Dokładne prawa wielkich liczb i ich zastosowania

Rozprawa doktorska

Paweł Kurasiński

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
dr. hab. Przemysława Matuły, prof. UMCS

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Lublin 2022

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania mojemu promotorowi
dr. hab. Przemysławowi Matule prof. UMCS za udzieloną pomoc
w trakcie przygotowywania pracy doktorskiej, cierpliwość oraz
poświęcony czas i za podsunięcie ciekawego tematu badawczego.

Spis treści

Spis oznaczeń

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – przestrzeń probabilistyczna, gdzie Ω jest zbiorem, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem jego podzbiorów, $\mathbb{P}$ prawdopodobieństwem;

$\mathbb{E}X$ - wartość oczekiwana zmiennej losowej X;

$\mathrm{Var}X$ - wariancja zmiennej losowej X;

$f_X(x)$ - funkcja gęstości zmiennej losowej X;

$F_X(x)$ - dystrybuanta zmiennej losowej X;

$\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ - funkcja przeżycia zmiennej losowej X;

$\mathbb{I}(A)$- indykator zdarzenia losowego A;

$\lg(x) = \log(\max(e, x))$, gdzie log jest logarytmem naturalnym;

$a_n \sim b_n$ - asymptotycznie równe, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$;

$a_n \approx b_n$ tzn., że istnieje stała $B > 0$ taka, że $\frac{a_n}{B} \leqslant b_n \leqslant Ba_n$.

Wstęp

Rozprawa doktorska pt. *Dokładne prawa wielkich liczb i ich zastosowania* została oparta na pięciu pracach opublikowanych w latach 2018–2020 (patrz [22], [26], [25], [27], [21]), które powstały w wyniku współpracy z moim promotorem prof. Przemysławem Matułą oraz z prof. André Adlerem z Illinois Institute of Technology w Chicago. W pracy przedstawione są jeszcze wyniki własne, dotąd nieopublikowane.

Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X. W przypadku, gdy $\mathbb{E}|X| < \infty$ oraz $\mathbb{E}X \neq 0$ z mocnego prawa wielkich liczb Kołmogorowa wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n\mathbb{E}X} = 1 \quad \text{prawie pewnie.}$$

Z drugiej strony Chow oraz Robbbins w 1961 roku (patrz [14]) pokazali, że w przypadku, gdy $\mathbb{E}|X| = \infty$ nie istnieje ciąg $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{M_n} = 1 \quad \text{prawie pewnie.}$$

Podobny wynik w 1978 roku uzyskał Maller (patrz [24]), który rozważał przypadek, gdy $\mathbb{E}X = 0$.

W przypadku gdy $\mathbb{E}|X| = \infty$ badamy, czy istnieją ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k X_k}{b_n} = 1 \quad \text{prawie pewnie.}$$

Twierdzenia tego rodzaju są znane jako **dokładne prawa wielkich liczb (DPWL)**, które były badane przez Adlera (1990-do teraz), Miao (2016), Zhanga (2017), Matułę (2010, 2018), Rosalskiego (2004), Rogozina (1968, 1976), Xu (2017) (patrz [1], [3], [5], [10], [4], [6], [2], [9], [11], [32], [33], [36], [31], [37], [38]).

W pierwszym rozdziale podamy mocne oraz słabe dokładne prawa wielkich liczb dla niezależnych oraz zależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach. Ponadto przedstawimy wyniki własne dotyczące dokładnych praw wielkich liczb dla zależnych zmiennych losowych oraz inny sposób dowodzenia DPWL niż przeprowadzony w pracy Adlera [2].

W drugim rozdziale skupimy się na badaniu sum ważonych ilorazów zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze zbieżnością prawie pewną oraz według prawdopodobieństwa (mocne oraz słabe DPWL). Zostaną przedstawione wyniki o dokładnym prawie wielkich liczb dla ilorazów zmiennych losowych. W szczególności jedno z otrzymanych twierdzeń jest uogólnieniem wyniku Adlera z 2015 roku (patrz [6]).

W trzecim rozdziale pokażemy zastosowanie DPWL dla różnych rozkładów (pokazanych w rozdziale 1) do badania zbieżności sum ważonych ilorazów statystyk porządkowych. W szczególności zaprezentowane będą uogólnienia wyników Adlera z 2015 roku (patrz [6] i [8]) oraz pokażemy uproszczone rozważania Miao i współautorów z 2016 roku (patrz [32]). Zostanie przedstawiony również wynik dotyczący maksimów ilorazów sąsiednich statystyk porządkowych, który jest uzupełnieniem twierdzenia Adlera z 2017 roku (patrz [9]). Szczególną uwagę zwrócimy na badanie ilorazów najmniejszych statystyk porządkowych.

W czwartym rozdziale pokażemy DPWL dla rozkładów typu asymetrycznego Pareta ze zbieżnością prawie pewną, według prawdopodobieństwa oraz kompletną. W literaturze były badane mocne oraz słabe DPWL dla rozkładu dwuogonowego Pareta (patrz [7]) oraz dla rozkładu asymetrycznego Cauchy'ego (patrz [5]). W rozważaniach tego rozdziału uogólnimy te wyniki (patrz [27]).

W ostatnim rozdziale wyniki dotyczące dokładnych praw wielkich liczb zostaną rozszerzone na pola losowe. W rozprawie zostanie przedstawione twierdzenie analogiczne do twierdzenia Chowa oraz Robbinsa dla pól losowych. W chwili obecnej jest to jedyny taki wynik dla pól losowych. Zostanie przedstawione również dokładne prawo wielkich liczb dla pól losowych w wersji wielowymiarowej. We wcześniejszych pracach (patrz [4] oraz [11]) problem wielowymiarowy był sprowadzany do problemu jednowymiarowego.

Naturalnym zastosowaniem DPWL jest Paradoks Petersburski. W 1713 roku Nicolas Bernoulli w liście do Pierre'a de Montmorta po raz pierwszy sformułował Paradoks Petersburski. Przykładem Paradoksu Petersburskiego jest następująca gra losowa, w której uczestnictwo kosztuje ustaloną kwotę pieniędzy. Gra polega na serii rzutów symetryczną monetą i trwa do momentu pojawienia się pierwszego orła. Wygrana gracza wynosi 1 złoty i zostaje powiększona dwukrotnie za każdym razem, gdy wypadnie reszka. Przykładowo wygrana wynosi 1 złoty, jeżeli za pierwszym razem wypadnie orzeł; 2 złote, jeżeli w pierwszym rzucie wypadnie reszka, a w drugim orzeł; 4 złote, jeżeli w pierwszych dwóch rzutach wypadnie reszka, a w trzecim orzeł; itd. Czyli powyższa gra losowa ma następujący rozkład

$$P(X = q^{-k}) = pq^{k-1}, \tag{1}$$

gdzie $0 < p = 1 - q < 1$, $k = 1, 2, ...$ Dla $p = \frac{1}{2}$ mamy klasyczny Paradoks Petersburski. Zauważmy, że wartość oczekiwana

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = \infty.$$

Na stronie 252 z [16] możemy znaleźć słabe rozwiązanie tzn., słabe prawo wielkich liczb dla klasycznego Paradoksu Petersburskiego ($p = q = \frac{1}{2}$): dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{e_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

gdzie $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ oraz $e_n = n \log_2 n$. Jednakże zgodnie z wynikiem Chowa – Robbinsa dla Paradoksu Petersburskiego nie możemy stosować mocnego prawa wielkich liczb Kołmogorowa i dlatego musimy badać sumy ważone. Przedstawimy teraz Przykład 7 z [2], który pokazał zastosowanie mocnych dokładnych praw wielkich liczb do rozwiązania Paradoksu Petersburskiego.

Przykład 0.1 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X, która ma rozkład (1). Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{(\lg k)^{b-2}}{k} X_k}{(\lg n)^b} = \frac{p}{qb \lg q^{-1}} \text{ prawie pewnie,}$$

gdzie $b > 0$.

Rozdział 1

DPWL dla zmiennych losowych o różnych rozkładach

W tym rozdziale przedstawimy dokładne prawa wielkich liczb ze zbieżnością prawie pewną oraz według prawdopodobieństwa (mocne oraz słabe DPWL) dla niezależnych i zależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach. Uzyskane twierdzenia będą wykorzystywane w kolejnych rozdziałach do badania zbieżności prawie pewnej oraz według prawdopodobieństwa ważonych ilorazów zmiennych losowych oraz ważonych statystyk porządkowych.

1.1. DPWL dla niezależnych zmiennych losowych

Na początku przypomnimy oraz pokażemy inny sposób dowodzenia DPWL ukazanych w pracy Adlera [2]. Zacznijmy od przypadku, gdy wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi 0. Tak samo jak w pracy Adlera, niech

$$\mu(x) = \int_x^\infty \mathbb{P}(|X| > t)dt.$$

Teraz zdefiniujmy następującą funkcję

$$C(x) = \frac{x}{\mu(x)\lg(x)}, \quad x \geqslant 0.$$

Przypomnijmy, że $\lg(x) = \log(\max(x; e))$.

W [2] zostało pokazane, że funkcja $C : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest ciągła, rosnąca oraz jest bijekcją. Oznaczmy przez $c(x) = C^{-1}(x)$ jej funkcję odwrotną. Zdefiniujmy ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ przez $c_n = c(n)$. Oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

Z definicji otrzymujemy następującą równość

$$c_n = n\mu(c_n)\lg(c_n).$$

Adler w [2] pokazał, że jeśli zmienna losowa X spełnia poniższy warunek

$$x\mathbb{P}(|X| \geqslant x) \approx L(x), \tag{1.1}$$

gdzie $L(x)$ jest funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności, to

$$c_n \sim n\mu(c_n)\lg n. \tag{1.2}$$

Przyjmijmy teraz ciąg normujący

$$b_n = (\lg n)^b,$$

gdzie $b > 0$ oraz ciąg naszych wag

$$a_n = \frac{b_n}{c_n}.$$

Z (1.2) mamy

$$a_n \sim \frac{(\lg n)^{b-1}}{n\mu(c_n)}. \tag{1.3}$$

Zdefiniujmy miarę asymetrii zmiennej losowej X jako następujący współczynnik (zakładamy, że poniższa granica istnieje)

$$c = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E}X^-\mathbb{I}[X^- > x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > x]}, \tag{1.4}$$

gdzie $X^+ = X\mathbb{I}[X > 0]$ oraz $X^- = -X\mathbb{I}[X < 0]$. Wtedy $X = X^+ - X^-$ oraz $|X| = X^+ + X^-$.

Twierdzenie 1.1 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X. Jeśli $x\mathbb{P}(|X| > x) \approx L(x)$, gdzie $L(x)$ jest funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności, $\mathbb{E}X = 0$ oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > c_n) < \infty, \tag{1.5}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k X_k}{b_n} = \frac{c-1}{b(c+1)}.$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia Jajtego (Twierdzenie A.4). Połóżmy $h(n) = 1/a_n$, $g(n) = b_n$ oraz $\phi(n) = g(n)h(n) = c_n$. Na początku pokażemy, że

$$\mathbb{E}\phi^{-1}(|X|) < \infty.$$

Zauważmy, że powyższy warunek jest równoważny temu, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\phi^{-1}(|X|) \geqslant n\right) < \infty.$$

Zatem z (1.5) mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\phi^{-1}(|X|) \geqslant n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| \geqslant \phi(n)\right) < \infty.$$

Stąd na mocy twierdzenia Jajtego otrzymujemy, że

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h(k)} \left(X_k - m_k\right) \to 0 \quad \text{prawie pewnie,}$$

gdzie $m_k = \mathbb{E} X_k \mathbb{I}[|X_k| \leqslant \phi(n)]$. Adler w [2] pokazał, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{h(k)} = \frac{c-1}{b(c+1)},$$

co kończy dowód. ■

W przypadku gdy $\mathbb{E}X = \infty$, wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\overline{\mu}(x) = \int_0^x \mathbb{P}(|X| > t)dt.$$

Teraz zdefiniujmy następującą funkcje

$$C(x) = \frac{x}{\overline{\mu}(x)\lg(x)}, \quad x \geqslant x(L)$$

oraz liniową pomiędzy $C(0) = 0$ i $C(x(L)) > 0$ tzn, dla $0 < x < x(L)$. W [2] zostało pokazane, że funkcja $C : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest ciągła, rosnąca oraz jest bijekcją. Oznaczmy przez $c(x) = C^{-1}(x)$ funkcję odwrotną. Zdefiniujmy ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ przez $c_n = c(n)$. Oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

Z definicji otrzymujemy następującą równość

$$c_n = n\overline{\mu}(c_n)\lg(c_n).$$

Adler w [2], przy założeniu (1.1), pokazał, że

$$c_n \sim n\overline{\mu}(c_n)\lg n. \tag{1.6}$$

Tak samo jak wcześniej, niech

$$b_n = (\lg n)^b$$

oraz

$$a_n = \frac{b_n}{c_n}.$$

Z (1.6) mamy

$$a_n \sim \frac{(\lg n)^{b-1}}{n\overline{\mu}(c_n)}. \tag{1.7}$$

W tym przypadku, wprowadźmy oznaczenie

$$\overline{c} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E}X^-\mathbb{I}(X^- \leqslant x)}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}(X^+ \leqslant x)}. \tag{1.8}$$

Twierdzenie 1.2 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X. Jeśli $x\mathbb{P}(|X| > x) \approx L(x)$, gdzie $L(x)$ jest funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności, $\mathbb{E}X = \infty$ oraz założenie (1.5) jest spełnione, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k X_k}{b_n} = \frac{1-\overline{c}}{b(1+\overline{c})}.$$

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 1.5. Tak jak wcześniej skorzystamy z twierdzenia Jajtego (Twierdzenie A.4). Połóżmy $h(n) = 1/a_n$, $g(n) = b_n$ oraz $\phi(n) = g(n)h(n) = c_n$. Na początku pokażemy, że

$$\mathbb{E}\phi^{-1}(|X|) < \infty.$$

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, powyższy warunek jest równoważny temu, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\phi^{-1}(|X|) \geqslant n\right) < \infty.$$

Zatem z (1.5) mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\phi^{-1}(|X|) \geqslant n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| \geqslant \phi(n)\right) < \infty.$$

Stąd na mocy twierdzenia Jajtego otrzymujemy, że

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h(k)} \left(X_k - m_k\right) \to 0 \quad \text{prawie pewnie,}$$

gdzie $m_k = \mathbb{E}X_k\mathbb{I}[|X_k| \leqslant \phi(n)]$. Adler w [2] pokazał, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{h(k)} = \frac{1-\overline{c}}{b(1+\overline{c})},$$

co kończy dowód. ∎

1.2. Zbieżność prawie pewna

Zacznijmy od sformułowania pierwszego mocnego DPWL dla niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach. Warunek poniższego twierdzenia dotyczy funkcji przeżycia.

Twierdzenie 1.3 *Niech $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem nieujemnych, niezależnych zmiennych losowych o dystrybuantach F_{R_n} takich, że $\overline{F}_{R_n}/\overline{F}_R \to 1$ jednostajnie na przedziale $\langle x_0, \infty)$, dla pewnego $x_0 \geqslant 0$, gdy $n \to \infty$, gdzie F_R jest dystrybuantą pewnej dodatniej zmiennej losowej R taką, że $x\overline{F}_R(x) \to M > 0$, gdy $x \to \infty$. Wtedy dla dowolnego $\alpha > -2$, otrzymujemy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k = \frac{M}{\alpha+2} \quad \textit{prawie pewnie.}$$

Dowód. Niech $a_n = (\lg^\alpha n)/n$, $b_n = \lg^{\alpha+2} n$ oraz $c_n = b_n/a_n = n \lg^2 n$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k &= \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \left[R_k \mathbb{I}(R_k \leqslant c_k) - \mathbb{E}R_k\mathbb{I}(R_k \leqslant c_k)\right] \\ &+ \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k \mathbb{I}(R_k > c_k) + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}R_k\mathbb{I}(R_k \leqslant c_k) \\ &= A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie ustalony. Ze zbieżności $x\overline{F}_R(x) \to M$ wynika, że istnieje $x(\varepsilon)$ taki, że dla $x \geqslant x(\varepsilon)$ mamy

$$\frac{M-\varepsilon}{x} \leqslant \overline{F}_R(x) \leqslant \frac{M+\varepsilon}{x}.$$

Z jednostajnej zbieżności wynika, że istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\left| \frac{\overline{F}_{R_n}(x)}{\overline{F}_R(x)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon, \quad \text{dla każdego } x \in \langle x_0, \infty).$$

Dodatkowo n_0 może być wybrane w taki sposób, że $c_n \geqslant x_1(\varepsilon) = \max(x_0, x(\varepsilon))$ dla $n \geqslant n_0$. Ostatecznie dla $n \geqslant n_0$ oraz $x \geqslant x_1(\varepsilon)$ dostajemy

$$\frac{(1-\varepsilon)(M-\varepsilon)}{x} \leqslant \overline{F}_{R_n}(x) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)}{x}. \tag{1.10}$$

Aby pokazać, że $A_1 \to 0$ prawie pewnie, gdy $n \to \infty$, skorzystamy z twierdzenia o dwóch szeregach (Twierdzenie A.6) oraz z lematu Kroneckera (Lemat A.2). Korzystając z (1.10) pokażemy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var}\left[R_k\mathbb{I}(R_k \leqslant c_k) - \mathbb{E}R_k\mathbb{I}(R_k \leqslant c_k)\right]}{c_k^2} < \infty. \tag{1.11}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Var}\left[R_k \mathbb{I}(R_k \leqslant c_k) - \mathbb{E} R_k \mathbb{I}(R_k \leqslant c_k)\right]}{c_k^2} \\
&\leqslant \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_k^2} \mathbb{E} R_k^2 \mathbb{I}(R_k \leqslant c_k) \\
&\leqslant \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{2}{c_k^2} \left(\int_0^{x_1(\epsilon)} t\overline{F}_{R_k}(t)dt + \int_{x_1(\epsilon)}^{c_k} t\overline{F}_{R_k}(t)dt \right) \\
&\leqslant \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{2}{c_k^2} \Big((x_1(\varepsilon))^2 + (c_k - x_1(\varepsilon))(1+\varepsilon)(M+\varepsilon) \Big) < \infty.
\end{aligned}$$

Zatem na mocy twierdzenia o dwóch szeregach otrzymujemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n \mathbb{I}(R_n \leqslant c_n) - \mathbb{E} R_n \mathbb{I}(R_n \leqslant c_n)}{c_n}$$

jest zbieżny. Stąd na mocy lematu Kroneckera otrzymujemy, że $A_1 \to 0$, gdy $n \to \infty$, prawie pewnie. Teraz pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(R_n > c_n) < \infty$, co wynika z (1.10) oraz z poniższego oszacowania

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(R_n > c_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \overline{F}_{R_n}(c_n) \leqslant (1+\varepsilon)(M+\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_n} < \infty.$$

Stąd z lematu Borela-Cantelliego otrzymujemy, że $A_2 \to 0$, gdy $n \to \infty$, prawie pewnie. Z faktu, że dla $\alpha > -2$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\alpha+1} k}{k} = \frac{1}{\alpha+2} \tag{1.12}$$

oraz z Lematu A.1 wynika, że wystarczy pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}(R_n \leqslant c_n) = M. \tag{1.13}$$

Zauważmy, że dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lg n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}(R_n \leqslant c_n) \leqslant \frac{1}{\lg n} \left(\int_0^{x_1(\varepsilon)} \overline{F}_{R_n}(t)dt + \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} \overline{F}_{R_n}(t)dt \right) \\
&\leqslant \frac{1}{\lg n} \left(x_1(\varepsilon) + (1+\varepsilon)(M+\varepsilon)(\lg c_n - \lg x_1(\varepsilon)) \right).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lg n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}(R_n \leqslant c_n) \leqslant (1+\varepsilon)(M+\varepsilon).$$

Podobnie mamy

$$\frac{1}{\lg n}\mathbb{E}R_n\mathbb{I}(R_n \leqslant c_n) = \frac{1}{\lg n}\left(-c_n\overline{F}(c_n) + \int_0^{x_1(\varepsilon)} \overline{F}_{R_n}(t)dt + \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} \overline{F}_{R_n}(t)dt\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{\lg n}\left(-(1+\varepsilon)(M+\varepsilon) + (1-\varepsilon)(M-\varepsilon)(\lg c_n - \lg x_1(\varepsilon))\right).$$

Stąd

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lg n}\mathbb{E}R_n\mathbb{I}(R_n \leqslant c_n) \geqslant (1-\varepsilon)(M-\varepsilon).$$

Z faktu, że ε był dowolny, otrzymujemy (1.13), co kończy dowód. ■

Podobny wynik uzyskaliśmy w pracy [25], w której warunek dotyczył funkcji gęstości.

Twierdzenie 1.4 *Niech $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o funkcjach gęstości f_{R_n} takich, że $f_{R_n}/f_R \to 1$ jednostajnie na przedziale $\langle x_0, +\infty)$ dla pewnego $x_0 \geqslant 0$, gdy $n \to \infty$, gdzie f_R jest funkcją gęstości pewnej nieujemnej zmiennej losowej R taką, że $x^2 f_R(x) \to M > 0$, gdy $x \to \infty$. Wtedy dla dowolnego $\alpha > -2$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k = \frac{M}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie.}$$

Dowód. Niech a_n, b_n oraz c_n będą takie jak w dowodzie Twierdzenia 1.3. Podzielimy również naszą sumę na trzy części jak wcześniej. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dany. Z założenia o funkcji gęstości f_R wynika, że istnieje $x(\varepsilon)$ taki, że dla $x \geqslant x(\varepsilon)$ mamy

$$\frac{M-\varepsilon}{x^2} \leqslant f_R(x) \leqslant \frac{M+\varepsilon}{x^2}.$$

Z jednostajnej zbieżności wynika, że istnieje $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ otrzymujemy

$$\left|\frac{f_{R_n}(x)}{f_R(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon, \text{ dla każdego } x \in \langle x_0, +\infty).$$

Ponadto n_0 może być wybrane w taki sposób, że $c_n \geqslant x_1(\varepsilon) = \max(x_0, x(\varepsilon))$ dla $n \geqslant n_0$. Ostatecznie dla $n \geqslant n_0$ oraz $x \geqslant x_1(\varepsilon)$ mamy

$$\frac{(1-\varepsilon)(M-\varepsilon)}{x^2} \leqslant f_{R_n}(x) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)}{x^2}. \tag{1.14}$$

Z (1.14) dostajemy

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_k^2}\mathbb{E}R_k^2\mathbb{I}(R_k \leqslant c_k) \\
= &\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_k^2}\left(\int_0^{x_1(\varepsilon)} t^2 f_{R_k}(t)dt + \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_k} t^2 f_{R_k}(t)dt\right) \\
\leqslant &\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_k^2}\Big((x_1(\varepsilon))^2 + (c_k - x_1(\varepsilon))(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)\Big) < \infty,
\end{aligned}$$

więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} \mathbb{E} R_n^2 \mathbb{I}\left(R_n \leqslant c_n\right) < \infty,$$

czyli (1.11) jest spełniony. Następnie pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(R_n > c_n\right) < \infty$, co wynika z (1.14) oraz z poniższej nierówności

$$\begin{gathered}
\sum_{k=n_0}^{\infty} \mathbb{P}\left(R_k > c_k\right) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_{c_k}^{\infty} f_{R_k}(t) dt \\
\leqslant (1+\varepsilon)(M+\varepsilon) \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_{c_k}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = (1+\varepsilon)(M+\varepsilon) \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_k} < \infty .
\end{gathered}$$

Na koniec musimy pokazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}\left(R_n \leqslant c_n\right) = M. \tag{1.15}$$

Zauważmy, że dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\log n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}\left(R_n \leqslant c_n\right) \\
= \; & \frac{1}{\log n} \int_0^{c_n} t f_{R_n}(t) dt = \frac{1}{\log n}\left(\int_0^{x_1(\varepsilon)} t f_{R_n}(t) dt + \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} t f_{R_n}(t) dt\right) \\
\leqslant \; & \frac{1}{\log n}\left(x_1(\varepsilon) + (1+\varepsilon)(M+\varepsilon) \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} \frac{dt}{t}\right) \\
= \; & \frac{1}{\log n}\left(x_1(\varepsilon) + (1+\varepsilon)(M+\varepsilon)\left(\log c_n - \log x_1(\varepsilon)\right)\right).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}\left(R_n \leqslant c_n\right) \leqslant (1+\varepsilon)(M+\varepsilon).$$

Podobnie dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\log n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}\left(R_n \leqslant c_n\right) \\
= \; & \frac{1}{\log n} \int_0^{c_n} t f_{R_n}(t) dt = \frac{1}{\log n}\left(\int_0^{x_1(\varepsilon)} t f_{R_n}(t) dt + \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} t f_{R_n}(t) dt\right) \\
\geqslant \; & \frac{1}{\log n}\left((1-\varepsilon)(M-\varepsilon) \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} \frac{dt}{t}\right) \\
= \; & \frac{1}{\log n}\left((1-\varepsilon)(M-\varepsilon)\left(\log c_n - \log x_1(\varepsilon)\right)\right).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \mathbb{E} R_n \mathbb{I}\left(R_n \leqslant c_n\right) \geqslant (1-\varepsilon)(M-\varepsilon).$$

Z faktu, że ε był wybrany dowolnie, otrzymujemy (1.15), co kończy dowód. ∎

Uwaga 1.1 *Pokażemy teraz, że Twierdzenie 1.4 jest silniejsze od Twierdzenia 1.3. Załóżmy, że* $\frac{f_{R_n}}{f_R} \to 1$ *jednostajnie na przedziale* $\langle x_0, +\infty)$ *dla pewnego* $x_0 \geqslant 0$, *gdy* $n \to \infty$. *Wówczas dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie, że dla* $n \geqslant n_0$ *mamy*

$$\bigwedge_{x \geqslant x_0} \left| \frac{f_{R_n}(x)}{f_R(x)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

czyli

$$\bigwedge_{x \geqslant x_0} (1-\varepsilon) f_R(x) \leqslant f_{R_n}(x) \leqslant (1+\varepsilon) f_R(x).$$

Całkując powyższą nierówność po przedziale $\langle x, +\infty)$, *gdzie* $x \geqslant x_0$ *otrzymujemy*

$$(1-\varepsilon) \int_x^\infty f_R(t)dt \leqslant \int_x^\infty f_{R_n}(t)dt \leqslant (1+\varepsilon) \int_x^\infty f_R(t)dt,$$

a to oznacza, że

$$(1-\varepsilon)\overline{F}_R(x) \leqslant \overline{F}_{R_n}(x) \leqslant (1+\varepsilon)\overline{F}_R(x).$$

Dzieląc przez $\overline{F}_R(x)$, *otrzymujemy dla* $n \geqslant n_0$

$$\bigwedge_{x \geqslant x_0} (1-\varepsilon) \leqslant \frac{\overline{F}_{R_n}(x)}{\overline{F}_R(x)} \leqslant (1+\varepsilon),$$

a to oznacza, że $\frac{\overline{F}_{R_n}(x)}{\overline{F}_R(x)} \to 1$ *jednostajnie na przedziale* $\langle x_0, +\infty)$.

Teraz zauważmy, że jeśli $\lim_{x\to\infty} x^2 f_R(x) = M$, *to dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $x(\varepsilon)$ *taki, że dla* $x > x(\varepsilon)$ *mamy*

$$M - \varepsilon \leqslant x^2 f_R(x) \leqslant M + \varepsilon,$$

dzieląc powyższą nierówność przez x^2, *otrzymujemy*

$$\frac{M-\varepsilon}{x^2} \leqslant f_R(x) \leqslant \frac{M+\varepsilon}{x^2}.$$

Całkując powyższą nierówność po przedziale $\langle x, +\infty)$, *gdzie* $x \geqslant x(\varepsilon)$, *otrzymujemy*

$$\int_x^\infty \frac{M-\varepsilon}{t^2}dt \leqslant \int_x^\infty f_R(t)dt \leqslant (1+\varepsilon) \int_x^\infty \frac{M+\varepsilon}{t^2}dt,$$

a to oznacza, że

$$\frac{M-\varepsilon}{x} \leqslant \overline{F}_R(x) \leqslant \frac{M+\varepsilon}{x}.$$

Teraz mnożąc powyższą nierówność przez x *mamy*

$$M - \varepsilon \leqslant x\overline{F}_R(x) \leqslant M + \varepsilon.$$

Stąd

$$\lim_{x\to\infty} x\overline{F}_R(x) = M.$$

Z drugiej strony, aby pokazać, że z Twierdzenia 1.3 nie musi wynikać Twierdzenie 1.4, wystarczy rozważyć rozkład dyskretny, dla którego Twierdzenie 1.3 może być stosowane. Jednakże nie możemy stosować Twierdzenia 1.4, gdyż nie mamy wówczas funkcji gęstości.

Natychmiast z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujący wniosek dotyczący zmiennych losowych o jednakowych rozkładach, który będzie nam potrzebny w następnych rozdziałach.

Wniosek 1.1 *Niech $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Pareta z funkcją gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x \geqslant 1 \end{cases} \tag{1.16}$$

z parametrem $p = 1$. Wtedy dla dowolnego $\alpha > -2$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\alpha} k}{k} R_k = \frac{1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie.}$$

1.3. Zbieżność według prawdopodobieństwa

Przedstawimy teraz DPWL ze zbieżnością według prawdopodobieństwa dla niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach, przy założeniach takich samych jak w Twierdzeniu 1.3. Zauważmy, że w poniższym twierdzeniu przy ciągu wag oraz ciągu normującym jest dodana funkcja wolno zmieniająca się L.

Twierdzenie 1.5 *Niech $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem nieujemnych, niezależnych zmiennych losowych o dystrybuantach F_{R_n} takich, że $\overline{F}_{R_n}/\overline{F}_R \to 1$ jednostajnie na przedziale $\langle x_0, \infty)$, dla pewnego $x_0 \geqslant 0$, gdy $n \to \infty$, gdzie F_R jest dystrybuantą pewnej dodatniej zmiennej losowej R oraz taką, że $x\overline{F}_R(x) \to M > 0$, gdy $x \to \infty$. Wtedy dla dowolnego $\alpha > -1$ oraz dla dowolnej wolno zmieniającej się funkcji L otrzymujemy*

$$\frac{1}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} L(k) R_k \xrightarrow{P} \frac{M}{\alpha+1}, \text{ gdy } n \to \infty,$$

gdzie $a_n = n^{\alpha} L(n)$, $b_n = n^{\alpha+1} L(n) \lg n$.

Dowód. Niech $a_n = n^{\alpha} L(n)$ oraz $b_n = n^{\alpha+1} L(n) \lg n$. W dowodzie skorzystamy z Twierdzenia A.7. Na mocy Twierdzenia A.3 otrzymujemy, że

$$\frac{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} a_k}{b_n} \leqslant \frac{n^{\alpha} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} L(k)}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \to 0,$$

gdy $n \to \infty$, dlatego n_0 z oszacowania (1.10) może być dodatkowo wybrane w taki sposób, że $\frac{b_n}{a_k} \geqslant x_1(\varepsilon)$ dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz $n \geqslant n_0$.
Na początku pokażemy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(R_k > \frac{b_n}{a_k}\right) \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Z faktu, że $b_n \to \infty$, dostajemy, że $\sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbb{P}\left(R_k > \frac{b_n}{a_k}\right) \to 0$. Z twierdzenia Karamaty w wersji dla ciągów (Twierdzenie A.2) otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} L(k)}{n^{\alpha+1} L(n)} = \frac{1}{\alpha+1}. \tag{1.17}$$

Dlatego z (1.10) dostajemy, że

$$\sum_{k=n_0}^{n} \mathbb{P}\left(R_k > \frac{b_n}{a_k}\right) = \sum_{k=n_0}^{n} \overline{F}_{R_k}\left(\frac{b_n}{a_k}\right) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)}{b_n} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$
$$= \frac{(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} L(k)}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \to 0.$$

Teraz pokażemy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}\left(\frac{a_k R_k}{b_n} \mathbb{I}\left(\frac{a_k R_k}{b_n} \leqslant 1\right)\right) \to 0, \text{gdy } n \to \infty.$$

Zauważmy, że dla stałej $k \leqslant n_0 - 1$ zmienne losowe

$$\frac{a_k R_k}{b_n} \mathbb{I}\left(\frac{a_k R_k}{b_n} \leqslant 1\right)$$

są ograniczone przez 1 oraz prawie pewnie dążą do 0, gdy $n \to \infty$. Stąd z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy, że

$$\mathbb{E}\left(\frac{a_k R_k}{b_n}\right)^2 \mathbb{I}\left(\frac{a_k R_k}{b_n} \leqslant 1\right) \to 0. \tag{1.18}$$

Zatem

$$\sum_{k=1}^{n_0-1} \operatorname{Var}\left(\frac{a_k R_k}{b_n} \mathbb{I}\left(\frac{a_k R_k}{b_n} \leqslant 1\right)\right) \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Ponadto z (1.10) dostajemy, że

$$\frac{\sum_{k=n_0}^{n} a_k^2 \mathbb{E} R_k^2 \mathbb{I}(R_k \leqslant b_n/a_k)}{b_n^2}$$
$$\leqslant \frac{2}{b_n^2} \sum_{k=n_0}^{n} a_k^2 \left(\int_0^{x_1(\varepsilon)} t\overline{F}_{R_k}(t)dt + \int_{x_1(\varepsilon)}^{b_n/a_k} t\overline{F}_{R_k}(t)dt\right)$$
$$\leqslant \frac{2}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left[(x_1(\varepsilon))^2 + (b_n/a_k - x_1(\varepsilon))(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)\right]$$
$$\leqslant C\left(\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \to 0.$$

Zatem z (1.17) otrzymujemy (1.18). Teraz wystarczy pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k\mathbb{E}R_k\mathbb{I}(R_k\leqslant b_n/a_k)=\frac{M}{\alpha+1}. \tag{1.19}$$

Z tego samego powodu, co wcześniej

$$\sum_{k=1}^{n_0-1}\mathbb{E}\left(\frac{a_kR_k}{b_n}\mathbb{I}\left(\frac{a_kR_k}{b_n}\leqslant 1\right)\right)\to 0,\ \text{gdy } n\to\infty.$$

Dla $k\geqslant n_0$ mamy

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathbb{E}R_k\mathbb{I}(R_k\leqslant b_n/a_k)}{b_n}\\
&\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k\left(\int_0^{x_1(\varepsilon)}\overline{F}_{R_k}(t)dt+\int_{x_1(\varepsilon)}^{b_n/a_k}\overline{F}_{R_k}(t)dt\right)\\
&\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k\left[(x_1(\varepsilon))+(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)(\lg(b_n/a_k)-x_1(\varepsilon))\right]
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k=n_0}^{n} a_k\mathbb{E}R_k\mathbb{I}(R_k\leqslant b_n/a_k)}{b_n}\\
&=\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k\left(-\frac{b_n}{a_k}\overline{F}\left(\frac{b_n}{a_k}\right)+\int_0^{x_1(\varepsilon)}\overline{F}_{R_k}(t)dt+\int_{x_1(\varepsilon)}^{b_n/a_k}\overline{F}_{R_k}(t)dt\right)\\
&\geqslant \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k\left[-(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)+(1-\varepsilon)(M-\varepsilon)(\lg(b_n/a_k)-x_1(\varepsilon))\right].
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k\to 0$ oraz

$$\lg(b_n/a_k)=(\alpha+1)\lg n+\lg L(n)+\lg\lg n-\alpha\lg k-\lg L(k).$$

Musimy zatem zbadać pięć składników z $\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n}\lg\left(b_n/a_k\right)$. Z (1.17) oraz z własności funkcji wolno zmieniającej się mamy

$$\frac{(\alpha+1)\lg n}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k=\frac{(\alpha+1)\lg n}{n^{\alpha+1}L(n)\lg n}\sum_{k=n_0}^{n}k^{\alpha}L(k)\to 1,$$

$$\frac{\lg L(n)}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k=\frac{\lg L(n)}{n^{\alpha+1}L(n)\lg n}\sum_{k=n_0}^{n}k^{\alpha}L(k)\to 0,$$

$$\frac{\lg\lg n}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k=\frac{\lg\lg n}{n^{\alpha+1}L(n)\lg n}\sum_{k=n_0}^{n}k^{\alpha}L(k)\to 0,$$

$$\frac{\alpha}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k\lg k=\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}L(n)\lg n}\sum_{k=n_0}^{n}k^{\alpha}L(k)\lg k\to\frac{\alpha}{\alpha+1}$$

oraz wreszcie

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=n_0}^{n} a_k \lg L(k)}{b_n} &= \frac{\sum_{k=n_0}^{n} k^\alpha L(k) \lg L(k)}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \\ &= \frac{\lg L(n)}{\lg n} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} k^\alpha L(k) \lg L(k)}{n^{\alpha+1} L(n) \lg L(n)} \to 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathbb{E} R_k \mathbb{I}(R_k \leqslant b_n/a_k) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(M+\varepsilon)}{\alpha+1}$$

oraz

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathbb{E} R_k \mathbb{I}(R_k \leqslant b_n/a_k) \geqslant \frac{(1-\varepsilon)(M-\varepsilon)}{\alpha+1}.$$

Z faktu, że ε było wybrane dowolnie otrzymujemy (1.19). ■

1.4. DPWL dla zależnych zmiennych losowych

W tym podrozdziale zajmiemy się DPWL dla zależnych zmiennych losowych. Założenie niezależności zmiennych losowych zostało złagodzone przez Etemadiego [15] oraz przez Honga i Parka [20] do niezależności parami zmiennych losowych w przypadku MPWL. Adler oraz Matuła w [10] badali DPWL oraz nie robili żadnych szczególnych założeń dotyczących zależności zmiennych losowych. Zamiast tego korzystali z następujących warunków. Pierwszy z nich jest powiązany z drugim lematem Borela–Cantelliego.

Założenie 1.1 *Niech $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa Y, która spełnia następujące założenia. Dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y| > b_n) = \infty,$$

to

$$\mathbb{P}(\limsup\{|Y_n| > b_n\}) = \mathbb{P}(|Y_n| > b_n,\ i.o) = 1.$$

Następne założenie jest powiązane z tak zwanym drugim rodzajem nierówności Kolmogorova dla momentów.

Założenie 1.2 *Niech $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem scentrowanych całkowalnych z kwadratem zmiennych losowych takich, że*

$$\mathbb{P}\left(\max_{m\leqslant n\leqslant M} |S_n - S_m| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{k=m}^{M} \operatorname{Var}(Y_k)$$

dla pewnego $C > 0$, każdego $0 \leqslant m \leqslant M$, gdzie $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $Y_0 = 0$ oraz $S_0 = 0$.

Założenie 1.3 *Będziemy mówić, że ciąg* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zmiennych losowych ma jednostajnie równoważne ogony z ogonami zmiennej losowej* X*, jeśli*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\mathbb{P}(X_n < -x)}{\mathbb{P}(X < -x)} - 1\right| \to 0, \quad x \to \infty,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\mathbb{P}(X_n > x)}{\mathbb{P}(X > x)} - 1\right| \to 0, \quad x \to \infty,$$

gdzie $\mathbb{P}(X > x) = 0$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbb{P}(X_n > x) = 0$*, jak również* $\mathbb{P}(X < -x) = 0$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbb{P}(X_n < -x) = 0$*. W tych przypadkach przyjmujemy, że* $"0/0" = 1$*.*

W tym podrozdziale powyższe założenie spróbujemy zastąpić następującym warunkiem.

Założenie 1.4 *Załóżmy, że dla pewnego* $x_0 > 0$ *mamy*

$$\frac{\overline{F}_{X_n}(x)}{\overline{F}_X(x)} \to 1$$

jednostajnie na przedziale $\langle x_0, \infty)$ *oraz*

$$\frac{F_{X_n}(x)}{F_X(x)} \to 1,$$

jednostajnie na przedziale $(-\infty, -x_0\rangle$*, gdzie* F_X *jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej* X*.*

Przedstawimy teraz przykład, który pokazuje, że z Założenia 1.3 nie musi wynikać Założenie 1.4.

Przykład 1.1 *Niech dany będzie ciąg niezależnych zmiennych losowych* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *taki, że*

$$\overline{F}_{X_1}(x) = e^{-x}\mathbb{I}(x \geqslant 1)$$

oraz dla $n \geqslant 2$ *mamy*

$$\overline{F}_{X_n}(x) = \frac{1}{x}\mathbb{I}(x \geqslant 1).$$

Ponadto, niech dana będzie zmienna losowa X *o funkcji przeżycia*

$$\overline{F}_X(x) = \frac{1}{x}\mathbb{I}(x \geqslant 1).$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{F}_{X_n}(x)}{\overline{F}_X(x)} = 1$$

jednostajnie na przedziale $\langle 1,\infty)$, czyli Założenie 1.3 jest spełnione. Jednakże Założenie 1.4 nie jest spełnione, gdyż

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\mathbb{P}(X_n > x)}{\mathbb{P}(X > x)} - 1\right| = \left|\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} - 1\right| \to 1,$$

gdy $x\to\infty$.

Na początku załóżmy, że

$$\mathbb{E}|X| < \infty \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}X = 0.$$

Tak jak w podrozdziale 1.1 zdefiniujmy funkcje

$$\mu(x) = \int_x^\infty \mathbb{P}(|X| > t)dt.$$

oraz ciąg

$$c_n = n\mu(c_n)\log(c_n + e).$$

Dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej Y oraz $x > 0$ mamy następujący wzór

$$\mathbb{E}Y\mathbb{I}[Y > x] = x\mathbb{P}(Y > x) + \int_x^\infty \mathbb{P}(Y > t)dt,$$

w konsekwencji dla $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > x] &= x\mathbb{P}(X^+ > x) + \int_x^\infty \mathbb{P}(X^+ > t)dt\\ &= x\mathbb{P}(X > x) + \int_x^\infty \mathbb{P}(X > t)dt\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^-\mathbb{I}[X^- > x] &= x\mathbb{P}(X^- > x) + \int_x^\infty \mathbb{P}(X^- > t)dt\\ &= x\mathbb{P}(-X > x) + \int_x^\infty \mathbb{P}(-X > t)dt.\end{aligned}$$

Dodatkowo przy założeniu, że $\mathbb{E}X = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X\mathbb{I}[|X| \leqslant x] &= -\mathbb{E}X\mathbb{I}[|X| > x]\\ &= -\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > x] + \mathbb{E}X^-\mathbb{I}[X^- > x].\end{aligned}$$

Lemat 1.1 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takim że, Założenie 1.4 jest spełnione ze zmienną losową X oraz niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(X_n > c_n)}{\mathbb{P}(X > c_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(X_n < -c_n)}{\mathbb{P}(X < -c_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(|X_n| > c_n)}{\mathbb{P}(|X| > c_n)} = 1,$$

w konsekwencji $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|>c_n)<\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|>c_n)<\infty$. *Jeśli ponadto* $\mathbb{E}X=0$ *oraz (1.4) jest spełnione, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n|\leqslant c_n]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>c_n]}=c-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n|\leqslant c_n]}{\mathbb{E}X\mathbb{I}[|X|\leqslant c_n]}=1$$

oraz w konsekwencji

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n|\leqslant c_n]}{\overline{\mu}(c_n)}=\frac{c-1}{c+1}.$$

Dowód. Z naszych założeń wynika, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $x(\varepsilon)$ oraz n_0 takie, że dla dowolnego $x\geqslant x(\varepsilon)$ oraz dowolnego $n\geqslant n_0$ mamy

$$\left|\frac{F_{X_n}(-x)}{F_X(-x)}-1\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{\overline{F}_{X_n}(x)}{\overline{F}_X(x)}-1\right|<\varepsilon,$$

$$c-\varepsilon<\frac{\mathbb{E}X^-\mathbb{I}[X^->x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>x]}<c+\varepsilon.$$

Stąd

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\overline{F}_X(x)<\quad&\overline{F}_{X_n}(x)\quad<(1+\varepsilon)\overline{F}_X(x),\\ (1-\varepsilon)F_X(-x)<\quad&F_{X_n}(-x)\quad<(1+\varepsilon)F_X(-x).\end{aligned}\tag{1.20}$$

Zatem dla $x>x(\varepsilon)$ oraz $n>n_0$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}X_n^+\mathbb{I}[X_n^+>x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>x]}&\geqslant\frac{x(1-\varepsilon)\overline{F}_X(x)+(1-\varepsilon)\int_x^\infty\overline{F}_X(t)dt}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>x]}\\&=1-\varepsilon\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}X_n^-\mathbb{I}[X_n^->x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>x]}&=\frac{x\mathbb{P}(X_n<-x)+\int_x^\infty\mathbb{P}(X_n<-t)dt}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>x]}\\&\leqslant\frac{x(1+\varepsilon)\overline{F}_X(x)+(1+\varepsilon)\int_x^\infty\overline{F}_X(t)dt}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>x]}\\&=\frac{(1+\varepsilon)\mathbb{E}X^-\mathbb{I}[X^->x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+>x]}=(1+\varepsilon)(M+\varepsilon).\end{aligned}$$

Stąd dla $x > x(\varepsilon)$ oraz $n \geqslant n_0$ mamy

$$\frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > x]} \leqslant -1 + \varepsilon + (1+\varepsilon)(c+\varepsilon).$$

Więc dla dowolnego $c_n \to \infty$ mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > c_n]} \leqslant c - 1.$$

Podobnie możemy pokazać, że

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > c_n]} \geqslant c - 1.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > c_n]} = c - 1.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\mathbb{E}X\mathbb{I}[|X| \leqslant x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > x]} = \frac{-\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > x] + \mathbb{E}X^-\mathbb{I}[X^- > x]}{\mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ > x]} = c - 1.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n]}{\mathbb{E}X\mathbb{I}[|X| \leqslant c_n]} = 1.$$

W [2] zostało pokazane, że $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E}|X|\mathbb{I}[|X|\leqslant x]}{\mu(x)} = \frac{c-1}{c+1}$, w konsekwencji otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n]}{\mu(c_n)} = \frac{c-1}{c+1}.$$

■

Zdefiniujmy teraz ciąg normujący

$$b_n = (\log n)^b,$$

dla pewnego $b > 0$ oraz

$$a_n = \frac{b_n}{c_n},$$

z c_n zdefiniowanym wcześniej.

Twierdzenie 1.6 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych spełniających Założenie 1.3 ze zmienną losową X, dla której spełniony jest warunek (1.1). Ponadto załóżmy, że dla dowolnych niemalejących oraz ograniczonych funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ciąg $Y_n = f_n(X_n) - \mathbb{E}f_n(X_n)$ spełnia Założenie 1.2. Jeśli $\mathbb{E}|X| < \infty$ oraz $\mathbb{E}X = 0$ oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > c_n) < \infty, \tag{1.21}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k = \frac{c-1}{b(c+1)} \quad \textit{prawie pewnie.}$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcję $f_k(x)$ jako monotoniczne uciętą funkcję $f(x) \equiv x$ w następujący sposób

$$f_k(x) = \begin{cases} -c_k, & x < -c_k \\ x, & |x| \leqslant c_k \\ c_k, & x > c_k \end{cases}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k(f_k(X_k) - \mathbb{E}f_k(X_k)) \\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \mathbb{I}(|X_k| > c_k) + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \mathbb{I}(X_k < -c_k) + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \mathbb{I}(X_k > c_k) \\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{P}(X_k > c_k) - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{P}(X_k < -c_k) \\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}X_k \mathbb{I}(|X_k| \leqslant c_k) \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned}$$

Aby pokazać, że $A_1 \to 0$ prawie pewnie, gdy $n \to \infty$, skorzystamy z Twierdzenia A.5 oraz lematu Kroneckera (Lemat A.2). Zatem wystarczy wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var}\left(\frac{f_n(X_n)}{c_n}\right) < \infty.$$

Dodatkowo n_0 może być wybrane w taki sposób, że dla $n \geqslant n_0$ mamy $c_n \geqslant x_1(\varepsilon) = \max(x_0,\ x(\varepsilon))$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var}\left(\frac{f_n(X_n)}{c_n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(f_n(X_n))^2}{c_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 \mathbb{P}(|X_n| > c_n)}{c_n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 \mathbb{P}(|X_n| > c_n)}{c_n^2}.$$

Z (1.20) oraz (1.21) mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > c_n) &= \sum_{n=n_0}^{\infty} (\overline{F}_{X_n}(c_n) + F_{X_n}(-c_n)) \\
&\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} (\overline{F}_X(c_n) + F_X(-c_n)) \\
&= (1+\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > c_n) < \infty.
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X_n^2 \mathbb{I}(|X_n| \leqslant c_n)}{c_n^2} \leqslant 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} \int_0^{c_n} t\mathbb{P}(|X_n| > t)dt$$
$$= 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} \left(\int_0^{x_1(\varepsilon)} t\mathbb{P}(|X_n| > t)dt + \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} t\mathbb{P}(|X_n| > t)dt \right)$$
$$\leqslant 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} \left(x_1^2(\varepsilon) + (1+\varepsilon) \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} t\mathbb{P}(|X| > t)dt \right)$$
$$\leqslant 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} \left(x_1^2(\varepsilon) + B(1+\varepsilon) \int_{x_1(\varepsilon)}^{c_n} L(t)dt \right).$$

Z twierdzenia Karamaty (Twierdzenie A.1) mamy $\frac{\int_0^x L(t)dt}{xL(x)}$, gdy $x \to \infty$, więc istnieje $B_1 > 0$ takie, że $\frac{\int_0^{c_n} L(t)dt}{c_n L(c_n)} < B_1$. Stąd

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X_n^2 \mathbb{I}(|X_n| \leqslant c_n)}{c_n^2} \leqslant 2BB_1(1+\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{L(c_n)}{c_n} \leqslant 2B^2B_1(1+\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > c_n) < \infty.$$

Prawie pewna zbieżność $A_2 \to 0$, gdy $n \to \infty$, wynika z pierwszego lematu Borela–Cantelliego, co jest konsekwencją Lematu 1.1 oraz (1.21). Z (1.21) wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > c_n) < \infty$ jest równoważny $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X < -c_n) < \infty$. Stąd z lematu Kroneckera dostajemy, że $A_3 \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Teraz wystarczy zbadać $A_4 = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}X_k \mathbb{I}(|X_k| \leqslant c_k)$. Z (1.12), (1.2) oraz z Lematu 1.1 i Lematu A.1 otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} A_4 = \frac{c-1}{c+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(c_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{c-1}{b(c+1)}.$$

■

Teraz załóżmy, że

$$\mathbb{E}|X| = \infty.$$

Tak samo jak w podrozdziale 1.1 zdefiniujmy funkcję

$$\overline{\mu}(x) = \int_0^x \mathbb{P}(|X| > t)dt = \mathbb{E}|X|\mathbb{I}[|X| \leqslant x] + x\mathbb{P}(|X| > x)$$

oraz ciąg

$$c_n = n\overline{\mu}(c_n)\log(c_n + e).$$

Lemat 1.2 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takim, że Założenie 1.4 jest spełnione z zmienną losową X taką, że $\mathbb{E}X = \infty$ oraz spełnia (1.8). Jeśli $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n \mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n]}{\overline{\mu}(c_n)} = \frac{1-\overline{c}}{1+\overline{c}}.$$

Dowód. W pracy [2] zostało pokazane, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E}|X|\mathbb{I}[|X| \leqslant x]}{\overline{\mu}(x)} = \frac{1-\overline{c}}{1+\overline{c}}.$$

Zatem wystarczy pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n] - \mathbb{E}X\mathbb{I}[|X| \leqslant c_n]}{\overline{\mu}(c_n)} = 0.$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, wybierany $x(\varepsilon)$ tak jak w dowodzie Lematu 1.1. Wtedy dla $x \geqslant x(\varepsilon)$ oraz dla dowolnego $n \geqslant n_0$ otrzymujemy następujące górne ograniczenie

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant x] - \mathbb{E}X\mathbb{I}[|X| \leqslant x] \\
&= \mathbb{E}X_n^+\mathbb{I}[X_n^+ \leqslant x] - \mathbb{E}X_n^-\mathbb{I}[X_n^- \leqslant x] - \mathbb{E}X^+\mathbb{I}[X^+ \leqslant x] + \mathbb{E}X^-\mathbb{I}[X^- \leqslant x] \\
&= -x\mathbb{P}(X_n^+ > x) + \int_0^x \mathbb{P}(X_n^+ > t)dt + x\mathbb{P}(X_n^- > x) - \int_0^x \mathbb{P}(X_n^- > t)dt \\
&+ x\mathbb{P}(X^+ > x) + \int_0^x \mathbb{P}(X^+ > t)dt + x\mathbb{P}(X^- > x) - \int_0^x \mathbb{P}(X^- > t)dt \\
&\leqslant -(1-\varepsilon)x\mathbb{P}(X > x) + x\mathbb{P}(X > x) + (1+\varepsilon)x\mathbb{P}(X < -x) - x\mathbb{P}(X < -x) \\
&+ \int_0^{x(\varepsilon)} \mathbb{P}(X_n > t)dt + \int_{x(\varepsilon)}^x \mathbb{P}(X_n > t)dt - \int_0^x \mathbb{P}(X < -t)dt \\
&- \int_0^{x(\varepsilon)} \mathbb{P}(X_n < -t)dt - \int_{x(\varepsilon)}^x \mathbb{P}(X_n < -t) + \int_0^x \mathbb{P}(X < -t)dt \\
&\leqslant \varepsilon x\mathbb{P}(|X| > x) \\
&+ x(\varepsilon) + (1+\varepsilon)\int_0^x \mathbb{P}(X > t)dt - \int_0^x \mathbb{P}(X > t)dt \\
&- (1-\varepsilon)\int_{x(\varepsilon)}^x \mathbb{P}(X < -t)dt + \int_0^x \mathbb{P}(X < -t)dt \\
&= \varepsilon x\mathbb{P}(|X| > x) + x(\varepsilon) + \varepsilon\int_0^x \mathbb{P}(X > t)dt \\
&- (1-\varepsilon)\int_0^x \mathbb{P}(X < -t)dt + (1-\varepsilon)\int_0^{x(\varepsilon)} \mathbb{P}(X < -t)dt + \int_0^x \mathbb{P}(X < -t)dt \\
&\leqslant \varepsilon x\mathbb{P}(|X| > x) + (2-\varepsilon)x(\varepsilon) + \varepsilon\int_0^x \mathbb{P}(|X| > t)dt.
\end{aligned}$$

Przy naszych założeniach w [2] zostało pokazane, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\mathbb{P}(|X| > x)}{\overline{\mu}(x)} = 0.$$

Ponadto z faktu, że $\overline{\mu}(c_n) \to \infty$, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n] - \mathbb{E}X\mathbb{I}[|X| \leqslant c_n]}{\overline{\mu}(c_n)} \leqslant \varepsilon.$$

Podobnie możemy pokazać, że $\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n|\leqslant c_n]-\mathbb{E}X\mathbb{I}[|X|\leqslant c_n]}{\overline{\mu}(c_n)} \geqslant \varepsilon$. ■

Podobnie jak wcześniej definiujemy ciagi $b_n = \log^b n$ dla pewnego $b > 0$ oraz $a_n = b_n/c_n$. Z powyższymi wagami otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.7 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych spełniających Założenie 1.1 ze zmienną losową X, dla której warunek (1.1) jest spełniony. Załóżmy, że dla dowolnych niemalejących oraz ograniczonych funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciąg $Y_n = f_n(X_n) - \mathbb{E}f_n(X_n)$ spełnia Założenie 1.2. Jeśli $\mathbb{E}|X| = \infty$ oraz warunek (1.21) jest spełniony, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = \frac{1-\overline{c}}{b(1+\overline{c})} \quad \textit{prawie pewnie.}$$

Dowód. Dowód jest taki sam jak we wcześniejszym twierdzeniu. Dzielimy naszą sumę w ten sam sposób oraz wnioskujemy, że A_1, A_2, $A_3 \to 0$. Do badania zbieżności składnika A_4 korzystamy z Lematu 1.2, gdzie było pokazane, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n\mathbb{I}[|X_n| \leqslant c_n]}{\overline{\mu}(c_n)} = \frac{1-\overline{c}}{1+\overline{c}}.$$

■

Rozdział 2

DPWL dla ilorazów niezależnych zmiennych losowych

2.1. Zbieżność prawie pewna

W tym podrozdziale uogólnimy wynik z [6]. W pracy tej Adler rozważał ilorazy zmiennych losowych o tych samych rozkładach jednostajnych. W [25] rozszerzyliśmy ten wynik na zmienne losowe spełniające łagodny warunek – zwany na potrzeby wspomnianego artykułu „subeksponencjalność”. Jednakże w dalszej części pokażemy, jak odrzucić założenie „subeksponencjalności”. Podamy sporo przykładów, aby pokazać różnorodną stosowalność naszego twierdzenia.

Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz niech będą niezależne między sobą. Ponadto niech X_n oraz Y_n mają te same rozkłady co nieujemna zmienna losowa ξ, która przyjmuje wartości na przedziale $\langle 0, +\infty)$ oraz ma ciągłą funkcję gęstości $f(x)$. Zakładamy ponadto, że $f(x)$ jest „subeksponencjalna” w tym sensie, że

$$f(x) \leqslant A\exp(-\lambda x), \quad x \in \langle 0, +\infty) \tag{2.1}$$

dla pewnych stałych $A,\ \lambda > 0$. Oczywiście z powyższego warunku wynika całkowalność zmiennej losowej ξ. W dalszej części będziemy rozważać iloraz $R = X/Y$, który oznacza iloraz dwóch niezależnych zmiennych losowych o tej samej funkcji gęstości $f(x)$. Wtedy dystrybuanta ilorazu $R = X/Y$ jest dana wzorem

$$F_R(t) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} < t\right) = \mathbb{P}\left(X < tY\right) = \int_0^\infty f(y)\left(\int_0^{ty} f(x)dx\right)dy.$$

Różniczkując względem t obie strony równania, mamy

$$f_R(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty f(y)\left(\int_0^{ty} f(x)dx\right)dy\right).$$

Stąd na mocy twierdzenia Leibniza (o różniczkowaniu pod znakiem całki) otrzymujemy

$$f_R(t) = \int_0^\infty f(y)\frac{d}{dt}\left(\int_0^{ty} f(x)dx\right)dy = \int_0^\infty f(y)f(ty)ydy. \tag{2.2}$$

Teraz zauważmy, że jeśli warunek (2.1) jest spełniony, to funkcję gęstości ilorazu R możemy oszacować w następujący sposób :

$$f_R(t) = \int_0^\infty yf(ty)f(y)dy \leqslant A^2\int_0^\infty y\exp(-\lambda ty)\exp(-\lambda y)dy = \frac{A^2}{\lambda^2(1+t)^2}.$$

Stąd funkcja przeżycia zmiennej losowej R spełnia następującą nierówność

$$\overline{F}_R(x) = 1 - F_R(x) = \mathbb{P}\left(R \geqslant x\right) \leqslant \int_x^\infty \frac{A^2}{\lambda^2(1+t)^2}dt = \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2\frac{1}{1+x} \tag{2.3}$$

dla każdego $x \in \langle 0, +\infty)$.

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, założenie „subeksponencjalności” możemy odrzucić, jednakże przedstawimy poniższe twierdzenie ze względu na ciekawy sposób jego dowodzenia.

Twierdzenie 2.1 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz niech będą niezależne między sobą. Ponadto niech X_n oraz Y_n mają te same rozkłady co zmienna losowa ξ, która przyjmuje wartości na przedziale $\langle 0, +\infty)$ oraz ma ciągłą funkcję gęstości $f(x)$, która spełnia założenie (2.1). Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lg^{\alpha+2} n}\sum_{k=1}^n \frac{\lg^\alpha k}{k}R_k = \frac{f(0)\mathbb{E}\xi}{\alpha+2} \quad \textit{prawie pewnie}$$

dla każdego $\alpha > -2$, gdzie $R_k = X_k/Y_k$.

Dowód. Niech $a_n = \left(\lg^\alpha n\right)/n$, $b_n = \lg^{\alpha+2} n$ and $c_n = b_n/a_n = n\lg^2 n$. Wykorzystamy standardową technikę podzielenia naszej sumy ważonej na trzy części.

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_kR_k &= \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_k\left[R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right) - \mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_kR_k\mathbb{I}\left(R_k > c_k\right) \\ &\quad + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_k\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right).\end{aligned}$$

Tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 1.4, aby pokazać, że pierwszy składnik jest zbieżny do zera, skorzystamy z twierdzenia o dwóch szeregach (Twierdzenie A.6) z lematu Kroneckera (Lemat A.2) oraz z poniższego oszacowania

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-2}\mathbb{E}R_n^2\mathbb{I}\left(R_n \leqslant c_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-2}\int_0^{c_n} t^2 f_R(t)dt \\
&\leqslant \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-2}\int_0^{c_n} \frac{t^2}{(1+t)^2}dt \\
&\leqslant \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} = \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lg^2 n} < \infty.
\end{aligned}$$

Teraz z oszacowania (2.3) mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(R_n > c_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{F}_R(c_n) \leqslant \left(\frac{A}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+c_n} < \infty.$$

Stąd na mocy lematu Borela–Cantelliego drugi składnik naszej sumy jest prawie pewnie zbieżny do 0. Aby policzyć trzeci składnik naszej sumy, podzielimy nieujemną oś rzeczywistą na przedziały

$$B_1 = \left\langle 0, \frac{\log\log k}{k\log^2 k}\right\rangle,\ B_2 = \left\langle \frac{\log\log k}{k\log^2 k}, \frac{\log\log k}{\log^2 k}\right\rangle,\ B_3 = \left\langle \frac{\log\log k}{\log^2 k}, 1\right\rangle,\ B_4 = \left\langle 1, \infty\right),$$

gdzie $k \geqslant 16 > e^e$, tak aby wszystkie logarytmy były dodatnie. Wtedy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right) &= \mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_1\right) + \mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_2\right) \\
&+\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_3\right) + \mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_4\right).
\end{aligned}$$

Pokażemy, że jeśli sumę powyższych składników znormalizujemy przez $\log k$, to zbieżność jest zdeterminowana przez składnik B_2, ponieważ znormalizowane składniki B_1, B_3 oraz B_4 są zbieżne do 0. Mamy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\log k}\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_1\right) \\
\leqslant\ & \frac{c_k}{\log k}\mathbb{P}\left(R_k \leqslant c_k, Y_k \in B_1\right) \leqslant \frac{c_k}{\log k}A^2\frac{\log\log k}{k\log^2 k}\cdot\log\log k \\
=\ & \frac{A^2\left(\log\log k\right)^2}{\log k} \to 0, \quad \text{gdy } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Dla następnego składnika mamy następujące ograniczenia:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\log k}\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_2\right)\\
\geqslant\ & \frac{1}{\log k}\int_0^{\log\log k}\int_{\frac{\log\log k}{k\log^2 k}}^{\frac{\log\log k}{\log^2 k}}\frac{x}{y}f(x)f(y)dydx\\
\geqslant\ & \frac{1}{\log k}\int_0^{\log\log k}xf(x)dx\cdot\min_{y\in B_2}f(y)\cdot\int_{\frac{\log\log k}{k\log^2 k}}^{\frac{\log\log k}{\log^2 k}}\frac{dy}{y}\\
=\ & \int_0^{\log\log k}xf(x)dx\cdot\min_{y\in B_2}f(y)\to\mathbb{E}\xi\cdot f(0),\quad \text{gdy } k\to\infty
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\log k}\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_2\right)\\
\leqslant\ & \frac{1}{\log k}\int_0^{\infty}\int_{\frac{\log\log k}{k\log^2 k}}^{\frac{\log\log k}{\log^2 k}}\frac{x}{y}f(x)f(y)dydx\\
\leqslant\ & \frac{1}{\log k}\int_0^{\infty}xf(x)dx\cdot\max_{y\in B_2}f(y)\cdot\int_{\frac{\log\log k}{k\log^2 k}}^{\frac{\log\log k}{\log^2 k}}\frac{dy}{y}\\
=\ & \mathbb{E}\xi\cdot\max_{y\in B_2}f(y)\to\mathbb{E}\xi\cdot f(0),\quad \text{gdy } k\to\infty.
\end{aligned}
$$

Trzeci składnik możemy oszacować w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\log k}\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_3\right)\\
\leqslant\ & \frac{1}{\log k}\int_0^{\infty}\int_{\frac{\log\log k}{\log^2 k}}^{1}\frac{x}{y}f(x)f(y)dydx \leqslant \frac{1}{\log k}\cdot\mathbb{E}\xi\cdot A\cdot\log\left(\frac{\log^2 k}{\log\log k}\right)\to 0,\quad \text{gdy } k\to\infty
\end{aligned}
$$

oraz ostatni z nich następująco:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\log k}\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right)\mathbb{I}\left(Y_k \in B_4\right)\\
\leqslant\ & \frac{1}{\log k}\int_0^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{x}{y}f(x)f(y)dydx \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi\cdot}{\log k}\int_1^{\infty}\frac{f(y)}{y}dy \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{\log k}\to 0,\quad \text{gdy } k\to\infty.
\end{aligned}
$$

Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\log k}\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right) = \mathbb{E}\xi\cdot f(0).$$

Stąd z tego samego powodu, co w dowodzie Twierdzenia 1.3 otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbb{E}R_k\mathbb{I}\left(R_k \leqslant c_k\right) = \frac{f(0)\mathbb{E}\xi}{\alpha+2}.$$

■

Rozważymy kilka przykładów, które pokazują, że dla ilorazów nie możemy stosować mocnego prawa wielkich liczb. Jest to spowodowane faktem, że ilorazy zmiennych losowych mają często ciężkie ogony oraz są niecałkowalne (nie mają skończonej wartości oczekiwanej). Zatem z [14] wynika, że nie istnieje ciąg stałych $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n R_k \to 1$ prawie pewnie, gdy $n\to\infty$. Zatem, aby uzyskać nietrywialną zbieżność, musimy stosować dokładne prawa wielkich liczb.

Natychmiast, jako przykład do powyższego twierdzenia, dostajemy Twierdzenie 2.1 z [6].

Przykład 2.1 *Niech ξ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,p)$. Pokażemy, że R ma funkcję gęstości w postaci*

$$f_R(x)=\begin{cases} 0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{2x^2}, & x>1.\end{cases}$$

Dla $x\in[0,1]$ mamy

$$f_R(x)=\int_0^p \frac{t}{p^2}dt=\frac{1}{2}.$$

Dla $x>1$ mamy

$$f_R(x)=\int_0^{\frac{p}{x}} \frac{t}{p^2}dt=\frac{1}{2x^2}.$$

W tym przypadku mamy $\mathbb{E}\xi=\frac{p}{2}$ oraz $f(0)=\frac{1}{p}$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lg^{\alpha+2} n}\sum_{k=1}^n \frac{\lg^\alpha k}{k}R_k=\frac{1}{2(\alpha+2)} \text{ prawie pewnie.}$$

Przykład 2.2 *Niech ξ ma rozkład wykładniczy $Exp(\lambda)$ z funkcją gęstości $f(x)=\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$. Wtedy $\mathbb{E}\xi=\lambda$ oraz $f(0)=1/\lambda$. Pokażemy, że w tym przypadku R ma funkcję gęstości w postaci*

$$f_R(x)=\begin{cases} 0, & x<0\\ \frac{1}{(1+x)^2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Dla $x\geqslant 0$ mamy

$$\begin{aligned} f_R(x)&=\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{tx}{\lambda}\right)tdt\\ &=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t(1+x)}{\lambda}\right)tdt,\end{aligned}$$

podstawiając $u=\frac{t(1+x)}{\lambda}$ oraz $du=\frac{1+x}{\lambda}dt$ mamy

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty \exp(-u)\frac{u\lambda^2}{(1+x)^2}du=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\alpha} k}{k} R_k = \frac{1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie.}$$

Przykład 2.3 *Niech ξ ma rozkład modułu standardowego rozkładu normalnego (folded normal distribution). Wtedy jego funkcja gęstości jest dana wzorem $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-x^2/2)$ dla $x \geqslant 0$ oraz $\mathbb{E}\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Wykażemy, że R ma w takim przypadku rozkład modułu rozkładu Cauchy'ego (folded Cauchy distribution), tzn. jego funkcja gęstości jest dana wzorem*

$$f_R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Dla $x \geqslant 0$ mamy

$$f_R(x) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2x^2}{2}\right) tdt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-t^2\left(\frac{1+x^2}{2}\right)\right) tdt,$$

podstawiając $u = t^2\left(\frac{1+x^2}{2}\right)$ oraz $du = 2t\left(\frac{1+x^2}{2}\right) dt$ mamy

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-u) \frac{2}{1+x^2} du = \frac{2}{\pi(1+x^2)}.$$

W tym przypadku mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\alpha} k}{k} R_k = \frac{2}{\pi(\alpha+2)} \text{ prawie pewnie.}$$

W następnym przykładzie rozważymy rozkład potęgowy, dla którego nie jest spełniony warunek (2.1). Pomimo tego pokażemy, jak zastosować Twierdzenie 2.1 w tym przypadku.

Przykład 2.4 *Niech ξ ma rozkład potęgowy z funkcją gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} px^{p-1}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & \text{poza,} \end{cases} \tag{2.4}$$

gdzie $p > 0$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\alpha} k}{k} R_k^p = \frac{1}{2(\alpha+2)} \text{ prawie pewnie.} \tag{2.5}$$

Wyznaczymy teraz rozkład zmiennej losowej $Y = X^p$. Mamy

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^p < y) = \mathbb{P}\left(X < y^{\frac{1}{p}}\right) = F_X\left(y^{\frac{1}{p}}\right) = y,$$

dla $y \in (0,1)$, czyli jest to rozkład jednostajny. $(X_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(Y_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ mają rozkłady jednostajne na przedziale $(0,1)$, zatem powyższy rezultat wynika z Przykładu 2.1.

Możliwości zastosowania naszego Twierdzenia 2.1 mogą zostać rozszerzone przez następującą obserwację.

Uwaga 2.1 *W Twierdzeniu 2.1 możemy zamienić rolami X_n oraz Y_n i wtedy twierdzenie jest prawdziwe dla ciągów $(1/X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(1/Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. W szczególności odwrotnością rozkładu potęgowego jest rozkład Pareta, ponieważ*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} < y\right) = \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{y^p}\right)\mathbb{I}\left(0 < \frac{1}{y^p} \leqslant 1\right) = \left(1 - \frac{1}{y^p}\right)\mathbb{I}_{(1,+\infty)}(y). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy następujący przykład.

Przykład 2.5 *Załóżmy, że ξ ma rozkład Pareta z funkcją gęstości (1.16), gdzie $p > 0$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k^p = \frac{1}{2(\alpha+2)} \quad \textit{prawie pewnie.}$$

Korzystając z powyższych rozważań i Przykładu 2.3 dotyczącego ilorazu rozkładu normalnego, możemy skonstruować następujący przykład.

Przykład 2.6 *Niech ξ ma rozkład Lévy'ego z funkcją gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Pokażemy, że $Y = X_n^{-1/2}$ ma rozkład modułu standardowego rozkładu normalnego (folded normal distribution). Mamy

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(y^{-2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{\frac{2}{y^2}}\right) \cdot \frac{2}{y^3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-y^2/2)$$

i w konsekwencji $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)^{1/2}$, jak również $\left(\frac{Y_n}{X_n}\right)^{1/2}$ mają rozkłady moduł rozkładu Cauchy'ego. Tak jak w Przykładzie 2.3 otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k^{1/2} = \frac{2}{\pi(\alpha+2)} \quad \textit{prawie pewnie.}$$

Przykład 2.7 *Niech ξ ma rozkład Frécheta (type II extreme value) z dystrybuantą*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^p}\right), & x > 0, \end{cases}$$

gdzie $p > 0$. *Pokażemy, że* $Y = 1/X_n^p$ *ma rozkład wykładniczy z parametrem* $\lambda = 1$. *Mamy*

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X^p} < y\right) = \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{y^{\frac{1}{p}}}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{p}}}\right) = (1 - \exp(-y))\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k^p = \frac{1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie.}$$

Podobny przykład otrzymujemy dla rozkładu Weibulla.

Przykład 2.8 *Niech* ξ *ma rozkład Weibulla z dystrybuantą*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1 - \exp\left(-(cx)^\tau\right), & x > 0, \end{cases}$$

gdzie $c > 0$ *oraz* $\tau \geqslant 1$. *Wtedy* $Y = (cX_n)^\tau$ *ma rozkład wykładniczy z parametrem* $\lambda = 1$, *ponieważ*

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left((cX)^\tau < y\right) = \mathbb{P}\left(X < \frac{y^{\frac{1}{\tau}}}{c}\right) = (1 - \exp(-y))\,\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y).$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k^\tau = \frac{1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie.}$$

Większość naszych przykładów dotyczyło znanych rozkładów i było raczej łatwo znaleźć rozkłady ilorazów R_k. Zatem w tych przykładach mogliśmy skorzystać z przykładu Adlera z [2]. Rozważmy następujący przykład, dla którego raczej trudno byłoby znaleźć rozkład ilorazu R_k, ale nasze Twierdzenie 2.1 łatwo się stosuje.

Przykład 2.9 *Niech* ξ *ma rozkład z funkcją gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ 0, & \text{poza.} \end{cases}$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k = \frac{\frac{1}{2}\pi - 1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie,}$$

gdyż $f(0) = 1$ *oraz*

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^{\pi/2} x\cos x dx = (x\sin x)|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + (\cos x)|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

W ostatnim przykładzie tego podrozdziału rozważymy przypadek, kiedy nasze twierdzenie nie może być zastosowane, ale możemy posłużyć się Przykładem 2 z [2]. Rozważmy ilorazy zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego.

Przykład 2.10 *Niech X_n oraz Y_n mają rozkład Cauchy'ego z funkcją gęstości $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Pokażemy, że iloraz $R_k = \frac{|X_k|}{|Y_k|}$ ma funkcję gęstości w postaci*

$$f_R(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{4}{\pi^2}\frac{\log x}{x^2-1}, & x > 0,\ x \neq 1 \\ \frac{2}{\pi^2}, & x = 1. \end{cases}$$

Oczywiście, powyższa funkcja gęstości jest ciągła w punkcie $x = 1$, gdyż

$$\lim_{x\to 1} \frac{4}{\pi^2}\frac{\log x}{x^2-1} \overset{[H]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\pi^2}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{2}{\pi^2}.$$

Zauważmy, że rozkład ξ tzn, $|X_k|$ ma funkcję gęstości postaci $\frac{2}{\pi(1+x^2)}$, $x \geqslant 0$.
Dla $x \geqslant 0$ mamy

$$f_R(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi(1+t^2)}\frac{2}{\pi(1+t^2x^2)}tdt.$$

Stąd dla $x = 1$ mamy

$$f_R(x) = \int_0^\infty \frac{4t}{\pi^2(1+t^2)^2}dt \overset{\substack{u=1+t^2\\ du=2t\,dt}}{=} \frac{2}{\pi^2}\int_1^\infty \frac{1}{u^2}du = \frac{2}{\pi^2}$$

oraz dla $x \neq 1$ i $x > 0$ mamy

$$\begin{aligned} f_R(x) &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}dt \overset{\substack{u=t^2\\ du=2t\,dt}}{=} \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u)(1+ux^2)}du \\ &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+u} + \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}{1+ux^2}du = \frac{2}{\pi^2(x^2-1)}\int_0^\infty \frac{x^2}{1+ux^2} - \frac{1}{1+ux^2}du \\ &= \frac{2}{\pi^2(x^2-1)}\lim_{u\to\infty}\Big(\log(1+ux^2) - \log(1+u)\Big) \\ &= \frac{2}{\pi^2(x^2-1)}\lim_{u\to\infty}\log\left(\frac{1+ux^2}{1+u}\right) = \frac{4\log x}{\pi^2(x^2-1)}. \end{aligned}$$

Teraz zauważmy, że zmienna losowa ξ nie spełnia warunku (2.1). Zatem nasze Twierdzenie 2.1 dla tego przykładu nie zachodzi. Jednakże Przykład 2 z [2] działa, ponieważ

$$\frac{x\mathbb{P}(R > x)}{\log x} = \frac{4}{\pi^2}\frac{\int_x^\infty \frac{\log t}{t^2-1}dt}{x^{-1}\log x} \to \frac{4}{\pi^2}, \text{ gdy } x \to \infty$$

z reguły l'Hospitala. Stąd dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^\alpha k}{k}\left|\frac{X_k}{Y_k}\right| = \frac{2}{\pi^2(\alpha+2)} \text{ prawie pewnie.}$$

We wcześniejszych rozważaniach zakładaliśmy, że zmienna losowa ξ jest „subekspo-nencjalna" (warunek (2.1)), jednakże pokażemy, że warunek ten może zostać złagodzony do całkowalności zmiennej losowej ξ oraz tego, że funkcja gęstości zmiennej losowej ξ jest ograniczona.

Podstawiając $y = \frac{x}{t}$ we wzorze (2.2) otrzymujemy

$$f_R(t) = \int_0^\infty \frac{x}{t} f(x) f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dx}{t} = \frac{1}{t^2} \int_0^\infty x f(x) f\left(\frac{x}{t}\right) dx.$$

Stąd z Twierdzenia Lebsgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} t^2 f_R(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty x f(x) f\left(\frac{x}{t}\right) dx = f(0) \int_0^\infty x f(x) dx = \mathbb{E}\xi f(0).$$

Zatem z Twierdzenia 1.4 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, które są również niezależne między sobą oraz mają ten sam rozkład co zmienna losowa ξ, która jest całkowalna, nieujemna oraz ma funkcję gęstości f_ξ. Ponadto załóżmy, że f_ξ jest ograniczona oraz ciągła na przedziale $\langle 0, +\infty)$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^n \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k = \frac{f(0)\mathbb{E}\xi}{\alpha+2} \quad \textit{prawie pewnie}$$

dla każdego $\alpha > -2$.

W następnym przykładzie pokażemy, że z ciągłości funkcji gęstości zmiennej losowej ξ na przedziale $\langle 0, +\infty)$ nie musi wynikać, że jej funkcja gęstości jest ograniczona (więc nie możemy pominąć tego warunku we wcześniejszym twierdzeniu).

Przykład 2.11 *Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że*

$$L_n = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^{2(k-1)}}\right),$$

$$P_n = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^{2(k-1)}}\right) + \frac{1}{2^{2n}},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^{2(k-1)}}\right) + \frac{1}{2^{2n+1}},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$. Niech funckja gęstości zmiennej losowej ξ będzie dana wzorem

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \\ -2x+2, & x \in (0, \frac{1}{2},\ 1\rangle \\ 2^{3n+1}(x - L_n), & x \in \langle L_n,\ S_n\rangle,\ \textit{gdzie } n \in \mathbb{N} \\ 2^{3n+1}(P_n - x), & x \in (S_n,\ P_n\rangle,\ \textit{gdzie } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \textit{poza.} \end{cases}$$

Wykres funkcji gęstości składa się z nieskończonej liczby trójkątów równoramiennych o długości podstaw równych $\frac{1}{2^{2n}}$ i o wysokościach równych 2^n, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście funkcja gęstości zmiennej losowej ξ jest nieograniczona.

2.2. Zbieżność według prawdopodobieństwa

W tym podrozdziale pokażemy zastosowanie dokładnego prawa wielkich liczb ze zbieżnością według prawdopodobieństwa. Niech X oraz Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co zmienna losowa ξ, która jest nieujemna, całkowalna i ma funkcję gęstości f_ξ. Załóżmy, że f_ξ jest ograniczona oraz ciągła na przedziale $\langle 0, +\infty)$, w szczególności $\lim_{x\to 0^+} f_\xi(x) = f_\xi(0)$. Zauważmy, że funkcja przeżycia zmiennej losowej $R = X/Y$ jest następująca

$$\begin{aligned}\overline{F}_R(r) &= \iint\limits_{x/y \geqslant r} f_\xi(x) f_\xi(y) dx dy = \int_0^\infty \left(\int_0^{x/r} f_\xi(y) dy \right) f_\xi(x) dx \\ &\overset{\substack{s=ry \\ ds=r\,dy}}{=} \frac{1}{r} \int_0^\infty \left(\int_0^x f_\xi\left(\frac{s}{r}\right) ds \right) f_\xi(x) dx.\end{aligned}$$

Zatem z założeń dotyczących ξ otrzymujemy

$$r\overline{F}_R(r) \to \int_0^\infty \left(\int_0^x f_\xi(0) ds \right) f_\xi(x) dx = f_\xi(0)\mathbb{E}\xi.$$

Stąd natychmiast z Twierdzenia 1.5 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.3 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, które są również niezależne między sobą oraz mają ten sam rozkład co zmienna losowa ξ, która jest całkowalna, nieujemna oraz ma funkcję gęstości f_ξ. Ponadto załóżmy, że f_ξ jest ograniczona oraz ciągła na przedziale $\langle 0, +\infty)$. Wtedy dla dowolnego $\alpha > -1$ oraz dowolnej funkcji wolno zmieniającej się L otrzymujemy*

$$\frac{1}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \sum_{k=1}^n k^\alpha L(k) \frac{X_k}{Y_k} \xrightarrow{P} \frac{f_\xi(0)\mathbb{E}\xi}{\alpha+1}, \text{ gdy } n \to \infty.$$

W przypadku gdy ξ ma rozkład jednostajny na przedziale $\langle 0, p\rangle$, jako wniosek z powyższego twierdzenia, otrzymujemy Twierdzenie 2.2 z [6].

Wniosek 2.1 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych, które są również niezależne między sobą oraz mają ten sam rozkład jednostajny na przedziale $(0, p)$, wtedy*

$$\frac{1}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \sum_{k=1}^n k^\alpha L(k) \frac{X_k}{Y_k} \xrightarrow{P} \frac{1}{2(\alpha+1)}, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Innym przykładem bezpośredniego zastosowaniem Twierdzenia 1.5 jest przypadek, gdy zmienna losowa ma rozkład wykładniczy.

Wniosek 2.2 *Niech* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oraz* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych, które są również niezależne między sobą oraz mają ten sam rozkład wykładniczy* $Exp(\lambda)$ *z funkcją gęstości* $f_\xi(x) = \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{x}{\lambda})\mathbb{I}_{\langle 0,\infty)}(x)$*. Wtedy*

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}L(n)\lg n}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha L(k)\frac{X_k}{Y_k} \xrightarrow{P} \frac{1}{\alpha+1}, \text{ gdy } n\to\infty.$$

W przypadku gdy $\xi = |\mathcal{N}(0,1)|$ jest modułem standardowego rozkładu normalnego, wtedy funkcja gęstości jest dana wzorem $f_\xi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})\mathbb{I}_{\langle 0,\infty)}(x)$, tak jak w Przykładzie 2.3 oraz $\mathbb{E}\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Stąd z Twierdzenia 1.5 dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 2.3 *Niech* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oraz* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych, które są również niezależne między sobą oraz mają ten sam standardowy rozkład normalny* $\mathcal{N}(0,1)$*. Wtedy*

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}L(n)\lg n}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha L(k)\left|\frac{X_k}{Y_k}\right| \xrightarrow{P} \frac{2}{\pi(\alpha+1)}, \text{ gdy } n\to\infty.$$

Rozdział 3

DPWL dla statystyk porządkowych

W rozdziale tym przedstawimy dokładne prawa wielkich liczb dla ilorazów statystyk porządkowych.

3.1. Ilorazy najmniejszych statystyk porządkowych

Rozważmy tablicę zmiennych losowych:

$$\begin{gathered} X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,k_1} \\ \vdots \\ X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,k_n} \\ \vdots \end{gathered}$$

załóżmy, że zmienne losowe w każdym wierszu są niezależne oraz, że wiersze są niezależne między sobą. Daną tablicę będziemy oznaczać przez $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, 1\leqslant k\leqslant k_n}$. Oznaczmy przez $X_{n,(1)} = \min_{i=1,\ldots,k_n} X_{n,(i)}$ pierwszą statystykę porządkową (minimum) w $n-$tym wierszu i przez $X_{n,(2)}$ drugą statystykę porządkową. Naszym celem jest badanie ilorazów dwóch najmniejszych statystyk porządkowych

$$R_n = \frac{X_{n,(2)}}{X_{n,(1)}},$$

gdyż tylko ilorazy najmniejszych statystyk porządkowych mają przy wykorzystanych założeniach zawsze nieskończoną wartość oczekiwaną. Załóżmy teraz, że zmienne losowe w tablicy $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, 1\leqslant k\leqslant k_n}$ są dodatnie oraz mają jednakowy rozkład o funkcji gęstości

f i dystrybuancie F. Zauważmy, że $F(0)=0$. Łączny rozkład $(X_{n,(1)};X_{n,(2)})$ ma funkcję gęstości (patrz [12])

$$f(x_1,x_2)=k_n(k_n-1)\left(1-F(x_2)\right)^{k_n-2}f(x_1)f(x_2) \text{ dla } x_2>x_1.$$

W tym przypadku dystrybuanta R_n jest dana wzorem

$$\begin{aligned}
F_{R_n}(r) &= \mathbb{P}(X_{n,(2)}\leqslant rX_{n,(1)}) = \iint_{x_2\leqslant rx_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_0^\infty\left(\int_{x_1}^{rx_1}k_n(k_n-1)\left(1-F(x_2)\right)^{k_n-2}f(x_1)f(x_2)dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_0^\infty -k_n\left(1-F(x_2)\right)^{k_n-1}\Big|_{x_1}^{rx_1}f(x_1)dx_1 \\
&= \int_0^\infty k_n\left(1-F(x_1)\right)^{k_n-1}f(x_1)dx_1-k_n\int_0^\infty\left(1-F(rx_1)\right)^{k_n-1}f(x_1)dx_1 \\
&= -\left(1-F(x_1)\right)^{k_n}\Big|_0^\infty-k_n\int_0^\infty\left(1-F(rx_1)\right)^{k_n-1}f(x_1)dx_1 \\
&= 1-k_n\int_0^\infty\left(1-F(rx_1)\right)^{k_n-1}f(x_1)dx_1
\end{aligned}$$

oraz podstawiając $t=rx_1$ mamy

$$\overline{F}_{R_n}(r)=1-F_{R_n}(r)=\frac{k_n}{r}\int_0^\infty\left(1-F(t)\right)^{k_n-1}f\left(\frac{t}{r}\right)dt. \tag{3.1}$$

Dla stałej długości wierszy w tablicy $k_n=K$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie z funkcją przeżycia

$$\overline{F}_{R_n}(r)=\frac{K}{r}\int_0^\infty\left(1-F(t)\right)^{K-1}f\left(\frac{t}{r}\right)dt. \tag{3.2}$$

Przykład 3.1 *W przypadku gdy $k_n=K$, rozkłady R_n mogą być znalezione w postaci jawnej tylko dla niektórych szczególnych rozkładów. Jeśli $f(x)=\lambda^{-1}\exp(-x/\lambda)\mathbb{I}(x\geqslant 0)$ jest gęstością rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda>0$, to*

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{R_n}(r) &= \frac{K}{r}\int_0^\infty\left(1-\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right)\right)^{K-1}\left(\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{t}{r\lambda}\right)\right)dt \\
&= \frac{K}{r\lambda}\int_0^\infty\exp\left(-t\left(\frac{r(K-1)+1}{\lambda r}\right)\right)dt=\frac{K}{r\lambda}\cdot\frac{\lambda r}{(K-1)r+1} \\
&= \frac{K}{(K-1)r+1}
\end{aligned}$$

dla $r\geqslant 1$. Dla rozkładu jednostajnego na przedziale $\langle 0,p\rangle$ z funkcją gęstości $f(x)=p^{-1}\mathbb{I}_{\langle 0,p\rangle}(x)$ otrzymujemy

$$\overline{F}_{R_n}(r)=\frac{K}{r}\int_0^p\left(1-\frac{t}{p}\right)^{K-1}\cdot\frac{1}{p}dt.$$

Podstawiając teraz do powyższej całki $u = 1 - \frac{t}{p}$ *oraz* $du = -\frac{1}{p}dt$ *otrzymujemy*

$$\overline{F}_{R_n}(r) = \frac{K}{r}\int_0^1 u^{K-1}du = \frac{1}{r}$$

dla $r \geqslant 1$*. Dla rozkładu Pareta o funkcji gęstości* $f(x) = p(1+x)^{-p-1}\mathbb{I}_{\langle 0,\infty)}(x)$*. Mamy*

$$\begin{aligned}\overline{F}_{R_n}(r) &= \frac{K}{r}\int_0^\infty \left(1 - \left(1 - \frac{1}{(1+t)p}\right)\right)^{K-1} \cdot \frac{p}{(1+\frac{t}{r})^{p+1}}dt \\ &= \frac{Kp}{r}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^{p(K-1)} \cdot (1+\frac{t}{r})^{p+1}}dt.\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\overline{F}_{R_n}(r)$ *dla rozkładu Pareta nie ma jawnej postaci, ale ogon zachowuje się tak samo jak* $\overline{F}_{R_n}(r) \approx r^{-1}$*, dla* $p(K-1) > 1$*. Aby być bardziej precyzyjnym, zauważmy, że z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy*

$$\lim_{r\to\infty} r\overline{F}_{R_n}(r) = Kp\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{p(K-1)}} = \frac{Kp}{p(K-1)-1}.$$

Oczywiście rozkłady powyższych ilorazów mają nieskończoną wartość oczekiwaną. Zatem nie możemy stosować dla nich klasycznych praw wielkich liczb i dlatego będziemy w dalszej części badać dla nich sumy ważone.

Jak zauważono w [33], statystyki $R_n = \frac{X_{n,(2)}}{X_{n,(1)}}$ można uznać za miarę awarii pierwszego fragmentu jakiegoś systemu i porównywanie najmniejszych statystyk porządkowych daje nam informację o stabilności tego rozkładu. Warto wspomnieć, że przy naszych założeniach ilorazy statystyk porządkowych, innych niż najmniejszych, mają pierwszy moment skończony. Przy naszych założeniach tylko ilorazy najmniejszych statystyk porządkowych mogą mieć nieskończoną wartość oczekiwaną. Dlatego w tym przypadku nie możemy stosować mocnych praw wielkich liczb i aby uzyskać nietrywialną zbieżność, musimy badać sumy ważone. Problem ten był jak dotąd badany tylko dla szczególnych rozkładów: jednostajnego, wykładniczego oraz Pareta (patrz [3], [8], [6], [32], [33], [36]). W dalszej części tego podrozdziału pokażemy ogólne twierdzenie dotyczące prawie pewnej zbieżności sum ważonych ilorazów najmniejszych statystyk porządkowych dla przypadku, gdy $k_n = K$ oraz $k_n \to \infty$. Zauważmy, że rozkłady ilorazów najmniejszych statystyk porządkowych, przy stałej długości wierszy w tablicy mają jednakowy rozkład w każdym wierszu. Zatem w przypadku gdy $k_n = K$ możemy skorzystać z wyniku Adlera z [2]. Jednakże w przypadku gdy $k_n \to \infty$ uzyskujemy zmienne losowe R_n o różnych rozkładach. Dlatego w dalszej części skorzystamy z Twierdzenia 1.3. Następne twierdzenie zostanie poświęcone przypadkowi, gdy wiersze w naszej tablicy zmiennych losowych mają stałą długość.

Twierdzenie 3.1 *Niech* $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant K}$ *będzie tablicą dodatnich, niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z funkcją gęstości* f *taką, że* $|f|\leqslant M$*, dla pewnej stałej* $M>0$*. Ponadto, niech* f *będzie prawostronnie ciągła w* 0*. Wtedy dla dowolnego* $\alpha>-2$ *mamy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lg^{\alpha+2} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lg^{\alpha} k}{k}R_k=\frac{Kf(0)}{\alpha+2}\mathbb{E}m_{K-1},\ \textit{prawie pewnie,}$$

o ile $\mathbb{E}m_{K-1}<\infty$ *oraz* $m_k=\min(X_{n,1},\ldots,X_{n,k})$*.*

Dowód. Jeśli długość wierszy w tablicy jest stała i wynosi K, to rozkłady ilorazów R_n mają jednakowy rozkład z funkcją przeżycia (3.2). Z Twierdzenia 1.3 wynika, że wystarczy obliczyć granicę $\lim_{r\to\infty} r\overline{F}_{R_n}(r)$. Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej oraz naszych założeń ($|f|\leqslant M$ oraz $\mathbb{E}m_{K-1}<\infty$) otrzymujemy, że

$$r\overline{F}_{R_n}(r)=\int_0^\infty K\left(1-F(t)\right)^{K-1}f\left(\tfrac{t}{r}\right)dt \xrightarrow{r\to\infty}$$
$$\int_0^\infty K\left(1-F(t)\right)^{K-1}f\left(0\right)dt=Kf(0)\mathbb{E}m_{K-1}<\infty,$$

gdyż m_{K-1} ma dystrybuantę $1-(1-F(t))^{K-1}$ oraz

$$\mathbb{E}m_{K-1}=\int_0^\infty\Big(1-(1-(1-F(t))^{K-1})\Big)\,dt=\int_0^\infty(1-F(t))^{K-1}\,dt.$$

■

Uwaga 3.1 *Przy naszych założeniach w powyższym twierdzeniu* $f(0)$ *jest skończone, ale może być* $f(0)=0$ *i wtedy powyższy wynik nie dostarcza dokładnej asymptotyki.*

Przykład 3.2 *Granica* $\lim_{r\to\infty} r\overline{F}_{R_n}(r)$ *może być prosto obliczona dla funkcji gęstości* f *wspomnianych w Przykładzie 3.1. Dla rozkładu wykładniczego otrzymujemy*

$$Kf(0)\mathbb{E}m_{K-1}=\frac{K}{K-1},$$

gdyż $f(0)=\frac{1}{\lambda}$ *oraz*

$$\mathbb{E}m_{K-1}=\int_0^\infty(1-F(t))^{K-1}\,dt=\int_0^\infty\exp\left(-\frac{t(K-1)}{\lambda}\right)dt=\frac{\lambda}{K-1}.$$

Natomiast dla jednostajnego mamy

$$Kf(0)\mathbb{E}m_{K-1}=1,$$

gdyż $f(0) = \frac{1}{p}$ *oraz*

$$\mathbb{E}m_{K-1} = \int_0^\infty (1 - F(t))^{K-1}\, dt = \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^{K-1} dt = \left.\frac{-p\left(1 - \frac{t}{p}\right)^K}{K}\right|_0^p = \frac{p}{K}.$$

Dla Pareta mamy

$$Kf(0)\mathbb{E}m_{K-1} = \frac{Kp}{p(K-1)-1},$$

gdzie $p(K-1) > 1$*, gdyż* $f(0) = p$ *oraz*

$$\mathbb{E}m_{K-1} = \int_0^\infty (1 - F(t))^{K-1}\, dt = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{p(K-1)}}$$
$$= \left.\frac{(1+t)^{-p(K-1)+1}}{-p(K-1)+1}\right|_0^\infty = \frac{1}{p(K-1)-1}.$$

Teraz przedstawimy twierdzenie, gdy długości wierszy w tablicy dążą do nieskończoności ($k_n \to \infty$).

Twierdzenie 3.2 *Niech* $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant k_n}$*, gdzie* $k_n \to \infty$ *będzie tablicą niezależnych nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z funkcją gęstości* f *taką, że* $|f| \leqslant C$*, dla pewnej stałej* $C > 0$*. Załóżmy, że dystrybuanta* F *tych zmiennych losowych spełnia dla* $x \geqslant 0$ *następującą nierówność*

$$1 - F(x) \leqslant \frac{1}{(1+\gamma x)^q} \tag{3.3}$$

dla pewnych stałych $\gamma, q > 0$*. Ponadto, niech* f *będzie prawostronnie ciągła w* 0 *oraz* $f(0) > 0$*. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^n \frac{\lg^\alpha k}{k} R_k = \frac{1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie}$$

dla dowolnego $\alpha > -2$*.*

Dowód. Na początku pokażemy, że $k_n \cdot m_{k_n} \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}\,(f(0))$. Mamy

$$\left|F_{nm_n}(x) - F_{Exp(f(0))}(x)\right| = \left|\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n - \left(\exp(-\frac{f(0)x}{n})\right)^n\right|$$
$$\leqslant \quad n\left|1 - F\left(\frac{x}{n}\right) - \exp\left(-\frac{f(0)x}{n}\right)\right|.$$

Podstawiając $t = \frac{1}{n}$ otrzymujemy

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - F(tx) - \exp(-f(0)xt)}{t} \overset{[H]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-f(tx)x + f(0)x\exp(-f(0)xt)}{1} = 0.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left|F_{nm_n}(x)-F_{Exp(f(0))}(x)\right|=0.$$

Z faktu, że graniczny rozkład jest ciągły, otrzymujemy

$$\left(1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n-1}=\frac{\left(1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n}}{1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)}\to\exp(-xf(0)),\tag{3.4}$$

jednostajnie względem x, gdy $n\to\infty$. Zauważmy, że dla ustalonego $x>0$, funkcja $(1+\frac{x}{t})^t$ względem argumentu $t\geqslant 1$ jest niemalejąca. Stąd dla $k_n\geqslant\frac{2}{q}+1$, mamy $\left(1+\frac{\gamma x}{k_n}\right)^{k_n}\geqslant\left(1+\frac{\gamma x}{\frac{2}{q}+1}\right)^{\frac{2}{q}+1}$. Zatem z założenia (3.3) mamy

$$\left(1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n-1}\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{\gamma qx}{q+2}\right)^2}.\tag{3.5}$$

Połóżmy $F_R(r)=\left(1-\frac{1}{r}\right)\mathbb{I}_{\langle 1,+\infty)}(r)$. Z faktu, że f jest funkcją ograniczoną oraz z (3.4) i (3.5) możemy użyć twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Zatem dla $r\geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}\overline{F}_{R_n}(r)/\overline{F}_R(r) &= \int_0^\infty\left(1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n-1}f\left(\frac{x}{rk_n}\right)dx\\ &\to \int_0^\infty f(0)\exp(-xf(0))dx=1,\ \text{gdy } n\to\infty.\end{aligned}$$

Zatem zgodnie z Twierdzeniem 1.3 wystarczy pokazać, że powyższa zbieżność jest jednostajna. Niech dany będzie $\varepsilon>0$.

$$\begin{aligned}&\left|\overline{F}_{R_n}(r)/\overline{F}_R(r)-1\right|\\ =&\left|\int_0^\infty\left(1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n-1}f\left(\frac{x}{rk_n}\right)dx-\int_0^\infty f(0)\exp(-xf(0))dx\right|\\ \leqslant&\left|\int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^\infty\left(1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n-1}f\left(\frac{x}{rk_n}\right)dx\right|\\ &+\left|\int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}}\left(\left(1-F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n-1}-\exp(-xf(0))\right)f\left(\frac{x}{rk_n}\right)dx\right|\\ &+\left|\int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}}\exp(-xf(0))\left(f\left(\frac{x}{rk_n}\right)-f(0)\right)dx\right|\\ &+\int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^\infty f(0)\exp(-xf(0))dx\\ =&\ A_1+A_2+A_3+A_4.\end{aligned}$$

Z (3.5) mamy

$$A_1 \leqslant C \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{\gamma q x}{q+2}\right)^2} \leqslant C \left(\frac{q+2}{\gamma q}\right)^2 \sqrt{\varepsilon}.$$

Z (3.4) otrzymujemy $\left|\left(1 - F\left(\frac{x}{k_n}\right)\right)^{k_n - 1} - \exp(-xf(0))\right| \leqslant \varepsilon$ dla wystarczających dużych n. Ponadto z $\left|f\left(\frac{x}{rk_n}\right)\right| \leqslant C$ dostajemy $A_2 \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

Z ciągłości funkcji f w 0 istnieje $\delta > 0$, taka, że dla $0 \leqslant t < \delta$ mamy $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ oraz $k_n > \frac{1}{\delta\sqrt{\epsilon}}$ mamy $0 \leqslant \frac{x}{rk_n} < \delta$ i $\left|f\left(\frac{x}{rk_n}\right) - f(0)\right| < \varepsilon$. Zatem $A_3 \leqslant \sqrt{\varepsilon}$.

Na koniec zauważmy, że $A_4 = \exp\left(-\frac{f(0)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{f(0)}$. ■

Uwaga 3.2 *Oczywiście założenia Twierdzenia 3.2 (w szczególności warunek (3.3)) są spełnione dla rozkładów z Przykładu 3.1. Na mocy tego twierdzenia dla rozkładu jednostajnego otrzymujemy Twierdzenia 3.1 z [6], a dla rozkładu wykładniczego uzyskujemy Twierdzenie 2.2 z [8].*

Przedstawimy teraz przykład dotyczący rozkładu, który nie był badany we wspomnianych artykułach.

Przykład 3.3 *Niech $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, 1\leqslant k\leqslant k_n}$, gdzie $k_n \to \infty$ będzie tablicą niezależnych nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa $X = |\mathcal{N}(0,1)|$, gdzie $\mathcal{N}(0,1)$ jest standardowym rozkładem normalnym z dystrybuantą $\Phi(x)$. Wtedy X oraz $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, 1\leqslant k\leqslant K}$ mają te same rozkłady o dystrybuancie wyrażającej się wzorem $F(x) = (2\Phi(x) - 1)\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x)$. Pokażemy teraz, że założenie $1 - F(x) \leqslant \frac{1}{(1+\gamma x)^q}$ zachodzi z $q = 1$ oraz z $0 < \gamma \leqslant \sqrt{2/\pi}$. Na początku zauważmy, że*

$$1 - F(x) - \frac{1}{(1+\gamma x)} = 2 - 2\Phi(x) - \frac{1}{(1+\gamma x)} \leqslant 2 - 2\Phi(x) - \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)}.$$

Przyjmijmy

$$g(x) = \left(2 - 2\Phi(x) - \frac{1}{(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}x)}\right) \mathbb{I}_{\langle 0,\infty)}(x).$$

Wystarczy pokazać, że $g(x) \leqslant 0$ *dla* $x \geqslant 0$. *Mamy*

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{x^2}{2}) + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1-(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)^2} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\left(1-(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right)\left(1+(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right)}{(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)^2} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\left(\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)-(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)\right)\left(1+(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right)}{(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x)^2} \right).
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że na znak powyższej pochodnej ma wpływ tylko wyrażenie

$$\exp\left(\frac{x^2}{4}\right) - \left(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right).$$

Przyjmijmy

$$h(x) = \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) - \left(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right).$$

Mamy $h(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ *oraz*

$$h'(x) = \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) \cdot \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Zauważmy, że $h'(0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ *oraz* $h'(x)$ *jest funkcją rosnącą. Więc istnieje tylko jeden punkt* $x_0 > 0$ *taki, że* $h(x_0) = 0$. *Stąd* $g'(x_0) = 0$, $g'(x) < 0$ *dla* $x \in (0, x_0)$ *oraz* $g'(x) > 0$ *dla* $x \in (x_0, \infty)$. *Ponadto z tego, że* $g(0) = 0$ *oraz* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ *otrzymujemy, że* $g(x) \leqslant 0$ *dla* $x > 0$. *Ostatecznie na mocy Twierdzenia 3.2 otrzymujemy, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\alpha} k}{k} R_k = \frac{1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie.}$$

Pokażemy teraz zastosowanie dokładnego prawa wielkich liczb dla różnych rozkładów ze zbieżnością według prawdopodobieństwa (Twierdzenie 1.5). Niech zmienne losowe w tablicy $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, 1\leqslant k\leqslant k_n}$ mają rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Wtedy ogon ilorazów najmniejszych statystyk porządkowych jest dany wzorem

$$\overline{F}_{R_n}(r) = \frac{k_n}{r(k_n-1)+1}, \ r \geqslant 1.$$

Dla $\overline{F}_R(r) = \frac{1}{r}$, $r \geqslant 1$ mamy

$$\left| \frac{\overline{F}_{R_n}(r)}{\overline{F}_R(r)} - 1 \right| = \left| \frac{r-1}{r(k_n - 1) + 1} \right| \leqslant \frac{1}{k_n - 1}.$$

Stąd jeśli $k_n \to \infty$, to $\overline{F}_{R_n}(r)/\overline{F}_R(r) \to 1$ jednostajnie dla $r \geqslant 1$. Zatem udowodniliśmy następujący wniosek.

Wniosek 3.1 *Niech $(X_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant k_n}$ będzie tablicą niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Jeśli $k_n \to \infty$, to dla dowolnego $\alpha > -1$ oraz dowolnej funkcji wolno zmieniającej się L otrzymujemy*

$$\frac{1}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} L(k) \frac{X_{n,(2)}}{X_{n,(1)}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\alpha+1}, \ \text{gdy } n \to \infty.$$

Jeśli $k_n = K \geqslant 2$ jest stałą oraz zmienne losowe mają ten sam rozkład jednostajny na przedziale $\langle 0, p \rangle$, to $\overline{F}_{R_n}(r) = \frac{1}{r}$, $r \geqslant 1$. Zatem z Twierdzenia 1.5 otrzymujemy Twierdzenie 3.2 z [6].

Wniosek 3.2 *Niech $(X_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant K}$ będzie tablicą niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jednostajnym $U(0,p)$. Wtedy dla dowolnego $\alpha > -1$ oraz dowolnej funkcji wolno zmieniającej się L mamy*

$$\frac{1}{n^{\alpha+1} L(n) \lg n} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} L(k) \frac{X_{k,(2)}}{X_{k,(1)}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\alpha+1}, \ \text{gdy } n \to \infty.$$

3.2. Ilorazy statystyk porządkowych

Trochę inny problem dotyczący ilorazów statystyk porządkowych był badany w pracy [32]. Pokażemy jak za pomocą Twierdzenia 1.4 uprościć rozważania autorów wspomnianej pracy. Autorzy tej pracy badali ilorazy

$$R_{n,1,j} = \frac{X_{n(j)}}{X_{n(1)}},$$

gdzie $X_{n(j)}$ jest j-tą statystyką porządkową w n-tym wierszu.

We wspomnianej pracy rozważano rozkład jednostajny na przedziale $(0, \theta_n)$. Autorzy znaleźli funkcję gęstości rozkładu $R_{n,1,j}$ daną wzorem

$$f(r) = \frac{m!(r-1)^{j-2}}{(j-2)!(m-j)!r^j} \sum_{k=0}^{m-j} \binom{m-j}{k} \frac{(-1)^k}{j+k} \mathbb{I}\,(r \geqslant 1)\,.$$

Zauważmy, że powyższą funkcję gęstości możemy zapisać w postaci

$$f(r) = C(r-1)^{j-2}/r^j$$

dla $r \geqslant 1$, gdzie stałą C możemy łatwo obliczyć z równości

$$\int_1^\infty \frac{C(r-1)^{j-2}}{r^j} dr = \frac{C}{j-1} = 1.$$

Stąd $f(r) = (j-1)(r-1)^{j-2}/r^j \mathbb{I}(r \geqslant 1)$ oraz dystrybuanta $R_{n,1,j}$ jest dana wzorem

$$F_{R_{n,1,j}}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{j-1} \quad \text{dla } x \geqslant 1.$$

Zauważmy, że rozkład $R_{n,1,j}$ nie zależy od długości wiersza k_n ani od parametru θ_n.

Można udowodnić tożsamość $\frac{m!}{(j-2)!(m-j)!} \sum_{k=0}^{m-j} \binom{m-j}{k} \frac{(-1)^k}{j+k} = j - 1$ w bardziej wyrafinowany sposób. Weźmy wzór z artykułu [32] ze 400. strony

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{m!(r-1)^{j-2}}{(j-2)!(m-j)!\theta_n^m} \int_0^{\frac{\theta_n}{r}} w^{j-1}(\theta_n - rw)^{m-j} dw \\ &= \frac{m!(r-1)^{j-2}}{(j-2)!(m-j)!\theta_n^m} \frac{\theta_n^m}{r^j} \beta(j, m-j+1). \end{aligned}$$

Stosując wzory dla funkcji beta $\beta(n-k+1, k+1) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$ otrzymujemy $\beta(j, m - j + 1) = \beta(m-j+1, j) = \frac{1}{m\binom{m-1}{j-1}}$ i dlatego

$$f(r) = \frac{m!(r-1)^{j-2}}{(j-2)!(m-j)!r^j} \frac{1}{m\binom{m-1}{j-1}} = (j-1)\frac{(r-1)^{j-2}}{r^j}.$$

Z faktu, że $\lim_{t\to\infty} r^2 f(r) = j - 1$, jako wniosek do Twierdzenia 1.4, otrzymujemy Twierdzenie 2.18 z [32].

Wniosek 3.3 *Niech $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N}, 1\leqslant k\leqslant k_n}$ będzie tablicą niezależnych zmiennych losowych taką, że $X_{n,k}$ ma w każdym wierszu ten sam rozkład jednostajny $U(0, \theta_n)$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^n \frac{\lg^\alpha k}{k} R_{k,1,j} = \frac{j-1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie}$$

dla dowolnego $\alpha > -2$ oraz j takiego, że $j \leqslant k_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Funkcja Eulera oraz statystyki sąsiednie

Zakładamy, że zmienne losowe w każdym wierszu są niezależne oraz mają jednakowy rozkład jednostajny $U(0, \theta_n)$. Dla statystyk porządkowych w każdym wierszu $X_{n(1)}, ..., X_{n(k_n)}$ definiujemy ilorazy sąsiednich statystyk porządkowych

$$R_{n,k} = X_{n,k}/X_{n(k-1)}, \quad k = 2, ..., k_n.$$

Adler w [9] pokazał, że maksimum tych ilorazów

$$M_n = \max_{2 \leqslant k \leqslant k_n} R_{n,k}$$

ma dystrybuantę

$$F_{M_n}(x) = \prod_{k=1}^{k_n-1} \left(1 - \frac{1}{x^k}\right), \; x \geqslant 1.$$

Zauważmy, że jeśli $k_n \to \infty$, to $F_{M_n}(x) \to \phi(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{x^k}\right)$, gdzie $\phi(x)$ jest znana jako funkcja Eulera (która, jest dystrybuantą). Ta funkcja pojawia się w różnych dziedzinach matematyki: kombinatoryki, teorii liczb i funkcji analitycznych. Pokażemy, że Twierdzenie 1.4 może być zastosowane w tym przypadku. Udowodnimy, że $F'_{M_n}(x)/\phi'(x) \to 1$ jednostajnie na przedziale $\langle x_0, +\infty)$, gdzie $x_0 > 1$. Aby tego dowieść, skorzystamy z następujących faktów oraz nierówności:

– wzór na pochodną nieskończonego iloczynu

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} g_k(x)\right)' = \prod_{k=1}^{\infty} g_k(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k'(x)}{g_k(x)}, \tag{3.6}$$

– suma szeregu potęgowego

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^{n+1}} \frac{((n+1)x - n)}{(x-1)^2}, \text{ dla } x > 1 \text{ oraz } n \geqslant 0, \tag{3.7}$$

– nierówność

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|, \tag{3.8}$$

gdzie $|a_k| \leqslant 1$ oraz $|b_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$.

Zacznijmy od znalezienia górnego oraz dolnego ograniczenia $\phi'(x)$ w przedziale $x \in \langle x_0, +\infty)$, gdzie $x_0 > 1$. Z faktu, że ϕ jest funkcją niemalejącą otrzymujemy, że

$$\phi'(x) = \phi(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{k}{x^{k+1}}}{1 - \frac{1}{x^k}} \geqslant \phi(x_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^{k+1}} = \frac{\phi(x_0)}{(x-1)^2} \tag{3.9}$$

oraz

$$\phi'(x) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{x_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^{k+1}} = \frac{x_0}{x_0 - 1} \frac{1}{(x-1)^2}. \tag{3.10}$$

Zbadamy $\left|F'_{M_n}(x)/\phi'(x) - 1\right| = \left|F'_{M_n}(x) - \phi'(x)\right| / \phi'(x)$ dla $x \geqslant x_0 > 1$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \left(F_{M_n}(x) \prod_{k=k_n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^k}\right)\right)' \\ &= F'_{M_n}(x) \prod_{k=k_n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^k}\right) + F_{M_n}(x) \left(\prod_{k=k_n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x^k}\right)\right)'. \end{aligned}$$

Podobnie jak w (3.10) możemy pokazać, że

$$F'_{M_n}(x) \leqslant \frac{x_0}{x_0-1}\frac{1}{(x-1)^2}, \quad x \geqslant x_0.$$

Z (3.8) dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&\left|F'_{M_n}(x) - F'_{M_n}(x)\prod_{k=k_n}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^k}\right)\right| \qquad (3.11)\\
= \; & |F'_{M_n}(x)|\left|1-\prod_{k=k_n}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^k}\right)\right| \leqslant \frac{x_0}{x_0-1}\frac{1}{(x-1)^2}\sum_{k=k_n}^{\infty}\frac{1}{x^k}\\
= \; & \frac{x_0}{x_0-1}\frac{1}{(x-1)^2}\frac{\frac{1}{x^{k_n}}}{1-\frac{1}{x}} \leqslant \left(\frac{x_0}{x_0-1}\right)^2\frac{1}{(x-1)^2}\frac{1}{x_0^{k_n}}.
\end{aligned}$$

Ponadto z (3.7) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
0 \; & \leqslant \; F_{M_n}(x)\left(\prod_{k=k_n}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^k}\right)\right)' \qquad (3.12)\\
& \leqslant \; F_{M_n}(x)\prod_{k=k_n}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x^k}\right)\sum_{k=k_n}^{\infty}\frac{\frac{k}{x^{k+1}}}{1-\frac{1}{x^k}}\\
& \leqslant \; \frac{x_0}{x_0-1}\frac{1}{x^{k_n}}\frac{k_n x-(k_n-1)}{(x-1)^2} \leqslant \frac{x_0}{x_0-1}\frac{1}{(x-1)^2}\frac{k_n}{x_0^{k_n-1}}.
\end{aligned}$$

Zatem z (3.9), (3.11) oraz (3.12) dla $x \geqslant x_0$ otrzymujemy następujące jednostajne ograniczenie

$$\begin{aligned}
& \frac{\left|F'_{M_n}(x) - \phi'(x)\right|}{\phi'(x)}\\
\leqslant \; & \frac{(x-1)^2}{\phi(x_0)}\left(\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right)^2\frac{1}{(x-1)^2}\frac{1}{x_0^{k_n}} + \frac{x_0}{x_0-1}\frac{1}{(x-1)^2}\frac{k_n}{x_0^{k_n-1}}\right)\\
\leqslant \; & \left(\frac{x_0}{x_0-1}\right)^2\frac{1}{\phi(x_0)}\frac{1+x_0k_n}{x_0^{k_n}} \to 0, \text{ gdy } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Pozostaje zbadanie asymptotyki $x^2\phi'(x)$, gdy $x\to\infty$. Zauważmy, że

$$x^2\phi'(x) = \phi(x)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} + x^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\frac{k}{x^{k+1}}}{1-\frac{1}{x^k}}\right).$$

Teraz z (3.7) dla $x \geqslant x_0$ mamy

$$x^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\frac{k}{x^{k+1}}}{1-\frac{1}{x^k}} \leqslant \frac{x_0}{x_0-1}x^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{x^{k+1}} = \frac{x_0}{x_0-1}x^2\frac{1}{x^3}\frac{2x-1}{(x-1)^2} \to 0, \text{ gdy } x\to\infty.$$

Stąd
$$x^2\phi'(x) \to 1, \text{ gdy } x \to \infty.$$

Zatem udowodniliśmy następujące twierdzenie, które jest uzupełnieniem do Twierdzenia 1 z [9].

Twierdzenie 3.3 *Niech $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant k_n}$ będzie tablicą niezależnych zmiennych losowych taką, że w każdym wierszu $X_{n,k}$ ma rozkład jednostajny $U(0,\theta_n)$. Niech $R_{n,k} = X_{n,k}/X_{n(k-1)}$, $k=2,...,k_n$ będzie ilorazem sąsiednich statystyk porządkowych oraz*
$$M_n = \max_{2\leqslant k\leqslant k_n} R_{n,k},$$
ich maksimum w n-tym wierszu. Jeśli $k_n \to \infty$, to dla każdego $\alpha > -2$ mamy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^{\alpha+2} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\alpha} k}{k} M_k = \frac{1}{\alpha+2} \text{ prawie pewnie.}$$

Uwaga 3.3 *Adler w [9] pokazał powyższe twierdzenie w przypadku, gdy długości wierszy w tablicy były ograniczone, tzn. $\sup_{n\in\mathbb{N}} k_n < \infty$.*

Rozdział 4

DPWL dla rozkładów typu asymetrycznego Pareta

Zacznijmy od następującego przykładu.

Przykład 4.1 *Rozważmy zmienną losową X o asymetrycznym rozkładzie Laplace'a o funkcji gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} a\exp(-x), & x \geqslant 0 \\ b\exp(x), & x < 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

gdzie $a, b > 0$ oraz $a + b = 1$. Dla $a = b = 1/2$ mamy standardowy rozkład Laplace'a o funkcji gęstości $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$. Teraz pokażemy, że jeśli zmienne losowe X oraz Y są niezależne oraz mają jednakowy asymetryczny rozkład Laplace'a z funkcją gęstości podaną powyżej, to ich iloraz $R = X/Y$ ma dystrybuantę:

$$F_R(r) = \begin{cases} 1 - \frac{a^2+b^2}{1+r}, & r \geqslant 0 \\ \frac{2ab}{1-r}, & r < 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dla $r < 0$ mamy

$$\begin{aligned} F_R(r) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} < r\right) &= \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{0}^{\frac{x}{r}} ae^{-y}dy\right)be^{x}dx + \int_{0}^{\infty}\left(\int_{\frac{x}{r}}^{0} be^{y}dy\right)ae^{-x}dx \\ &= ab\left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{r}}\right) + ab\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{r}-1}\right) = \frac{2ab}{1-r} \end{aligned}$$

oraz dla $r \geqslant 0$ mamy

$$\begin{aligned} F_R(r) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} < r\right) &= 2ab + \int_{0}^{\infty}\left(\int_{\frac{x}{r}}^{\infty} ae^{-y}dy\right)ae^{-x}dx + \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{r}} be^{y}dy\right)be^{x}dx \\ &= 2ab + a^2\frac{r}{1+r} + b^2\frac{r}{1+r} = 1 - \frac{a^2+b^2}{1+r}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższa dystrybuanta spełnia następujące własności:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x\overline{F}_R(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\mathbb{P}\left(R > x\right) = p \\ \lim_{x\to-\infty} |x|F_R(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\mathbb{P}\left(-R \geqslant x\right) = q, \end{aligned} \tag{4.3}$$

z $p = a^2 + b^2$ oraz $q = 2ab$.

Będziemy mówić, że zmienne losowe, które spełniają (4.3) są typu dwuogonowego Pareta. Zauważmy, że jeśli (4.3) jest spełnione, to

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\mathbb{P}\left(R \geqslant x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\mathbb{P}\left(R > x\right).$$

Stąd

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\mathbb{P}\left(R = x\right) = 0.$$

Innymi przykładami rozkładów tego typu jest dwuogonowy rozkład Pareta o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{q}{x^2}, & x \leqslant -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ \frac{p}{x^2}, & x \geqslant -1, \end{cases} \tag{4.4}$$

gdzie $p, g \geqslant 0$ oraz $p + q = 1$, jak również asymetryczny rozkład Cauchy'ego o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{q}{\pi(1+x^2)}, & x < 0 \\ \frac{p}{\pi(1+x^2)}, & x \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

gdzie $p, q \geqslant 0$ oraz $p + q = 2$.

Rozważmy ciąg $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, które spełniają (4.3). Zauważmy, że są to zmienne losowe niecałkowalne. Zatem nie możemy stosować klasycznego mocnego prawa wielkich liczb i dlatego będziemy badać sumy ważone. Adler w swoich pracach rozważał mocne oraz słabe dokładne prawa wielkich liczb dla rozkładu dwuogonowego Pareta (4.4) (zobacz [7]) oraz dla asymetrycznego rozkładu Cauchy'ego (4.5) (zobacz [5]).

W tym rozdziale będziemy badać dokładne prawa wielkich liczb dla niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie typu dwuogonowego Pareta (czyli spełniających warunek (4.3)). Pokażemy stosowalność naszych twierdzeń do badania ważonych sum ilorazów niezależnych zmiennych losowych, które nie są koniecznie dodatnie. W literaturze problem ten był badany jedynie dla dodatnich zmiennych losowych, tak jak to robiliśmy w rozdziale 2.

4.1. Dokładne prawa wielkich liczb

W dowodach twierdzeń w tym podrozdziale będzie nam potrzebna następująca obserwacja. Dla nieujemnej zmiennej losowej $Y \geqslant 0$ oraz $x > 0$ mamy

$$\mathbb{E}Y\mathbb{I}[Y \leqslant x] = -x\mathbb{P}(Y > x) + \int_0^x \mathbb{P}(Y > t)dt.$$

Stąd dla dowolnej zmiennej losowej R mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R^2\mathbb{I}[|R| \leqslant x] &= \mathbb{E}R^2\mathbb{I}[R^2 \leqslant x^2] \\ &= \int_0^{x^2} \mathbb{P}(R^2 > t)dt - x^2\mathbb{P}(R^2 > x^2) \\ &= \int_0^{x^2} \mathbb{P}(|R| > t)dt - x^2\mathbb{P}(|R| > x). \end{aligned}$$

Podstawiając $u = \sqrt{t}$ oraz $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ do powyższego równania otrzymujemy, że

$$\mathbb{E}R^2\mathbb{I}[|R| \leqslant x] = 2\int_0^x u\mathbb{P}(|R| > u)du - x^2\mathbb{P}(|R| > x).$$

Zaczniemy od podania mocnej wersji dokładnego prawa wielkich liczb dla zmiennych losowych typu dwuogonowego Pareta.

Twierdzenie 4.1 *Niech $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa R spełniająca (4.3). Wtedy dla dowolnego $\beta > 0$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_k R_k = \frac{p-q}{\beta} \quad \textit{prawie pewnie,}$$

gdzie $a_n = \left(\lg^{\beta-2} n\right)/n$ oraz $b_n = \lg^\beta n$.

Dowód. Niech dany będzie $\varepsilon > 0$. Z (4.3) wynika, że istnieje $x(\varepsilon)$ takie, że dla $x \geqslant x(\varepsilon)$ mamy

$$\frac{p-\varepsilon}{x} \leqslant \mathbb{P}(R > x) \leqslant \frac{p+\varepsilon}{x}, \tag{4.6}$$

$$\frac{q-\varepsilon}{x} \leqslant \mathbb{P}(R < -x) \leqslant \frac{q+\varepsilon}{x}. \tag{4.7}$$

Stąd dla $x > x(\varepsilon)$ mamy

$$\frac{p+q-2\varepsilon}{x} \leqslant \mathbb{P}(|R| > x) \leqslant \frac{p+q+2\varepsilon}{x}. \tag{4.8}$$

Zauważmy, że dla $0 < x \leqslant x(\varepsilon)$ mamy

$$x\mathbb{P}(|R| > x) \leqslant x(\varepsilon).$$

Zatem istnieje stała $M > 0$ taka, że dla $x > 0$ mamy

$$\mathbb{P}(|R| > x) \leqslant \frac{x(\varepsilon) + 2\varepsilon + p + q}{x} = \frac{M}{x}. \tag{4.9}$$

Niech $c_n = b_n/a_n = n \lg^2 n$. Zacznijmy od podzielenia naszej sumy ważonej na trzy części

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \left[R_k \mathbb{I}(|R_k| \leqslant c_k) - \mathbb{E}R_k \mathbb{I}(|R_k| \leqslant c_k)\right] \\ + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k \mathbb{I}(|R_k| > c_k) + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}R_k \mathbb{I}(|R_k| \leqslant c_k). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Z (4.9) oraz (4.6), mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} \mathbb{E}R_n^2 \mathbb{I}(|R_n| \leqslant c_n) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n^2} \int_0^{c_n} t\mathbb{P}(|R| > t)dt \leqslant 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} < \infty.$$

Stąd na mocy twierdzenia o dwóch z szeregach (Twierdzenie A.6) oraz lematu Kroneckera (Lemat A.2) otrzymujemy, że pierwszy składnik z (4.10) jest zbieżny do zera. Ponadto z (4.9) mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|R_n| > c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{c_n} < \infty.$$

Zatem z lematu Borela-Cantelliego drugi składnik w (4.10) jest zbieżny do zera prawie pewnie. Teraz podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1.3 wystarczy pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg n} \mathbb{E}R_n \mathbb{I}(|R_n| \leqslant c_n) = p - q. \tag{4.11}$$

Oznaczmy przez $R_n^+ = \max(R_n, 0)$ oraz $R_n^- = \max(-R_n, 0)$ odpowiednio część dodatnią oraz część ujemną R_n. Zauważmy, że istnieje n_0 takie, że dla $n \geqslant n_0$ mamy $c_n \geqslant x(\varepsilon)$. Z (4.6) oraz (4.7) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lg n}\mathbb{E}R_n\mathbb{I}(|R_n| \leqslant c_n) = \frac{1}{\lg n}\Big(\mathbb{E}R_n^+\mathbb{I}(R_n^+ \leqslant c_n) - \mathbb{E}R_n^-\mathbb{I}(R_n^+ \leqslant c_n)\Big)\\
&= \lg n\left(-c_n\mathbb{P}(R_n > c_n) + \int_0^{c_n}\overline{F}(t)dt - \left(-c_n\mathbb{P}(R_n < -c_n) + \int_0^{c_n}F(-t)dt\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lg n}\left(\left(-c_n\mathbb{P}(R_n > c_n) + \int_0^{x(\varepsilon)}\overline{F}_{R_n}(t)dt + \int_{x(\varepsilon)}^{c_n}\overline{F}_{R_n}(t)dt\right)\right.\\
&- \left.\left(-c_n\mathbb{P}(R_n < -c_n) + \int_0^{x(\varepsilon)}F_{R_n}(-t)dt + \int_{x(\varepsilon)}^{c_n}F_{R_n}(-t)dt\right)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\lg n}\left(-c_n\frac{p-\varepsilon}{c_n} + x(\varepsilon) + (\lg(c_n) - \lg x(\varepsilon))(p+\varepsilon)\right.\\
&+ \left. c_n\frac{q+\varepsilon}{c_n} - (\lg(c_n) - \lg x(\varepsilon))(q-\varepsilon)\right)\\
&= \frac{1}{\lg n}\left(-p+q+2\varepsilon + x(\varepsilon) + (p-q+2\varepsilon)(\lg c_n - \lg x(\varepsilon))\right).
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lg n}\mathbb{E}R_n\mathbb{I}(|R_n| \leqslant c_n) \leqslant p - q + 2\varepsilon.
$$

Podobnie mamy, że

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lg n}\mathbb{E}R_n\mathbb{I}(|R_n| \leqslant c_n) \geqslant \frac{1}{\lg n}\left(-c_n\frac{p+\varepsilon}{c_n} + (\lg(c_n) - \lg x(\varepsilon))(p-\varepsilon)\right.\\
&+ \left. c_n\frac{q-\varepsilon}{c_n} - (\lg(c_n) - \lg x(\varepsilon))(q+\varepsilon)\right)\\
&= \frac{1}{\lg n}\left(-p+q-2\varepsilon + (p-q-2\varepsilon)(\lg c_n - \lg x(\varepsilon))\right).
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\lg n}\mathbb{E}R_n\mathbb{I}(|R_n| \leqslant c_n) \geqslant p - q - 2\varepsilon,
$$

ponieważ ε był dowolny, otrzymujemy (4.11), co kończy dowód. ■

W następnym twierdzeniu udowodnimy analogon głównego wyniku z [1] dla rozkładów typu dwuogonowego Pareta.

Twierdzenie 4.2 *Niech $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa R, która spełnia założenie (4.3). Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz $\beta > 0$ mamy*

$$
\sum_{n=1}^{\infty} d_n\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k - \frac{p-q}{\beta}\right| > \varepsilon\right) < \infty,
$$

gdzie $a_n = (\lg^{\beta-2} n)/n$, $b_n = \lg^{\beta} n$ oraz $d_n = \frac{1}{n\lg n}$.

Dowód. Podzielimy naszą sumę, tak jak w (4.10)

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k =: A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}&\left\{\left|A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} - \frac{p-q}{\beta}\right| > \varepsilon\right\}\\ &\subset \left\{|A_{1,n}| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup \left\{|A_{2,n}| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup \left\{\left|A_{3,n} - \frac{p-q}{\beta}\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(\left|A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} - \frac{p-q}{\beta}\right| > \varepsilon\right)\\ \leqslant\ &\sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(|A_{1,n}| > \frac{\varepsilon}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(|A_{2,n}| > \frac{\varepsilon}{3}\right)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(\left|A_{3,n} - \frac{p-q}{\beta}\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right).\end{aligned}$$

Tak jak w dowodzie Twierdzenia 4.1 kładziemy $c_n = b_n/a_n = n \lg^2 n$. Teraz pokażemy, że składnik $A_{1,n}$ jest zbieżny. Z nierówności Markowa oraz z (4.9)

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(\left|b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_k \left[R_k \mathbb{I}(|R_k| \leqslant c_k) - \mathbb{E}R_k \mathbb{I}(|R_k| \leqslant c_k)\right]\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right)\\ &\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathbb{E}R_k^2 \mathbb{I}(|R_k| \leqslant c_k) \leqslant 2C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_0^{c_k} t\mathbb{P}(|R| > t)dt\\ &\leqslant 2CM\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k = 2CM\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\lg n)\lg^{2\beta} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lg^{2\beta-2} k}{k}.\end{aligned}$$

Z faktu, że (patrz [1])

$$\frac{1}{\lg^{2\beta} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lg^{2\beta-2} k}{k} \leqslant \begin{cases} C/\lg^{2\beta} n, & \text{jeśli } 0 < \beta < 1/2,\\ C\lg(\lg n)/\lg n, & \text{jeśli } \beta = 1/2,\\ C/\lg n, & \text{jeśli } \beta > 1/2,\end{cases} \tag{4.12}$$

otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(|A_{1,n}| > \varepsilon/3\right) < \infty$. Aby pokazać, że trzeci składnik jest zbieżny, zauważmy jak w dowodzie Twierdzenia 4.1, że $A_{3,n}$ jest nielosowym ciągiem zbieżnym do $\frac{p-q}{\beta}$, dlatego tylko skończona liczba z $\mathbb{P}\left(\left|A_{3,n} - \frac{p-q}{\beta}\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right)$ jest niezerowa. Żeby udowodnić zbieżność drugiego składnika, skorzystamy z Twierdzenia A.8 z

$$X_{nk} = a_k R_k \mathbb{I}(|R_k| > c_k)/b_n.$$

Teraz pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_{nk}| > \varepsilon) < \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_{nk}| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|R_k| > \max\left(c_k, \frac{\varepsilon b_n}{a_k}\right)\right)$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|R_k| > \frac{\varepsilon b_n}{a_k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|R_k| > \varepsilon k \lg^{2-\beta} k \lg^{\beta} n)\right).$$

Z (4.9) oraz (4.12) mamy

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{\varepsilon k \lg^{2-\beta} k \lg^{\beta} n} < \infty.$$

Następnie pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_{nk}^2 \mathbb{I}[|X_{nk}| < \delta]\right)^J < \infty$ z $J = 2$ oraz $\delta = 1$. Zatem z (4.9) oraz (4.12), mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_{nk}^2 \mathbb{I}[|X_{nk}| < 1]\right)^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_n^2} \mathbb{E}R_k^2 \mathbb{I}\left[c_k < |R_k| < \frac{b_n}{a_k}\right]\right)^2$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_n^2} \mathbb{E}R_k^2 \mathbb{I}\left[|R_k| < \frac{b_n}{a_k}\right]\right)^2$$
$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_n^2} \int_0^{\frac{b_n}{a_k}} t\mathbb{P}(|R| > t)dt\right)^2$$
$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_n^2} \frac{b_n}{a_k}\right)^2 = C \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\beta-2} k}{k \lg^{\beta} n}\right)^2$$
$$= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \lg^{2\beta+1} n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\beta-2} k}{k}\right)^2 < \infty.$$

Ostatecznie wykażemy, że $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_{nk}\mathbb{I}[|X_{nk}| \leqslant \delta|] \to 0$, gdy $n \to \infty$ z $\delta = 1$.

Znów z (4.9) oraz (4.12) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_{nk}\mathbb{I}[|X_{nk}| \leqslant 1] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_n} \mathbb{E}|R_k| \mathbb{I}\left[c_k < |R_k| \leqslant \frac{b_n}{a_k}\right]$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_n} \mathbb{E}|R_k| \mathbb{I}\left[|R_k| \leqslant \frac{b_n}{a_k}\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_n} \int_0^{\frac{b_n}{a_k}} \mathbb{P}(|R| > t)dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_n} \left(\int_0^1 \mathbb{P}(|R| > t)dt + \int_1^{\frac{b_n}{a_k}} \mathbb{P}(|R| > t)dt\right)$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_n} \left(1 + M \lg \frac{b_n}{a_k}\right) \leqslant C \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_n} \lg b_n$$
$$= \frac{C \lg(\lg n)}{\lg^{\beta} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg^{\beta-2} k}{k} \to 0, \text{ gdy } n \to \infty,$$

co kończy dowód. ■

Teraz przedstawimy dokładne prawo wielkich liczb ze zbieżnością według prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 4.3 *Niech $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa R, która spełnia założenie (4.3). Wtedy dla dowolnego $\beta > 0$ oraz dowolnej funkcji wolno zmieniającej się L mamy*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k \xrightarrow{P} \frac{p-q}{\beta}, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

gdzie $a_n = n^{\beta-1}L(n)$, $b_n = n^{\beta}L(n)\lg n$.

Powyższe twierdzenie wynika z Wniosku 4.1 z [28], nie mniej jednak zaprezentujemy tu odrębne rozumowanie.

Dowód. Dowód będzie podobny do dowodu Twierdzenia 1.5. Zatem z (4.9) oraz z twierdzenia Karamaty w wersji dla ciągów mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|R_k| > \frac{b_n}{a_k}\right) \leqslant \frac{M}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Teraz zbadamy wyrażenie z wariancją z Twierdzenia A.7. Zatem z (4.9) oraz (4.6), mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(\frac{a_k|R_k|}{b_n}\mathbb{I}\left(\frac{a_k|R_k|}{b_n} \leqslant 1\right)\right) \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathbb{E}R_k^2 \mathbb{I}(R_k \leqslant b_n/a_k)}{b_n^2}$$
$$\leqslant \frac{2}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_0^{b_n/a_k} t\mathbb{P}(|R| > t)dt \leqslant \frac{2M}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0.$$

Teraz wystarczy pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}R_k \mathbb{I}(|R_k| \leqslant b_n/a_k) = \frac{p-q}{\beta}. \tag{4.13}$$

Pokazaliśmy już wcześniej (w dowodzie Twierdzenia 1.5), że $\frac{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} a_k}{b_n} \to 0$, gdy $n \to \infty$. Dlatego n_0 może być wybrane w taki sposób, że $\frac{b_n}{a_k} \geqslant x(\varepsilon)$ dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz $n \geqslant n_0$. Stąd istnieje n_0 takie, że $\frac{b_n}{a_k} \geqslant x(\varepsilon)$ dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz $n \geqslant n_0$. Zauważmy, że dla stałej $k \leqslant n_0 - 1$ zmienne losowe

$$\frac{a_k R_k}{b_n}\mathbb{I}\left(\frac{a_k|R_k|}{b_n} \leqslant 1\right)$$

są ograniczone przez 1 oraz prawie pewnie dążą do 0, gdy $n \to \infty$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymujemy, że

$$\sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbb{E}\left(\frac{a_k R_k}{b_n}\mathbb{I}\left(\frac{a_k R_k}{b_n} \leqslant 1\right)\right) \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Teraz zauważmy, że dla $k \geqslant n_0$ mamy

$$\frac{\sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathbb{E} R_k \mathbb{I}\left(|R_k| \leqslant \frac{b_n}{a_k}\right)}{b_n} = \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \left(\mathbb{E}R_k^{+}\mathbb{I}\left(R_k^{+} \leqslant \frac{b_n}{a_k}\right) - \mathbb{E}R_k^{-}\mathbb{I}\left(R_k^{+} \leqslant \frac{b_n}{a_k}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \left(-\frac{b_n}{a_k}\mathbb{P}\left(R_k > \frac{b_n}{a_k}\right) + \int_0^{\frac{b_n}{a_k}} \overline{F}(t)dt\right.$$

$$\left.- \left(-\frac{b_n}{a_k}\mathbb{P}\left(R_n < -\frac{b_n}{a_k}\right) + \int_0^{\frac{b_n}{a_k}} F(-t)dt\right)\right)$$

$$= \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \left(\left(-\frac{b_n}{a_k}\mathbb{P}\left(R_k > \frac{b_n}{a_k}\right) + \int_0^{x(\varepsilon)} \overline{F}_{R_k}(t)dt + \int_{x(\varepsilon)}^{\frac{b_n}{a_k}} \overline{F}_{R_k}(t)dt\right)\right.$$

$$\left.- \left(-\frac{b_n}{a_k}\mathbb{P}\left(R_k < -\frac{b_n}{a_k}\right) + \int_0^{x(\varepsilon)} F_{R_k}(-t)dt + \int_{x(\varepsilon)}^{\frac{b_n}{a_k}} F_{R_k}(-t)dt\right)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \left(-\frac{b_n}{a_k}\frac{p-\varepsilon}{\frac{b_n}{a_k}} + x(\varepsilon) + \left(\lg\left(\frac{b_n}{a_k}\right) - \lg x(\varepsilon)\right)(p+\varepsilon)\right.$$

$$\left.+ \frac{b_n}{a_k}\frac{q+\varepsilon}{\frac{b_n}{a_k}} - \left(\lg\left(\frac{b_n}{a_k}\right) - \lg x(\varepsilon)\right)(q-\varepsilon)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \left(-p+q+2\varepsilon + x(\varepsilon) + (p-q+2\varepsilon)\left(\lg\left(\frac{b_n}{a_k}\right) - \lg(x_1(\varepsilon))\right)\right).$$

Przypomnijmy, że

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \to 0$$

oraz

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} \lg\frac{b_n}{a_k} \to \frac{1}{\beta}.$$

Stąd

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathbb{E}R_k\mathbb{I}(|R_k| \leqslant b_n/a_k) \leqslant \frac{p-q+2\varepsilon}{\beta}.$$

Podobnie można udowodnić, że

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathbb{E}R_k\mathbb{I}(|R_k| \leqslant b_n/a_k) \geqslant \frac{p-q-2\varepsilon}{\beta}.$$

Z faktu, że ε było wybrane dowolnie otrzymujemy (4.13). ■

4.2. Zastosowania

W tym podrozdziale pokażemy zastosowanie twierdzeń z podrozdziału 4.2 dla ilorazów niezależnych zmiennych losowych, które są niekoniecznie dodatnie. Na początku rozszerzmy Przykład 4.1. Niech X oraz Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co zmienna losowa ξ, która ma ograniczoną funkcję gęstości $f(x)$. Załóżmy, że następujące granice istnieją

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0^+) \text{ oraz } \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0^-). \tag{4.14}$$

Ponadto niech ξ będzie całkowalna oraz ξ^+ i ξ^- oznaczają odpowiednio część dodatnią i ujemną zmiennej losowej ξ. Pokażemy, że w tym przypadku warunek (4.3) jest spełniony. Na początku przyjmijmy, że $r > 0$, wtedy

$$\begin{aligned}
F_R(r) &= \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leqslant r\right) = \iint_{\frac{x}{y}\leqslant r} f(x)f(y)dxdy \\
&= 1 - \int_0^\infty \int_0^{\frac{x}{r}} f(x)f(y)dxdy - \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{x}{r}}^0 f(x)f(y)dxdy \\
&= 1 - \frac{1}{r}\int_0^\infty f(x)\left(\int_0^x f\left(\frac{t}{r}\right)dt\right)dx - \frac{1}{r}\int_{-\infty}^0 f(x)\left(\int_x^0 f\left(\frac{t}{r}\right)dt\right)dx.
\end{aligned}$$

Zatem z naszych założeń dotyczących zmiennej losowej ξ mamy

$$\lim_{r\to+\infty} r\overline{F}_R(r) = \mathbb{E}\xi^+ f(0^+) - \mathbb{E}\xi^- f(0^-).$$

Podobnie dla $r < 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F_R(r) &= \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leqslant r\right) = \iint_{\frac{x}{y}\leqslant r} f(x)f(y)dxdy \\
&= \int_0^\infty \int_{\frac{x}{r}}^0 f(x)f(y)dxdy + \int_{-\infty}^0 \int_0^{\frac{x}{r}} f(x)f(y)dxdy \\
&= -\frac{1}{r}\int_0^\infty f(x)\left(\int_0^x f\left(\frac{t}{r}\right)dt\right)dx - \frac{1}{r}\int_{-\infty}^0 f(x)\left(\int_x^0 f\left(\frac{t}{r}\right)dt\right)dx
\end{aligned}$$

oraz

$$\lim_{r\to-\infty} rF_R(r) = -\mathbb{E}\xi^+ f(0^-) + \mathbb{E}\xi^- f(0^+).$$

Zatem dla ilorazów opisanych powyżej możemy stosować wyniki z wcześniejszego podrozdziału. Stąd otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa ξ oraz niech będą również niezależne między sobą. Załóżmy, że ξ ma ograniczoną funkcję gęstości spełniającą (4.14) oraz załóżmy, że $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Niech $R_n = X_n/Y_n$.*

i) Wtedy dla dowolnego $\beta > 0$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_k R_k = \frac{p-q}{\beta} \quad \textit{prawie pewnie,}$$

gdzie $a_n = \left(\lg^{\beta-2} n\right)/n$ oraz $b_n = \lg^\beta n$.

ii) Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ *oraz* $\beta > 0$ *mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k - \frac{p-q}{\beta}\right| > \varepsilon\right) < \infty,$$

gdzie $a_n = (\lg^{\beta-2} n)/n$, $b_n = \lg^{\beta} n$ *oraz* $d_n = \frac{1}{n \lg n}$.

iii) Wtedy dla dowolnego $\beta > 0$ *oraz dowolnej funkcji wolno zmieniającej się* L *mamy*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k R_k \xrightarrow{P} \frac{p-q}{\beta}, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

gdzie $a_n = n^{\beta-1} L(n)$, $b_n = n^{\beta} L(n) \lg n$.

Rozdział 5

DPWL dla pól losowych

Niech $\mathbb{N}^d$, $d \geqslant 1$ będzie d-wymiarową kratą. Oznaczmy przez $\underline{m} = (m_1, m_2, ..., m_d)$ oraz $\underline{n} = (n_1, n_2, ..., n_d)$ elementy tej kraty. Wprowadźmy relację porządku częściowego $\underline{m} \leqslant \underline{n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, 2, ..., d$ mamy $m_i \leqslant n_i$. Będziemy mówić, że pole $b_{\underline{n}}$ jest niemalejące, jeśli dla każdego $\underline{n} \leqslant \underline{m}$ mamy $b_{\underline{n}} \leqslant b_{\underline{m}}$. Połóżmy $|\underline{n}| = \prod_{i=1}^d n_i$. Przypomnijmy, że $\underline{n} \to \infty$ może mieć różne znaczenie, tzn. termin „$\underline{n}$ dąży do nieskończoności" może być rozumiany jako $|\underline{n}| \to \infty$ (równoważnie $\max_{1 \leqslant i \leqslant d}(n_i) \to \infty$) lub $\min_{1 \leqslant i \leqslant d}(n_i) \to \infty$. Zbieżność w sensie maksimum będziemy oznaczać przez $\underline{n} \to \infty$, podczas gdy $\underline{n} \to_{\min} \infty$ będzie oznaczać zbieżność w sensie minimum. Smythe w 1973 roku w artykule [34] sformułował klasyczne prawo wielkich liczb dla pól losowych.

Twierdzenie 5.1 (Smythe) *Niech $(X_{\underline{n}})_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X. Wtedy następujące warunki są równoważne*

$$\lim_{\underline{n} \to \infty} \frac{1}{|\underline{n}|} \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} X_{\underline{k}} = c, \quad \textit{prawie pewnie}$$

dla pewnej stałej c oraz

$$\mathbb{E}|X| \lg^{d-1} |X| < \infty.$$

Naszym celem jest pokazanie wyniku analogicznego do twierdzenia Chowa-Robbinsa dla pól losowych takich, że $\mathbb{E}|X| \lg^{d-1} |X| = \infty$ oraz $\mathbb{E}|X| < \infty$. Jest to jedyny taki wynik dla pól losowych. Istnieje tylko kilka artykułów (patrz [4] oraz [11]) dotyczących dokładnych praw wielkich liczb dla pól losowych. Autorzy wspomnianych prac zakładali, że zmienna losowa X jest niecałkowalna oraz przypadek wielowymiarowy sprowadzali do jednowymiarowego. Pokażemy dokładne prawo wielkich liczb dla pól losowych, gdy zmienna losowa X jest całkowalna, ale $\mathbb{E}|X| \lg^{d-1} |X| = \infty$.

5.1. Analogon do twierdzenia Chowa-Robbinsa

W tym podrozdziale udowodnimy twierdzenie analogiczne do twierdzenia Chowa-Robbinsa (patrz [14]) dla pól losowych.

Lemat 5.1 *Niech* $(X_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ *będzie polem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa* X *oraz niech dane będzie pole niemalejące* $\left(\frac{b_{\underline{n}}}{|\underline{n}|}\right)_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ *dodatnich liczb rzeczywistych. Wtedy*

$$\sum_{\underline{n}\in N^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) = \infty$$

implikuje

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = \infty\right) = 1.$$

Dowód. Zauważmy, że $\mathbb{N}^d = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_d)\in\{e,o\}^d} \mathbb{N}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{i_d}$, gdzie $\mathbb{N}_e = \{2, 4, \ldots\}$ oraz $\mathbb{N}_o = \{1, 3, \ldots\}$ są odpowiednio zbiorem liczb parzystych oraz nieparzystych. Zdefiniujmy funkcję $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ w następujący sposób:

$$\lambda(2n-1) = n,\ \lambda(2n) = n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście funkcje $\lambda|_{\mathbb{N}_e}$ oraz $\lambda|_{\mathbb{N}_o}$ są bijekcjami. Teraz zdefiniujemy funkcję $\Lambda : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$ w taki sposób, że

$$\Lambda(\underline{n}) = \Lambda(n_1, \ldots, n_d) = (\lambda(n_1), \ldots, \lambda(n_d)).$$

Zauważmy, że funkcja Λ jest bijekcją na zbiorze $\mathbb{N}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{i_d}$, dla każdego $(i_1, \ldots, i_d) \in \{e, o\}^d$. Wtedy mamy

$$\frac{b_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} \geqslant \frac{b_{\Lambda(\underline{n})}}{|\Lambda(\underline{n})|}.$$

Zatem dla $\underline{n} \neq (1, 1, \ldots, 1)$ otrzymujemy

$$b_{\underline{n}} \geqslant \frac{|\underline{n}|}{|\Lambda(\underline{n})|} b_{\Lambda(\underline{n})} \geqslant \frac{3}{2} b_{\Lambda(\underline{n})}.$$

Więc

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\{e,o\}^d} \sum_{\underline{n}\in N_{i_1}\times\ldots\times N_{i_d}} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{1}}) + \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\{e,o\}^d} \sum_{\underline{n}\in N_{i_1}\times\ldots\times N_{i_d}} \mathbb{P}(|X| > \frac{3}{2} b_{\Lambda(\underline{n})}) \\
&= \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{1}}) + \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\{e,o\}^d} \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > \frac{3}{2} b_{\underline{n}}) \\
&= \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{1}}) + 2^d \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > \frac{3}{2} b_{\underline{n}}).
\end{aligned}$$

Z założenia $\sum_{\underline{n}\in N^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) = \infty$ dostajemy, że $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}\left(|X| > \frac{3}{2}b_{\underline{n}}\right) = \infty$. Stąd na mocy indukcji wnioskujemy, że

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}\left(|X| > b_{\underline{n}}\right) = \infty \quad \text{implikuje} \quad \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}\left(|X| > \left(\frac{3}{2}\right)^k b_{\underline{n}}\right) = \infty, \tag{5.1}$$

dla każdego $k = 1, 2, \ldots$. W konsekwencji z drugiego lematu Borela-Cantelliego otrzymujemy

$$\mathbb{P}\left(\frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} > \left(\frac{3}{2}\right)^k \quad \text{i.o.}\right) = 1$$

i dlatego

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = \infty\right) = 1.$$

■

Lemat 5.2 *Niech założenia Lematu 5.1 będą spełnione. Wtedy*

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) < \infty$$

implikuje

$$\mathbb{P}\left(\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = 0\right) = 1.$$

Dowód. Załóżmy, że

$$\mathbb{P}(\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = 0) < 1.$$

Wtedy dla pewnego $k = 1, 2, \ldots$ mamy

$$\mathbb{P}\left(\frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} > \frac{1}{(\frac{3}{2})^k} \text{ i.o.}\right) > 0$$

oraz z pierwszego lematu Borela-Cantelliego wnioskujemy, że

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}\left(|X| > \frac{b_{\underline{n}}}{(\frac{3}{2})^k}\right) = \infty.$$

Jednakże, z (5.1) otrzymujemy

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) = \infty.$$

Zatem dochodzimy do sprzeczności, co kończy dowód. ■

Kolejne lematy zostaną poświęcone zachowaniu się sum częściowych zmiennych losowych wielowymiarowo indeksowanych. Niech $S_{\underline{n}} = \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} X_{\underline{k}}$.

Lemat 5.3 *Niech założenia Lematu 5.1 będą spełnione. Wtedy*

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) = \infty$$

implikuje

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|S_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = \infty\right) = 1.$$

Dowód. Załóżmy, że $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) = \infty$. Wtedy z Lematu 5.1 otrzymujemy

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = \infty\right) = 1.$$

Teraz załóżmy, że $\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|S_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = \infty\right) < 1$. Wtedy istnieje pewna skończona stała $c > 0$ taka, że $\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|S_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} < c\right) > 0$, więc

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} \text{ jest ograniczony}\right) > 0. \tag{5.2}$$

Jednakże, mamy

$$\frac{X_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}} = \frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{a}\in\{0,1\}^d} (-1)^{d+\sum_{i=1}^d \underline{a}_i} S_{\underline{n}-\underline{a}},$$

gdzie w powyższej sumie $\underline{a}_i$ oznacza i-tą współrzędną z $\underline{a} = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_d) \in \{0,1\}^d$. Stąd

$$\frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} \leqslant \frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{a}\in\{0,1\}^d} |S_{\underline{n}-\underline{a}}| \leqslant \sum_{\underline{a}\in\{0,1\}^d} \frac{|S_{\underline{n}-\underline{a}}|}{b_{\underline{n}-\underline{a}}}, \tag{5.3}$$

gdyż $b_{\underline{n}}$ jest ciągiem niemalejącym. Rzeczywiście z założenia, że ciąg $\frac{b_{\underline{n}}}{|\underline{n}|}$ jest niemalejący, otrzymujemy, że

$$\frac{b_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} \geqslant \frac{b_{\underline{m}}}{|\underline{m}|}$$

dla $\underline{n} \geqslant \underline{m}$. Stąd

$$b_{\underline{n}} \geqslant \frac{|\underline{n}|}{|\underline{m}|} b_{\underline{m}} \geqslant b_{\underline{m}}.$$

dla $\underline{n} \geqslant \underline{m}$. Zatem z (5.2) dostajemy, że

$$\mathbb{P}\left(\frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} \text{ jest ograniczony}\right) > 0,$$

co jest sprzeczne z wynikiem z Lematu 5.1, że

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|X_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = \infty\right) = 1.$$

Zatem otrzymujemy, że $\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|S_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = \infty\right) = 1.$ ■

Lemat 5.4 *Niech założenia Lematu 5.1 będą spełnione. Ponadto załóżmy, że* $\mathbb{E}|X|\lg^{d-1}|X| = \infty$, $\mathbb{E}|X| < \infty$ *oraz niech*

$$\frac{1}{B}L(x) \leqslant x\mathbb{P}(|X| > x) \leqslant BL(x) \tag{5.4}$$

dla pewnej stałej $B > 0$ *oraz pewnej funkcji wolno zmieniającej się* $L(x)$. *Wtedy warunek* $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) < \infty$ *implikuje* $\mathbb{P}\left(\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{|S_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} = 0\right) = 1$.

Dowód. Dla każdego $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ definiujemy uciętą zmienną losową $Y_{\underline{n}} = X_{\underline{n}}\mathbb{I}[|X_{\underline{n}}| \leqslant b_{\underline{n}}]$. Z naszych założeń wynika, że $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(X_{\underline{n}} \neq Y_{\underline{n}}) < \infty$ i dlatego, z pierwszego lematu Borela-Cantelliego otrzymujemy $\mathbb{P}(X_{\underline{n}} \neq Y_{\underline{n}} \text{ i.o.}) = 0$. Stąd ciągi $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ oraz $\{Y_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ są równoważne. Zatem wystarczy pokazać, że

$$\mathbb{P}\left(\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{n}} |Y_{\underline{i}}| = 0\right) = 1.$$

Skorzystamy z Wniosku 8.1 z [23], aby pokazać, że

$$\frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \left(|Y_{\underline{k}}| - \mathbb{E}|Y_{\underline{k}}|\right) \to 0, \text{ prawie pewnie, gdy } \underline{n} \to \infty.$$

Oczywiste jest, że $\mathbb{E}\left(|Y_{\underline{n}}| - \mathbb{E}|Y_{\underline{n}}|\right) = 0$ oraz z lematu Karamaty mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\left(|Y_{\underline{n}}| - \mathbb{E}|Y_{\underline{n}}|\right)^2}{b_{\underline{n}}^2} &\leqslant \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}X_{\underline{n}}^2\mathbb{I}[|X_{\underline{n}}| \leqslant b_{\underline{n}}]}{b_{\underline{n}}^2} \\
&\leqslant 2\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\int_0^{b_{\underline{n}}} t\mathbb{P}(|X| > t)dt}{b_{\underline{n}}^2} \leqslant 2B\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\int_0^{b_{\underline{n}}} L(t)dt}{b_{\underline{n}}^2} \\
&\leqslant C\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{L(b_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} \leqslant C\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) < \infty.
\end{aligned}$$

Teraz z obserwacji, że $\mathbb{E}|X_{\underline{k}}|\mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant b_{\underline{k}}) \to \mathbb{E}|X|$ oraz $\frac{1}{|\underline{n}|}\sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \mathbb{E}X_{\underline{k}}\mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant b_{\underline{k}}) \to \mathbb{E}X$ mamy

$$\frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \mathbb{E}|Y_{\underline{k}}| = \frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \mathbb{E}X_{\underline{k}}\mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant b_{\underline{k}}) \to 0.$$

Z $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}(|X| > b_{\underline{n}}) < \infty$ oraz $\mathbb{E}|X|\lg^{d-1}|X| = \infty$ wynika, że $\frac{b_{\underline{n}}}{|\underline{n}|}$ nie może być ograniczony. Ponadto z założenia, że ciąg $\frac{b_{\underline{n}}}{|\underline{n}|}$ jest niemalejący, otrzymujemy, że $\frac{b_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} \to \infty$, gdy $\underline{n} \to \infty$. Dlatego

$$\frac{|\underline{n}|}{b_{\underline{n}}} \frac{1}{|\underline{n}|} \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \mathbb{E}|X_{\underline{k}}|\mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant b_{\underline{k}}) \to 0,$$

więc

$$\frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}}|X_{\underline{k}}|\mathbb{I}(|X_{\underline{k}}|\leqslant b_{\underline{k}})=\frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}}|Y_{\underline{k}}|\to 0,\ \text{prawie pewnie, gdy } \underline{n}\to\infty.$$

■

Teraz podamy oraz udowodnimy główny wynik tego podrozdziału.

Twierdzenie 5.2 *Niech $(X_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X, dla której $\mathbb{E}|X|\lg^{d-1}|X|=\infty$, $\mathbb{E}|X|<\infty$, ponadto niech spełnia założenie (5.4). Wtedy dla dowolnego pola stałych $(b_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ albo*

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}\right|=0\right)=1\quad \textit{albo}\quad \mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}\right|=\infty\right)=1$$

i w konsekwencji

$$\mathbb{P}\left(\lim_{\underline{n}\to\infty}\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}=1\right)=0.$$

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie jest fałszywe. Wtedy istnieje pole $(b_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ takie, że

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}\right|=0\right)<1\quad \text{oraz}\quad \mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}\right|=\infty\right)<1$$

równoważnie

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}\right|>0\right)>0 \tag{5.5}$$

oraz

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}\right|<\infty\right)>0. \tag{5.6}$$

Na początku załóżmy, że $\limsup_{\underline{n}\to\infty}\frac{|b_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}<\infty$. Wtedy z (5.6) dostajemy

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{\underline{n}}\right|<\infty\right)>0.$$

Z Lematu 5.3 dla $b_{\underline{n}}=|\underline{n}|$, otrzymujemy $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\mathbb{P}(|X|>b_{\underline{n}})<\infty$, ponieważ w przypadku, gdy $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\mathbb{P}(|X|>b_{\underline{n}})=\infty$ mamy

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty}\left|\frac{S_{\underline{n}}}{\underline{n}}\right|=\infty\right)=1.$$

Z faktu, że $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\mathbb{P}(|X|>|\underline{n}|)<\infty$ jest równoważne z $\mathbb{E}|X|\lg^{d-1}|X|<\infty$, to otrzymujemy sprzeczność. Teraz załóżmy, że $\limsup_{\underline{n}\to\infty}\frac{|b_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}=\infty$. Zdefiniujmy ciąg

$$\alpha_{\underline{n}}=|\underline{n}|\max\left(\frac{|b_{\underline{i}}|}{|\underline{i}|}:\ |\underline{i}|\leqslant|\underline{n}|\right).$$

Oczywiście ciągi $\alpha_{\underline{n}} = \alpha(|\underline{n}|)$ oraz $\frac{\alpha_{\underline{n}}}{|\underline{n}|}$ są dodatnie oraz niemalejące. Zatem istnieje punkt $\underline{i}_k$ taki, że $\max\left(\frac{|b_{\underline{i}}|}{|\underline{i}|} : |\underline{i}| \leqslant |\underline{k}|\right)$ jest osiągnięte dla tego punktu. Wtedy istnieje ciąg liczb całkowitych $|\underline{n}_1| < |\underline{n}_2| < \ldots$ taki, że $\frac{|b_{\underline{i}_k}|}{|\underline{i}_k|} = \max\left(\frac{|b_{\underline{i}}|}{|\underline{i}|} : |\underline{i}| \leqslant k\right) = \max\left(\frac{|b_{\underline{i}}|}{|\underline{i}|} : |\underline{i}| \leqslant |\underline{i}_k|\right) = \frac{\alpha_{\underline{i}_k}}{|\underline{i}_k|}$. Z nierówności $\alpha_{\underline{n}} \geqslant |b_{\underline{n}}|$ oraz (5.6) wynika, że

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\underline{n}\to\infty} \frac{|S_{\underline{n}}|}{\alpha_{\underline{n}}} < \infty\right) > 0.$$

Stąd z Lematu 5.3 mamy $\sum_{\underline{n}\in N^d} \mathbb{P}(|X| > \alpha_{\underline{n}}) < \infty$ i dlatego, z Lematu 5.4

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{\underline{n}\to\infty} \frac{|S_{\underline{n}_k}|}{\alpha_{\underline{n}_k}} = 0\right) = 1$$

z podciągiem $\{\underline{n}_k;\ k \geqslant 1\}$ takim, że $\alpha_{\underline{n}_k} = |b_{\underline{n}_k}|$. W konsekwencji, otrzymujemy

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{\underline{n}\to\infty} \left|\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}\right| = 0\right) = 1,$$

co jest sprzeczne z (5.5). ■

5.2. Dokładne prawo wielkich liczb dla pól losowych

W tym podrozdziale przedstawimy dokładne prawo wielkich liczb dla pól losowych. Zacznijmy od wprowadzenia ciągów ważących. Zdefiniujmy funkcję $c : \langle 1, \infty) \to \langle 0, \infty)$ wzorem $c(x) = x \log x$, oznaczmy przez $c^{-1} : \langle 0, \infty) \to \langle 1, \infty)$ jej odwrotność. Niech $c_{\underline{n}} = c(|\underline{n}|) = |\underline{n}| \log |\underline{n}|$ oraz zdefiniujmy ciąg normujący $b_{\underline{n}} = \log^b n_1 \cdots \log^b n_d$ dla pewnego $b > 0$ oraz $a_{\underline{n}} = b_{\underline{n}}/c_{\underline{n}}$. Ponadto dla $\underline{n} \geqslant \underline{2}$, zdefiniujmy ciąg $w_{\underline{n}} = \frac{\log n_1 + \cdots + \log n_d}{\log n_1 \cdots \log n_d} = \frac{\log |\underline{n}|}{\log n_1 \cdots \log n_d}$ oraz zauważmy, że $w_{\underline{n}} \leqslant d2^{d-1}$.

W naszym dokładnym prawie wielkich liczb dla pól losowych będziemy zakładać, że

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}\left(|X| > c_{\underline{n}}\right) < \infty. \tag{5.7}$$

Z powyższego warunku wynika całkowalność zmiennej losowej X. Aby to pokazać, zauważmy, że (5.7) jest równoważne warunkowi $\mathbb{E}c^{-1}(|X|) \lg^{d-1} c^{-1}(|X|) < \infty$. W konsekwencji

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|X| &= \mathbb{E}c\left(c^{-1}(|X|)\right) \leqslant \mathbb{E}c^{-1}(|X|) \log c^{-1}(|X|) \\ &\leqslant \mathbb{E}c^{-1}(|X|) \lg c^{-1}(|X|) < \infty.\end{aligned}$$

Twierdzenie 5.3 *Niech $(X_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$, $d \geqslant 2$, będzie polem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X. Ponadto załóżmy, że (5.4) oraz (5.7) są spełnione, wtedy*

$$\lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} \frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{2}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{n}} w_{\underline{k}} a_{\underline{k}} X_{\underline{k}} = \frac{\mathbb{E}X}{b^d} \text{ prawie pewnie.}$$

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodów twierdzeń z [4] oraz [10]. Podzielmy naszą sumę na trzy części.

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{2}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{n}} w_{\underline{k}} a_{\underline{k}} X_{\underline{k}} = b_{\underline{n}}^{-1} & \sum_{\underline{2}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{n}} w_{\underline{k}} a_{\underline{k}} [X_{\underline{k}} \mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant c_{\underline{k}}) - \mathbb{E}X\mathbb{I}(|X| \leqslant c_{\underline{k}})] \\ + b_{\underline{n}}^{-1} & \sum_{\underline{2}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{n}} w_{\underline{k}} a_{\underline{k}} X_{\underline{k}} \mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| > c_{\underline{k}}) \\ + b_{\underline{n}}^{-1} & \sum_{\underline{2}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{n}} w_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \mathbb{E}X_{\underline{k}} \mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant c_{\underline{k}}) \\ & = A_1 + A_2 + A_3.\end{aligned}$$

Aby pokazać, że $A_1 \to 0$ prawie pewnie, gdy $\underline{n} \to \infty$, skorzystamy z Wniosku 8.1 z [23]. Podobnie jak było to udowodniane w Lemacie 5.4, otrzymujemy, że

$$\mathbb{E}\left(w_{\underline{n}} a_{\underline{n}} [X_{\underline{n}} \mathbb{I}(|X_{\underline{n}}| \leqslant c_{\underline{n}}) - \mathbb{E}X\mathbb{I}(|X| \leqslant c_{\underline{n}})]\right) = 0$$

oraz

$$\begin{aligned}&\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} (w_{\underline{n}})^2 a_{\underline{n}}^2 \frac{\mathbb{E}X^2\mathbb{I}(|X| \leqslant c_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}^2} \leqslant C \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\int_0^{c_{\underline{n}}} t\mathbb{P}(|X| > t)dt}{c_{\underline{n}}^2} \\ &\leqslant C \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\int_0^{c_{\underline{n}}} L(t)dt}{c_{\underline{n}}^2} \leqslant C \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{L(c_{\underline{n}})}{c_{\underline{n}}} \leqslant C \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \mathbb{P}\left(|X| > c_{\underline{n}}\right) < \infty.\end{aligned}$$

Korzystając z założenia (5.7) oraz z pierwszego lematu Borella–Cantelliego, otrzymujemy, że $A_2 \to 0$ prawie pewnie.

Zauważmy, że $\mathbb{E}X_{\underline{k}}\mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant c_{\underline{k}}) \to \mathbb{E}X$, gdy $\underline{k} \to \infty$. Zatem korzystając z Twierdzenia A.3 mamy

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} b_{\underline{n}}^{-1} \sum_{2\leqslant \underline{k}\leqslant \underline{n}} w_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \mathbb{E}X_{\underline{k}}\mathbb{I}(|X_{\underline{k}}| \leqslant c_{\underline{k}}) \\
= \ & \mathbb{E}X \lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} b_{\underline{n}}^{-1} \sum_{2\leqslant \underline{k}\leqslant \underline{n}} \frac{\log|\underline{k}|}{\log k_1 \cdots \log k_d} \cdot \frac{(\log k_1 \cdots \log k_d)^b}{|\underline{k}| \log|\underline{k}|} \\
= \ & \mathbb{E}X \lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} \frac{1}{(\log n_1 \cdots \log n_d)^b} \sum_{2\leqslant \underline{k}\leqslant \underline{n}} \frac{(\log k_1 \cdots \log k_d)^{b-1}}{k_1 \cdots k_d} \\
= \ & \mathbb{E}X \lim_{n_1\to\infty} \frac{1}{\log^b n_1} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{(\log k_1)^{b-1}}{k_1} \cdots \lim_{n_d\to\infty} \frac{1}{\log^b n_d} \sum_{k_d=2}^{n_d} \frac{(\log k_d)^{b-1}}{k_d} \\
= \ & \frac{\mathbb{E}X}{b^d}.
\end{aligned}
$$

■

5.3. Przykłady i uwagi końcowe

Uwaga 5.1 *We wcześniejszym podrozdziale pokazaliśmy, że z (5.7) wynika* $\mathbb{E}|X| < \infty$. *Z drugiej strony, jeśli* $\mathbb{E}|X|\lg^{d-2}|X| < \infty$, *to (5.7) jest spełnione. Zatem*

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}c^{-1}(|X|)\lg^{d-1} c^{-1}(|X|) \\
= \ & \mathbb{E}c^{-1}(|X|)\lg^{d-1} c^{-1}(|X|)\,\mathbb{I}(|X| < \mathrm{e}) \\
& + \mathbb{E}c^{-1}(|X|)\lg^{d-1} c^{-1}(|X|)\,\mathbb{I}(|X| \geqslant \mathrm{e}) \\
\leqslant \ & \mathbb{E}|X|\lg^{d-1}|X|\,\mathbb{I}(|X| < \mathrm{e}) + \mathbb{E}\left[c^{-1}(|X|)\lg c^{-1}(|X|)\right]\left[\lg^{d-2} c^{-1}(|X|)\right]\mathbb{I}(|X| \geqslant \mathrm{e}) \\
\leqslant \ & \mathrm{e} + \mathbb{E}|X|\lg^{d-2}|X|,
\end{aligned}
$$

ponieważ $c^{-1}(x) \leqslant x$ *dla* $x \geqslant \mathrm{e}$.

Przedstawimy następujący przykład, dla którego nasze dokładne prawo wielkich liczb dla pól losowych może być zastosowane.

Przykład 5.1 *Rozważmy zmienną losową* X *o dystrybuancie*

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2}x, & 0 \leqslant x < \mathrm{e} \\ 1 - \frac{1}{x\log^d(x)}, & x \geqslant \mathrm{e} \end{cases}.
$$

Wtedy

$$
\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \frac{\mathrm{e}+1}{2} + \frac{1}{d-1}
$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X\lg^{d-1}X &= \int_0^\infty 1-\frac{e-1}{e^2}xdx + \int_0^\infty \frac{\log^{d-1}x}{x\log^d x}dx\\ &= e-\frac{e-1}{2}+\int_0^\infty\frac{dx}{x\log x} = e-\frac{e-1}{2}+\log(\log x)|_e^\infty=\infty,\end{aligned}$$

podczas gdy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X\lg^{d-2}X &= e-\frac{e-1}{2}+\int_0^\infty\frac{dx}{x\log^2 x}\\ &= e-\frac{e-1}{2}+\left.\frac{-1}{\log x}\right|_e^\infty = e-\frac{e-1}{2}+1<\infty.\end{aligned}$$

Rozważmy $d \geqslant 2$ wymiarowe pole $(X_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X. Niech $b_{\underline{n}} = (\log n_1\cdots\log n_d)^2$, $c_{\underline{n}} = n_1\cdots n_d\log(n_1\cdots n_d)$ oraz $a_{\underline{n}} = \frac{b_{\underline{n}}}{c_{\underline{n}}}$. Z Twierdzenia 5.3, z $b=2$, mamy

$$\begin{aligned}&\lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty}\frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{2}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{n}} w_{\underline{k}}a_{\underline{k}}X_{\underline{k}}\\ =\ &\lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty}\frac{1}{(\log n_1\cdots\log n_d)^2}\sum_{\underline{2}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{n}}\frac{\log k_1\cdots\log k_d}{k_1\cdots k_d}X_{\underline{k}}\\ =\ &\frac{1}{2^d}\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}+\frac{1}{d-1}\right).\end{aligned}$$

W następnym przykładzie pokażemy, że warunek $\mathbb{E}|X|\lg^{d-1}|X|<\infty$ przy klasycznym mocnym prawie wielkich liczb dla pól losowych nie może być złagodzony do $\mathbb{E}|X|<\infty$.

Przykład 5.2 *Dla pola losowego $(X_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ zmiennych losowych zaprezentowanego z Przykładzie 5.1 założenia Twierdzenia 5.2 są spełnione. Stąd $\mathbb{P}\left(\lim_{\underline{n}\to\infty}\frac{S_{\underline{n}}}{b_{\underline{n}}}=1\right)=0$ dla dowolnego pola stałych $(b_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$. Zatem jeśli założenie $\mathbb{E}|X|\lg^{d-1}|X|<\infty$ w klasycznym mocnym prawie wielkich liczb dla pól losowych złagodzimy do $\mathbb{E}|X|<\infty$, to jedyną drogą, by uzyskać nietrywialną zbieżność, jest badanie sum ważonych tak, jak to zrobiliśmy w Przykładzie 5.1.*

Dodatek A

Dodatek

A.1. Funkcje regularnie oraz wolno zmieniające się

Pojęcie funkcji regularnie oraz wolno zmieniającej się wprowadził Karamata w 1930 roku (patrz [19]). Rozpocznijmy od przypomnienia definicji funkcji wolno zmieniającej się w nieskończoności.

Definicja A.1 *Mówimy, że funkcja dodatnia oraz mierzalna* $L : (a, \infty) \to R$, *gdzie* $a \in \mathbb{R}$ *jest wolno zmieniająca się w nieskończoności, jeśli*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad \textit{dla dowolnego } t > 0.$$

Przykładem funkcji wolno zmieniającej się w nieskończoności jest funkcja logarytm.

Funkcje wolno zmieniające w nieskończoności mają następujące własności:

- jeśli L jest funkcją wolno zmieniającą się, to $\log(L(x))/L(x) \to 0$, gdy $x \to \infty$;
- jeśli L jest funkcją wolno zmieniającą się, to również funkcja $(L(x))^\alpha$ jest wolno zmieniającą się dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$;
- jeśli L_1 oraz L_2 są funkcjami wolno zmieniającymi się, to funkcje $L_1(x) + L_2(x)$, $L_1(x)L_2(x)$ oraz (jeśli dodatkowo $L_2(x) \to \infty$, gdy $x \to \infty$) $L_1(L_2(x))$ są funkcjami wolno zmieniającymi się;
- jeśli $L_1, L_2, ..., L_k$ są funkcjami wolno zmieniającą oraz $r(x_1, x_2, ..., x_k)$ jest funkcją wymierną o dodatnich współczynnikach, to $r(L(x_1), L(x_2), ..., L(x_k))$ jest wolno zmieniająca się;
- jeśli L jest funkcją wolno zmieniającą się oraz $\alpha > 0$, to

$$x^\alpha L(x) \to \infty, \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0, \quad \text{gdy } x \to \infty.$$

Definicja A.2 *Mówimy, że funkcja dodatnia oraz mierzalna f jest funkcją regularnie zmieniającą się z indeksem ρ, jeśli*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(tx)}{f(x)} = t^{\rho}, \quad \text{dla każdego } t > 0.$$

Zbiór tych funkcji będziemy oznaczać przez R_ρ.

Zauważmy, że jeśli $\rho = 0$, to f jest funkcją wolno zmieniającą się.

Uwaga A.1 *Jeśli $f \in R_\rho$, to $f(x) = x^\rho L(x)$, gdzie $L(x)$ jest funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności.*

Twierdzenie A.1 (Karamata) *Niech $f \in R_\rho$ oraz będzie lokalnie ograniczona w przedziale $[X, \infty)$. Wtedy :*

i) dla dowolnego $\sigma \geqslant -(\rho + 1)$,

$$\frac{x^{\rho+1}f(x)}{\int_X^x t^\sigma f(t)dt} \to \sigma + \rho + 1, \quad \text{gdy } x \to \infty;$$

ii) dla dowolnego $\sigma < -(\rho+1)$ (oraz dla $\sigma = -(\rho+1) <$, jeśli $\int_X^\infty t^{-(\rho+1)}f(t)dt < \infty$)

$$\frac{x^{\rho+1}f(x)}{\int_x^\infty t^\sigma f(t)dt} \to -(\sigma + \rho + 1), \quad \text{gdy } x \to \infty.$$

Pokażemy teraz twierdzenie Karamaty w wersji dla ciągów. Niech $f \in R_\rho$ oraz niech f będzie lokalnie ograniczona na przedziale $[X, \infty)$. Zauważmy, że funkcja

$$g(t) = f(\lfloor t \rfloor) \in R_\rho,$$

gdzie $\lfloor t \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leqslant x\}$.

Na początku rozważmy przypadek, gdy $\sigma \geqslant \max\{0, -(\rho + 1)\}$. Zauważmy, że dla każdego $l \in \mathbb{N}$ mamy

$$\int_{l-1}^{l} t^\sigma g(t+1)dt \leqslant g(l)l^\sigma \leqslant \int_l^{l+1} t^\sigma g(t)dt.$$

Niech $k = \lceil X \rceil$. Stąd dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ oraz takiego, że $n \geqslant k$ mamy

$$\int_{k-1}^{n} t^\sigma g(t+1)dt \leqslant \sum_{t=k}^{n} t^\sigma g(t) \leqslant \int_k^{n+1} t^\sigma g(t)dt$$

i w konsekwencji

$$\frac{\int_{k-1}^n t^\sigma g(t+1)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} \leqslant \frac{\sum_{t=k}^n t^\sigma g(t)}{n^{\sigma+1}g(n)} \leqslant \frac{\int_k^{n+1} t^\sigma g(t)dt}{n^{\sigma+1}g(n)}. \tag{A.1}$$

Zajmijmy się na początku prawą stroną powyższej nierówności

$$\begin{aligned}P &= \frac{\int_k^{n+1} t^\sigma g(t)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} = \frac{\int_k^n t^\sigma g(t)dt + \int_n^{n+1} t^\sigma g(t)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} \\ &= \frac{\int_k^n t^\sigma g(t)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} + \frac{\frac{1}{\sigma+1}\left((n+1)^{\sigma+1} - n^{\sigma+1}\right)}{n^{\sigma+1}}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sigma+1}\left((n+1)^{\sigma+1} - n^{\sigma+1}\right)}{n^{\sigma+1}} = 0$$

oraz z twierdzenia Karamaty mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_k^n t^\sigma g(t)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} = \frac{1}{\sigma+\rho+1}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_k^{n+1} t^\sigma g(t)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} \to \frac{1}{\sigma+\rho+1}. \tag{A.2}$$

Zbadamy teraz lewą stronę nierówności (A.1). Przyjmijmy $h(n) = g(n+1)$. Oczywiście $h(n) \in R_\rho$. Wtedy

$$L = \frac{\int_{k-1}^n t^\sigma h(t)dt}{n^{\sigma+1}h(n)\frac{h(n-1)}{h(n)}}.$$

Zauważmy, że $\frac{h(n-1)}{h(n)} \to 1$, gdy $n \to \infty$. Stąd z twierdzenie Karamaty otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{k-1}^n t^\sigma g(t+1)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} = \frac{1}{\sigma+\rho+1}. \tag{A.3}$$

Ostatecznie z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{t=k}^n t^\sigma g(t)}{n^{\sigma+1}g(n)} = \frac{1}{\sigma+\rho+1}.$$

W przypadku, gdy $\sigma < 0$ oraz $\sigma \geqslant -(\rho+1)$. Mamy

$$\frac{\int_{k-1}^n t^\sigma g(t+1)dt}{n^{\sigma+1}g(n)} \geqslant \frac{\sum_{t=k}^n t^\sigma g(t)}{n^{\sigma+1}g(n)} \geqslant \frac{\int_k^{n+1} t^\sigma g(t)dt}{n^{\sigma+1}g(n)}.$$

Podobnie z (A.2) oraz (A.3) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{t=k}^n t^\sigma g(t)}{n^{\sigma+1}g(n)} = \frac{1}{\sigma+\rho+1}.$$

Zatem otrzymaliśmy twierdzenie Karamaty w wersji dla ciągów.

Twierdzenie A.2 *Niech $f \in R_\rho$ oraz będzie lokalnie ograniczona w przedziale $[X, \infty)$. Wtedy dla dowolnego $\sigma \geqslant -(\rho+1)$ oraz $k = \min\{n \in \mathbb{N}:\ n \geqslant X\}$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{t=k}^n t^\sigma f(t)}{n^{\sigma+1}f(n)} = \frac{1}{\sigma+\rho+1}.$$

Twierdzenie A.3 *Niech $f \in R_\rho$ oraz niech dana będzie stała $a \geqslant 0$ taka, że funkcja f na przedziale $[a, \infty)$ jest lokalnie ograniczona. Jeśli $\rho < 0$, to*

$$\overline{f}(x) := \sup\{f(t) : a \leqslant t \leqslant x\} \sim f(x) \quad (x \to \infty),$$

$$\underline{f}(x) := \inf\{f(t) : t \geqslant x\} \sim f(x) \quad (x \to \infty).$$

Jeśli $\rho > 0$, to

$$\sup\{f(t) : t \geqslant x\} \sim f(x) \quad (x \to \infty),$$

$$\inf\{f(t) : a \leqslant t \leqslant x\} \sim f(x) \quad (x \to \infty).$$

A.2. Twierdzenia pomocnicze

W dowodach Twierdzeń 1.1 oraz 1.2 korzystaliśmy z twierdzenia Jajtego z 2003 roku, które możemy znaleźć w [18].

Twierdzenie A.4 *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna losowa X. Ponadto, niech $g(x)$ będzie funkcją dodatnią oraz rosnącą taką, że $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, oraz niech $h(x)$ będzie dodatnią funkcją taką, że $\phi(x) = g(x)h(x)$ spełnia następujące warunki:*

i) Dla pewnego $d \geqslant 0$, ϕ jest ściśle rosnąca na przedziale $[d, \infty)$.

ii) Istnieją stała C oraz liczba naturalna k_0 takie, że $\phi(x+1)/\phi(x) \leqslant C$, dla $x > k_0$.

iii) Istnieją stałe a i b takie, że

$$\phi^2(s) \int_s^\infty \frac{1}{\phi^2(x)} dx \leqslant as + b, \quad \text{dla } s > d.$$

Jeśli $\mathbb{E}\phi^{-1}(|X|) < \infty$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - m_k}{h_k} = 0 \text{ prawie pewnie},$$

gdzie $m_k = \mathbb{E}X\mathbb{I}(|X| \leqslant \phi(x))$ oraz ϕ^{-1} jest funkcją odwrotną do $\phi(x)$.

W dowodzie Twierdzenia 1.7 korzystaliśmy z następujacego twierdzenia, którego dowód możemy znaleźć w [29].

Twierdzenie A.5 *Jeśli $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia założenia (1.2) oraz $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}(Y_n) < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^\infty Y_n$ jest zbieżny prawie pewnie.*

Lemat A.1 *Niech* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oraz* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą ciągami liczb dodatnich liczb rzeczywistych takimi,że*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} \quad oraz \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n = \infty.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{b}\alpha_k A_k = a$$

dla pewnej stałej a, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{b}\alpha_k B_k = a.$$

Lemat A.2 *(Kroneckera) Niech* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie rosnącym ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takim, że* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *oraz niech* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *jest zbieżny. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0.$$

Twierdzenie A.6 *(O dwóch szeregach) Niech* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Jeśli szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}X_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}Var(X_n)$$

są zbieżne, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *jest zbieżny prawie pewnie.*

Przy dowodach DPWL ze zbieżnością według prawdopodobieństwa korzystaliśmy z następującego twierdzenia, które możemy znaleźć w [17].

Twierdzenie A.7 *Niech* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych oraz niech* $S_n = \sum_{k=1}^{n}$. *Ponadto, niech dany będzie rosnący ciąg dodatnich liczb rzeczywistych* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *taki, że* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. *Dla* $k = 1, 2..., n$, $n \geqslant 1$, *wprowadźmy oznaczenia :*

$$Y_{k,n} = X_k\mathbb{I}(|X_k| < b_n), \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{k,n}, \quad \mu_n = \mathbb{E}S'_n.$$

Jeśli

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|X_k| > b_n) \to 0, \quad gdy\ n \to \infty$$

oraz

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} VarY_{k,n} \to 0, \quad gdy\ n \to \infty,$$

to

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0, \quad gdy\ n \to \infty.$$

W dowodzie twierdzenia ze zbieżnością kompletną dla rozkładów typu asymetrycznego Pareta korzystaliśmy z następującego twierdzenia (patrz [35]).

Twierdzenie A.8 *Niech* $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant k_n}$ *będzie tablicą zmiennych losowych, w której zmienne losowe w każdym wierszu są niezależne oraz niech dany będzie ciąg dodatnich stałych* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *taki, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty.$$

Załóżmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ *oraz pewnego* $\delta > 0$*:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{P}(|X_{nk}| > \varepsilon) < \infty$,

(ii) istnieje $J \geqslant 2$ *takie, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}X_{nk}^2 \mathbb{I}[|X_{nk}| < \delta] \right)^J < \infty,$$

(iii)

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}X_{nk}\mathbb{I}[|X_{nk}| \leqslant \delta] \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbb{P}\left(\left| \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \right| > \varepsilon \right) < \infty$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Przypomnimy teraz twierdzenia dotyczące pól losowych.

Lemat A.3 *Niech* $(A_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ $(B_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$, $(\alpha_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ *oraz* $(\beta_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}$ *będą polami dodatnich liczb rzeczywistych takimi, że*

$$\lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} \frac{A_{\underline{n}}}{B_{\underline{n}}} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} \beta_{\underline{n}} = \infty.$$

Wtedy

$$\lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} \frac{1}{\beta_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \alpha_{\underline{k}} A_{\underline{k}} = a \tag{A.4}$$

dla pewnej stałej a*, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} \frac{1}{\beta_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \alpha_{\underline{k}} B_{\underline{k}} = a. \tag{A.5}$$

Dowód. Załóżmy, że (A.5) jest spełnione. Niech będzie dany $\varepsilon > 0$.
Z założenia, że

$$\lim_{\underline{n}\to_{\min}\infty} \frac{A_{\underline{n}}}{B_{\underline{n}}} = 1$$

wynika, że istnieje $\underline{n_0}(\varepsilon)$ taki, że $\underline{n} \geqslant \underline{n_0}$ mamy

$$\left| \frac{A_{\underline{n}}}{B_{\underline{n}}} - 1 \right| < \varepsilon,$$

dla $\underline{n} \geqslant \underline{n_0}$. Stąd

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{A_{\underline{n}}}{B_{\underline{n}}} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Więc

$$(1-\varepsilon)B_{\underline{n}} \leqslant A_{\underline{n}} \leqslant (1+\varepsilon)B_{\underline{n}}.$$

Wtedy

$$\frac{1}{\beta_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}=\underline{n_0}}^{\underline{n}} \alpha_{\underline{n}} B_{\underline{n}}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\beta_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}=\underline{n_0}}^{\underline{n}} \alpha_{\underline{n}} A_{\underline{n}} \leqslant \frac{1}{\beta_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}=\underline{n_0}}^{\underline{n}} \alpha_{\underline{n}} B_{\underline{n}}(1+\varepsilon).$$

Z faktu, że ε był wybrany dowolnie, otrzymujemy (A.4). W drugą stronę dowód jest analogiczny. ■

Lemat A.4 *(Borela – Cantelliego) Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech* $\{A_{\underline{n}}\}_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \in \mathcal{F}$ *będzie rodziną zdarzeń. Oznaczmy przez*

$$\{A_{\underline{n}},\ i.o\} = \bigcap_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \bigcup_{\underline{k} \nleqslant \underline{n}} A_{\underline{k}}.$$

Wtedy

1. *jeśli* $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \mathbb{P}(A_{\underline{n}}) < \infty$, *to* $\mathbb{P}(A_{\underline{n}},\ i.o) = 0$;
2. *jeśli zdarzenia* $(A_{\underline{n}})_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d}$ *są parami niezależne oraz* $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \mathbb{P}(A_{\underline{n}}) = \infty$, *to* $\mathbb{P}(A_{\underline{n}},\ i.o) = 1$.

Bibliografia

[1] A. Adler, *Complete exact laws*, Probab. Math. Statist. 20, 215-222, 2000,

[2] A. Adler, *Exact strong laws*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 28, 141 -166, 2000,

[3] A. Adler, *Exact laws for sums of ratios of order statistics from the Pareto distribution*, Cent. Eur. J. Math. 4, 1–4, 2006,

[4] A. Adler, *Exact strong laws for multidimensionally indexed random variables*, J. Multivariate Anal. 77, 73-83, 2001,

[5] A. Adler, *Laws of large numbers for asymmetrical Cauchy random variables*, J. Appl. Math. Stoch. Anal., Art. ID 56924, 6 pp. 2007,

[6] A. Adler, *Laws of large numbers for ratios of uniform random variables*, Open Math. 13, 571-576, 2015,

[7] A. Adler, *Laws of large numbers for two tailed Pareto random variables*, Probab. Math. Statist. 28, 121-128, 2008,

[8] A. Adler, *Strong laws for ratios of order statistics from exponentials*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 10(1), 101-111, 2015,

[9] A. Adler, *Strong laws for the largest ratio of adjacent order statistics*. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 12(4), 315-323, 2017,

[10] A. Adler, P. Matuła, *On exact strong laws of large numbers under general dependence conditions*, Probab. Math. Statist. 38, 103-121, 2018,

[11] A. Adler, Y. Qi, *On exact strong laws for sums of multidimensionally indexed random variables*, Probab. Math. Statist. 23, 305-313, 2003,

[12] B. C. Arnold, N. Balakrishnan, H. N. Nagaraja, *A First Course in Order Statistics*, SIAM, Philadelphia, 2008,

[13] N.H. Bingham, G.M. Goldie, J.T. Teugels, *Regular variation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987,

[14] Y.S. Chow, H. Robbins, *On sum of independent random variables with infinite moments and "fair" games*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47, 330-335, 1961,

[15] N. Etemadi, *An elementary proof of the strong law of large numbers*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 55, 119–122, 1981,

[16] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, 2nd ed., Wiley, New York, 1971,

[17] A. Gut, *Probability: A graduate course 2nd ed.*, Springer, New York, 2013,

[18] R. Jajte, *On the strong law of large numbers*, Ann. Probab. 31, No. 1, 409 - 412, 2003,

[19] J. Karamata, *Sun un mode de croissance réguliére des fonctions*, Mathematica (Cluj) 4, 38 - 53, 1930,

[20] D. H. Hong, J. M. Park, *Exact sequences for sums of pairwise i.i.d. random variables*, Bull. Korean Math. Soc. 30, 167–170, 1993,

[21] P. Kurasiński , P. Matuła , *Exact weak laws of large numbers with applications to ratios of random variables*, Appl. Math. 47, 59-66, 2020,

[22] P. Kurasiński, P. Matuła, A. Adler, *Exact strong laws of large numbers for independent random fields*, Bulletin Polish Acad. Sci. Math. 66, No. 2, 179-188, 2018,

[23] O. Klesov, *Limit theorems for multi-indexed sums of random variables*, Springer, 2014, 1153, 1966,

[24] R. A. Maller, *Relative stability and the strong law of large numbers*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 43, 141–148, 1978,

[25] P. Matuła, A. Adler, P. Kurasiński, *On exact strong laws of large numbers for ratios of random variables and their applications*, Commun. Stat. - Theory Methods 49, 3153-3167, 2020,

[26] P. Matuła, P. Kurasiński, A. Adler, *Exact strong laws of large numbers for ratios of the smallest order statistics*, Statist. Probab. Lett. 152, 69-73, 2019,

[27] P. Matuła, P. Kurasiński. A. Adler, H. Naderi, *A Note on Exact Laws of Large Numbers for Asymmetric Pareto-type Distributions with Applications to Ratios of Random Variables*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica New Series 15 (2), 177- 186, 2020

[28] T. Nakata, *Weak laws of large numbers for weighted independent random variables with infinite mean*, Statist. Probab. Lett. 109, 124-129, 2016,

[29] V. V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables*, Clarendon Press, Oxford 1995,

[30] H. Xu, X. Li, W. Yang, F. Xu, *Laws of large numbers with infinite mean*, J. Math. Inequal. 13 , 335-349, 2019,

[31] S. Xu, C. Mei, Y. Miao, *Limit theorems for ratios of order statistics from uniform distributions*, J. Inequal. Appl., 2019, DOI: 10.1186/s13660-019-2256-7.

[32] Y. Miao, Y. Sun, R. Wang, M. Dong, *Various limit theorems for ratios from the uniform distribution*, Open Math. 14, 393-403, 2016,

[33] Y. Miao, R. Wang, A. Adler, *Limit theorems for order statistics from exponentials*, Statist. Probab. Lett. 110, 51-57, 2016,

[34] R.T. Smythe, *Strong laws of large numbers for r-dimensional arrays of random variables*, Ann. Probab. 1, 164-170, 1973,

[35] S.H. Sung, A.I. Volodin, T.C. Hu, *More on complete convergence for arrays*, Statist. Probab. Lett. 71, 303-311. 2005,

[36] Xu, S.-F., Y. Miao, *Some limit theorems for ratios of order statistics from uniform random variables*, J. Inequal. Appl., 2017, DOI: 10.1186/s13660-017-1569-7,

[37] Y. Zhang, X. Ding, *Limit properties for ratios of order statistics from exponentials*, J. Inequal. Appl. 11, 1-8, 2017,

[38] L. X. Zhang, X. Y. Wang, *Convergence rates in the strong laws of asymptotically negatively associated random fields*, Appl. Math. J. Chinese Univ. 14, 406–416, 1999.