f(x) = 1 = const$, stąd $F(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną.

b) Natomiast weźmy dowolny przedział zawierający $x = 0$, na przykład $\langle -1, 4\rangle$. Wtedy w przedziale $(0, 4\rangle$: $F(x) = x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, a w przedziale $\langle -1, 0)$: $F(x) = -x + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Biorąc $c_1 = c_2 = c$ otrzymamy na przedziale $\langle -1, 4\rangle$ ciągłą funkcję pierwotną $F(x) = |x| + c$, która jednakże nie ma pochodnej dla $x = 0$. A zatem nie istnieje funkcja pierwotna dla funkcji $f(x) = sgn\, x$ w $\langle -1, 4\rangle$.

Następujące twierdzenie, w pełni wystarczające do naszych dalszych potrzeb rozstrzyga problem całkowalności.

Twierdzenie 1. *Dla każdej funkcji f ciągłej w przedziale (a, b) istnieje funkcja pierwotna, a więc całka nieoznaczona.*

Ciągłość funkcji f będziemy zawsze zakładać w dalszym ciągu naszego wykładu dotyczącego całek, chyba, że będzie oddzielna uwaga.

11.2 Tabela całek nieoznaczonych

Znając tabelę pochodnych i traktując całkowanie jako działanie odwrotne do różniczkowania, możemy natychmiast napisać tabelę całek funkcji podstawowych $(c \in \mathbb{R})$.

$f(x)$	$\int \boldsymbol{f(x)dx}$	$f(x)$	$\int \boldsymbol{f(x)dx}$
x^α	$\boldsymbol{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{-1}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\boldsymbol{tg\, x + c}$
$\frac{1}{x}$	$\boldsymbol{\ln \|x\| + c}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\boldsymbol{-\,ctg\, x + c}$
e^x	$\boldsymbol{e^x + c}$	$\frac{1}{a^2-x^2}, a \neq 0$	$\boldsymbol{\frac{1}{2a} \ln \left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + c}$
$sinx$	$\boldsymbol{-\cos x + c}$	$\frac{1}{a^2+x^2}, a \neq 0$	$\boldsymbol{\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c}$
$cosx$	$\boldsymbol{\sin x + c}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a \neq 0$	$\boldsymbol{\frac{a}{\|a\|} arcsin \frac{x}{a} + c}$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$\boldsymbol{\ln \|g(x)\| + c}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, a \neq 0$	$\boldsymbol{\ln \left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + c}$

11.3 Technika obliczania całek nieoznaczonych

W odróżnieniu od różniczkowania (obliczanie pochodnych) technika obliczania całek jest niestety o wiele bardziej skomplikowana. Co więcej, istnieją funkcje ciągłe (a więc całkowalne), których całki nie potrafimy zapisać za pomocą znanych nam funkcji elementarnych.

Na przykład są to całki: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \sqrt{x^3+x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$.

Cztery następujące wzory, wynikające z odpowiednich wzorów dla różniczkowania, są podstawą rachunku całkowego.

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że f i g są funkcjami ciągłymi w przedziale (a,b) oraz $c \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą. Wtedy:*

(11.5) $$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx ,$$

(11.6) $$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

Wniosek. Z powyższych wzorów wynika natychmiast nieco ogólniejszy wzór, który będziemy automatycznie stosować:

(11.7) $$\int [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

Pierwszym ewidentnym mankamentem całkowania jest brak wzoru na całkę iloczynu, czy ilorazu funkcji (dla różniczkowania takie wzory mamy). „Namiastką” takiego wzoru użytecznego w wielu przypadkach jest wzór na całkowanie przez części.

Twierdzenie 3. (Wzór na całkowanie przez części)

Załóżmy, że $f, g \in C^1$. Wtedy ma miejsce wzór

(11.8) $$\int f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx .$$

Uwaga 4. Praktyka stosowania tego wzoru do całek zawierających iloczyn funkcji sprowadza się do umiejętnego oznaczenia (którą funkcję przyjąć za f, a którą za g') tak, aby otrzymana całka była łatwiejsza do obliczenia. Pokazują to poniższe przykłady.

Przykłady

1. $\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^{-x}}_{g'}dx = \begin{vmatrix} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-x} & g(x) = -e^{-x} \end{vmatrix} =$

$= -xe^{-x} - \int 1 \cdot (-e^{-x})dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c;$

2. $\int \underbrace{x^2}_{f'}\underbrace{ln\,x}_{g}\,dx = \begin{vmatrix} f'(x) = x^2 & f(x) = \frac{x^3}{3} \\ g(x) = ln\,x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$

$= \frac{x^3}{3}ln\,x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}ln\,x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}ln\,x - \frac{1}{9}x^3 + c\ ;$

3. $\int lnxdx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{ln\,x}_{g}\,dx = \begin{vmatrix} f'(x) = 1 & f(x) = x \\ g(x) = ln\,x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$

$= x\,ln\,x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\,ln\,x - x + c\ ;$

4. $\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{cos\,x}_{g'}\,dx = \begin{vmatrix} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = cos\,x & g(x) = sin\,x \end{vmatrix} =$

$= x\,sin\,x - \int sin\,x\,dx = x\,sin\,x + cos\,x + c\ .$

Uwaga 5. Oznaczając „odwrotnie" odpowiednie funkcje w przykładzie wyżej otrzymamy:

5. $\int \underbrace{x}_{f'}\underbrace{cos\,x}_{g}\,dx = \begin{vmatrix} f'(x) = x & f(x) = \frac{x^2}{2} \\ g(x) = cos\,x & g'(x) = -\,sin\,x \end{vmatrix} =$

$= \frac{x^2}{2}cos\,x + \int \frac{x^2}{2}sin\,x\,dx.$

Otrzymaliśmy więc całkę trudniejszą niż wyjściowa, zatem poprawne było oznaczenie poprzednie.

Uwaga 6. Jest oczywistym, że czasami całkowanie przez części trzeba wykonać wielokrotnie, np.

6. $\int \underbrace{x^3}_{f} \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx = \begin{vmatrix} f(x) = x^3 & f'(x) = 3x^2 \\ g'(x) = e^{-x} & g(x) = -e^{-x} \end{vmatrix} =$

$= -x^3 e^{-x} + 3 \int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx = \begin{vmatrix} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^{-x} & g(x) = -e^{-x} \end{vmatrix} =$

$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 3 \int 2x(-e^{-x}) dx = \begin{vmatrix} na\ mocy \\ przykładu\ \mathbf{1}. \end{vmatrix} =$

$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + c$.

Uwaga 7. Całkując przez części zdarza się, że wrócimy do całki wyjściowej. Wtedy traktując ją jako niewiadomą, przenosimy ją na lewą stronę i otrzymujemy jej wartość.

7. $\int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} dx = \begin{vmatrix} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{vmatrix} =$

$= -e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'} dx = \begin{vmatrix} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{vmatrix} =$

$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$.

Stąd

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c .$$

8. W dalszym ciągu będzie przydatny wzór ogólniejszy, który otrzymujemy całkując jak wyżej

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + c , \quad a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\} .$$

11.4 Wzór na całkowanie przez podstawienie

Tabela całek, do której zawsze wracamy w ostatnim kroku, zawiera tylko całki z funkcji „podstawowych”.

Już na przykład całka $\int sin\, 3x\, dx$ lub $\int e^{-2x} dx$ tam nie występuje, a przecież do całki podstawowej mamy „blisko”, wystarczy podstawić $3x = t$ lub $-2x = t$.

Wzór na pochodną funkcji złożonej

$$(f[g(x)])' = f'[g(x)]g'(x) ,$$

ułatwia nam obliczanie całek o powyższej strukturze.

Twierdzenie 4. (Wzór na całkowanie przez podstawienie)

Niech f będzie funkcją ciągłą, a $g \in C^1$ i załóżmy, że ma sens funkcja złożona $f[g(x)]$. Wtedy

(11.9) $$\int f[g(x)]g'(x)dx = \left| \begin{matrix} g(x) = t \\ g'(x)dx = dt \end{matrix} \right| = \int f(t)dt .$$

Uwaga 8. Wzór (11.9) sugeruje podstawienie jakie należy wykonać, aby całkę trudniejszą sprowadzić do łatwiejszej. Jest to właśnie podstawowy problem przy stosowaniu wzoru (11.9), jakie podstawienie wykonać.

Różniczka funkcji g to jest wyrażenie $g'(x)dx$ jest pewną wskazówką, ale często początkowo niewidoczną, chociaż ogólna idea podstawowa jest oczywista, należy wykonać takie podstawienie, aby nowo otrzymana całka była „prostsza”.

Przykłady

1. $\int sin3xdx = \left| \begin{matrix} 3x = t \\ 3dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int sintdt = -\frac{1}{3}cost + c = -\frac{1}{3}cos3x + c;$

2. $\int xe^{-x^2}dx = \left| \begin{matrix} -x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$;

3. $\int cos^3 x dx = \int cos^2 x \cos x\, dx = \int (1 - sin^2 x) \cos x\, dx =$

$= \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int (1 - t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + c = \sin x - \frac{1}{3}sin^3 x + c.$

Uwaga 9. Metoda podstawiania jest kluczową do obliczania wielu całek. Umiejętne podstawienie, które jest uzależnione od kształtu funkcji podcałkowej, pozwala obliczyć wiele całek.

4. $\int x\sqrt{1 - x^2}dx = \left| \begin{matrix} 1 - x^2 = t^2 \\ -2xdx = 2tdt \\ xdx = -tdt \end{matrix} \right| = -\int \sqrt{t^2}tdt = -\int t^2 dt =$

$= -\frac{1}{3}t^3 + c = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^3 + c$;

5. $\int \sqrt{1 - x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{1 - sin^2 t} \cos t\, dt =$

$= \int cos^2 t\, dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2}\int 1 \cdot dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt =$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c = \frac{1}{2}(\arcsin x) + \frac{1}{4}\sin 2(\arcsin x) + c$.

Uwaga 10. Ostatnie dwa przykłady pokazują, że przy „technicznym” obliczaniu całek nieistotny jest przedział (a, b). Będziemy zakładać istnienie odpowiednich funkcji odwrotnych, czy też w dalszym ciągu (przy całkach oznaczonych) uważać na wzór $\sqrt{t^2} = |t|$.

6. $\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{1}{t} dt =$

$= -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$;

7. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \left| \begin{matrix} e^x + 1 = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(e^x+1) + c$;

8. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + c$.

9. $\int \frac{4x}{1+x^2} dx = 2\int \frac{2x}{1+x^2} dx = 2\ln|1+x^2| + c$.

Powyższe przykłady wskazują na znaczenie wzoru ogólnego zawartego w tabeli, a mianowicie jeżeli $f \in C^1$ i $f(x) \neq 0$, to

(11.10) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c\ .$$

Uwaga 11. **(Całki eliptyczne)** Jak wspomnieliśmy na początku rozdziału istnieją całki z funkcji ciągłych, które nie dadzą się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Ważną grupę tych całek stanowią całki z funkcji niewymiernych, gdzie pod pierwiastkiem kwadratowym występują wielomiany stopnia trzeciego lub czwartego; noszą one nazwę całek eliptycznych. Można udowodnić, że sprowadzą się one do tak zwanych trzech postaci kanonicznych, jak niżej:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx\ ,\ \int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx\ ,\quad 0 < k < 1\ ,$$

$$\int \frac{1}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx\ ,\ 0 < k < 1\ ,\ h \in \mathbb{R}\ .$$

11.5 Całkowanie funkcji wymiernych

Definicja. *Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów*

$$f(x) = \frac{W_n(x)}{W_m(x)}.$$

Możemy założyć, że $m > n$, bo w przeciwnym wypadku należy najpierw podzielić licznik przez mianownik.

W skrócie (dokładniej to pokażemy na kilku przykładach) schemat całkowania wygląda następująco.

Jak wiemy wielomian występujący w mianowniku $W_m(x)$ można przedstawić jako iloczyn wielomianów I stopnia (ewentualnie w potędze naturalnej) i drugiego stopnia (z $\Delta < 0$) (ewentualnie w potędze naturalnej).

Wtedy dowodzi się, że funkcja f da się przedstawić jako suma tak zwanych ułamków prostych, to jest ułamków postaci:

$\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\frac{Cx+D}{x^2+p^2}$, $\frac{Ex+F}{(x^2+p^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

gdzie $a, b, p, A, B, C, D, E, F$ są stałymi rzeczywistymi.

Zatem całkowanie sprowadza się do policzenia całek z funkcji wymienionych wyżej.

Współczynniki A, B, C, D, E, F wyliczamy z porównania współczynników odpowiednich wielomianów. Pokazują to poniższe przykłady.

Przykłady. Obliczyć całki:

1. $\int \frac{1}{1-x^2} dx$; $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1+x)} = \frac{A(1-x)+B(1+x)}{(1-x^2)} =$

$\frac{(A-B)x+(A+B)}{(1-x^2)}$.

Powyższa równość ma zachodzić tożsamościowo to znaczy dla każdego $x \in D_f$, co ma miejsce gdy:

$1 \equiv (A-B)x + (A+B) \Leftrightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\ ,\ B = \frac{1}{2}$,

czyli $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}$ i stąd

$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} ln\,|1-x| + \frac{1}{2} ln\,|1+x| + c$.

2. $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4} dx$; $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4} = \frac{x^2-x+2}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} =$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2} =$$

$$= \frac{x^3(A+B+C+D)+x^2(-A+B-2C+2D)+x(-4A-4B-C-D)+(4A-4B+2C-2D)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}\ .$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ -A+B-2C+2D=1 \\ -4A-4B-C-D=-1 \\ 4A-4B+2C-2D=2 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem są liczby $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$, $D = \frac{1}{3}$.

Następnie wykonujemy całkowanie funkcji f w postaci

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}.$$

3. $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx$; $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$

$$= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+x(C-B)+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)}\ .$$

Ostatnia równość ma miejsce dla każdego $x \in D_f$ gdy:

$$x \equiv x^2(A+B) + x(C-B) + (A-C) \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C-B=1 \\ A-C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\,,\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2}\,.$$

Mamy więc $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx =$

$$= \frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{1}{4}ln|x^2+1| + \frac{1}{2}arctg\,x + c\,.$$

4. $\int \frac{x^3+2}{x^2+x}dx$; $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+x} = \left|\begin{matrix} \textit{stopień licznika większy} \\ \textit{od stopnia mianownika,} \\ \textit{wykonujemy dzielenie} \end{matrix}\right| = (x-1) + \frac{x+2}{x^2+x}\,.$

Stąd $\int f(x)dx = \int (x-1)dx + \int \frac{x+2}{x^2+x}dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{x+2}{x(x+1)}dx$,

ale $\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A+B)x + A \equiv x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow A=2\,,\ B=-1$,

$\int \frac{x+2}{x^2+x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx + \int -\frac{1}{x+1}dx = 2\,ln\,|x| - ln\,|1+x|$,

czyli $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\,ln\,|x| - ln\,|1+x| + c\,.$

5. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$;

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych i porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x^2 + (-A+C+B)x + (A+C) \equiv 1.$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} = \left|\begin{matrix} \textit{dodajemy stronami} \\ \textit{równania 1 i 2} \end{matrix}\right| = \begin{cases} 2B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow 2B-A=-1 \ ,$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B-A=-1 \end{cases} \Rightarrow B=-\frac{1}{3},\ A=\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3} \ .$$

Naszą całkę możemy zatem, zapisać w postaci sumy

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx\right].$$

Pierwsza całka jest znana, natomiast drugą obliczamy następująco:

$$\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx = -\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + 3\int \frac{1}{x^2-x+1}dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\ arctg\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$$

$$= -\frac{1}{2}ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,arctg\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c \ .$$

Ostatecznie mamy:

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}ln\,|x+1| - \frac{1}{6}ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\ arctg\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \frac{1}{6}ln\frac{(x+1)^2}{(x^2-x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\ arctg\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c \ .$$

11.6 Całkowanie innych rodzajów funkcji

Istnieje wiele tablic podających odpowiednie podstawienia, które sprowadzają na przykład całki z funkcji niewymiernych czy trygonometrycznych do całek z funkcji wymiernych. Zagadnienie to jest dosyć obszerne i generalnie wykraczające poza zakres tej monografii. Podamy jednak pewne podstawienia, które mogą być przydatne do obliczenia trudniejszych całek.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że pierwszy krok w obliczeniach całek należy kierować w stronę wykorzystania wzoru przez podstawienie, czy przez części (gdy występuje iloczyn). Sama postać funkcji podcałkowej wyglądająca na skomplikowaną, może okazać się po prostych przekształceniach całkiem łatwą do całkowania.

Przykłady

1. $\int tg^2\, x\, dx$ jest łatwiejsza, niż $\int tg\, x\, dx$ (była obliczona w punkcie 11.4 przykład **6.**), gdyż mamy $\int tg^2\, x\, dx = \int \frac{sin^2\, x}{cos^2\, x} dx = \int \frac{1-cos^2\, x}{cos^2\, x} dx =$

$$=\int \frac{1}{cos^2\, x} dx - \int 1 \cdot dx = tg\, x - x + c\ .$$

2. $\int \sqrt{2 - x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = \sqrt{2}\, sin\, t \\ dx = \sqrt{2}\, cos\, t\, dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{2 - 2\, sin^2\, t}\, \sqrt{2}\, cos\, t\, dt =$

$= 2 \int cos^2\, t\, dt = \int (1 + cos\, 2t)\, dt = \cdots$ itd.

3. $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \left| \begin{matrix} x^4 + 1 = t^2 \\ 4x^3 dx = 2tdt \\ x^3 dx = \frac{1}{2} tdt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int t \sqrt{t^2} dt = \frac{1}{2} \int t^2 dt =$

$$= \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{6} (x^4 + 1)^3 + c\ .$$

Postać pewnych podstawień jest często nieoczekiwana i na przykład w przypadku funkcji trygonometrycznych wykorzystuje się odpowiednie wzory, z których podajemy najczęściej używane:

$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\, 2x)$, $sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\, 2x)$, $1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$,

$tg\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$, $ctg\, x = \frac{cos\, x}{sin\, x}$; $sin\, x = \frac{2t}{1+t^2}$, $cos\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ gdzie $t = tg\frac{x}{2}$.

4. $\int \frac{1}{sin\ x} dx = \left| \begin{array}{c} tg\frac{x}{2} = t \\ x = 2\, arctg\, t \\ sin\, x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt = ln|t| + c$

$= ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$.

5. $\int \frac{1}{sin^4 x + cos^4 x} dx = \int \frac{1}{cos^4 x\, (tg^4 x + 1)} dx = \left| \begin{array}{l} tg\, x = t \\ \frac{1}{cos^2 x} = 1 + t^2 \\ \frac{dx}{cos^2 x} = dt \end{array} \right| =$

$= \int \frac{(1+t^2)}{(t^4+1)} dt =$ całka funkcji wymiernej.

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx \quad (gdzie\ a \in \mathbb{R}) = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + a^2} = t - x \\ x = \frac{t^2 - a^2}{2t} \\ dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} =$

$= ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$.

11.7 Całki postaci $\int x^m(a+bx^n)^p dx$.

Całki powyższej postaci gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, natomiast liczby $m, n, p,$ są liczbami wymiernymi, można wyliczyć za pomocą funkcji elementarnych tylko w następujących przypadkach:

a) $p \in \mathbb{N}$ - stosując Dwumian Newtona;

b) $-p \in \mathbb{N}$ - stosując podstawienie $x = t^k$, gdzie k jest wspólnym mianownikiem liczb m oraz n ;

c) $\left(\frac{m+1}{n}\right)$ jest liczbą całkowitą, stosując podstawienie $a + bx^n = t^k$, gdzie k jest mianownikiem liczby p ;

d) $\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$ jest liczbą całkowitą, stosując podstawienie $a + bx^n = t^k x^n$, gdzie k jest mianownikiem liczby p.

Na przykład:

$$\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx = \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} m = \frac{1}{3} \quad n = 2 \quad p = \frac{1}{3} \\ \left(\frac{m+1}{n} + p\right) = 1 \end{array} \right| = \text{mamy}$$

więc przypadek **d)** i podstawiamy

$1 - x^2 = x^2 t^3$, skąd $x = (1+t^3)^{-\frac{1}{2}}$, $dx = \left(-\frac{3}{2}\right) t^2 (1+t^3)^{-\frac{3}{2}} dt$.

Zatem nasza całka przyjmuje postać

$$\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx = \left(-\frac{3}{2}\right) \int \frac{t^3}{(1+t^3)^2} dt ,$$

którą obliczamy łatwo, jako całkę z funkcji wymiernej.

11.8 Wzory rekurencyjne

Obliczanie całek w przypadku gdy funkcja podcałkowa zawiera parametr naturalny $n \in \mathbb{N}(\ \mathbb{N}_0)$, sprowadza się często do wyznaczenia najpierw wzoru rekurencyjnego dla całki, a następnie „rozwiązania" otrzymanej rekurencji. Wzór rekurencyjny otrzymuje się zazwyczaj przez kilkukrotne całkowanie przez części. Pokażemy tę metodę na kilku przykładach.

Przykłady. Obliczyć całki zależne od parametru naturalnego.

1. $I_n = \int x^n e^{ax}\, dx\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\ , a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$I_n = \int \underbrace{x^n}_{f} \underbrace{e^{ax}}_{g'}\, dx = \begin{vmatrix} f(x) = x^n & f'(x) = nx^{n-1} \\ g'(x) = e^{ax} & g(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a} x^n e^{ax} + \frac{n}{a} I_{n-1} = \cdots =$$

$$= e^{ax}\left[\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\right]. \tag{11.10}$$

Rozwiązanie otrzymywanych równań rekurencyjnych (gdy nie znamy teorii takich równań) wymaga często sprytu i obserwacji relacji spełnianych przez całkę I_n dla małych n . W naszym przypadku była to rekurencja liniowa.

2. Całkując przez części można podać wzór rekurencyjny dla całki występującej w wielu zagadnieniach

$I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} dx\ ,\ n \in \mathbb{N}\ , a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ ; I_1 = \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\ arctg\, \frac{x}{a}$.

Mianowicie mamy wzór

(11.11) $$I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right),$$

$$n \in \mathbb{N}\,, n \geq 2\,.$$

Istotnie, możemy napisać

$$I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}dx\right).$$

Drugą całkę obliczamy przez części: $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x\,, & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,, & g(x) = \int \frac{x}{(a^2+x^2)^n}dx = \frac{1}{(2n-2)(a^2+x^2)^{n-1}} \end{array} \right| .$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do wzoru wyżej otrzymujemy tezę.

Zadania, komentarze, uzupełnienia

Zadanie 1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

a)$\int \frac{x^2-3}{x^3}dx$; b)$\int \frac{5}{x^2+3}dx$; c)$\int \frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}dx$; d)$\int \frac{ln(\,ln\,x)}{x}dx$; e)$\int \frac{ln^3 x}{x^2}dx$;

f)$\int x^3\, ln\, x\, dx$; g)$\int cos^2 5x\, dx$; h)$\int x\sqrt{3x^2+4}\,dx$; i)$\int cos^4 x\, sin\, x\, dx$;

k)$\int \frac{1}{x^2(x-1)}dx$; l)$\int \frac{x^4}{x^3-1}dx$; m)$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; n)$\int x\sqrt{x^4+1}\,dx$.

Zadanie 2. Stosując podstawienie $(x-a) = (b-a)\,sin^2 t$ obliczyć całki:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; b) $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$; $x \in (a,b)\,, a < b$.

Rozdział XII. CAŁKA OZNACZONA

12.1 Definicja całki oznaczonej

Do definicji całki oznaczonej na „podstawowym” poziomie matematyki wyższej można „podejść” na dwa sposoby:

a) za pomocą wzoru Leibniza - Newtona,

b) za pomocą granicy ciągu sum pośrednich Riemanna (biorąc pod uwagę historyczne pojawienie się całki, jako pola odpowiedniej figury płaskiej).

Definicja. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, $a < b$ i niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale. Całką oznaczoną z funkcji f w przedziale $\langle a, b\rangle$ nazywamy liczbę:*

(12.1) $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b \ .$$

Uwaga 1. Jak widzimy z powyższego wzoru, problem obliczenia całki oznaczonej sprowadza się praktycznie do wyznaczenia funkcji pierwotnej i zastosowania wzoru (12.1).

Uwaga 2. Liczby a i b nazywamy granicami całkowania, a oznaczenie $F(x)|_a^b$, to skrótowe oznaczenie różnicy $F(b) - F(a)$, używane w praktycznych obliczeniach. Wzór (12.1) jest podstawowym wzorem rachunku całkowego i nosi nazwę **wzoru Leibniza-Newtona**.

Przykłady

1. $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.

2. $\int_0^\pi \sin x\, dx = (-\cos x)\,|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$.

12.2 Podstawowe własności całki oznaczonej

Podamy niżej (bez dowodu) kilka podstawowych własności całki oznaczonej, które są istotne do zastosowań.

Twierdzenie 1. *Każda funkcja f ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$ jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$ (to znaczy istnieje skończona wartość całki $\int_a^b f(x)dx$).*

Co więcej, każda funkcja przedziałami ciągła w $\langle a,b\rangle$, mająca skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju *jest też całkowalna w $\langle a,b\rangle$.*

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że f i g są ciągłe w $\langle a,b\rangle$. Wtedy funkcje*

$$c\cdot f(x),\quad |f(x)|,\quad [\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)],\quad f(x)\cdot g(x),\quad c,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

są całkowalne w $\langle a,b\rangle$ oraz mają miejsce poniższe relacje:

(A) ***Własności algebraiczne:***

(12.2) $$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx\ ,$$

(12.3) $$\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))dx=\alpha\cdot\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\ ,$$

(12.4) $$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\ ,\qquad \int_a^a f(x)dx=0\ .$$

Jeżeli $c\in(a,b)$ jest dowolnym punktem, to

(12.5) $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\ .$$

(B) ***Nierówności:***

(12.6) $$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx\ .$$

Jeżeli $\underset{x\in\langle a,b\rangle}{\forall} f(x)\le g(x)$ *, to*

(12.7) $$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx\ .$$

Nierówność ***Cauchy-Buniakowskiego-Schwarza (CBS)****:*

(12.8) $$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)dx\right] .$$

(C) ***Twierdzenia o wartości średniej:***

Istnieje punkt $c \in (a,b)$ *taki, że*

(12.9) $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) .$$

Wyrażenie po lewej stronie wzoru (12.9) nazywamy wartością średnią funkcji f *w przedziale* (a,b) *. Z (12.9) wynika oszacowanie*

(12.10) $$(b-a)\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) .$$

Jeżeli dodatkowo funkcja g *ma stały znak, to istnieje punkt* $c \in (a,b)$ *taki, że*

(12.11) $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx .$$

Jeżeli dodatkowo funkcja g *jest monotoniczna, to istnieje punkt* $c \in (a,b)$ *taki, że*

(12.12) $$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx .$$

Uwaga. Relacja (12.7) jest szczególnie ważna, bo mówi ona, że nierówności między funkcjami możemy całkować, a w szczególności gdy $f(x) \ge 0$, dla każdego $x \in \langle a,b\rangle$, to całka $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Można udowodnić również, że gdy $f(x)$ jest ciągła w $\langle a,b\rangle$ oraz $f(x) > 0$ w $\langle a,b\rangle$, to $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Relacja (12.7) jest również bardzo istotna, gdy nie możemy wyznaczyć funkcji pierwotnej funkcji f, a chcemy znać choćby przybliżoną wartość całki $\int_a^b f(x)dx$.

Jak wiemy funkcja ciągła f, ma nieskończenie wiele funkcji pierwotnych różniących się o stałą. Ma miejsce własność bardziej precyzyjna:

Twierdzenie 3. *Jeżeli f jest funkcją ciągłą w $\langle a, b\rangle$ to funkcja*

(12.13) $$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\,, \quad x_0, x \in (a, b)$$

jest funkcją pierwotną funkcji f zerującą się w x_0.

Funkcję $\Phi(x)$ nazywamy całką o zmiennej górnej granicy całkowania.

12.3 Dalsze własności całki oznaczonej

W niektórych zagadnieniach wygodnie jest mieć nieco ogólniejszą wersję wzoru (12.13) wynikającą ze wzoru na pochodną funkcji złożonej.

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że funkcje u i v są różniczkowalne w przedziale $\langle a, b\rangle$ i $u, v\colon \langle a, b\rangle \to \langle A, B\rangle$ oraz, że funkcja f jest ciągła w $\langle a, b\rangle$. Wtedy funkcja*

(12.14) $$\Psi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

jest różniczkowalna w $\langle a, b\rangle$ i ma miejsce wzór

(12.15) $$\Psi'(x) = v'(x) \cdot f\big(v(x)\big) - u'(x) \cdot f(u(x))\,.$$

Dla całki oznaczonej zachodzą twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie oraz przez części.

Twierdzenie 5. (Zamiana zmiennej w całce oznaczonej - całkowanie przez podstawienie)

Załóżmy, że $f(x)$ *jest funkcją ciągłą w* $\langle a,b\rangle$ *, a funkcja* $g(t)$ *spełnia następujące założenia:*

1. $g(t) \in C^1\langle\alpha,\beta\rangle$,
2. $g(\langle\alpha,\beta\rangle) = \langle a,b\rangle$,
3. $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Wtedy

(12.16) $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt \, .$$

Przykłady

1. Obliczyć całki: **a)** $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$; **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x\, dx$.

Zastosujemy odpowiednie podstawienie jak niżej. Mamy

a) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} -x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{vmatrix} =$

x	0	1
t	1	-1

$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^t \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x \cdot sin\, x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2 x)\, sin\, x\, dx =$

$= \begin{vmatrix} cos\, x\, dx = t \\ -sin\, x\, dx = dt \end{vmatrix} =$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

$= \int_0^1 (1 - t^2)dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

2. Wyjaśnić dlaczego podstawienie $x^2 = t$ daje fałszywą wartość całki $\int_{-1}^{2} x^2 dx$?

Podstawmy $x^2 = t$ i obliczmy całkę

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix} \right| =$$

x	-1	2
t	1	4

$$= \int_{1}^{4} \frac{1}{2}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{4} = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3} \ .$$

Licząc całkę nieoznaczoną ze wzoru Leibniza-Newtona, otrzymujemy

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8+1) = 3 \ .$$

Błąd polega na tym, że funkcja $x^2 = t$ nie jest różnowartościowa w $\langle -1,2\rangle$ i ma dwie funkcje odwrotne: $x = \sqrt{t}$, $x = -\sqrt{t}$.

3. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $\langle -a, a\rangle$, $a > 0$. Udowodnić:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(t) + f(-t)]dt \ .$$

Jaki wniosek wynika z powyższej równości gdy f jest funkcją parzystą (nieparzystą) ?

Dowód. Mamy kolejny oczywisty ciąg równości:

x	-a	0
t	a	0

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = -t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a}[f(-t) + f(t)]dt \ .$$

Gdy f jest funkcją parzystą, czyli spełnia warunek $f(-t) = f(t)$, to mamy $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, natomiast gdy f jest funkcją nieparzystą, czyli $f(-t) = -f(t)$, to $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

4. Załóżmy, że funkcja f ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ spełnia warunek

$$f(x) = f(a + b - x)\ .$$

Wtedy ma miejsce wzór (którego dowód zostawiamy czytelnikowi)

(12.17) $$\int_a^b t \cdot f(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(u)du\ .$$

Jako zastosowanie obliczmy całkę $\int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. W naszym przykładzie mamy: $\langle a, b\rangle = \langle 0, \pi\rangle$, a funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ spełnia warunek $f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x)$. Stąd na mocy (12.17) mamy:

$$\int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \begin{vmatrix} \cos x\ = t \\ -\sin x dx\ = dt \end{vmatrix} =$$

x	0	π
t	1	-1

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} arctg\, t\,\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 .$$

Twierdzenie 5. (wzór na całkowanie przez części)

Załóżmy, że funkcje $f, g \in C^1\langle a, b\rangle$. Wtedy ma miejsce wzór

(12.18) $$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx\ .$$

Przykłady

1. $$\int_1^e \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g}\, dx = \begin{vmatrix} f'(x) = x^2 & f(x) = \frac{x^3}{3} \\ g(x) = \ln x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.$$

2. $$\int_0^1 \underbrace{e^{-x}}_{f'} \underbrace{x}_{g}\, dx = \begin{vmatrix} f'(x) = e^{-x} & f(x) = -e^{-x} \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -e^{-x}x|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx = -e^{-1} + (-e^{-x})|_0^1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}.$$

3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g}\, dx = \begin{vmatrix} f'(x) = e^x & f(x) = e^x \\ g(x) = \sin x & g'(x) = \cos x \end{vmatrix} =$

$= e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos x}_{v}\, dx = \begin{vmatrix} u'(x) = e^x & u(x) = e^x \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{vmatrix} =$

$= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x\, dx = 1 - I$. Stąd $2I = 1$ i $I = \frac{1}{2}$.

Ładnym zastosowaniem wzoru na całkowanie przez części jest

***Twierdzenie 6.* (Lemat Riemanna-Lebesgue'a)**

Niech $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją o ciągłej pochodnej w przedziale* $\langle a,b\rangle$ *, tzn.* $f \in C^1\langle a,b\rangle$ *. Zachodzą relacje:*

(12.19) $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\, dt = 0 .$$

Dowód. Udowodnimy pierwszą równość, dowód drugiej jest analogiczny.

Całkujemy przez części (słuszność zapewnia założenie $f \in C^1\langle a,b\rangle$) .

$\int_a^b f(t)\sin(nt)\, dt = \begin{vmatrix} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \sin(nt) & v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{vmatrix} =$

$= -f(t)\frac{\cos(nt)}{n}\Big|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt) =$

$= \frac{1}{n}(f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)) + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\, dt$.

Stosując nierówność trójkąta i fakt, że $f(a)$, $f(b)$ i $f'(t)$ są wielkościami ograniczonymi otrzymujemy $\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\, dt\right| \le$

$\le (|f(a)||\cos(na)| + |f(b)||\cos(nb)|) + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\, dt \le$

$\le \frac{1}{n}(|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{n}\,(b-a)\max_{a\le t\le b}|f'(t)| \to 0,\ n \to +\infty$.

12.4 Wzory rekurencyjne

Dla całek zawierających parametr $n \in \mathbb{N}$, celem ich obliczenia znajdujemy najpierw dowolną metodą równanie rekurencyjne, które one spełniają, a następnie rozwiązujemy je (wymaga to dużej inwencji, bądź stosowania odpowiednich wzorów), skąd otrzymujemy wzór jawny dla rozważanej całki.

Przykład 1. Szczególnie ważnym wzorem rekurencyjnym ze względu na zastosowania (wzór Wallisa i wzór Stirlinga) jest wzór dla całki

(12.20) $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, dx \ ,\ n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Mamy $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x\, dx = 1$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\, dx =$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos2x)dx = \frac{\pi}{4}$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x\, dx = \frac{2}{3}$.

Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy następujący wzór rekurencyjny

(12.21) $$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ ,\ n \in \mathbb{N} \ ,\ n \geq 2 \ .$$

Z powyższego wzoru możemy łatwo obliczyć, że

$$I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \ ,\ \ I_5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} \ .$$

Pisząc wzór (12.21) w przypadku parzystym dla $2, 3, \dots n$, otrzymujemy $I_2 = \frac{1}{2} I_0$, $I_4 = \frac{3}{4} I_2$, $I_6 = \frac{5}{6} I_4, \dots . I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$.

Po przemnożeniu powyższych równości i uproszczeniach otrzymujemy pierwszy z poniższych wzorów. Drugi otrzymujemy analogicznie $[(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot (2n)\ ,\ (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)]$.

(12.22)
$$I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\,,\quad n\in\mathbb{N}\,,$$
$$I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,,\quad n\in\mathbb{N}_0\,.$$

Jako zastosowanie powyższych wzorów udowodnimy wzór Wallisa podający wartość π jako granicę odpowiedniego ciągu.

Dla $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są nierówności:

$$sin^{2n+1}x < sin^{2n}x < sin^{2n-1}x\,,$$

które po scałkowaniu dają: $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, co na mocy wzoru (12.22) oznacza, że $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$.

Po uproszczeniach otrzymujemy

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}\,.$$

Różnica oszacowań od góry i od dołu w powyższych nierównościach spełnia nierówność

$$\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\,,$$

a więc dąży do zera. Zatem granice obu stron nierówności są identyczne. Możemy więc napisać wzór Wallisa w postaci

(12.23)
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}\,.$$

Uwaga. Aby obliczyć efektywnie (to znaczy w sposób jawny) całki zależne od parametru naturalnego $n \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{N}_0)$ próbujemy różnymi metodami ad hoc otrzymać wzór rekurencyjny. W wielu przypadkach jest to rekurencja liniowa rzędu I-ego o zmiennych współczynnikach. Poniższy lemat podaje elegancki i prosty wzór na rozwiązanie takiej rekurencji. Jako produkt uboczny otrzymujemy granice ważnych ciągów liczbowych (przykłady **2.** i **3.**).

Lemat. [5] Załóżmy, że ciąg (T_n), $n \in \mathbb{N}_0$ spełnia równanie rekurencyjne postaci:

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n \,,\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{12.24}$$

gdzie T_0 oraz $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ są dane.

Oznaczmy: $s_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}{b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n}$, $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$, $n \geq 2$.

Rozwiązanie równania (12.24) dane jest wzorem

$$T_n = \frac{1}{a_n s_n}\left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k s_k\right) . \tag{12.25}$$

Przykład 2. Dla $n \in \mathbb{N}_0$, oznaczmy $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a) Zastosować odpowiednie podstawienie i wykazać, że $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$. Obliczyć I_n dla $n = 0, 1, 2, 3$.

b) Uzasadnić, stosując twierdzenie o trzech ciągach, że $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c) Udowodnić wzór rekurencyjny $I_n = e - nI_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Podać wzór jawny na I_n stosując powyższy **Lemat**.

d) Wykorzystując **b)** i **c)** uzasadnić, że: $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$.

Rozwiązanie.

a) Podstawmy $\ln x = t \Rightarrow dx = e^t dt$ czyli $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

Mamy: $I_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1$; $I_1 = \int_1^e \ln x \, dx = (x \ln x - x)|_0^e =$
$= (e \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 1$;

$$I_2 = \int_0^1 \underbrace{t^2}_{f} \underbrace{e^t}_{g'} dx = \left| \begin{matrix} f(x) = t^2 & f'(x) = 2t \\ g'(x) = e^t & g(x) = e^t \end{matrix} \right| = e - 2 \ ;$$

$$I_3 = \int_0^1 \underbrace{t^3}_{f} \underbrace{e^t}_{g'} dx = \left| \begin{matrix} f(x) = t^3 & f'(x) = 3t^2 \\ g'(x) = e^t & g(x) = e^t \end{matrix} \right| = \ t^3 e^t \big|_0^1 - 3\int_0^1 t^2 e^t =$$

$$= e - 3(e-2) = -2e + 6 \, .$$

b) Oczywiście $I_n > 0$ i $\underset{t \in \langle 0,1 \rangle}{\forall} \ t^n e^t \le t^n e$, skąd

$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt \le \int_0^1 t^n e dt = \frac{e}{n+1}$. Zatem $0 < I_n \le \frac{e}{n+1}$, więc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

c) Całkując wzór $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$, $n \in \mathbb{N}$, przez części jak wyżej otrzymujemy $I_n = e - nI_{n-1}$. Ostatnią rekurencję rozwiązujemy stosując wzór (12.25), gdzie: $a_n = 1,\ b_n = -n\, , c_n = e\ , n \in \mathbb{N}\, , I_0 = e - 1$. Mamy $s_n = \frac{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}{(-2)(-3)\ldots(-n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ $, n \in \mathbb{N}$, skąd $s_1 = 1$ oraz

$$I_n = (-1)^{n-1} n! \left\{ 1 \cdot (-1) \cdot (e-1) + \sum_{k=1}^{n} e \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right\} =$$

$$= (-1)^n n! \left\{ e \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right\} .$$

Gdy $n \to +\infty$ otrzymujemy jako dodatkowy efekt naszych obliczeń znany fakt, że $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$.

***Przykład* 3.** Dla $n \in \mathbb{N}_0$ oznaczmy $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

a) Obliczyć $I_0,\ I_1$ oraz podać wzór rekurencyjny dla I_n .

b) Uzasadnić, że $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

c) Podać wzór jawny dla I_n i wywnioskować stąd wartość granicy $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Rozwiązanie.

a) Mamy $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = ln(1+x)|_0^1 = ln\,2$; $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx =$

$= \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = 1 - ln\,2$. Ponadto mamy

$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x}\right)dx =$

$= \int_0^1 x^n \left(\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zatem

$$I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\ .$$

b) Dla $x \in \langle 0,1\rangle$ mamy $1 \le 1+x \le 2$, co implikuje nierówność $\frac{1}{2}x^n \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n$. Całkując powyższe nierówności otrzymujemy $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{(n+1)}$, skąd $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.$

c) Stosując wzór (12.25) do rozwiązania rekurencji $I_n = -I_{n-1} + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a = 1$, $b = -1$, $c_n = \frac{1}{n}$ otrzymujemy

$$I_n = (-1)^n \left\{ln\,2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right\}.$$

Relacja $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ implikuje, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ln\,2$.

Uwaga. Wartość wielu skomplikowanych całek z funkcji trygonometrycznych otrzymujemy korzystając z tak zwanych wzorów linearyzacyjnych, które łatwo dowodzi się indukcyjnie (patrz rozdział III).

Przykład 4. Udowodnić, że:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2n+1)t}{sin\,t}dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)}{sin\,t}dt = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}\ .$$

Na mocy wzoru: $sin(nt) - sin(n-2)t = 2\,cos[(n-1)t]\,sin\,t$,

mamy: $\frac{sin(nt)}{sin\,t} = \frac{sin(n-2)t}{sin\,t} + 2cos\,[(n-1)t]$.

Gdy $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2k+1)t}{sin\,t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2k-1)t}{sin\,t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,(2kt) dt = I_{k-1}$ (bo druga całka jest równa zero), co oznacza, że ciąg (I_k) jest ciągiem stałym, czyli

$$I_k = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} .$$

W przypadku gdy $n = 2k$, skorzystamy ze wzoru

(12.26) $$\frac{sin(2kt)}{sin\,t} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} cos(2j-1)t \ .$$

który daje:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2kt)}{sin\,t} dt = 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2j-1)t\,dt$$
$$= 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{sin(2j-1)}{2j-1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} .$$

Wniosek 1. Wartość obu powyższych całek pozwala wyznaczyć granicę bardzo ważnego ciągu. Mianowicie możemy napisać, że:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2n+1)t}{sin\,t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)\,cos\,t + cos(2nt)\,sin\,t}{sin\,t} dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)\,cos\,t}{sin\,t} dt + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2nt)\,dt}_{=0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)\,cos\,t}{sin\,t} dt$$

oraz

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)}{sin\,t} dt .$$

Odejmując stronami powyższe równości otrzymamy

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)(1-cos\,t)}{sin\,t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\,\frac{t}{2} \cdot sin(2nt)\,dt .$$

Gdy $n \to +\infty$ to na mocy Lematu Riemanna - Lebesque'a otrzymujemy $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\,\frac{t}{2} \cdot sin(2nt)\, dt = 0$ (bo $f(t) = tg\,\frac{t}{2} \in C^1 \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ skąd wynika

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Wniosek 2. Stosując podobny wzór do (12.24) dla sumy sinusów otrzymamy wartość innej całki. Mianowicie równość

$$\sum_{k=1}^{n} sin(2k-1)t = \frac{sin^2 nt}{sin\, t}$$

po scałkowaniu daje

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2(nt)}{sin^2 t} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2k-1)t}{sin\, t} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2}.$$

12.5 Oszacowania całek

Wobec faktu, że wiele całek oznaczonych nie wyraża się za pomocą funkcji elementarnych, a często niezbędna jest znajomość ich wartości (choćby przybliżona), będziemy próbować podać dla nich możliwie najlepsze nierówności. Pokażemy niżej kilka przykładów oszacowań całek wykorzystując odpowiednie nierówności dla funkcji, twierdzenia o wartości średniej oraz nierówność $\boldsymbol{CBS}$ dla całek.

Przykłady

1. Oszacujemy całkę: $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

a) Ponieważ $1 \le e^{x^2} \le e$ dla $x \in \langle 0,1 \rangle$, to na mocy wzoru (12.7), powyższe grube oszacowanie daje natychmiast po scałkowaniu

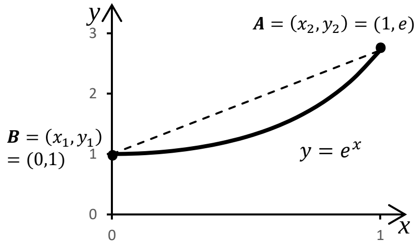
$$1 = 1 \cdot (1-0) \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e \cdot (1-0) = e .$$

b) Wykorzystując wypukłość funkcji wykładniczej mamy

$\underset{x\geq 0}{\forall}\ e^x \geq x+1$ (z równością dla $x=0$) , skąd otrzymujemy

$$\underset{x\in\langle 0,1\rangle}{\forall}\ e^{x^2} \geq x^2+1\ .$$

Oszacowanie od góry dla $f(x)=e^x$ w $\langle 0,1\rangle$ podamy wykorzystując położenie wykresu funkcji wykładniczej poniżej siecznej.



Równanie prostej AB :

$\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{x-x_2}{x_2-x_1}$ tj. $\frac{y-e}{e-1}=\frac{x-1}{1-0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=(e-1)(x-1)+e$.

Możemy więc napisać, że: $\underset{x\in\langle 0,1\rangle}{\forall}\ e^{x^2} \leq (e-1)x^2+1$.

Stąd otrzymujemy całkując i stosując znów wzór (12.7)

$1.33 \approx \frac{4}{3} = \int_0^1 (x^2+1)dx \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq \int_0^1 [(e-1)x^2+1]dx =$

$=(e-1)\frac{1}{3}+1=\frac{e+2}{3} \approx 1.57$, a więc oszacowanie lepsze niż w **a)**.

Uwaga. Stosując do oszacowania z dołu nierówność dokładniejszą $\underset{x\geq 0}{\forall}\ e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$, otrzymalibyśmy $I \geq \frac{4}{3}+\frac{1}{10} \approx 1.43$.

2. Udowodnić nierówność: $1.13 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{4-cos^2 t}\,dt < 1.20$.

Mamy: $4-cos^2 t = 3+(1-cos^2 t) = 3+sin^2 t$ i w $\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$ mamy

$$3 \leq 3+sin^2 t \leq 3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \approx 3.5\ .$$

Stąd, całkując powyższą nierówność otrzymujemy

$1.13 < 1.1325 < \frac{\pi}{4}\sqrt[3]{3} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{4-cos^2 t}\,dt < \frac{\pi}{4}\sqrt[3]{3{,}5} \approx 1.19239 < 1.20$.

Uwaga. Chcąc otrzymać możliwe najlepsze oszacowania danej całki, należy próbować różnych nierówności wymienionych w twierdzeniu 2, bądź stosować bardziej dokładne nierówności dla funkcji podcałkowej.

3. Na przykład dla całki $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ grube oszacowanie wynikające ze wzoru (12.7) daje $1 < I < \sqrt{2} \approx 1.414$.

Natomiast korzystając z nierówności $\sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{t}{2}$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, w postaci $\sqrt{1+x^4} \leq 1 + \frac{x^4}{2}$ otrzymamy:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \int_0^1 \left(1 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 1.1.$$

Zastosowanie nierówności $\boldsymbol{CBS}$ daje jeszcze lepszą wartość

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \leq \left\{\int_0^1 \left(\sqrt{1+x^4}\right)^2 dx \cdot \int_0^1 1dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.2} \approx 1.095 .$$

4. Pokażemy niżej dwa oszacowania tej samej całki zamieniając w twierdzeniu o wartości średniej rolę funkcji f i g $(c \in (0,1))$.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \sin c \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} dx = \sin c \cdot arctg\, x \,|_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{4} \sin c < \frac{\pi}{4} \sin 1 \approx 0.66 \ ;$$
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+c^2} \int_0^1 \sin x\, dx = \frac{1}{1+c^2}(1 - \cos 1) < 1 - \cos 1 \approx 0.46 .$$

Zadania, uzupełnienia i komentarze

Zadanie 1. Obliczyć całki oznaczone stosując dowolną metodę:

a) $\int_e^{e^2} x^2 \ln x\, dx$; b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$; d) $\int_0^1 x\, arctg\, x\, dx$;

e) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$; g) $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x - 1}$; h) $\int_e^{e^2} \sqrt{x} \ln x\, dx$;

i) $\int_1^e (x \ln x)^2\, dx$; j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{tg\, x}\, dx$; k) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} dx$.

Zadanie 2. Oszacować poniższe całki oznaczone stosując kilka dostępnych metod z wykładu. Porównać otrzymane wyniki.

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^3}dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+x^2)cos\,x}\,dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\,sin\,x}dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{x}\,sin\,x\,dx$; e) $\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1+x^4}}dx$; f) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{ln(1+x)}{x}dx$.

Zadanie 3. a) Czy można zastosować wzór Leibniza - Newtona do całki

$$I=\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}\ ?$$

b) Czy można w całce $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ zastosować podstawienie $x=\frac{1}{cos\,t}$?

Zadanie 4. Udowodnić, że jeżeli $f\in C^1\langle 0,1\rangle$, to

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sin\,x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cos\,x)dx\ .$$

Wniosek. Ma miejsce wzór

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\,x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n\,x\,dx\ ,n\in\mathbb{N}_0\ .$$

Zadanie 5.* Niech $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$. Oznaczmy:

$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$. Stosując całkowanie przez części podać wzór rekurencyjny dla $B(m,n)$. Wykorzystując ten wzór udowodnić, że

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\ .$$

Funkcja $B(m,n)$ to tak zwana funkcja Eulera I rodzaju (tutaj dla $m,n\in\mathbb{N}$), którą rozważamy w rodziale $XIII$.

Rozdział XIII. CAŁKI NIEWŁAŚCIWE. FUNKCJE GAMMA I BETA EULERA

Dwa założenia dotyczące całki oznaczonej to ciągłość funkcji podcałkowej w skończonym przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, $a < b$.

Jeżeli jedno z tych założeń nie jest spełnione to dochodzimy do pojęcia całki niewłaściwej.

13.1 Całka niewłaściwa w przedziale nieograniczonym $\langle a, +\infty)$

Definicja. *Załóżmy, że funkcja* f *jest ciągła w przedziale* $\langle a, +\infty)$, *gdzie* a *jest dowolną skończoną liczbą rzeczywistą.*

Całką niewłaściwą z funkcji f *w przedziale* $\langle a, +\infty)$ *nazywamy wyrażenie:*

(13.1)
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)dx \ , \ M > a \ .$$

W przypadku gdy powyższa granica jest liczbą skończoną, to całkę niewłaściwą $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ nazywamy zbieżną, a gdy granica jest równa $(\pm\infty)$ lub nie istnieje to całkę tę nazywamy rozbieżną.

Uwaga. Jak widzimy ze wzoru (13.1), obliczenie całki niewłaściwej jest teoretycznie proste, bowiem $\int_a^M f(x)dx = F(M) - F(a)$, gdzie $F'(x) = f(x)$. Zatem należy wykonać jeden krok rachunkowy więcej niż przy całce oznaczonej i obliczyć granicę $\lim_{M\to+\infty} F(M) = F(+\infty)$.

Przykłady. Obliczyć:

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx$

Mamy: $\int_2^{M} \frac{1}{x\ln x} dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{dt}{t} = \ln t |_{\ln 2}^{\ln M} = \ln(\ln M) -$ $\ln(\ln 2)$, zatem: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{M\to+\infty} (\ln(\ln M) - \ln(\ln 2)) = +\infty$, a więc całka niewłaściwa $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ jest rozbieżna.

2. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} e^{-x} dx = \lim_{M\to+\infty} (-e^{-x})|_0^M =$ $\lim_{M\to+\infty} (-e^{-M} + e^0) = 1$, czyli całka niewłaściwa jest zbieżna i jej wartość jest równa 1 .

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$.

Mamy:

dla $\alpha \neq 1$: $\int_1^{M} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^M = \frac{1}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{M^{\alpha-1}} - \frac{1}{1^{\alpha-1}}\right) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & dla \ \ \alpha > 1 \\ +\infty & dla \ \ \alpha < 1 \end{cases};$$

dla $\alpha = 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to+\infty} (\ln x)|_2^M = \lim_{M\to+\infty} [\ln M - \ln 2] = +\infty$,

czyli $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ jest zbieżna dla $\alpha > 1$ i rozbieżna dla $\alpha \leq 1$.

Uwaga. Jeżeli istnieje funkcja pierwotna $F(x)$, $F'(x) = f(x)$, to obliczanie całki niewłaściwej prowadzimy z definicji to jest ze wzoru (13.1).

Problem powstaje gdy funkcja pierwotna funkcji f nie jest znana, natomiast całka ma sens.

Na przykład całka $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ jest dobrze określona bo $f(x) = e^{-x^2}$ jest ciągła w $\mathbb{R}$, ale nie mamy wzoru na funkcje pierwotną.

Jej zbieżność uzasadniamy następująco:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx =$$

$= 1 + \frac{1}{e}$, czyli $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ jest zbieżna i jej wartość nie przekracza $1 + \frac{1}{e}$.

Przykłady. Zbadać zbieżność całek:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} (arctg\, x \,|_0^M) =$

$= \lim_{M\to+\infty} (arctg\, M - arctg\, 0) = \frac{\pi}{2}$ - całka zbieżna.

2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M xe^{-x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^M \right) =$

$= \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-M^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ - całka zbieżna.

3. $\int_0^{+\infty} x \sin x \; dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M x \sin x \; dx = \lim_{M\to+\infty} (-M \cos M + \sin M)$.

Powyższa granica nie istnieje, zatem całka jest rozbieżna.

Podobnie jak w przypadku szeregów, dla całek niewłaściwych istnieją kryteria zbieżności i rozbieżności.

Podstawowym kryterium jest kryterium porównawcze.

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że*

$$\underset{x\in\langle a,+\infty)}{\forall} \; 0 \le f(x) \le g(x)\,.$$

Wtedy, ze zbieżności całki $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *wynika zbieżność całki* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*, a z rozbieżności całki* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *wynika rozbieżność całki* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $f,g \in C\,\langle a,+\infty), a\in\mathbb{R}$ *i* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l, l \in (0,+\infty)$ *to obie całki niewłaściwe* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *i* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne. Gdy* $l=0$ *to ze zbieżności* $\int g(x)dx$ *wynika zbieżność* $\int f(x)dx$ *, a gdy* $l=+\infty$ *to z rozbieżności* $\int g(x)dx$ *wynika rozbieżność* $\int f(x)dx$.

Przykłady

1. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx > \int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot 1dx$ - całka rozbieżna;

2. $\int_1^{+\infty}\frac{4x^2-2}{x^4+1}dx < \int_1^{+\infty}\frac{4x^2}{x^4}dx = 4\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$, $\alpha = 2$ - całka zbieżna;

3. $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^\lambda}}$ $(dla\ \lambda > 1) =$

$= \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\lambda+x-1}}{e^t} = 0$, skąd wynika, że całka jest zbieżna dla każdego x.

4. $\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^5+3}}dx < \int_2^{+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^5}}dx = 2\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ - całka zbieżna;

5. $\int_1^{+\infty}\frac{x+x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{5}{2}}}dx$; jeżeli $f(x) = \frac{x+x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{5}{2}}}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ to $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ale całka $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ jest rozbieżna, więc badana całka również.

Uwaga. Analogicznie jak całkę $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ definiujemy całkę $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$. Natomiast całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ nazywamy zbieżną, gdy obie całki występujące w powyższej sumie są zbieżne.

Przykład

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx =$$
$$= \lim_{M_1 \to -\infty} \int_{M_1}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx + \lim_{M_2 \to +\infty} \int_0^{M_2} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \,.$$

13.2 Dwie całki niewłaściwe specjalnej postaci

W różnych zastosowaniach pojawiają się często dwie specjalne całki niewłaściwe, dla których nie istnieje funkcja pierwotna funkcji podcałkowej.

Istnieje kilka metod ich obliczenia. Podamy niżej możliwie najprostsze.

(A) Całka: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Udowodniliśmy w rozdziale XII, że

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2 dx = n\frac{\pi}{2} \,,\ n \in \mathbb{N} \,.$$

Dowód wynikał z dwóch faktów, a mianowicie, ze wzoru trygonometrycznego

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)x)}{\sin x} = \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2$$

i wartości całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2k-1)x)}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \,,\ \text{dla każdego}\ k \in \mathbb{N} \,.$$

Obliczymy teraz wartość całki I_n całkując ją przez części:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{sin^2(nx)}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{sin^2 x}}_{g'} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} f(x) = sin^2(nx) & f'(x) = 2\,n \cdot sin(nx) \cdot cos(nx) \\ g'(x) = \frac{1}{sin^2 x} & g(x) = -ctg\, x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(- sin^2(nx) \cdot ctg\, x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin(nx) \cdot cos(nx) \cdot ctg\, x\, dx =$$

$$= \left| \lim_{x\to 0} \frac{sin^2(nx)\cdot cos\, x}{sin\, x} = \lim_{x\to 0} (nx)^2 \underbrace{\frac{sin^2(nx)}{(nx)^2}}_{\to 1} \cdot \frac{cos\, x}{sin\, x} = n^2 \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x\, cos\, x}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{sin\, x}{x}}_{\to 1}} = 0 \right| =$$

$$= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nx)}{tg\, x} dx = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nx)}{x} dx + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\frac{x - tg\, x}{x\, tg\, x}\right)}_{g(x)} sin\, 2nx\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nx)}{x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, sin\, 2nx\, dx\ .$$

Pierwsza całka jest równa:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nx)}{x} dx = \left| \begin{matrix} 2nx = t \\ x = \frac{1}{2n} t \\ dx = \frac{1}{2n} dt \end{matrix} \right| = \int_0^{n\pi} \frac{sin\, t}{t} dt,$$

czyli

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{n} I_n = \int_0^{n\pi} \frac{sin\, t}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, sin\, 2nx\, dx\ .$$

Stąd na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a, gdy $n \to +\infty$, otrzymujemy

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin\, t}{t} dt = \frac{\pi}{2}\, ,$$

ponieważ można nietrudno wykazać , że $g \in C^1 \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

(B) Obliczymy teraz wartość całki $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Mamy oczywistą nierówność (rozdział VIII, zadanie 1 (l)):

$$\underset{x>0}{\forall}\ 1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} .$$

Lewa strona nierówności ma znaczenie dla $x \in (0,1)$, stąd dla $x \in (0,1)$ mamy:

$$\underset{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x\in(0,1)}}{\forall} (1 - x^2)^n < e^{-nx^2} \quad \text{natomiast} \quad \underset{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x>0}}{\forall} e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} .$$

Całkując otrzymujemy oczywisty ciąg nierówności:

$$J_1 = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx <$$
$$< \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = J_2.$$

Ale $J_1 = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n+1}\, t\, dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (rozdział XII) .

Analogicznie

$$J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \begin{vmatrix} x = ctg\, t \\ dx = -\frac{dt}{sin^2 t} \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-2}\, t\, dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} .$$

Ponadto $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \begin{vmatrix} t = \sqrt{n}x \\ dt = \frac{1}{\sqrt{n}} dx \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} J$. Czyli mamy nierówność:

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < J < \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} ,$$

skąd

$$\frac{n}{2n+1} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)} < J^2 < \frac{n}{2n+1} \frac{[(2n-3)!!]^2 (2n+2)}{[(2n-2)!!]^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 .$$

Ale wzór Wallisa (rozdział XII): $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{[(2n-1)!!](2n+1)}$, po podstawieniu wyżej implikuje dla $n \to \infty$:

$$\frac{\pi}{4} < J^2 < \frac{\pi}{4} , \text{ zatem } \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

13.3 Kryteria Abela i Dirichleta. Zbieżność bezwzględna

Zbadanie zbieżności całki niewłaściwej jest trudne, gdy nie istnieje funkcja pierwotna funkcji podcałkowej danej wzorem jawnym. Na przykład dla całki

$$I = \int_0^{+\infty} sin(x^2)\, dx$$

nie jest oczywistym jej zbieżność bądź rozbieżność, mając bowiem na uwadze interpretację całki jako pole nie widać jakich „fal" jest więcej, dodatnich czy ujemnych.

Co więcej mimo, że $|sin(x^2)| \leq 1$, to $\lim\limits_{x\to+\infty} sin(x^2)$ nie istnieje (uwaga ta jest istotna w kontekście zbieżności szeregów - warunek konieczny, co będzie rozważane w rozdziale XV).

Jednakże już podstawienie $x^2 = t$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ zmienia sytuację, bowiem otrzymujemy, że:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{sin\, t}{\sqrt{t}} dt\ .$$

Dla całek mających powyższą postać to znaczy

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx \tag{13.2}$$

istnieją dwa eleganckie kryteria zbieżności.

Twierdzenie. (Kryterium Abela)

Załóżmy, że funkcje f *i* g *są określone i ciągłe w* $\langle a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. *Jeżeli ponadto całka* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *jest zbieżna , a funkcja* g *jest monotonicznie malejąca i ograniczona w* $\langle a, +\infty)$ *, to całka (13.2) jest zbieżna.*

Twierdzenie. (Kryterium Dirichleta)

Załóżmy, że funkcje f *i* g *są określone i ciągłe w* $\langle a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. *Jeżeli ponadto, w każdym przedziale skończonym* $\langle a, A\rangle$, $A > a$, *całka* $\int_a^A f(x)dx$ *jest ograniczona, a funkcja* g *maleje monotonicznie do zera (to znaczy* $g \downarrow$ *i* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$*), to całka (13.2) jest zbieżna.*

Przykłady

1. Z kryterium Dirichleta wynika natychmiast zbieżność całek postaci:

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

Przyjmując bowiem: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ widzimy, że $|\int_a^A \sin x\, dx| = |\cos A - \cos a| \le 2$ i $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$.

Wobec faktu, że przyjmujemy $\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0} = 1$, wynika stąd zbieżność całki $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (w poprzednim punkcie obliczyliśmy, że jej wartość jest równa $\frac{\pi}{2}$).

Również rozważana wyżej całka $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$ jest zbieżna na mocy kryterium Dirichleta.

2. Ładnym zastosowaniem kryterium Abela jest następująca własność:

Jeżeli f jest funkcją ciągłą w $\mathbb{R}$ i całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to również całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ jest zbieżna i ma miejsce równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx .$$

Oto dowód:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_{0}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int_{-\infty}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = I_1 + I_2.$

Podstawiając

$$x-\frac{1}{x}=t \Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)>0\,,\ dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt$$

oraz $x=\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{t^2+4}\right)<0\,,\ dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.$

Zmieniając granice całkowania otrzymujemy

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt\ \ ,\ \ I_2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt\ .$$

Obie całki są zbieżne na mocy kryterium Abela, bo

$$|g(t)|=\left|1\pm\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right|\le 2\,,$$

stąd zbieżna jest ich suma. Ale $I_1+I_2=I$, więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx\ .$$

W przypadku gdy funkcja podcałkowa jest dowolnego znaku na różnych przedziałach w $\langle a,+\infty)$ definiujemy tak zwaną zbieżność bezwzględną.

Definicja. Mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ z funkcji ciągłej f jest bezwzględnie zbieżna, gdy zbieżna jest całka $\int_a^b |f(x)|dx$.

Uwaga. Wspomniana wyżej całka $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ jest zbieżna i jej wartość wynosi $\frac{\pi}{2}$. Nie jest ona natomiast bezwzględnie zbieżna, bo gdyby tak było to na mocy oczywistej nierówności $|\sin x|\ge \sin^2 x$ mielibyśmy:

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\ge\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx\,,$$

co oznacza, że $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ jest zbieżna.

Ale na mocy wzoru $sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\, 2x)$ mamy:

$$\int_a^{+\infty} \frac{sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{(1 - cos\, 2x)}{x} dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{cos\, 2x}{x} dx, \text{ czyli}$$

$$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{sin^2 x}{x} dx + \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{cos\, 2x}{x} dx \ , \ a > 0 \ .$$

Powyższa równość nie może mieć miejsca bo oznaczałoby to, że suma dwóch całek zbieżnych jest całką rozbieżną $(= \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx)$.

Uwaga. Istnieją metody wykraczające poza zakres tej monografii pozwalające obliczyć wartości niektórych całek niewłaściwych (na przykład twierdzenie o residuach, czy przekształcenie Laplace'a), między innymi rozważanych już $\int_0^{+\infty} sin(x^2)\, dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ czy $\int_0^{+\infty} \frac{sin\, x}{x} dx$.

13.4 Całki niewłaściwe z funkcji nieograniczonych

Załóżmy teraz, że f jest funkcją ciągłą w $\langle a, b)$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ i są liczbami skończonymi i $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < b - a)$ istnieje całka $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ i w ten sposób definiujemy

Definicja. *Całką niewłaściwą I rodzaju z funkcji* f *nazywamy*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \ .$$

W przypadku gdy powyższa granica jest liczbą skończoną to całkę nazywamy zbieżną, w pozostałych przypadkach rozbieżną.

Punkt $x = b$ nazywamy punktem osobliwym całki niewłaściwej $\int_a^b f(x) dx$. Analogicznie całka $\int_a^b f(x) dx$ może mieć punkt osobliwy w punkcie a.

Gdy punktem osobliwym jest punkt $c \in (a, b)$, to piszemy

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

i całkę niewłaściwą $\int_a^b f(x)dx$ nazywamy zbieżną, gdy zbieżne są obie powyższe całki.

Przykłady. Obliczyć całki:

1. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

Punktem osobliwym jest punkt $x = 0$, ale ponieważ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, więc funkcja podcałkowa może być przedłużona z zachowaniem ciągłości na $x = 0$. Jest więc to całka właściwa, a punkt $x = 0$ jest punktem pozornie osobliwym.

2. $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$, $b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Punktem osobliwym jest punkt $x = b$. Zatem dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ definiujemy

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx .$$

Gdy $\alpha \leq 0$ to całka jest właściwa. Załóżmy więc, że $\alpha \in (0, 1)$.

$$\int_a^b (b-x)^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\bigg|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-\varepsilon-a)^{\alpha-1}}\right] = \frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} .$$

Natomiast gdy $\alpha = 1$ mamy

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln(b-x)|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\ln\varepsilon + \ln(b-a)) = +\infty.$$

Zatem całka $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ jest zbieżna dla $\alpha < 1$ i rozbieżna dla $\alpha \geq 1$.

3. Obliczyć całkę: $\int_0^2 ln\, x\, dx$.

Całka jest całką niewłaściwą z punktem osobliwym $x = 0$ bo $\lim\limits_{x\to 0^-} ln\, x = -\infty$. Mamy

$$\int_0^2 ln\, x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^2 ln\, x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (x\, ln\, x - x)|_\varepsilon^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (2\, ln\, 2 - 2 - \varepsilon\, ln\, \varepsilon + \varepsilon) = ln\, 4 - 2 - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\, ln\, \varepsilon = ln\, 4 - 2\ ,$$

bo stosując regułę de l'Hospitala otrzymujemy, że

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\, ln\, \varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{ln\, \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon = 0\ .$$

4. Wykazać zbieżność i obliczyć całkę: $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Punkt osobliwy $x = 2$. Mamy zatem

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} (2-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-2(2-x)^{\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-2(2-2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2}\right] = 2\sqrt{2}\ .$$

5. Wykazać zbieżność i obliczyć całkę: $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$.

Punkt osobliwy $x = 1$. Mamy zatem

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{\int_{1+\varepsilon}^2 \sqrt{x-1}\, dx - \int_{1+\varepsilon}^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{3} - 2 - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{2}{3}(\varepsilon)^{\frac{3}{2}} - 2(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{4}{3}\ .$$

6. Zbadać zbieżność i obliczyć całkę: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Powyższa całka ma dwa punkty osobliwe $x = 0$ i $x = 1$. Ale jest to całka zbieżna na mocy kryterium porównawczego z $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ oraz $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$.

Mamy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} [arc\,sin(2x-1)]_{\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} [arc\,sin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_2} =$$

$$= arc\,sin\,1 + arc\,sin\,1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \; .$$

13.5 Funkcja gamma Eulera

***Definicja**. Następującą całkę zależną od parametru* $x \in \mathbb{R}$ *nazywamy funkcją gamma Eulera*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \; . \tag{13.3}$$

Jeżeli $x \geq 1$ to jest to całka z funkcji ciągłej na przedziale nieskończonym. Jeżeli $x < 1$ to $\Gamma(x)$ ma punkt osobliwy $t = 0$.

Napiszmy $\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = I_1 + I_2$.

Mamy nierówność $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{x-1}} dt$.

Ostatnia całka jest zbieżna gdy $1 - x < 1$ to jest dla $x > 0$. Druga całka jest zbieżna dla każdego $x \in \mathbb{R}$, bo na mocy kryterium porównawczego (z $\frac{1}{t^{\alpha}}$, $\alpha > 1$) w wersji granicznej mamy $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^{\alpha}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{(\alpha-1)+x}}{e^{t}} = 0$, co udowadniamy stosując regułę de L'Hospitala.

Zatem całka (13.3) jest zbieżna dla $x > 0$ i można udowodnić, że $\Gamma(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną parametru $x > 0$.

Dowodzi się następujące podstawowe własności funkcji $\Gamma(x)$:

1. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, $x > 0$, **2.** $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, $0 < x < 1$.

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}$, $0 < x < \frac{1}{2}$.

5. $\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2x) = 2^{2x-1} \cdot \Gamma(x) \cdot \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $x > 0$.

Uwaga. Dzięki własności **2.** funkcję gamma można uważać za uogólnienie silni na liczby rzeczywiste dodatnie.

Przykłady

1. Podstawiając do własności trzeciej $x = \frac{1}{2}$ otrzymamy

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$ czyli $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Z drugiej strony na mocy definicji (13.2):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \left| \begin{matrix} t = u^2 \\ dt = 2udu \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \ .$$

Stąd otrzymujemy wartość całki Poissona - Gaussa występującej w ważnych zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa i statystyki

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

13.6 Funkcja beta Eulera

Definicja. *Dla* $x, y > 0$ *definiujemy funkcję beta Eulera wzorem*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dx \ . \tag{13.4}$$

Powyższa całka staje się całką niewłaściwą, gdy $x - 1 < 0$ i $y - 1 < 0$; zatem w takim przypadku funkcja $B(x,y)$ ma punkty osobliwe: $t = 0$ i $t = 1$.

Rozbijając całkę na sumę dwóch całek

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dx$$

pierwsza z nich ma punkt osobliwy w $t = 0$, a druga w $t = 1$.

Porównując funkcje podcałkową odpowiednio z $\frac{1}{t^\alpha}$, $(\alpha = 1 - x)$ i $\frac{1}{(1-t)^\alpha}$, $(\alpha = 1 - y)$, wiemy, że są one zbieżne gdy $1 - x < 1$ i $1 - y < 1$, to jest dla $x > 0$ i $y > 0$.

Zatem funkcja beta jest dobrze zdefiniowana dla $x > 0$ i $y > 0$.

Oczywiście dla $x \geq 1$ i $y \geq 1$, całka definiująca funkcję beta jest całką oznaczoną.

Niestety tylko dla niektórych $x, y > 0$ funkcja beta ma funkcję pierwotną dana wzorem jawnym.

Istnieje wiele wzorów wynikających wprost z definicji. Podamy tylko dwa $(x > 0\ ,\ y > 0)$:

1. $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\,\varphi \cdot sin^{2y-1}\,\varphi\, d\varphi$.
2. $\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Dowód 1. Podstawmy:

$t = cos^2 \varphi$, $dt = -2\sin\varphi \cdot cos\,\varphi\, d\varphi$,

$1 - t = 1 - cos^2\varphi = sin^2\varphi$

t	0	1
φ	$\frac{\pi}{2}$	0

Otrzymamy

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-2}\varphi \cdot sin^{2y-2}\varphi \cdot \sin\varphi \cdot cos\,\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\varphi \cdot sin^{2y-1}\varphi\, d\varphi \,.$$

Dowód 2. jest bardziej zaawansowany i zostanie pominięty.

Przykład. Obliczyć całkę $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Podstawmy $x^\alpha = t \longrightarrow \alpha x^{\alpha-1}dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{\alpha}t^{-1}t^{\frac{1}{\alpha}}dt$, czyli mamy

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{\alpha}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{\frac{2}{\alpha}}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{2\alpha\cdot\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)},$$ na mocy wzoru **5.** dla funkcji $\Gamma(x)$.

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Zadanie 1. Zbadać zbieżność całek. Obliczyć ich wartości w przypadku gdy są zbieżne.

a) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}$; b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x ln^2 x}$; c) $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; d) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < b$;

e) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$; f) $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, sin\, t\, dt$; g) $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t\cdot ln^2 t}$; h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+5}$;

i) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$; j) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt$; k) $\int_0^{+\infty} \frac{2t^2 dt}{(1+t^3)^2}$; l)* $\int_2^{+\infty} t^{-n}\, ln\, t\, dt$;

l) $\int_0^1 \frac{ln\,x}{(x+1)^2}dx$ (wskazówka: wykorzystać całkowanie przez części).

Zadanie 2. Zbadać zbieżność i obliczyć całkę: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Zadanie 3. Udowodnić wzory dla funkcji beta:

a) $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$; b)* $\mathrm{B}(x,x) = \frac{1}{2^{2x-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right)$;

c) $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$; d) $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$, $x > 0, y > 0$.

Zadanie 4. Zapisać następujące całki za pomocą funkcji beta:

a) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}$ (wskazówka: podstawić $\cos\theta = 1 - 2\sqrt{t}$) ;

b) $\int_0^{a} t^{2n}\sqrt{a^2 - t^2}dt$ (wskazówka: podstawić $u = \left(\frac{t}{a}\right)^2$) .

Zadanie 5. Udowodnić, że ma miejsce wzór:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\,,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Zadanie 6.* Udowodnić wzór Legendre'a dla funkcji gamma:

$$\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\cdot\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right),\ x > 0\ .$$

Wskazówka. Zauważyć , że ma miejsce równość:

$$\mathrm{B}(x,x) = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t^2\right)\right]^{x-1} dt = \frac{1}{2^{2x-1}}\cdot\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right).$$

Skorzystać ze wzoru łączącego funkcje beta i gamma Eulera.

Zadanie 7.

a) Uzasadnić, że : $\mathrm{B}(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$, $x \in (0,1)$.

b) Stosując podstawienie $t = \frac{u}{1-u}$ wykazać, że

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{-a}dt}{(1+t)} = \frac{\pi}{\sin\pi a}\ ,\ a \in (0,1)\ .$$

Rozdział XIV. ZASTOSOWANIA RACHUNKU CAŁKOWEGO

Analogicznie jak rachunek różniczkowy, również rachunek całkowy ma rozliczne zastosowania praktyczne i teoretyczne.

W niniejszym rozdziale oprócz zastosowań praktycznych, takich jak obliczanie wielkości geometrycznych (pole zbioru płaskiego, objętość i pole powierzchni obrotowej, długość łuku krzywej) pokazujemy kilka innych zastosowań.

Z zastosowań teoretycznych zajmiemy się głównie obliczaniem granic ciągów specjalnej postaci, a przede wszystkim nierównościami dla całek.

Najpierw jednak podamy drugą definicję całki oznaczonej jako granicy ciągu sum częściowych Riemanna.

14.1 Całka oznaczona jako granica ciągu sum pośrednich (całka Riemanna)

Załóżmy, że $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, $a < b$.

Definicja. *Podziałem* π *przedziału* $\langle a, b\rangle$ *nazywamy skończony układ punktów* x_k, $k \in \mathbb{N}_0$, *spełniający warunki*

(14.1) $$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\,,\ n \geq 2\,.$$

Liczbę $\delta(\pi) = \max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$ *nazywamy średnicą podziału* π, *a ciąg podziałów* (π_n) *nazywamy normalnym, gdy* $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(\pi_n) = 0$.

Na przykład, podział przedziału $\langle a,b\rangle$ na n - równych części, jest podziałem normalnym, bo $\delta(\pi_n) = \frac{b-a}{n} \to 0$, $n \to +\infty$.

Definicja. *Punktami pośrednimi podziału π nazywamy jakiekolwiek punkty ξ_k, $k = 1,2,\dots,n$, które spełniają warunek: $\xi_k \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle$.*

Sumą Riemanna (sumą pośrednią) funkcji f dla podziału π nazywamy liczbę:

(14.2) $$R_n(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego normalnego ciągu podziałów (π_n) przedziału $\langle a,b\rangle$ i funkcji ciągłej $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ ma miejsce wzór*

(14.3) $$\lim_{n\to\infty} R_n(f,\pi_n) = \int_a^b f(x)dx .$$

Przykłady

1. Obliczyć z definicji: $\int_0^1 xdx$ **.**

Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dzieląc przedział $\langle 0,1\rangle$ punktami $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = 1$, widzimy, że jest to normalny ciąg podziałów (π_n), $\delta(\pi_n) = \frac{1}{n}$. Przyjmując $\xi_k = x_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{2n} = \frac{1}{2} .$$

Istotnie na mocy wzoru Leibniza-Newtona $\int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

2. Obliczyć z definicji: $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

Podzielmy przedział $\langle 1,2\rangle$ na n - części, $n \geq 2$, tak by punkty podziału tworzyły ciąg geometryczny, tzn.:

π_n: $1 = x_0 < x_1 = q < x_2 = q^2 < \cdots < x_n = q^n = 2$, $x_k = q^k$,

zatem $q^n = 2$ tj. $q = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$ i $x_{k+1} - x_k = q^{k+1} - q^k = q^k(q-1)$.

$max(x_{k+1} - x_k) = \delta(\pi_n) = 2^{\frac{n-1}{n}}(\sqrt[n]{2} - 1) \to 0$ bo $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$,

czyli (π_n) jest normalnym ciągiem podziałów. Biorąc $\xi_k = q^{k+1}$, obliczamy $R_n\left(\frac{1}{x}, \pi_n\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^{k+1}} q^k(q-1) = \frac{q-1}{q} n = n \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}}$. Ale

$$\lim_{x\to+\infty} x \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}\cdot 2^{\frac{1}{x}}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \left| \begin{matrix} \frac{1}{x} = t \\ x \to +\infty \\ t \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{2^t - 1}{t\cdot 2^t} = ln\, 2 =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x} dx .$$

14.2 Granice ciągów zadanych w postaci sumy

Fakt zapisu całki oznaczonej jako odpowiedniej granicy sum częściowych funkcji ciągłej f w $\langle a,b\rangle$, $a < b$, pozwala obliczyć granice ciągów, często niedostępne innymi metodami. Podstawowe twierdzenie używane w tym celu zapiszemy w następującej postaci.

Twierdzenie 3. *Niech f będzie funkcją ciągłą w $\langle a,b\rangle$, $a < b$. Mają miejsce wzory*

(14.4) $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n$, gdzie

(14.5) $V_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$; $W_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Przykłady. Obliczyć granice ciągów, kojarząc ich postać z odpowiednią sumą całkową (14.4) lub (14.5):

1. $S_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \to \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$,

2. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = ln\,2$,

3. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n}\sqrt{2n}}\right) =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \left|\begin{matrix}1+x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right| = \int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}2tdt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt = 2\left.\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2-\sqrt{2}\right),$$

4. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \;\to\; f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$, $\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= arc\,tg\,x\,|_0^1 + \frac{1}{2}ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}ln\,2 = \frac{\pi}{4}+ln\sqrt{2}\,.$$

5. $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$, zatem

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1\sqrt{x(1-x)}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{x-x^2}dx = \left|\begin{matrix}\text{na mocy}\\ \text{interpretacji}\\ \text{całki jako pola}\end{matrix}\right| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}\,dx = \left|\begin{matrix}\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sin t\\ dx=-\frac{1}{2}\cos t\,dt\end{matrix}\right| =$$

x	0	$\frac{1}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sin^2\,t}\cdot\frac{1}{2}cos\,t\,dt = \frac{\pi}{8}\,.$$

14.3 Zastosowania geometryczne całek

Zakładamy, że czytelnik ma intuicyjnie poprawną wiedzę o pojęciu pola zbioru $D \subset \mathbb{R}^2$, jak też objętości i pola powierzchni bryły obrotowej w $\mathbb{R}^3$. Poniższe dwa twierdzenia są pięknym zastosowaniem całki oznaczonej.

Zatem nasza uwaga skoncentruje się na praktycznych obliczeniach.

Następujące twierdzenie, będące w pewnym sensie źródłem powstania całki oznaczonej jest najważniejsze.

Twierdzenie 4. *Niech* $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *będzie nieujemną funkcją ciągłą w* $\langle a, b\rangle$.

Trapezem krzywoliniowym na płaszczyźnie nazywamy zbiór

$$T = \{(x, y): 0 \leq y \leq f(x)\} .$$

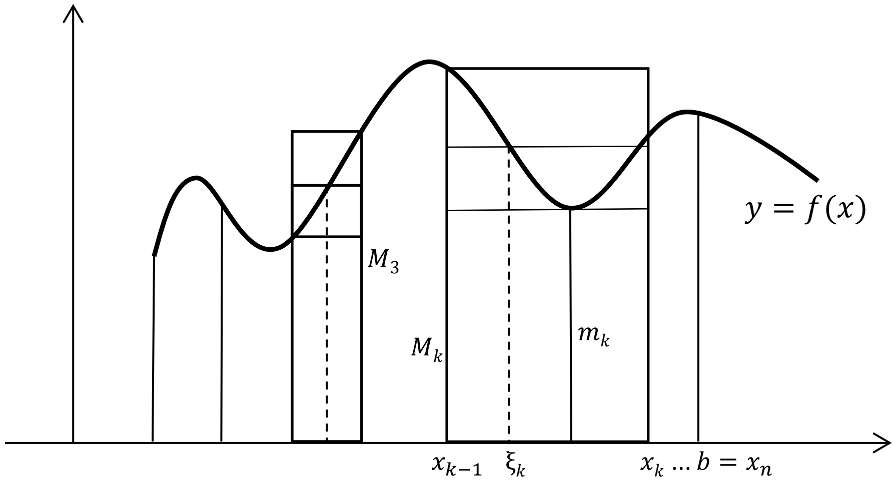
Ma miejsce wzór na pole trapezu T :

(14.6) $$P(T) = \int_a^b f(x)dx .$$

Uwaga. Wzór (14.6) staje się niemal oczywisty, gdy zauważymy, że ciąg sum pośrednich funkcji f (którego granicą jest całka oznaczona) to suma pól prostokątów o wymiarach $f(\xi_k)$ oraz $(x_k - x_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, n$, która jest zawarta pomiędzy sumami $s_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta_\mathrm{k}$ i $S_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta_\mathrm{k}$, gdzie $m_k(M_k) = \underset{x \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle}{min\,(max)} f(x)$. Oznaczenie $\Delta_\mathrm{k} = x_k - x_{k-1}$ było źródłem do użycia w całce symbolu dx.

Aproksymacja (przybliżenie) pola zbioru T sumami pól prostokątów s_n i S_n (lub ewentualnie polami odpowiednich trapezów) prowadzi do interesujących nierówności dla całki lub funkcji pierwotnej dla $f(x)$ (**14.4**).

Poniższy rysunek ilustruje sytuację.



Uwaga 1. Jeżeli $c \in (a, b)$ jest dowolnym punktem przedziału $\langle a, b \rangle$ to wzór $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ mówi o addytywności pola $D \subset \mathbb{R}^2 : P(D) = P(T_1) + P(T_2)$, gdzie $T_1 \cup \mathrm{T}_2 = D$ i $T_1 \cup \mathrm{T}_2 = \emptyset$ (dokładniej T_1 i T_2 mają rozłączne wnętrza). Powyższy wzór jest najczęściej stosowany w praktycznych obliczeniach.

Uwaga 2. W przypadku gdy $f(x) \leq 0$ w pewnym przedziale $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha < \beta$, to wartość pola w tym przedziale należy wziąć ze znakiem „minus" (pole to liczba nieujemna).

Przykłady. Obliczyć pole zbioru $D \subset \mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywymi:

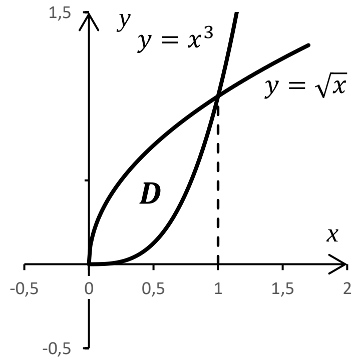
1. $y = x^3$ i $y = \sqrt{x}$;

2. $y = x^2 - x$ i $y = 2x - x^2$;

3. $y = \frac{2}{x}$, $y = x$ i $y = \frac{x}{2}$, $x > 0$.

Rozwiązania.

1. Poniższy rysunek przedstawia zbiór *D* którego pole mamy obliczyć.



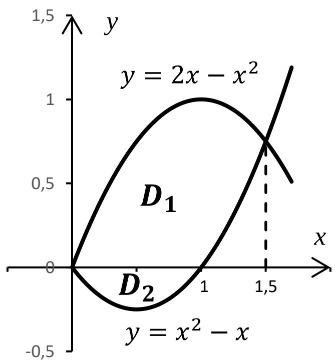
Zadane krzywe przecinają się w punktach (x_0, y_0), które są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \; x^3 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^6 = x \; \Leftrightarrow x(x^5 - 1) = 0 \; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0\,, \; x_2 = 1 \; \Rightarrow y_1 = 0\,, \; y_2 = 1 \; .$$

Czyli $P(D) = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^3 dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{5}{12}$.

2. Obszar ograniczony krzywymi (parabolami) wygląda następująco:



$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \; x^2 - x = 2x - x^2 \; \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \; \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 = 0\,,\; x_2 = \frac{3}{2}$.

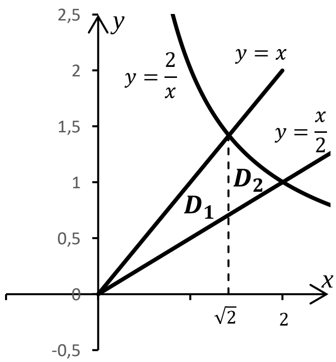
Mamy więc $P(D_1) = \int_0^{\frac{3}{2}}(2x - x^2)dx - \int_1^{\frac{3}{2}}(x^2 - x)dx =$

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{23}{24}$.

$P(D_2) = -\int_0^1 (x^2 - x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

Zatem $P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \frac{9}{8}$.

3. Zadane krzywe wyznaczają następujący zbiór $D_1 \cup D_2$:



$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \; x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \qquad \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \; x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$P(D_1) = \int_0^{\sqrt{2}} x dx - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,

$P(D_2) = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2}{x} dx - \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x}{2} dx = 2\,ln\,x\big|_{\sqrt{2}}^2 - \frac{x^2}{4}\Big|_{\sqrt{2}}^2 = ln\,2 - \frac{1}{2}$.

Zatem $P(D) = P(D_1 \cup D_2) = \frac{1}{2} + ln\,2 - \frac{1}{2} = ln\,2$.

Twierdzenie 5. *Niech* $f \in C^1\langle a,b\rangle$ *i niech* (v) *będzie bryłą powstałą z obrotu wykresu funkcji* f *dookoła osi* OX. *Wówczas objętość* V *tej bryły dana jest wzorem*

$$V(v) = \pi \int_a^b f^2(x)dx\ ,$$

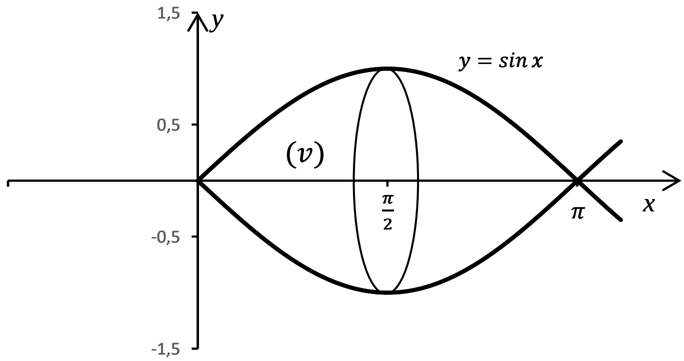
a pole powierzchni (bocznej) $S(v) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

Przykłady. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji dookoła osi OX :

1. $y = sin\, x\,,\ x \in \langle 0,\pi\rangle$; **2.** $y = ln\, x\,,\ x \in \langle 1,e\rangle$.

Rozwiązania.

1. $y = sin\, x\ ,\ x \in \langle 0,\pi\rangle$

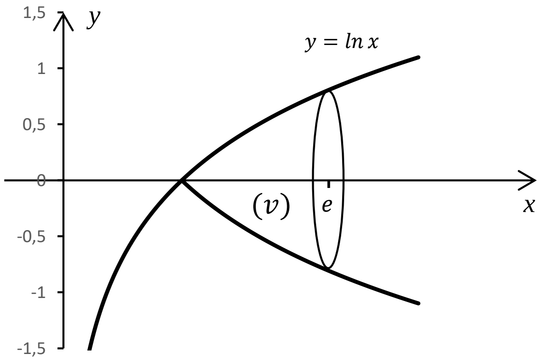


$$V(v) = \pi \int_0^\pi sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1-cos\,2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin\,2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$S(v) = 2\pi \int_0^\pi sin\,x\sqrt{1+cos^2 x}\,dx = \left|\begin{matrix} cos\,x = t \\ -sin\,x = dt\end{matrix}\right| =$$

$= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}dt =$ podstawienie $t = tg\,u$ sprowadza całkę do całki z funkcji wymiernej.

2. $y = ln\, x \;, x \in \langle 1, e \rangle$



$$V(v) = \pi \int_1^e ln^2 x dx = \pi \int_1^e \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{ln^2 x}_{g}\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} f'(x) = 1 & f(x) = x \\ g(x) = ln^2 x & g'(x) = \frac{2\, ln\, x}{x} \end{matrix} \right| = \pi \left[x\, ln^2 x |_1^e - 2 \int_1^e x \cdot \frac{ln\, x}{x} dx \right] =$$

$$= \pi [\, e - 2(x ln\, x - x)|_1^e] = \pi(e-2) \;\; ;$$

$$S(v) = 2\pi \int_1^e ln\, x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = 2\pi \int_1^e ln\, x \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx =$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{ln\, x}{x} dx = \left| \begin{matrix} ln\, x = t \Rightarrow x = e^t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{matrix} \right| =$$

x	1	e
t	0	1

$$= 2\pi \int_0^1 t\sqrt{1+e^{2t}} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} 1 + e^{2t} = u^2 \Rightarrow e^{2t} = u^2 - 1 \\ e^{2t} 2dt = 2udu \Rightarrow dt = \frac{udu}{u^2-1} \end{matrix} \right| =$$

t	0	1
u	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1+e^2}$

$$= 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \sqrt{u^2} \cdot \frac{udu}{u^2-1} = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2-1} du = \text{całka z funkcji wymiernej.}$$

Uwaga. Więcej różnych przykładów dotyczących zastosowań geometrycznych i fizycznych można znaleźć w [2], [3], [4], [7],[10] i [12].

14.4 Nierówności dla całek

Przykłady

(A) Bardzo ważna własność całki oznaczonej, a mianowicie:

$$\underset{x\in\langle a,b\rangle}{\forall} f(x) \leq g(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

może być źródłem wielu nowych nierówności, otrzymanych ze znanych wcześniej. Pokażemy niżej dwa takie przykłady.

1. Całkując dwukrotnie nierówność $sin\, x \leq x$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ otrzymamy:

$$\int_0^x sin\, t\, dt \leq \int_0^x tdt \;\Leftrightarrow (-\cos t)|_0^x \leq \frac{t^2}{2}\Big|_0^x$$

skąd, po prostych przekształceniach otrzymujemy $\underset{x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle}{\forall} 1 - \frac{x^2}{2} \leq cos\, x$.

Po drugim całkowaniu otrzymujemy nierówność $x - \frac{x^3}{6} \leq sin\, x$,

która jest prawdziwa nawet dla $x \geq 0$.

2. Oszacować $ln\, 2$, korzystając z nierówności: $x^2 \geq x \geq \sqrt{x}$ dla $x \geq 1$.

Z powyższego wynika, że

$0.5 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\left(\sqrt{2} - 1\right) < 0.83$.

Zatem mamy $0.5 < ln\, 2 < 0.83$ $(ln\, 2 \approx 0.69)$.

3. Niech $x \in (0, 1)$. Całkując oczywistą nierówność

$$\frac{1}{1+t} \leq t \leq \frac{1}{1-t}\ ,\ t \in \langle 0, x\rangle\ ,$$

otrzymujemy dowód znanej nam wcześniej nierówności (rozdział VIII), która może być wykazana za pomocą monotoniczności, czy wypukłości:

$$\underset{x\in\langle 0,1)}{\forall} ln(1 + x) \leq x \leq -ln(1 - x)\ .$$

(B) Oszacowanie $\boldsymbol{n}!$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$

Wykorzystamy interpretację całki oznaczonej jako odpowiedniego pola pod wykresem funkcji $y = ln\, x$, $x \in \langle 1, n+1 \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ oraz wypukłość funkcji logarytm, co pozwoli oszacować to pole od góry i od dołu przez sumę pól odpowiednich trójkątów i prostokątów.

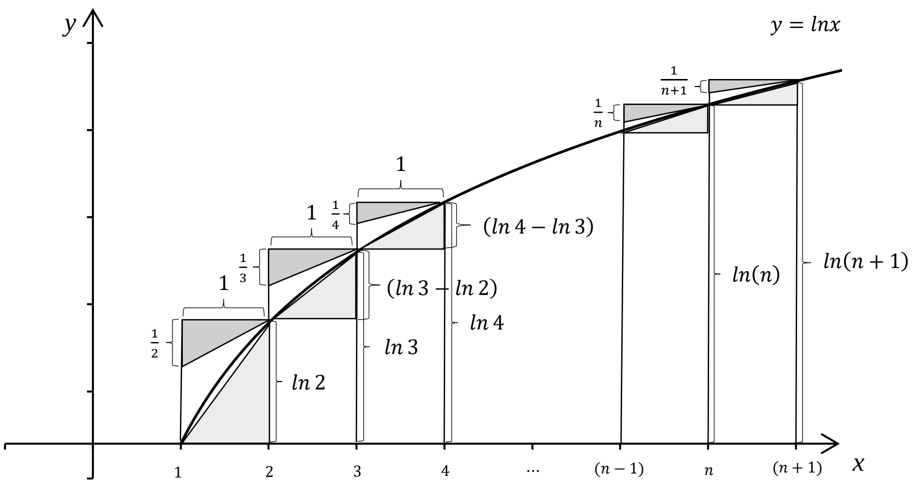
Otrzymane oszacowanie ma ładną postać i jest niewiele gorsze od oszacowania Stirlinga

(14.7) $$\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}\ ,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2\ .$$

Pole ograniczone wykresem funkcji $y = ln\, x$ i osią OX dla $x \in \langle 1, n+1 \rangle$ jest równe:

(14.8) $$P = \int_1^{n+1} ln\, x\, dx = (x\, ln\, x - x)\Big|_1^{(n+1)} =$$
$$= (n+1)\, ln(n+1) - (n+1) + 1\ .$$

Poniższy rysunek ułatwi zrozumienie idei.



Małe prostokąty mają wymiary:

$$1 \times ln\,2\,,\ 1 \times ln\,3\,,\ \dots\,,\ 1 \times ln(n)\ .$$

Duże prostokąty mają wymiary:

$$1 \times ln\,2\,,\ 1 \times ln\,3\,, \dots\,,\ 1 \times ln(n)\,,\ 1 \times ln(n+1)$$

Suma pól prostokątów małych jest równa:

$$ln\,2 + ln\,3 + \cdots + ln(n) = ln(n!)\ .$$

Suma pól prostokątów dużych jest równa:

$$ln\,2 + ln\,3 + \cdots + ln(n) + ln(n+1) = ln[(n+1)!]\ .$$

Nad każdym prostokątem małym pod krzywą $y = ln\,x$ mamy trójkąt prostokątny o wymiarach: $1 \times ln\,2$; $1 \times (ln\,3 - ln\,2)$, $1 \times (ln\,4 - ln\,3), \dots,\ 1 \times (ln(n+1) - ln(n))$.

Suma pól tych trójkątów jest równa $\frac{1}{2} ln(n+1)$.

Zatem pod wykresem funkcji $y = ln\,x$ mamy figurę składającą się z prostokątów i trójkątów, których suma pól jest równa:

$$ln(n!) + \frac{1}{2} ln(n+1)\ .$$

Ponieważ prostokąty duże zbyt „grubo” przybliżają od góry pole pod wykresem $y = ln\,x$, więc odcinamy od nich po trójkącie prostokątnym, gdzie przeciwprostokątna jest odcinkiem stycznej w punkcie (x_0, y_0), $x_0 = 2, 3, 4, \dots, n, n+1$. Styczna do wykresu funkcji $y = ln\,x$ w punkcie (x_0, y_0) ma równanie $y - ln\,x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$. W punktach $(2, ln\,2)$, $(3, ln\,3), \dots, (n, ln(n))$ prowadzimy styczne, które z prostymi prostopadłymi $x = 1, 2, 3, \dots, n$ mają odpowiednio rzędne punktów przecięcia: $ln\,2 - \frac{1}{2}$, $ln\,3 - \frac{1}{3}$, $\dots, ln(n+1) - \frac{1}{(n+1)}$.

Zatem pola tych trójkątów są równe: $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}$, ... , $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{n+1}$, a ich suma dana jest wzorem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)}\right)=\frac{1}{2}(H_{n+1}-1)\ .$$

Stąd otrzymujemy następujące nierówności dla pola pod wykresem funkcji $y = ln\, x$, $x \in \langle 1, n+1\rangle$:

$$ln(n!)+\frac{1}{2}ln(n+1)<(n+1)\,ln(n+1)-(n+1)+1<$$

$$<ln[(n+1)!]-\frac{1}{2}(H_{n+1}-1)\ .$$

Prawa strona nierówności po zamianie $n+1\to n$ daje $ln(n!) > n\, ln\, n-(n)+1+\frac{1}{2}(H_n-1)$, skąd wynika

$$n! > n^n\cdot e^{-n}\cdot e\cdot e^{\frac{1}{2}(H_n-1)} > e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{1}{2}(ln\, n-1)}=\sqrt{e}\cdot\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Dla lewej strony nierówności otrzymujmy

$$ln(n!) < ln(n+1)^{n+1}-(n+1)-ln\sqrt{n+1}+1\ ,$$

skąd po zastosowaniu funkcji wykładniczej mamy nierówność

$$n! < e\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Aby otrzymać symetrię oszacowania korzystamy ze wzoru $n! = n(n-1)!$, $n\geq 2$ i dostajemy

$$n! = n(n-1)! < ne\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{e}\right)^n = e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Ostatecznie mamy:

$$\underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}}{\forall}\ \sqrt{e}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n . \tag{14.9}$$

Jak więc widzimy oszacowania powyższe (chyba dobrze znane?), osiągnięte „zabawą” w prostokąty i trójkąty, dają niewiele gorszy wynik niż wzór Stirlinga ($\sqrt{2\pi} \approx 2.506$, $e \approx 2.718$) .

Zadania, komentarze i uzupełnienia

Komentarz. Należy jeszcze wspomnieć o jednym zastosowaniu geometrycznym. Mianowicie jeżeli krzywa $W\colon y = f(x), x \in \langle a, b\rangle , a < b$ jest wykresem funkcji $f \in C^1\langle 0, 1\rangle$, to jej długość dana jest wzorem

$$L(W) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Jak widać ze wzoru, całki będą wymagać dość długich obliczeń. Na przykład, jeżeli $y = ln\, x$, $x \in \langle 1, e\rangle$ to

$$L(W) = \int_1^e \sqrt{1 + x^2}\, \frac{dx}{x} \quad ,$$

skąd po podstawieniu $1 + x^2 = t^2$ otrzymamy całkę z funkcji wymiernej.

Interesującym jest przypadek elipsy $\varepsilon\colon \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$, $a > b$.

Mianowicie po podstawieniu $x = a\, cos\, t$ otrzymamy

$$L(\varepsilon) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\, cos^2\, t}\, dt\ , \text{ gdzie } k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\, .$$

Całka ta jest to wspomniana wcześniej całka eliptyczna i nie da się jej obliczyć za pomocą znanych funkcji elementarnych.

Wspomnijmy w tym miejscu, że pole elipsy liczy się łatwo bo mamy

$$P = 4\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \pi ab\ .$$

Zadanie 1. Udowodnić, że dla dowolnej ciągłej, rosnącej i wypukłej funkcji f w $\langle a, b\rangle$ ma miejsce nierówność:

$$(b - a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b - a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}\, .$$

Zadanie 2. Obliczyć granice ciągów, kojarząc ich postać z odpowiednią sumą całkową (14.4) lub (14.5):

a) $P_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots(1+\frac{n}{n})}$.

Stąd $\ln P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+x)\,dx =$

$= [(x+1)\ln(1+x) - x\,]|_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1,$

Czyli $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^{\ln 4 - 1} = 4\cdot\frac{1}{e} = \frac{4}{e}$.

b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$, **c)** $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$;

d) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n}}$, **e)** $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Zadanie 3. Obliczyć granicę ciągu (a_n), gdzie

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

wykorzystując nierówność $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,\ x > 0$.

Wskazówka. Zlogarytmować wzór na a_n i zastosować tw. o trzech ciągach.

Zadanie 4.*

a) Udowodnić, że: $\forall_{t\geq 0}\ \frac{4}{(t+2)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{(1+t)^2}\right\}$.

b) Całkując powyższą nierówność w przedziale $\langle 0, x\rangle$, $x > 0$, wykazać że:

$$x - \frac{x^2}{x+2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2x+2}.$$

Uwaga. Powyższa nierówność dla $\ln(1+x)$ jest bardziej dokładna niż nierówności z rozdziału VIII. Może być ona wykorzystana do oszacowania stałej Eulera - Mascheroniego γ.

Rozdział XV. SZEREGI LICZBOWE

15.1 Pojęcie zbieżności szeregu liczbowego. Przykłady.

Definicja. *Niech* $n \to a_n$ *,* $n \in \mathbb{N}$ *, będzie ciągiem liczb rzeczywistych.*

Szeregiem liczbowym *nazywamy wyrażenie*

(15.1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

Aby powyższemu wyrażeniu (suma nieskończona!) nadać sens liczbowy, wprowadźmy nowy ciąg liczbowy: $n \to S_n$, $n \in \mathbb{N}$, określony wzorem

(15.2) $$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ ,$$

który nazywa się **ciągiem sum częściowych** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicja. *Mówimy, że szereg liczbowy (15.1) jest zbieżny, jeżeli ciąg liczbowy* (S_n) *jest zbieżny, to znaczy*

(15.3) $$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \text{ (skończona liczba rzeczywista) .}$$

Liczbę S nazywamy wtedy sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zatem jak widzimy, przy danym ciągu liczbowym (a_n) badanie zbieżności szeregu (15.1) sprowadza się do badania zbieżności nowego ciągu

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ .$$

Możemy więc stosować twierdzenia, znane z teorii ciągów liczbowych, ale specjalny kształt ciągu (S_n) (w postaci sumy) powoduje znacznie większe trudności niż dla ciągów (a_n) , danych wzorem jawnym $a_n = f(n)$.

Przykłady

1. Ciąg geometryczny $a_n = q^n$ jest zbieżny gdy $q \in (-1,1)$, gdyż wtedy $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. Szereg geometryczny jest dany wzorem

(15.4) $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \cdots = \lim_{n\to+\infty} q\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q}{1-q} ,$$

zatem jest on zbieżny gdy $q \in (-1,1)$.

2. Ciąg $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, jest rozbieżny i szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

jest również rozbieżny, bo gdybyśmy grupowali wyrazy powyższej sumy nieskończonej następująco:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

to jej wartością byłaby liczba 0. Natomiast grupowanie

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

daje sumę równą 1, co oznacza, że szereg jest rozbieżny, bo suma szeregu jako granica ciągu (S_n) jest zdefiniowana jednoznacznie.

3. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, jest zbieżny do zera, ale szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, bo jego suma częściowa

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > ln(n + 1) ,$$

a więc dąży do nieskończoności, gdy $n \to +\infty$ (rozdział VIII).

Uwaga 1. Analogicznie jak w teorii ciągów, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ może być zbieżny (S jest liczbą skończoną) lub rozbieżny ($S = \pm\infty$ lub S nie istnieje).

Uwaga 2. Wyznaczenie wartości dokładnej sumy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest problemem trudnym, a głębsza teoria przekracza objętość tej monografii.

Podamy niżej dwa przykłady w których „udaje się" wyznaczyć sumę częściową S_n w postaci zwartej, a więc finalnie obliczyć $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, czyli sumę odpowiedniego szeregu.

Przykłady. Wyznaczyć sumy szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; **2.** $\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

W przypadku **1.** suma częściowa zapisze się następująco

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

skąd $\lim_{n\to+\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

W przykładzie **2.** mamy

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n} ln\, k =$$

$$= -ln\, 2 + ln(n+1) - ln\, n = -ln\, 2 + ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

zatem $\lim_{n\to+\infty} S_n = S = \sum_{n=2}^{\infty} ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -ln\, 2$.

Kluczową rolę w badaniach zbieżności szeregów odgrywają dwa szeregi:

a) szereg geometryczny: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\cdots = \frac{1}{1-q}$, zbieżny dla $q \in (-1,1)$ oraz rozbieżny dla pozostałych $q \in \mathbb{R}\setminus\{(-1,1)\}$;

b) szereg harmoniczny rzędu $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots ,$$

który jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leq 1$.

Sytuacja jest łatwa dla szeregu harmonicznego rzędu 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, bowiem mamy: $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} <$

$$< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 ,$$

czyli ciąg (S_n) jako rosnący i ograniczony z góry przez 2 jest zbieżny i jego suma $S < 2$. Możemy również podać oszacowanie od dołu dla S.

Wykorzystując poniższą oczywistą nierówność

$$\underset{\substack{k\in\mathbb{N} \\ n\geq 2}}{\forall} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} ,$$

po zsumowaniu od $k = 2$ do $k = n$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} ,$$

skąd $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} < S_n < 2 - \frac{1}{n}$, a więc szereg harmoniczny rzędu 2 jest zbieżny i jego suma S spełnia nierówność $\frac{3}{2} < S < 2$.

Euler udowodnił zaskakujący wynik w jego czasach, mianowicie, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.64$. (Suma nieskończenie wielu liczb wymiernych jest liczbą niewymierną.) Zbieżność szeregu harmonicznego dla dowolnego $\alpha > 0$ zbadamy w dalszym ciągu.

Zamknijmy ten punkt bardzo ważnym i jednocześnie prostym **warunkiem koniecznym** zbieżności szeregu.

Twierdzenie 1. *Jeżeli szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

(Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, co pokazuje przykład szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.)

Dowód. Mamy:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) ,$$

stąd $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$

na mocy założenia zbieżności szeregu i faktu, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Wniosek. Na mocy prawa kontrapozycji otrzymujemy, że jeśli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

15.2 Szeregi o wyrazach dodatnich

Poznaliśmy wyżej warunek konieczny zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nam chodzi jednak o odpowiedź na pytanie kiedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny lub rozbieżny, a więc o warunki dostateczne.

Okazuje się, że istnieje wiele warunków dostatecznych zbieżności (rozbieżności) szeregów (de facto nieskończenie wiele). Warunki te nazywamy **kryteriami zbieżności** (rozbieżności) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wielość warunków dostatecznych bierze się między innymi z faktu różnorodności wzorów na a_n . Nie istnieje jedno „uniwersalne” kryterium.

Szeregi o wyrazach dodatnich grają podstawową rolę w teorii szeregów. Dla takich szeregów ciąg sum częściowych (S_n) jest ciągiem rosnącym, gdyż:

$$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n \ .$$

Zatem dla zbieżności takich szeregów wystarczy udowodnić ograniczoność z góry ciągu (S_n). Nie zawsze jest to łatwe, ze względu na postać S_n jako sumy n-wyrazów ciągu (a_n). Zatem dla szeregów o wyrazach dodatnich możliwe są tylko dwa przypadki: albo szereg jest zbieżny i wtedy S jest liczbą skończoną lub rozbieżny i wtedy $S = +\infty$.

Wobec wielości kryteriów, które dzielimy na kryteria zbieżności i rozbieżności podamy tylko pięć z nich.

Najbardziej uniwersalnym warunkiem dostatecznym jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2. (kryterium porównawcze)

Rozważmy dwa szeregi o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Jeżeli spełniona jest nierówność

$$\underset{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq n_0}}{\forall} \ 0 < a_n \leq b_n \ ,$$

to zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *implikuje zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, a rozbieżność* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *implikuje rozbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Uwaga. Praktycznym w zastosowaniach jest kryterium porównawcze w wersji granicznej, które brzmi: szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne, gdy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = s \in (0,\infty)$.

Na przykład $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ jest rozbieżny bo $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=1$,

a jak wiadomo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Przykłady. Zbadać zbieżność szeregu:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$

Mamy: $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$, $n\in\mathbb{N}$. Zachodzi oczywista nierówność:

$$0<a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=b_n\ .$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ jako szereg harmoniczny rzędu $\alpha=\frac{3}{2}$ jest zbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach mniejszych też jest zbieżny.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\sqrt{n}}$

Mamy: $0<a_n=\frac{1}{3^n+\sqrt{n}}<\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n=b_n$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest szeregiem geometrycznym z $q=\frac{1}{3}\in(-1,1)$, więc jest zbieżny, co implikuje zbieżność szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ na mocy kryterium porównawczego.

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

Mamy: $a_n=\frac{1}{\ln n}$, $n\geq 2$. Jak wiemy (rozdział VII), prawdziwa jest nierówność $\underset{x>0}{\forall}\ \ln x\leq x-1<x$, co daje $\ln n<n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, a więc $a_n=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}=b_n$.

Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest szeregiem harmonicznym rzędu 1, a więc jest szeregiem rozbieżnym, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ jako „większy" jest też rozbieżny.

4. $a_n = (1.1)^n$.

Ponieważ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (1.1)^n = +\infty$, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, bo $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ (lub jako szereg geometryczny z $q = 1.1$) .

Twierdzenie 3. (kryterium d'Alamberta)

Załóżmy, że dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *istnieje skończona granica*

(15.5) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q .$$

Wtedy:

jeżeli $q < 1$ *, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*

jeżeli $q > 1$ *, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Jeżeli $q = 1$ *, to kryterium d'Alamberta nie rozstrzyga ani zbieżności, ani rozbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Twierdzenie 4. (kryterium Cauchyego)

Załóżmy, że dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *istnieje skończona granica*

(15.6) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q .$$

Wtedy:

jeżeli $q < 1$ *, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*

jeżeli $q > 1$ *, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Jeżeli $q = 1$ *, to kryterium Cauchyego nie rozstrzyga ani zbieżności, ani rozbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Twierdzenie 5. (kryterium zagęszczania Cauchyego)

Jeżeli ciąg $(a_n), n \in \mathbb{N}$ *jest ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bądź rozbieżny wraz z szeregiem* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Twierdzenie 6. (kryterium całkowe)

Załóżmy, że funkcja ciągła $f: \langle 1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *spełnia następujące warunki*

1. $f(x) > 0$ *dla* $x \in \langle 1, +\infty)$,
2. $f(x) \downarrow$ *dla* $x \in \langle 1, +\infty)$,
3. $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i całka niewłaściwa* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *są jednocześnie zbieżne, bądź rozbieżne.*

Przykłady. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli:

1. $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Mamy: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 = q < 1$, zatem nasz szereg jest zbieżny na mocy kryterium d'Alamberta.

2. $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, (szereg harmoniczny rzędu α)

Zastosujmy kryterium zagęszczania Cauchyego

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}$.

Ostatni szereg jako szereg geometryczny jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \leq 1$.

3. $a_n = \frac{1}{n \cdot ln\, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Zastosujemy kryterium zagęszczania Cauchyego:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot ln\, n} \leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \cdot ln\, 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ln\, 2^k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot ln\, 2} = \frac{1}{ln\, 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Ostatni szereg jako harmoniczny jest rozbieżny, więc badany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest rozbieżny.

Uwaga. Oba powyższe przykłady mogą być rozwiązane również przez zastosowanie kryterium całkowego.

4. $a_n = \frac{1}{n \cdot ln^2 n}$.

Metodą jak wyżej szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot ln^2 n}$ kojarzymy z szeregiem

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \cdot ln^2\, 2^k} = \frac{1}{ln^2\, 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ostatni szereg jako harmoniczny rzędu $\alpha = 2$ jest zbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Obliczając całkę $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x ln^2 x} = \begin{vmatrix} ln\, x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = \int_{ln\, 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, która jest zbieżna, stwierdzamy, że badany szereg też jest zbieżny.

5. $a_n = \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

6. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Mamy $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ dąży do $\frac{1}{e} < 1$, gdy $n \to +\infty$, zatem na mocy kryterium Cauchyego szereg jest zbieżny.

Uwaga. Badanie każdego szeregu powinniśmy w zasadzie rozpoczynać od sprawdzenia warunku koniecznego $\lim_{n\to+\infty} a_n =?$. Często jednak, jest to zadanie trudniejsze niż zastosowanie wybranego kryterium. Powtórzmy, że częstym i błędnym jest rozumowanie, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ daje zbieżność szeregu. Taki fakt o niczym nie przesądza (na przykład szereg harmoniczny rzędu $\alpha = 1$). Należy wtedy stosować odpowiednie kryteria. Natomiast informacja $\lim_{n\to+\infty} a_n = g \neq 0$, implikuje rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

15.3 Szeregi o wyrazach dowolnych

Zbieżność szeregu o wyrazach dowolnych jest jeszcze bardziej skomplikowana niż szeregów o wyrazach dodatnich.

Na przykład jak rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \dots,$$

gdzie jak widać znaki wyrazów szeregu są rozłożone dość chaotycznie. Nieco łatwiejsza jest sytuacja gdy wyrazy szeregu mają znaki $"+"$ i $"-"$ na przemian (szeregi naprzemienne), czyli szeregi postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \ , \ a_n > 0 \, .$$

Ograniczymy się do dwóch kryteriów.

Definicja. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ *, nazywa się* ***bezwzględnie zbieżnym,*** *gdy zbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Przykłady

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny, bo szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (harmoniczny rzędu $\alpha = 2$).
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (szereg anharmoniczny) nie jest bezwzględnie zbieżny, bo $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 7. *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny.*

Definicja. *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ *nie jest bezwzględnie zbieżny, ale jest zbieżny to nazywa się on* ***warunkowo zbieżny***.

Aby badać zbieżność bezwzględną, wystarczy zaadoptować odpowiednie kryteria z szeregów o wyrazach dodatnich. Mamy więc:

Twierdzenie 8. (kryterium porównawcze)

Jeżeli $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n| \leq b_n$, $b_n > 0$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny.*

Twierdzenie 9. (kryterium Cauchy'ego)

Niech (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ *będzie ciągiem dla którego istnieje granica* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = s \in \langle 0, +\infty)$. *Wtedy, jeżeli* $s < 1$, *to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie, a jeżeli* $s > 1$, *to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Twierdzenie 10. (kryterium d'Alamberta)

Niech $(a_n)\,, n \in \mathbb{N}$ *będzie ciągiem o wyrazach różnych od zera, dla którego istnieje granica* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \langle 0, +\infty)$ *. Wtedy, jeżeli* $q < 1$ *to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny, a gdy* $q > 1$ *, to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Podamy jeszcze kryterium dla szeregów naprzemiennych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \;, a_n > 0.$$

Twierdzenie 11. (kryterium Leibniza)

Jeżeli w szeregu naprzemiennym ciąg (a_n) *jest malejący* $(a_{n+1} < a_n \,, n \in \mathbb{N})$ *i* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *jest zbieżny. Ponadto* $|R_n| = |S - S_n| \le a_{n+1}$.

Wniosek. Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, jak łatwo widać spełnia założenia twierdzenia Leibniza, więc jest zbieżny.

Dowód. Niech $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Wykażemy, że ciągi (S_{2n}) i (S_{2n+1}) są wzajemnie zbliżającymi się, co implikuje, że

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_n \,.$$

Istotnie mamy

$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$, $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = S_{2n} - a_{2n+1} < S_{2n}$, zatem $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, S_{2n+1} < S_{2n}$. Ponadto $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} < 0$ bo $(a_n) \downarrow$, czyli $(S_{2n}) \downarrow$, analogicznie $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} > 0$, czyli $(S_{2n+1}) \uparrow$, oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$, czyli istotnie ciągi (S_{2n}) i (S_{2n+1}) są wzajemnie zbliżające się do siebie, więc mają one wspólną granicę będącą również sumą szeregu.

Wniosek. Jeżeli oznaczymy $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k$, to

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Dowód. Mamy oczywiste nierówności na mocy twierdzenia 11:

$$S_{2n+1} < S < S_{2n} \text{ i } S_{2n+1} < S < S_{2n+2}.$$

Zatem $|R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leq |S_{2n} - S_{2n+1}| = a_{2n+1}$ oraz
$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| \leq |S_{2n+2} - S_{2n+1}| = a_{2n+2}$, co kończy dowód.

Przykłady. Zbadać zbieżność poniższych szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

Szereg powyższy jako naprzemienny i mający własność $a_n = \frac{1}{2n-1} \downarrow$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Nie jest on bezwzględnie zbieżny, bo szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ jest rozbieżny.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.

Szereg złożony z wartości bezwzględnych to jest $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ jest zbieżny na mocy kryterium d'Alamberta bo $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Zatem badany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

3. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Szereg złożony z wartości bezwzględnych $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ jest rozbieżny na mocy kryterium całkowego, bo $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = \int_2^{+\infty} t\,dt = +\infty$. Z kryterium Lebniza $\left(a_n = \frac{\ln n}{n} \downarrow, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\right)$ wynika, że badany szereg jest zbieżny, czyli jest on warunkowo zbieżny.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots$

Szereg ten jest zbieżny bezwzględnie na mocy kryterium d'Alamberta, a ponadto mamy $|R_n| \le \frac{1}{(n+1)!}$, $n \in \mathbb{N}$, co oznacza, że na przykład dla $n = 6$, $R_n < 0.001$. Aby więc otrzymać sumę szeregu z dokładnością do 0.001 wystarczy wziąć sześć początkowych jego wyrazów.

15.4 Wyznaczanie sum niektórych szeregów

Wykorzystanie definicji zbieżności szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako granicy ciągu sum częściowych $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, do wyznaczenia jego sumy S tylko w bardzo ograniczonych przypadkach daje finalny efekt.

Na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ mamy $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, a więc $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, czy dla szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, mamy $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, a więc dla $q \in (-1,1)$ otrzymujemy znany wzór na sumę szeregu geometrycznego $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

Ale już na przykład dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$ sprawa nie jest oczywista. Zapisując S_n jak niżej

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=-2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)+2\,.$$

Widzimy, że wyrażenie w nawiasie jest sumą częściową S_{2n+1} dla rozwinięcia $ln\,2$. Zatem mamy dość nieoczekiwany wynik

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=2-2\,ln\,2\,.$$

15.4.1 Zastosowanie sumy ciągu geometrycznego

Na mocy wzoru dla sumy $(n+1)$ wyrazów ciągu geometrycznego postaci $1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n=\sum_{k=0}^{n}(-x)^k=$

$$=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,,\ x>0\,,$$

mamy $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$.

Przykłady

1. Całkując w przedziale $\langle 0,1\rangle$ powyższą równość otrzymujemy:

$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-x)^k dx+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$, a zatem

$ln\,2=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

Ale $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx\to 0$, $n\to+\infty$, bo $0<\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx<\frac{1}{n+2}$.

Zatem gdy $n\to+\infty$ to otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=ln\,2\,.$$

2. Podstawiając w $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$, $x \neq -1$, zamiast $x \to x^2$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \ .$$

Całkując jak wyżej w $\langle 0, 1\rangle$ otrzymujemy

$$arctg\, x|_0^1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1} + (-1)^{n+1} I_n \ ,$$

skąd dla $n \to +\infty$ $(I_n \to 0)$ otrzymujemy sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \ .$$

Wyżej pokazaliśmy zastosowanie szeregu $ln\, 2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ do wyznaczenia sumy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}$. Analogicznie rozwinięcie dla $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ może być na przykład wykorzystane do otrzymania sumy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$.

Proste przekształcenia dają

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(4n+1)} - \frac{1}{(4n+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15}\right) + \cdots\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} \approx 0.06 \ .$$

3. Wykorzystując inną postać dla sumy n - wyrazów innego ciągu geometrycznego, możemy otrzymać inny wzór na szereg dający $ln\, 2$.

Na przykład możemy dla $x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ napisać sumę:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} ,$$

skąd $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{x^n}{1-x}$.

Całkując powyższą równość w przedziale $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, otrzymamy

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} x^k dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$, to jest

$ln\, 2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)} + I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k} + I_n$.

Ponieważ $0 \le x \le \frac{1}{2}$, zatem dla całki I_n mam oszacowanie

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \le I_n \le 2\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n},$$

co oznacza, że $I_n \to 0$, $n \to +\infty$. Otrzymujemy zatem z powyższej nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = ln\, 2 .$$

15.4.2 Zastosowanie sumy szeregu geometrycznego

Niech $q \in (-1,1)$. Suma $(n+1)$ wyrazów ciągu geometrycznego dana jest wzorem

(15.6) $$S_n = S_n(q) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

a zbieżny przy powyższym założeniu szereg geometryczny ma sumę

(15.7) $$S = S(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} S_n(q) = \frac{1}{1-q} .$$

Różniczkując dwukrotnie $S_n(q)$ otrzymujemy

(15.8) $$S_n'(q) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1}-(n+1)q+1}{(1-q)^2},$$

skąd

(15.9) $$S' = \lim_{n\to+\infty} S_n'(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} .$$

Analogicznie

(15.10) $$S_n''(q) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} =$$

$$= \frac{-n(n-1)q^{n+1} + 2(n^2-1)q^n - n(n+1)q^{n-1} + 2}{(1-q)^3},$$

co w granicy daje

(15.11) $$S'' = \lim_{n\to+\infty} S_n''(q) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n^2 q^{n-2} - \frac{1}{q}S'(q) + \frac{1}{q} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

W powyższych przejściach granicznych wykorzystaliśmy fakt, że $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k q^n = 0$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i $q \in (-1,1)$ (twierdzenie 8, rozdział III).

Oczywiście powyższą procedurę możemy uogólnić na m - różniczkowań i otrzymać wzór

(15.12) $$S^{(m)} = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)q^{n-m} = \frac{m!}{(1-q)^{m+1}},$$

$$m \in \mathbb{N}, |q| < 1.$$

Przykład. Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+5}{2^n} = S$.

Wykorzystując powyższe oznaczenia możemy napisać:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 6$;

$-3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = -3\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -6$;

$5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 5$; stąd $S = 5$.

15.4.3 Wyznaczanie sum szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Najbardziej celebrowanym szeregiem jest szereg harmoniczny rzędu drugiego: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, którego suma jest równa liczbie niewymiernej $\frac{\pi^2}{6}$ (Euler).

Istnieje kilka metod dowodu tego rezultatu [3], [6], wykorzystujących skomplikowane własności liczb zespolonych, bądź szeregi Fouriera.

Zaprezentowany niżej prosty dowód wykorzystuje znany wzór trygonometryczny, który po scałkowaniu i zastosowaniu lematu Riemanna-Lebesgue'a, da nam sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Reszta to już proste rachunki.

Otóż znany wzór na sumę cosinusów:

$$1+2\sum_{k=1}^{n}cos(kt)=\frac{sin(2n+1)\frac{t}{2}}{sin\frac{t}{2}}\ ,\ t\neq 2k\pi\ ,$$

który łatwo dowodzi się indukcyjnie po przemnożeniu przez t i scałkowaniu w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ daje:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}t\,cos(kt)\,dt=\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{\frac{t}{2}}{sin\frac{t}{2}}}_{g(t)}sin(2n+1)\frac{t}{2}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}tdt\ .$$

Ale $\int_0^{\pi}tdt=\frac{\pi^2}{2}$ i

$$\int_0^{\pi}\underbrace{t}_{u}\underbrace{cos(kt)}_{v'}dt=\underbrace{t\frac{sin\,kt}{k}\Big|_0^{\pi}}_{=0}-\int_0^{\pi}\frac{sin\,kt}{k}dt=\frac{cos(kt)}{k^2}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{k^2}[(-1)^k-1]=$$

$$=\begin{cases}-\frac{2}{(2s-1)^2} & k=2s-1\\ 0 & k=2s\end{cases}.$$

Stąd $L = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} t\,cos(kt)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{[(-1)^k-1]}{k^2} = -2\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(2s-1)^2}$,

$P = \int_0^{\pi} g(t)\,sin(2n+1)\frac{t}{2}dt - \frac{\pi^2}{4}$.

Na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} g(t)\,sin(2n+1)\frac{t}{2}dt = 0\ ,$$

bo $g(x) = \frac{x}{\sin x} \in C^1\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ $(g(0) = 1\ ,\ g'(0) = 0)$.

Zatem mamy $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} = \frac{\pi^2}{4\cdot 2} = \frac{\pi^2}{8}$. Oznaczając $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ możemy napisać $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s)^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^2}$, to jest

$$S - \frac{S}{4} = \frac{\pi^2}{8} \ \Rightarrow\ \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8} \ \Rightarrow\ S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Uwaga. Z powyższych wzorów otrzymamy jeszcze jeden. Mianowicie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \left| \begin{array}{c} możemy\ pogrupować \\ wyrazy, bo\ szereg\ jest \\ bezwzględnie\ zbieżny \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}\ .$$

Zadania, uzupełnienia i komentarze

Zadanie 1. Zbadać zbieżność szeregów o wyrazach dodatnich:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^4}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$; h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot ln^3 n}$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

Zadanie 2. Zbadać charakter zbieżności szeregów o wyrazach dowolnych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3+1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n!}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{10n}$.

Zadanie 3. Udowodnić, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$ jest też zbieżny.

Zadanie 4. Ile trzeba wziąć wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ aby otrzymać

a) jego sumę z dokładnością do 6 - ciu miejsc po przecinku?

b) to samo pytanie dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.

$$R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots=\frac{1}{n}.$$

Z drugiej strony

$$R_n>\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots=\frac{1}{n+1},$$

czyli $\frac{1}{n+1}<R_n<\frac{1}{n}<10^{-6}\ \Rightarrow\ n>10^6=1000000.$

Dla szeregu naprzemiennego

$$|R_n|<a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{10^6}\Rightarrow n+1>\sqrt{10^6}=10^3=1000\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n>1000\ .$$

Literatura

[1] J. Banaś, *Podstawy matematyki dla ekonomistów*, Wyd. II , WNT, Warszawa 2007 (wybrane rozdziały).

[2] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wyd. V, WNT, Warszawa 1999 (wybrane rozdziały).

[3] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I i II, PWN, Warszawa 1965, (wybrane rozdziały).

[4] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1, (Matematyka dla studentów Politechniki Wrocławskiej)*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2000.

[5] R. L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1998.

[6] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2005.

[7] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, Wyd. XX, PWN, Warszawa 1994.

[8] D. S. Mitrinovič, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972.

[9] S. Rondy, P. Berlandi, G. Niffoi, A.S. Pierson-Fertel, N. Pierson, *Mathématiques*, ECS-1^{re} année, Ellipses, Paris 2013.

[10] W. Stankiewicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, cz. I, PWN, Warszawa 1980.

[11] J. Szynal, *Matematyka dla początkujących (studentów). Program wyrównawczy - 15 tematów*, Innovatio Press, Wydawnictwo Naukowe WSEI w Lublinie, 2012.

[12] W. Żakowski, G. Decewicz, Matematyka, cz. I, Wyd. XIV, WNT, Warszawa 1995.

wydawnictwo.umcs.eu

UMCS

WYDAWNICTWO

9 788322 794081