Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Maciej Parol

Przedłużenia holomorficzne iloczynu Hadamarda funkcji holomorficznych

Praca doktorska
napisana pod kierunkiem
dr hab. Dariusza Partyki, prof. KUL

Lublin 2022

Pragnę złożyć serdeczne
podziękowania mojemu promotorowi Panu
dr hab. prof. KUL Dariuszowi Partyce
za poświęcony czas oraz za wszelką pomoc
udzieloną w trakcie przygotowywania rozprawy
doktorskiej. W szczególności dziękuję Panu
Profesorowi za cierpliwość i wyrozumiałość
oraz za przekazaną mi przez te lata wiedzę.

Spis treści

Wstęp

Oznaczmy przez $\mathrm{Hol}(\Omega)$ klasę wszystkich funkcji holomorficznych w obszarze Ω. Tu i w dalszym ciągu przyjmujemy, że wszystkie pojęcia topologiczne odnoszą się do rozszerzonej płaszczyzny zespolonej $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}}) := (\hat{\mathbb{C}}, \rho)$, gdzie ρ jest metryką cięciwową. W szczególności $\mathrm{cl}(A)$ i $\mathrm{int}(A)$ oznaczają odpowiednio domknięcie i wnętrze zbioru $A \subset \hat{\mathbb{C}}$. Dla dowolnych $a \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ oznaczamy $\mathbb{D}(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ oraz $\bar{\mathbb{D}}(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$. W szczególności przyjmujemy $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0,1)$ oraz $\bar{\mathbb{D}} := \bar{\mathbb{D}}(0,1)$. *Iloczyn Hadamarda funkcji f i g* holomorficznych w pewnym otoczeniu punktu 0 definiujemy wzorem

$$\mathbb{D}(0, \mathrm{R}_{f,g}) \ni z \mapsto f * g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)g^{(n)}(0)}{(n!)^2} z^n, \tag{0.1}$$

gdzie

$$\mathrm{R}_{f,g} := \left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \cdot \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!}} \right)^{-1}; \tag{0.2}$$

por. [3], [4]. Na przykład, stosując wzory (0.1) i (0.2) do funkcji $\mathbb{C} \setminus \{1\} \ni z \mapsto f(z) := 1/(1-z)$ i $g := f$ obliczamy $f * g = f|_{\mathbb{D}}$. Z drugiej strony iloczyn Hadamarda $f * g$ ma holomorficzne rozszerzenie do funkcji f. Oznacza to, że w pewnych przypadkach iloczyn Hadamarda $f * g$ może zostać rozszerzony holomorficznie poza koło $\mathbb{D}(0, \mathrm{R}_{f,g})$. Zatem dla zadanych obszarów $A, B \subset \mathbb{C}$ zawierających 0 możemy szukać obszarów Ω takich, że dla dowolnych $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$ iloczyn Hadamarda $f * g$ ma holomorficzne rozszerzenie na obszar zawierający Ω. Aby sprecyzować ten problem oznaczmy

$$\rho(D) := \sup(\{r \geqslant 0 : \mathbb{D}(0,r) \subset D\}) \tag{0.3}$$

dla zbioru $D \subset \mathbb{C}$ zawierającego 0. Zauważmy, że dla wszystkich obszarów $A, B \subset \mathbb{C}$ zawierających 0, zachodzi warunek

$$\rho(A)\rho(B) \leqslant \mathrm{R}_{f,g}, \quad f \in \mathrm{Hol}(A),\ g \in \mathrm{Hol}(B). \tag{0.4}$$

Dla zadanych obszarów $A, B \subset \mathbb{C}$ zawierających 0 rozważamy klasę $\mathcal{H}_1(A, B)$ wszystkich obszarów $\Omega \subset \mathbb{C}$ takich, że $D := \mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B)) \subset \Omega$ oraz dla dowolnych

$f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$ istnieje funkcja $h \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, która pokrywa się z $f * g$ w D, tj.,

$$h(z) = f * g(z), \quad z \in \mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B)). \tag{0.5}$$

Innymi słowy funkcja $(f * g)|_D$ ma rozszerzenie holomorficzne h na każdy obszar $\Omega \in \mathcal{H}_1(A, B)$. Zatem dla dowolnych obszarów Ω i Ω', jeżeli $\Omega \in \mathcal{H}_1(A, B)$ i $0 \in \Omega' \subset \Omega$, to $\Omega' \in \mathcal{H}_1(A, B)$. W naturalny sposób pojawia się pytanie o maksymalny w sensie inkluzji obszar $\Omega \in \mathcal{H}_1(A, B)$. Wyznaczenie górnego ograniczenia klasy $\mathcal{H}_1(A, B)$ jest dość łatwe. Ustalmy dowolnie $u \in \mathbb{C} \setminus A$ i $v \in \mathbb{C} \setminus B$. Przyjmując

$$\mathbb{C} \setminus \{u\} \ni z \mapsto f(z) := \frac{1}{1 - \frac{z}{u}} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{C} \setminus \{v\} \ni z \mapsto g(z) := \frac{1}{1 - \frac{z}{v}}$$

widzimy, że $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$. Ponadto,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u^n} z^n, \quad z \in \mathbb{D}(0, |u|) \quad \text{oraz} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{v^n} z^n, \quad z \in \mathbb{D}(0, |v|),$$

skąd

$$f * g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(uv)^n} z^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{uv}}, \quad z \in \mathbb{D}(0, |uv|).$$

Zatem $uv \notin \Omega$ dla $\Omega \in \mathcal{H}_1(A, B)$, i w konsekwencji

$$(\hat{\mathbb{C}} \setminus A) \cdot (\hat{\mathbb{C}} \setminus B) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega, \quad \Omega \in \mathcal{H}_1(A, B), \tag{0.6}$$

gdzie dla dowolnych zbiorów niepustych $X, Y \subset \hat{\mathbb{C}}$,

$$X \cdot Y := \{xy : x \in X \wedge y \in Y \wedge (x \neq 0 \neq y \vee x \neq \infty \neq y)\}. \tag{0.7}$$

Przyjmujemy tutaj $c \cdot \infty := \infty$ oraz $\infty \cdot c := \infty$ dla $c \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Dodatkowo określamy $\emptyset \cdot X := \emptyset$ oraz $X \cdot \emptyset := \emptyset$ dla $X \in 2^{\hat{\mathbb{C}}}$. Standardowy symbol 2^X oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X. Definiując

$$X^{\complement} := \hat{\mathbb{C}} \setminus X \quad \text{oraz} \quad X * Y := (X^{\complement} \cdot Y^{\complement})^{\complement}, \quad X, Y \in 2^{\hat{\mathbb{C}}}, \tag{0.8}$$

możemy przeformułować warunek (0.6) w następujący sposób

$$\Omega \subset A * B, \quad \Omega \in \mathcal{H}_1(A, B). \tag{0.9}$$

W ten sposób została zdefiniowana operacja dwuargumentowa $*$ na zbiorze $2^{\hat{\mathbb{C}}}$. Zbiór $A * B$ będziemy nazywać *splotem zbiorów* $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$. Na przykład, dla dowolnych $r_1, r_2 > 0$ mamy

$$\mathbb{D}(0, r_1) * \mathbb{D}(0, r_2) = \mathbb{D}(0, r_1 r_2).$$

Splotowi zbiorów i jego własnościom jest w całości poświęcony pierwszy rozdział niniejszej rozprawy. Ponieważ $\Omega \in \mathcal{H}_1(A, B)$ jest zbiorem spójnym, więc z (0.9) wynika, że

$$\Omega \subset \mathrm{CC}_0(A * B), \quad \Omega \in \mathcal{H}_1(A, B). \tag{0.10}$$

gdzie $\mathrm{CC}_z(X)$ oznacza składową spójną zbioru $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ zawierającą z, tj.,

$$\mathrm{CC}_z(X) := \bigcup_{V \in \mathcal{F}_z} V,$$

gdzie

$$\mathcal{F}_z := \left\{ V \in 2^{\hat{\mathbb{C}}} : z \in V \subset X \wedge V \text{ jest zbiorem spójnym} \right\}.$$

Problem holomorficznego rozszerzania funkcji $(f*g)|_D$ na obszary zależne tylko od A i B jest dość stary; por. [4]. Ostatnio był badany przez Grosse-Erdmann'a w [2], Lorson'a w [9] i [10], jak również przez Müller'a i Pohlen'a w [13]. Naturalnym pytaniem jest czy w inkluzji (0.10) może pojawić się równość. Ostateczne rozwiązanie tego problemu zostało podane w 1992 roku przez Müller'a. Udowodnił on w [12], że dla dowolnych obszarów A i B zawierających 0, $\mathrm{CC}_0(A * B) \in \mathcal{H}_1(A, B)$, tj., $\mathrm{CC}_0(A * B)$ jest maksymalnym w sensie inkluzji obszarem w $\mathcal{H}_1(A, B)$. Swój rezultat nazwał *twierdzeniem o multiplikacji Hadamarda*. Jeśli obszary $A, B \subset \mathbb{C}$ są jednospójne, to rozszerzenie h funkcji $(f * g)|_D$ można scharakteryzować w bardziej konstruktywny sposób (por. uwaga 2.13) oparty o następującą koncepcję uogólnienia iloczynu Hadamarda $*$. Mając dane zbiory otwarte $A, B \subset \mathbb{C}$ oznaczmy przez $\mathcal{H}_2(A, B)$ klasę wszystkich zbiorów otwartych $\Omega \subset \mathbb{C}$, dla których istnieje operator $T : \mathrm{Hol}(A) \times \mathrm{Hol}(B) \to \mathrm{Hol}(\Omega)$ spełniający następujące warunki:

(0.11) $T(f, g) = f * g$ dla wszystkich wielomianów f and g;

(0.12) Dla wszystkich ciągów $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n \in \mathrm{Hol}(A)$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto g_n \in \mathrm{Hol}(B)$ oraz wszystkich $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$, jeśli $f_n \xrightarrow{\mathrm{ucc}} f$ w A, gdy $n \to +\infty$, i $g_n \xrightarrow{\mathrm{ucc}} g$ w B, gdy $n \to +\infty$, to $T(f_n, g_n) \xrightarrow{\mathrm{ucc}} T(f, g)$ w Ω, gdy $n \to +\infty$.

Tu i w dalszym ciągu symbol $\xrightarrow{\mathrm{ucc}}$ oznacza zbieżność niemal jednostajną. Dla przykładu

$$\Omega := \mathbb{D}(0, r_1 r_2) \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D}(0, r_1), \mathbb{D}(0, r_2)), \quad r_1, r_2 > 0. \tag{0.13}$$

Definiując bowiem dla dowolnie zadanych $r_1, r_2 > 0$ operator T za pomocą wzoru

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, r_1)) \times \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, r_2)) \ni (f, g) \mapsto T(f, g) := f * g,$$

stwierdzamy na mocy wzorów (0.1) i (0.2), że $\Omega \subset \mathbb{D}(0, \mathrm{R}_{f,g})$ i $T(f,g) \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ dla $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_1))$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_2))$ oraz zachodzi warunek (0.11). Drugi warunek (0.12) można wyprowadzić z reprezentacji całkowej (0.14) iloczynu Hadamarda zwanej *wzorem całkowym Parsevala.*

Twierdzenie 0.1 ([4, p. 84]). *Dla dowolnych* $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *oraz* $z \in \mathbb{D}$ *równość*

$$f * g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}^+(0,r)} f(u) g\Big(\frac{z}{u}\Big) \frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{0.14}$$

zachodzi dla każdego $r \in (|z|;1)$*, gdzie* $[0;2\pi] \ni t \mapsto \mathbb{T}^+(0,r)(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

W przypadku dowolnych obszarów jednospójnych $A, B \subset \mathbb{C}$ zawierających zero zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 0.2 ([14, Theorem 3.1]). *Dla dowolnych obszarów jednospójnych* $A, B \subset \mathbb{C}$*, jeżeli* $0 \in A \cap B$*, to splot* $A * B$ *jest zbiorem otwartym oraz istnieje operator* $T : \mathrm{Hol}(A) \times \mathrm{Hol}(B) \to \mathrm{Hol}(A*B)$ *spełniający dla wszystkich* $f \in \mathrm{Hol}(A)$ *i* $g \in \mathrm{Hol}(B)$ *warunek*

$$T(f,g)(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \frac{\mathrm{d}u}{u}, \quad z \in A * B \setminus \{0\}, \gamma \in \mathcal{P}_0\Big(A \cap \frac{z}{B}\Big), \tag{0.15}$$

gdzie $\mathcal{P}_0(A \cap (z/B))$ *jest klasą określoną wzorem* (2.16). *W szczególności, operator* T *spełnia warunki* (0.11) *i* (0.12)*, czyli* $A * B \in \mathcal{H}_2(A,B)$.

Powyższe rozważania są rozwijane w rozdziale drugim w odniesieniu do uogólnionego iloczynu Hadamarda H_λ, gdzie $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ jest dowolnie zadanym ciągiem spełniającym warunek (2.1); por. definicja 2.2. Główna idea polega na zastąpieniu w równości (0.14) funkcji $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni u \mapsto 1/u$ przez funkcję holomorficzną w pierścieniu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, której współczynniki rozwinięcia Laurenta w tym pierścieniu są zadane poprzez wyrazy ciągu λ. W szczególnym przypadku, gdy $\lambda_0 := 1$ i $\lambda_k := 0$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathrm{H}_\lambda(f,g)(z) = f*g(z)$ dla dowolnych funkcji f i g holomorficznych w pewnym otoczeniu punktu zero i $z \in \mathbb{D}(0, \mathrm{R}_f \mathrm{R}_g)$, gdzie R_f i R_g są odpowiednio promieniami zbieżności rozwinięć tych funkcji w otoczeniu zera; por. uwaga 2.3. Zastępując iloczyn Hadamarda $*$ przez uogólniony iloczyn Hadamarda H_λ można w naturalny sposób określić odpowiedniki $\mathcal{H}_1^\lambda(A,B)$ i $\mathcal{H}_2^\lambda(A,B)$ klas $\mathcal{H}_1(A,B)$ i $\mathcal{H}_2(A,B)$. Wiodącym wynikiem rozdziału drugiego jest twierdzenie 2.11, które rozszerza twierdzenie 0.2 na przypadek uogólnionego iloczynu Hadamarda H_λ. Z niego wynika wniosek 2.12 dotyczący klasy $\mathcal{H}_1^\lambda(A,B)$, czyli uniwersalnych obszarów rozszerzalności holomorficznej uogólnionych iloczynów Hadamarda funkcji z klas $\mathrm{Hol}(A)$ i $\mathrm{Hol}(B)$. Uogólnioną wersję wzoru całkowego Parsevala (0.14) prezentuje twierdzenie 2.10.

Trzeci rozdział niniejszej rozprawy zawiera przykłady zastosowań twierdzeń udowodnionych w pierwszym i drugim rozdziale. W szczególności są to zastosowania charakteryzacji splotu zbiorów przedstawionej w twierdzeniu 1.11, charakteryzacji splotu obszarów spiralnych względem 0 przedstawionej w twierdzeniu 1.45 oraz twierdzenia 2.11 i wniosku 2.12.

Rozdział 1

Splot zbiorów

Splot zbiorów pełni ważną rolę w badaniu przedłużalności holomorficznej iloczynów Hadamrada. W niniejszym rozdziale skupimy się na jego własnościach oraz alternatywnych charakteryzacjach.

1.1 Podstawowe własności

Niniejszy podrozdział przedstawia podstawowe własności splotu zbiorów wraz z dowodami wynikającymi bezpośrednio z jego definicji.

Lemat 1.1. *Struktury* $(2^{\hat{\mathbb{C}}};\cdot)$ *i* $(2^{\hat{\mathbb{C}}};*)$ *są izomorficzne. Ponadto funkcja* $2^{\hat{\mathbb{C}}} \ni A \mapsto \varphi(A) := A^{\complement}$ *jest izomorfizmem struktury* $(2^{\hat{\mathbb{C}}};*)$ *na strukturę* $(2^{\hat{\mathbb{C}}};\cdot)$.

Dowód. Oczywiście funkcja φ jest bijekcją zbioru $2^{\hat{\mathbb{C}}}$ na siebie. Ponadto dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$ zachodzi równość

$$\varphi(A * B) = \varphi\Big(\big(A^{\complement} \cdot B^{\complement}\big)^{\complement}\Big) = A^{\complement} \cdot B^{\complement} = \varphi(A) \cdot \varphi(B).$$

Zatem funkcja φ jest izomorfizmem struktury $(2^{\hat{\mathbb{C}}};*)$ na strukturę $(2^{\hat{\mathbb{C}}};\cdot)$, a więc są one izomorficzne, co było do wykazania. □

Wniosek 1.2. *Struktura* $(2^{\hat{\mathbb{C}}};*)$ *jest półgrupą przemienną z elementem neutralnym* $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$.

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory $A, B, C \subset \hat{\mathbb{C}}$. Wykażemy, że

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C). \tag{1.1}$$

Jeśli jeden ze zbiorów A, B i C jest pusty to $(A \cdot B) \cdot C = \emptyset = A \cdot (B \cdot C)$, a więc równość (1.1) jest prawdziwa. Możemy więc założyć, że wszystkie zbiory A, B i C są niepuste. Ustalmy dowolnie $z \in \mathbb{C}$. Jeśli $z \in (A \cdot B) \cdot C$, to $z = (ab)c$ dla pewnych $a \in A \setminus \{\infty\}$, $b \in B \setminus \{\infty\}$ i $c \in C \setminus \{\infty\}$, skąd $z = a(bc) \in A \cdot (B \cdot C)$. To dowodzi inkluzji $((A \cdot B) \cdot C) \setminus \{\infty\} \subset (A \cdot (B \cdot C)) \setminus \{\infty\}$. Analogicznie dowodzimy inkluzji przeciwnej. Dlatego

$$((A \cdot B) \cdot C) \setminus \{\infty\} = (A \cdot (B \cdot C)) \setminus \{\infty\}. \tag{1.2}$$

Ponadto $\infty \in (A \cdot B) \cdot C$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\infty \in A \wedge B \neq \{0\} \neq C) \vee (\infty \in B \wedge A \neq \{0\} \neq C) \vee (\infty \in C \wedge A \neq \{0\} \neq B).$$

Z drugiej strony powyższy warunek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\infty \in A \cdot (B \cdot C)$. Obie równoważności dają łącznie równość

$$((A \cdot B) \cdot C) \cap \{\infty\} = (A \cdot (B \cdot C)) \cap \{\infty\}. \tag{1.3}$$

Sumując stronami równości (1.2) i (1.3) otrzymujemy równość (1.1), czyli $\cdot$ jest operacją łączną. Przemienność operacji $\cdot$ wynika natychmiast ze wzoru (0.7). Dodatkowo dla każdego zbioru $A \subset \hat{\mathbb{C}}$, $\{1\} \cdot A = A$. Zatem struktura $(2^{\hat{\mathbb{C}}}; \cdot)$ jest półgrupą przemienną z elementem neutralnym $\{1\}$. Stosując teraz lemat 1.1 stwierdzamy ostatecznie, że struktura $(2^{\hat{\mathbb{C}}}; *)$ jest półgrupą przemienną z elementem neutralnym $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$, co kończy dowód. $\square$

W celu zwiększenia czytelności wyrażeń zawierających operacje teoriomnogościowe i operację splotu zbiorów będziemy stale zakładać, że operacja $*$ ma wyższy priorytet niż operacje $\cup$, $\cap$ oraz $\setminus$.

Lemat 1.3. *Dla dowolnych zbiorów $A, B, C, D \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeśli $A \subset C$ i $B \subset D$, to zachodzi inkluzja $A * B \subset C * D$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory $A, B, C, D \subset \hat{\mathbb{C}}$ takie, że $A \subset C$ i $B \subset D$. Wtedy $C^\complement \subset A^\complement$ i $D^\complement \subset B^\complement$, skąd $C^\complement \cdot D^\complement \subset A^\complement \cdot B^\complement$. Dlatego

$$A * B = (A^\complement \cdot B^\complement)^\complement \subset (C^\complement \cdot D^\complement)^\complement = C * D,$$

co kończy dowód. $\square$

Wniosek 1.4. *Dla dowolnych zbiorów $A, B, C \subset \hat{\mathbb{C}}$ zachodzi równość*

$$A * (B \cap C) = A * B \cap A * C. \tag{1.4}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory $A, B, C \subset \hat{\mathbb{C}}$. Z lematu 1.3 wynika, że

$$A * (B \cap C) \subset A * B \quad \text{oraz} \quad A * (B \cap C) \subset A * C,$$

skąd

$$A * (B \cap C) \subset A * B \cap A * C. \tag{1.5}$$

Pozostaje wykazać inkluzję przeciwną. Jeśli $A^{\complement} \cdot (B^{\complement} \cup C^{\complement}) = \emptyset$ to inkluzja

$$A^{\complement} \cdot (B^{\complement} \cup C^{\complement}) \subset (A^{\complement} \cdot B^{\complement}) \cup (A^{\complement} \cdot C^{\complement}) \tag{1.6}$$

jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy więc, że $A^{\complement} \cdot (B^{\complement} \cup C^{\complement}) \neq \emptyset$. Wtedy dla dowolnie zadanego $z \in A^{\complement} \cdot (B^{\complement} \cup C^{\complement})$ istnieją $x \in A^{\complement}$ i $y \in B^{\complement} \cup C^{\complement}$ takie, że $z = x \cdot y$ i zachodzi alternatywa $x \neq 0 \neq y$ lub $x \neq \infty \neq y$. Stąd $x \cdot y \in A^{\complement} \cdot B^{\complement}$ lub $x \cdot y \in A^{\complement} \cdot C^{\complement}$, i w konsekwencji $z \in (A^{\complement} \cdot B^{\complement}) \cup (A^{\complement} \cdot C^{\complement})$. Dlatego inkluzja (1.6) zachodzi w każdym przypadku. Z inkluzji (1.6) wynika, że

$$\begin{aligned}[A * (B \cap C)]^{\complement} &= A^{\complement} \cdot (B^{\complement} \cup C^{\complement}) \subset (A^{\complement} \cdot B^{\complement}) \cup (A^{\complement} \cdot C^{\complement}) \\ &= [(A^{\complement} \cdot B^{\complement})^{\complement} \cap (A^{\complement} \cdot C^{\complement})^{\complement}]^{\complement} = [A * B \cap A * C]^{\complement},\end{aligned}$$

skąd $A * B \cap A * C \subset A * (B \cap C)$. Ta inkluzja wraz z inkluzją przeciwną (1.5) daje łącznie równość (1.4), co kończy dowód. □

Wniosek 1.5. *Dla dowolnych zbiorów $A, B, C \subset \hat{\mathbb{C}}$ zachodzi inkluzja*

$$A * B \cup A * C \subset A * (B \cup C). \tag{1.7}$$

Dowód. Z lematu 1.3 wynika, że dla wszystkich zbiorów $A, B, C \subset \hat{\mathbb{C}}$,

$$A * B \subset A * (B \cup C) \quad \text{oraz} \quad A * C \subset A * (B \cup C),$$

skąd wynika inkluzja (1.7). □

Uwaga 1.6. Zauważmy, że inkluzja (1.7) nie może być zastąpiona równością $A * B \cup A * C = A * (B \cup C)$. Aby to udowodnić, przyjmijmy $A := \mathbb{D}$,

$$B := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \geqslant 0\}$$

oraz

$$C := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \leqslant 0\}.$$

Wtedy $A * (B \cup C) = \bar{\mathbb{D}}$ i $A * B \cup A * C = \{0\}$, więc

$$A * (B \cup C) \neq A * B \cup A * C.$$

Wniosek 1.7. *Dla dowolnych ciągów zbiorów* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ *oraz* $\mathbb{N} \ni n \mapsto B_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ *zachodzi inkluzja*

$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n). \tag{1.8}$$

Jeżeli dodatkowo $A_{n+1} \subset A_n$ *i* $B_{n+1} \subset B_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *to zachodzi równość*

$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n). \tag{1.9}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie ciągi zbiorów $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ oraz $\mathbb{N} \ni n \mapsto B_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ spełniające założenia. Wtedy dla każdego $m \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset A_m \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \subset B_m.$$

Stąd na mocy lematu 1.3,

$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \subset A_m * B_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

a to prowadzi do inkluzji (1.8). Załóżmy dodatkowo, że $A_{n+1} \subset A_n$ i $B_{n+1} \subset B_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ustalając dowolnie

$$z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$$

stwierdzamy, że

$$z \in \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^{\complement}\right) \cdot \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n^{\complement}\right).$$

Stąd istnieją $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $a \in A_{k_1}^{\complement}$ oraz $b \in B_{k_2}^{\complement}$ takie, że $z = ab$ i zachodzi alternatywa $a \neq 0 \neq b$ lub $a \neq \infty \neq b$. Ponieważ $A_{n+1} \subset A_n$ oraz $B_{n+1} \subset B_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $A_n^{\complement} \subset A_{n+1}^{\complement}$ oraz $B_n^{\complement} \subset B_{n+1}^{\complement}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dlatego $a \in A_k^{\complement}$ oraz $b \in B_k^{\complement}$, gdzie $k := \max\{k_1, k_2\}$, i w konsekwencji $z \in A_k^{\complement} \cdot B_k^{\complement}$. Stąd $z \notin A_k * B_k$, i tym samym

$$z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n).$$

To prowadzi do inkluzji

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) \subset \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right),$$

która łącznie z inkluzja przeciwną (1.8) daje równość (1.9), co kończy dowód. □

Definicja 1.8. Zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ nazywamy *zbiorem osobliwym* $:\Leftrightarrow X^{\complement} \subset \{0, \infty\}$. Zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ nazywamy *zbiorem nieosobliwym* $:\Leftrightarrow$ zbiór X nie jest zbiorem osobliwym.

Uwaga 1.9. Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeśli A jest zbiorem osobliwym, to zachodzi inkluzja $A \subset A * B$, i w konsekwencji $A * B$ jest zbiorem osobliwym. W istocie, ze wzoru (0.8) wynika, że

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbb{C}} * B &= (\emptyset \cdot B^{\complement})^{\complement} = \emptyset^{\complement} = \hat{\mathbb{C}}, \\
(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) * B &= (\{0\} \cdot B^{\complement})^{\complement} \supset \{0\}^{\complement} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \\
\mathbb{C} * B &= (\{\infty\} \cdot B^{\complement})^{\complement} \supset \{\infty\}^{\complement} = \mathbb{C}, \\
(\mathbb{C} \setminus \{0\}) * B &= (\{0, \infty\} \cdot B^{\complement})^{\complement} \supset \{0, \infty\}^{\complement} = \mathbb{C} \setminus \{0\},
\end{aligned}
$$

skąd na mocy definicji 1.8, $A \subset A * B$. Precyzyjniejsze rozważania prowadzą do następujących implikacji:

(i) $A = \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow A * B = \hat{\mathbb{C}}$;

(ii) $A = \mathbb{C} \wedge B = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \Rightarrow A * B = \hat{\mathbb{C}}$;

(iii) $A = \mathbb{C} \wedge B \neq \hat{\mathbb{C}} \wedge B \neq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \Rightarrow A * B = \mathbb{C}$;

(iv) $A = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \wedge B \neq \hat{\mathbb{C}} \wedge B \neq \mathbb{C} \Rightarrow A * B = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$;

(v) $A = \mathbb{C} \setminus \{0\} \wedge B \neq \hat{\mathbb{C}} \wedge B \neq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \wedge B \neq \mathbb{C} \Rightarrow A * B = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wniosek 1.10. *Dla każdego zbioru $A \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli A jest nieosobliwy, to $A * \emptyset = \emptyset$; jeżeli zaś A jest osobliwy, to $A * \emptyset = A$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiór $A \subset \hat{\mathbb{C}}$. Jeśli A jest zbiorem nieosobliwym, to

$$A * \emptyset = \left(A^{\complement} \cdot \hat{\mathbb{C}}\right)^{\complement} = \hat{\mathbb{C}}^{\complement} = \emptyset.$$

Jeżeli A jest zbiorem osobliwym, to

$$A * \emptyset = \left(A^{\complement} \cdot \hat{\mathbb{C}}\right)^{\complement} = \left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A,$$

co kończy dowód. □

1.2 Alternatywna charakteryzacja splotu zbiorów i jej zastosowania

W niniejszym podrozdziale wprowadzamy nową charakteryzację splotu zbiorów oraz prezentujemy własności splotu zbiorów, które można udowodnić, korzystając z tej charakteryzacji.

Twierdzenie 1.11. *Dla dowolnych zbiorów nieosobliwych $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$, zachodzi równość*

$$A * B = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{z}{B}\right\} \cup \Big(A \cap B \cap \{0, \infty\}\Big). \tag{1.10}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory nieosobliwe $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$ i $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Załóżmy najpierw, że

$$z \in \left\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{\zeta}{B}\right\}.$$

Wtedy $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{z}{B},$$

i równoważnie

$$A^{\complement} \cap \frac{z}{B^{\complement}} \subset \{0, \infty\}.$$

Stąd dla wszystkich $a \in A^{\complement} \setminus \{0, \infty\}$ oraz $b \in B^{\complement} \setminus \{0, \infty\}$, $a \neq z/b$, i w konsekwencji $z \neq ab$. Zatem

$$z \notin \Big(A^{\complement} \setminus \{0, \infty\}\Big) \cdot \Big(B^{\complement} \setminus \{0, \infty\}\Big) = \Big(A^{\complement} \cdot B^{\complement}\Big) \setminus \{0, \infty\},$$

co daje $z \in A * B \cup \{0, \infty\}$. Ponieważ $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, więc

$$\left\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{\zeta}{B}\right\} \subset A * B \setminus \{0, \infty\}. \tag{1.11}$$

Aby wykazać inkluzję przeciwną do (1.11) załóżmy, że

$$z \notin \left\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{\zeta}{B}\right\}.$$

Jeżeli $z \in \{0, \infty\}$, to $z \notin A * B \setminus \{0, \infty\}$. W przeciwnym razie $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz nie zachodzi inkluzja

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{z}{B},$$

a więc istnieje $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ taki, że $w \in A^{\complement} \cap z/B^{\complement}$. To oznacza, że $w \in A^{\complement}$ oraz $z/w \in B^{\complement}$. Zatem $z = w \cdot z/w \in A^{\complement} \cdot B^{\complement}$, i w konsekwencji $z \notin A * B \setminus \{0, \infty\}$. Korzystając z prawa kontrapozycji otrzymujemy inkluzję przeciwną do (1.11). Obie te inkluzje dają równość

$$\left\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{\zeta}{B}\right\} = A * B \setminus \{0, \infty\}. \tag{1.12}$$

Załóżmy teraz, że $z \in A \cap B \cap \{0, \infty\}$. Wtedy $z = 0 \in A \cap B$ lub $z = \infty \in A \cap B$. W obu przypadkach ze wzoru (0.8) wynika, że $z \in A * B$, co prowadzi do inkluzji

$$A \cap B \cap \{0, \infty\} \subset A * B \cap \{0, \infty\}. \tag{1.13}$$

Aby wykazać inkluzję przeciwną do (1.13) załóżmy, że $z \in A * B \cap \{0, \infty\}$. Wtedy $z \in \{0, \infty\}$ oraz $z \notin A^{\complement} \cdot B^{\complement}$. Ponieważ oba zbiory A i B są nieosobliwe, więc $A^{\complement} \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ i $B^{\complement} \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. Jeśli więc $z \in A^{\complement} \cup B^{\complement}$, to $z \in A^{\complement} \cdot B^{\complement}$, a tak być nie może. Dlatego $z \in (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement} = A \cap B$. To daje inkluzję przeciwną do (1.13). Obie te inkluzje dają równość

$$A \cap B \cap \{0, \infty\} = A * B \cap \{0, \infty\}. \tag{1.14}$$

Z równości (1.12) oraz (1.14) wynika, że

$$\begin{aligned} &\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{z}{B} \right\} \cup \Big(A \cap B \cap \{0, \infty\} \Big) \\ &\qquad = \Big(A * B \setminus \{0, \infty\} \Big) \cup \Big(A * B \cap \{0, \infty\} \Big) = A * B, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Wzór (1.10) jest w wielu przypadkach wygodniejszy w porównaniu ze wzorem definiującym splot zbiorów (0.8), ponieważ nie zawiera iloczynu algebraicznego zbiorów. Dzięki temu możliwe jest uproszczenie procesu wyznaczania splotu $A * B$ w pewnych przypadkach, na przykład, gdy A i B są obszarami spiralnymi względem 0; por. twierdzenie 1.45.

Lemat 1.12. *Dla dowolnych ciągów zbiorów $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto B_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ zachodzi inkluzja*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n * \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n. \tag{1.15}$$

Dowód. Przy założeniach lematu inkluzje $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ oraz $B_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$ zachodzą dla $n \in \mathbb{N}$. Z lematu 1.3 otrzymujemy

$$A_n * B_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k * \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n * \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,$$

co kończy dowód. □

Uwaga 1.13. Zauważmy, że inkluzja (1.15) nie może być zastąpiona równością

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n * \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Aby to udowodnić przyjmijmy, że

$$A_n := B_n := \left\{re^{\mathrm{i}t} : t \in \left[0; 2\pi - \frac{1}{n}\right] \wedge r \in [0;1)\right\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $A_n * B_n = \{0\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z drugiej strony

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \{re^{\mathrm{i}t} : t \in [0; 2\pi) \wedge r \in [0;1)\} = \mathbb{D}.$$

Dlatego

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) = \{0\} \neq \mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n * \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Wniosek 1.14. *Dla dowolnych ciągów zbiorów otwartych $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n \subset \hat{\mathbb{C}}$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto B_n \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli $A_n \subset A_{n+1}$ i $B_n \subset B_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ i $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ są zbiorami nieosobliwymi oraz zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:*

(i) $\{0, \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$;

(ii) $\{0, \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$;

(iii) $0 \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$;

(iv) $\infty \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$,

to zachodzi równość

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right). \tag{1.16}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie ciągi zbiorów otwartych $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto B_n$ spełniające założenia oraz $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Załóżmy, że $z \in \{0, \infty\}$ oraz

$$z \in \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right).$$

Wtedy z twierdzenia 1.11 wynika, że

$$z \in \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right),$$

skąd

$$z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \text{oraz} \quad z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Ponieważ $A_n \subset A_{n+1}$ i $B_n \subset B_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $z \in A_k \cap B_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Dlatego z twierdzenia 1.11 wynika, że $z \in A_k * B_k$, skąd

$$z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n),$$

co daje inkluzję

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \cap \{0, \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) \cap \{0, \infty\}. \tag{1.17}$$

Załóżmy teraz, że $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz

$$z \in \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right).$$

Wtedy z twierdzenia 1.11 otrzymujemy

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cup \frac{z}{\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n},$$

i w konsekwencji

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cup \frac{z}{B_n}\right).$$

Stąd i z dowolnego spośród warunków (i)–(iv) wynika, że

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{0, \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cup \frac{z}{B_n}\right) \cup \{0, \infty\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cup \frac{z}{B_n}\right).$$

Ponieważ zbiór $A_n \cup z/B_n$ jest otwarty dla $n \in \mathbb{N}$ i zbiór $\hat{\mathbb{C}}$ jest zwarty, więc istnieje skończony zbiór $K \subset \mathbb{N}$ taki, że

$$\bigcup_{n \in K} \left(A_n \cup \frac{z}{B_n}\right) = \hat{\mathbb{C}}.$$

Ponieważ

$$A_n \cup \frac{z}{B_n} \subset A_{n+1} \cup \frac{z}{B_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

i zbiór K jest skończony, więc

$$\bigcup_{n \in K} \left(A_n \cup \frac{z}{B_n}\right) = A_k \cup \frac{z}{B_k},$$

gdzie $k := \max(K)$. Zatem

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \hat{\mathbb{C}} = A_k \cup \frac{z}{B_k},$$

i w konsekwencji z twierdzenia 1.11 wynika, że $z \in A_k * B_k$. Dlatego

$$z \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n),$$

co prowadzi do inkluzji

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \setminus \{0, \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) \setminus \{0, \infty\}. \tag{1.18}$$

Z inkluzji (1.17) oraz (1.18) wynika, że

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) &= \left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \cap \{0, \infty\}\right) \\ &\cup \left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \setminus \{0, \infty\}\right) \subset \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) \cap \{0, \infty\}\right) \\ &\cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) \setminus \{0, \infty\}\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n).\end{aligned}$$

Z lematu 1.12 wynika inkluzja przeciwna do powyższej. Obie inkluzje dają łącznie równość (1.16), co kończy dowód. □

Uwaga 1.15. Zauważmy, że założenie wyłącznie otwartości zbiorów A_n i B_n oraz inkluzji $A_n \subset A_{n+1}$ i $B_n \subset B_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ we wniosku 1.14 nie jest wystarczające. Aby to udowodnić przyjmijmy $A_n := \mathbb{D}(0, n)$ oraz $B_n := \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}(0, 1/n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $A_n * B_n = \emptyset$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n * B_n) = \emptyset.$$

Z drugiej strony

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \mathbb{C}$$

oraz

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\},$$

i w konsekwencji

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) * \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \hat{\mathbb{C}},$$

co przeczy równości (1.16).

1.3 Splot $\mathcal{P}$-zbiorów

Niniejszy podrozdział zawiera twierdzenia dotyczące splotu zbiorów i wynikające ze szczególnych własności rodziny odwzorowań

$$\hat{\mathbb{C}} \ni z \mapsto T_p(z) := pz, \quad p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Definicja 1.16. Niepustą rodzinę $\mathcal{P} \subset 2^{\hat{\mathbb{C}}}$ nazywamy *multiplikatywnie niezmienniczą* $:\Leftrightarrow T_p(U) \in \mathcal{P}$ dla $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $U \in \mathcal{P}$.

Definicja 1.17. Dla dowolnej niepustej rodziny $\mathcal{P} \subset 2^{\hat{\mathbb{C}}}$ zbiór A nazywamy *$\mathcal{P}$-zbiorem* $:\Leftrightarrow A \subset \hat{\mathbb{C}}$ i dla każdego $z \in A^{\complement}$ istnieje $U \in \mathcal{P}$ takie, że $z \in U \subset A^{\complement}$.

Z powyższej definicji w szczególności wynika, że $\hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem dla dowolnej niepustej rodziny $\mathcal{P} \subset 2^{\hat{\mathbb{C}}}$.

Twierdzenie 1.18. *Niech $\mathcal{P}$ będzie niepustą rodziną podzbiorów zbioru $\hat{\mathbb{C}}$, która jest multiplikatywnie niezmiennicza i spełnia warunek*

(1.19) *dla każdej niepustej rodziny $\mathcal{A}$ złożonej z $\mathcal{P}$-zbiorów przecięcie $\bigcap \mathcal{A}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem.*

Wtedy dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli $\{0,\infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$, $B \notin \{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\}$ i A jest $\mathcal{P}$-zbiorem, to $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem.

Dowód. Ustalmy dowolnie A, B i $\mathcal{P}$ spełniające założenia. Z definicji 1.17 wynika, że $\hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Jeśli więc $A = \hat{\mathbb{C}}$ lub $B = \hat{\mathbb{C}}$, to $A * B = \hat{\mathbb{C}}$, i dlatego $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Możemy zatem przyjąć, że $A \neq \hat{\mathbb{C}}$ i $B \neq \hat{\mathbb{C}}$. Wtedy B jest zbiorem nieosobliwym, i w konsekwencji $B' := B^{\complement} \setminus \{0,\infty\} \neq \emptyset$. Ustalmy dowolnie $w \in B'$ oraz $z \in (T_w(A))^{\complement}$. Wtedy $z \in T_w(A^{\complement})$, i tym samym $z/w \in A^{\complement}$. Ponieważ A jest $\mathcal{P}$-zbiorem, więc istnieje $U \in \mathcal{P}$ taki, że $z/w \in U \subset A^{\complement}$. Stąd $z \in T_w(U) \subset T_w(A^{\complement}) = (T_w(A))^{\complement}$. Ponieważ rodzina $\mathcal{P}$ jest multiplikatywnie niezmiennicza, więc $T_w(U) \in \mathcal{P}$. Stąd na mocy definicji 1.17 wynika, że $T_w(A)$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem dla $w \in B'$. Ponadto

$$A * B = \left(A^{\complement} \cdot B^{\complement}\right)^{\complement} = \left(A^{\complement} \cdot \bigcup_{w \in B^{\complement}} w\right)^{\complement}. \tag{1.20}$$

Dla każdego $z \in \{0,\infty\}$ zachodzi dokładnie jeden z następujących warunków: $z \in A \cap B$, $z \in A^{\complement} \cap B$, $z \in A \cap B^{\complement}$ lub $z \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$. Dlatego ze względu na założenie $\{0,\infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$ możemy ograniczyć dalsze rozważania do następujących czterech przypadków:

(i) $\{0,\infty\} \subset B$;

(ii) $\infty \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$ oraz $0 \in B$;

(iii) $0 \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$ oraz $\infty \in B$;

(iv) $\{0,\infty\} \subset A^{\complement} \cap B^{\complement}$.

W przypadku (i) mamy
$$A^{\complement} \cdot \bigcup_{w \in B^{\complement}} w = \bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big).$$
W przypadku (ii) mamy
$$A^{\complement} \cdot \bigcup_{w \in B^{\complement}} w = \bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big) \cup \big(\{\infty\} \cdot A^{\complement}\big) = \bigcup_{w \in B'} \Big(T_w\big(A^{\complement}\big) \cup \{\infty\}\Big) = \bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big).$$
W przypadku (iii) mamy
$$A^{\complement} \cdot \bigcup_{w \in B^{\complement}} w = \bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big) \cup \big(\{0\} \cdot A^{\complement}\big) = \bigcup_{w \in B'} \Big(T_w\big(A^{\complement}\big) \cup \{0\}\Big) = \bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big).$$
W przypadku (iv) mamy
$$A^{\complement} \cdot \bigcup_{w \in B^{\complement}} w = \bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big) \cup \big(\{0,\infty\} \cdot A^{\complement}\big) = \bigcup_{w \in B'} \Big(T_w\big(A^{\complement}\big) \cup \{0,\infty\}\Big) = \bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big).$$
Zatem we wszystkich przypadkach stwierdzamy na mocy równości (1.20), że
$$A * B = \Big(\bigcup_{w \in B'} T_w\big(A^{\complement}\big)\Big)^{\complement} = \bigcap_{w \in B'} T_w(A).$$
To wobec warunku (1.19) oznacza, że $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, co było do udowodnienia.

□

Uwaga 1.19. Zauważmy, że założenie $\{0,\infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$ w twierdzeniu 1.18 jest potrzebne. Przyjmując $\mathcal{P} := \{\{w\} : w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ widzimy, że $\{A \in 2^{\hat{\mathbb{C}}} : \{0,\infty\} \subset A\}$ jest klasą wszystkich $\mathcal{P}$-zbiorów. Ustalmy dowolnie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz zbiór $B \subset \mathbb{C}$. Wówczas $A := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, $\infty \in \{0,\infty\} \cap A \cap B^{\complement}$ oraz
$$A * B = \big(\{a\} \cdot B^{\complement}\big)^{\complement} = \Big(T_a\big(B^{\complement}\big)\Big)^{\complement} = T_a(B) = \{a\} \cdot B \subset \mathbb{C}.$$
Stąd $\infty \notin A * B$, a więc $A * B$ nie jest $\mathcal{P}$-zbiorem.

Wniosek 1.20. *Niech $\mathcal{P}$ będzie niepustą rodziną podzbiorów zbioru $\hat{\mathbb{C}}$, która jest multiplikatywnie niezmiennicza i spełnia warunek* (1.19)*. Wtedy dla dowolnych $\mathcal{P}$-zbiorów A i B, jeżeli $A \setminus B \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lub $B \setminus A \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, to $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A, B i $\mathcal{P}$ spełniające założenia. Jeżeli A lub B jest zbiorem osobliwym, to z uwagi 1.9 wynika, że $A * B \in \{A, B, \hat{\mathbb{C}}\}$, i w konsekwencji $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Załóżmy, że zbiory A i B są nieosobliwe. Ponieważ $A \setminus B \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lub $B \setminus A \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, mamy $\{0, \infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$ lub $\{0, \infty\} \cap B \cap A^{\complement} = \emptyset$. Zatem na mocy twierdzenia 1.18, $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, co należało udowodnić. □

1.4 Własności topologiczne splotu zbiorów

W niniejszym podrozdziale skupimy się na własnościach topologicznych splotu zbiorów.

Wniosek 1.21. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli A jest domknięty, $A \cap B^{\complement} \cap \{0, \infty\} = \emptyset$ oraz $B \notin \{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\}$, to zbiór $A * B$ jest domknięty.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A i B spełniające założenia. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów otwartych zbioru $\hat{\mathbb{C}}$. Na mocy definicji 1.16 rodzina $\mathcal{P}$ jest multiplikatywnie niezmiennicza. Ponadto ma mocy definicji 1.17 każdy zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem domkniętym. Dlatego A jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Ponieważ przecięcie dowolnej niepustej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, więc spełniony jest warunek (1.19). Stąd na mocy twierdzenia 1.18, $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Zatem zbiór $A * B$ jest domknięty, co kończy dowód. □

Uwaga 1.22. Zauważmy, że założenie $A \cap B^{\complement} \cap \{0, \infty\} = \emptyset$ we wniosku 1.21 jest potrzebne. Przyjmując bowiem $A := \bar{\mathbb{D}}$ i $B := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ widzimy, że $A^{\complement} \cdot B^{\complement} = \{0\}$. Stąd $(A^{\complement} \cdot B^{\complement})^{\complement} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, a więc zbiór $A * B$ nie jest domknięty.

Wniosek 1.23. *Dla dowolnych zbiorów domkniętych $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$ zbiór $A * B$ jest domknięty.*

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory domknięte $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów otwartych zbioru $\hat{\mathbb{C}}$. Na mocy definicji 1.16 rodzina $\mathcal{P}$ jest multiplikatywnie niezmiennicza. Ponadto ma mocy definicji 1.17 każdy zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem domkniętym. W szczególności A i B są $\mathcal{P}$-zbiorami. Ponieważ przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, więc spełniony jest warunek (1.19). Jeżeli $A \cap B^{\complement} \cap \{0, \infty\} = \emptyset$ lub $B \cap A^{\complement} \cap \{0, \infty\} = \emptyset$, to na mocy wniosku 1.20 zbiór $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, a więc jest domknięty. Załóżmy więc, że $A \cap B^{\complement} \cap \{0, \infty\} \neq \emptyset$ i $B \cap A^{\complement} \cap \{0, \infty\} \neq \emptyset$. Wtedy $0 \in A \setminus B$ i $\infty \in B \setminus A$ lub $0 \in B \setminus A$ i $\infty \in A \setminus B$. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że zachodzi pierwsza z tych możliwości. Ponieważ zbiory $A^{\complement}$ i $B^{\complement}$ są otwarte, więc istnieją $r_1, r_2 > 0$ takie, że

$$\mathbb{D}(0, r_1) \subset B^{\complement} \quad \text{oraz} \quad \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}(0, r_2) \subset A^{\complement}.$$

Stąd
$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{D}(0, r_1) \cdot \Big(\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}(0, r_2)\Big) \subset A^{\complement} \cdot B^{\complement},$$
czyli $A^{\complement} \cdot B^{\complement} = \hat{\mathbb{C}}$. Zatem $A * B = \emptyset$, i w konsekwencji zbiór $A * B$ jest domknięty, co kończy dowód. □

Lemat 1.24. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$ zachodzi inkluzja*

$$\operatorname{cl}(A * B) \subset \operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B). \tag{1.21}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$. Z lematu 1.3 wynika, że $A * B \subset \operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B)$. Z wniosku 1.23 wynika zaś, że zbiór $\operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B)$ jest domknięty. Zatem
$$\operatorname{cl}(A * B) \subset \operatorname{cl}\Big(\operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B)\Big) = \operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B),$$
co należało udowodnić. □

Uwaga 1.25. Zauważmy, że inkluzja (1.21) nie może być zastąpiona równością $\operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B) = \operatorname{cl}(A * B)$. Rzeczywiście, przyjmując $A := B := \mathbb{D} \setminus (0; 1)$ widzimy, że
$$\operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B) = \bar{\mathbb{D}} * \bar{\mathbb{D}} = \bar{\mathbb{D}}$$
oraz $A * B = \{0\}$. Dlatego $\operatorname{cl}(A) * \operatorname{cl}(B) \neq \operatorname{cl}(A * B)$.

Lemat 1.26. *Dla dowolnych zbiorów otwartych $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:*

(i) $\{0, \infty\} \subset A$;

(ii) $\{0, \infty\} \subset B$;

(iii) $0 \in A \cap B$;

(iv) $\infty \in A \cap B$,

to zbiór $A * B$ jest otwarty.

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory otwarte $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$. Niech z będzie punktem przyległym zbioru $A^{\complement} \cdot B^{\complement}$. Wtedy istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in A^{\complement} \cdot B^{\complement}$ taki, że $z_n \to z$, gdy $n \to +\infty$. Zatem istnieją ciągi $\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in A^{\complement}$ oraz $\mathbb{N} \ni n \mapsto b_n \in B^{\complement}$ takie, że $z_n = a_n b_n$ i zachodzi alternatywa $a_n \neq 0 \neq b_n$ lub $a_n \neq \infty \neq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ zbiory $A^{\complement}$ i $B^{\complement}$ są zwarte, więc istnieją $a \in A^{\complement}$ i $b \in B^{\complement}$ oraz funkcja rosnąca $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $a_{\sigma(n)} \to a$ i $b_{\sigma(n)} \to b$, gdy $n \to +\infty$. Jeśli $a = 0$, to zachodzi co najmniej jeden z warunków (ii) lub (iv), które implikują $b \neq \infty$. Jeśli $a = \infty$, to zachodzi co najmniej jeden z warunków (ii) lub (iii), które implikują $b \neq 0$. Dlatego

$$z = \lim_{n\to+\infty} z_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} a_{\sigma(n)} b_{\sigma(n)} = ab \in A^{\complement} \cdot B^{\complement},$$

i w konsekwencji zbiór $A^{\complement} \cdot B^{\complement}$ jest domknięty. Zatem zbiór $A * B$ jest otwarty, co było do udowodnienia. □

Uwaga 1.27. Zauważmy, że założenia dotyczące 0 i ∞ w lemacie 1.26 są potrzebne. W istocie, przyjmując

$$A := \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \right) \quad \text{oraz} \quad B := \mathbb{C} \setminus \mathbb{N},$$

widzimy, że $A^{\complement} \cdot B^{\complement} = \big(\mathbb{Q} \cap [0; +\infty)\big) \cup \{\infty\}$. Zatem zbiór $A^{\complement} \cdot B^{\complement}$ nie jest domknięty, i tym samym zbiór $A * B$ nie jest otwarty.

Lemat 1.28. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$, $\mathrm{cl}(A) \cdot \mathrm{cl}(B) \subset \mathrm{cl}(A \cdot B)$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$ i $z \in \mathrm{cl}(A) \cdot \mathrm{cl}(B)$. Załóżmy, że $z \neq \infty$. Wtedy istnieją $a \in \mathrm{cl}(A) \setminus \{\infty\}$ i $b \in \mathrm{cl}(B) \setminus \{\infty\}$ takie, że $z = ab$. Z definicji operacji domknięcia zbioru wynika istnienie ciągów $\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in A$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto b_n \in B$ takich, że $a_n \to a$ i $b_n \to b$, gdy $n \to +\infty$, oraz $a_n \neq \infty \neq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Definiując więc ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n$ widzimy, że $z_n \in A \cdot B$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$z_n = a_n b_n \to ab = z, \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Stąd $z \in \mathrm{cl}(A \cdot B)$, co prowadzi do inkluzji

$$\big(\mathrm{cl}(A) \cdot \mathrm{cl}(B)\big) \setminus \{\infty\} \subset \mathrm{cl}(A \cdot B). \tag{1.22}$$

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $z = \infty$. Wtedy istnieją $a \in \mathrm{cl}(A) \setminus \{0\}$ i $b \in \mathrm{cl}(B) \setminus \{0\}$ takie, że $z = ab$. Ponadto $a = \infty$ lub $b = \infty$. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $b = \infty$. Z definicji operacji domknięcia zbioru wynika istnienie ciągów $\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in A$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto b_n \in B$ takich, że $a_n \to a$ i $b_n \to b$, gdy $n \to +\infty$, oraz $a_n \neq 0 \neq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n := a_n b_n$ spełnia warunki $z_n \in A \cdot B$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$|z_n| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \to |a| \cdot +\infty = +\infty, \text{ gdy } n \to +\infty,$$

gdyż $a \neq 0$. Stąd $z_n \to \infty$, gdy $n \to +\infty$, i w konsekwencji $z \in \mathrm{cl}(A \cdot B)$, co prowadzi do inkluzji

$$\big(\mathrm{cl}(A) \cdot \mathrm{cl}(B)\big) \cap \{\infty\} \subset \mathrm{cl}(A \cdot B). \tag{1.23}$$

Obie inkluzje (1.22) i (1.23) dają łącznie

$$\mathrm{cl}(A)\cdot\mathrm{cl}(B)=\Big(\big(\mathrm{cl}(A)\cdot\mathrm{cl}(B)\big)\setminus\{\infty\}\Big)\cup\Big(\big(\mathrm{cl}(A)\cdot\mathrm{cl}(B)\big)\cap\{\infty\}\Big)\subset\mathrm{cl}(A\cdot B),$$

co kończy dowód. □

Lemat 1.29. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:*

(i) $\{0,\infty\}\subset\mathrm{int}(A)$;

(ii) $\{0,\infty\}\subset\mathrm{int}(B)$;

(iii) $0\in\mathrm{int}(A)\cap\mathrm{int}(B)$;

(iv) $\infty\in\mathrm{int}(A)\cap\mathrm{int}(B)$,

to spełniona jest równość

$$\mathrm{int}(A*B)=\mathrm{int}(A)*\mathrm{int}(B). \tag{1.24}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory A i B spełniające założenia. Ponieważ $\mathrm{int}(A)\subset A$ i $\mathrm{int}(B)\subset B$, więc z lematu 1.3 otrzymujemy $\mathrm{int}(A)*\mathrm{int}(B)\subset A*B$. Ponadto z lematu 1.26 wynika, że zbiór $\mathrm{int}(A)*\mathrm{int}(B)$ jest otwarty. Stąd $\mathrm{int}(A)*\mathrm{int}(B)\subset\mathrm{int}(A*B)$. Z drugiej strony, z równości $\mathrm{int}(X)=(\mathrm{cl}(X^{\complement}))^{\complement}$ dla każdego zbioru $X\subset\hat{\mathbb{C}}$ i lematu 1.28 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{int}(A)*\mathrm{int}(B)\big)^{\complement}&=(\mathrm{int}(A))^{\complement}\cdot(\mathrm{int}(B))^{\complement}=\mathrm{cl}\big(A^{\complement}\big)\cdot\mathrm{cl}\big(B^{\complement}\big)\subset\mathrm{cl}\big(A^{\complement}\cdot B^{\complement}\big)=\\&=\mathrm{cl}\big((A*B)^{\complement}\big)=(\mathrm{int}(A*B))^{\complement},\end{aligned}$$

i w konsekwencji $\mathrm{int}(A*B)\subset\mathrm{int}(A)*\mathrm{int}(B)$. Ta inkluzja wraz z inkluzją przeciwną daje równość (1.24), co kończy dowód. □

Zauważmy, że założenia dotyczące 0 i ∞ w lemacie 1.29 są potrzebne. Ilustruje to przykład z uwagi 1.27.

Wniosek 1.30. *Dla dowolnych zbiorów $A, B\subset\hat{\mathbb{C}}$, jeżeli zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:*

(i) $\{0,\infty\}\subset\mathrm{int}(A^{\complement})$;

(ii) $\{0,\infty\}\subset\mathrm{int}(B^{\complement})$;

(iii) $0\in\mathrm{int}(A^{\complement})\cap\mathrm{int}(B^{\complement})$;

(iv) $\infty \in \operatorname{int}(A^{\complement}) \cap \operatorname{int}(B^{\complement})$,

to spełniona jest równość $\operatorname{cl}(A \cdot B) = \operatorname{cl}(A) \cdot \operatorname{cl}(B)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory A i B spełniające założenia. Z równości $\operatorname{int}(X) = (\operatorname{cl}(X^{\complement}))^{\complement}$ dla każdego zbioru $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ oraz z lematu 1.29 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\operatorname{cl}(A) \cdot \operatorname{cl}(B) &= \Big(\operatorname{int}(A^{\complement})\Big)^{\complement} \cdot \Big(\operatorname{int}(B^{\complement})\Big)^{\complement} = \Big(\operatorname{int}(A^{\complement}) * \operatorname{int}(B^{\complement})\Big)^{\complement} \\ &= \Big(\operatorname{int}(A^{\complement} * B^{\complement})\Big)^{\complement} = \operatorname{cl}\Big((A^{\complement} * B^{\complement})^{\complement}\Big) = \operatorname{cl}(A \cdot B),\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Wniosek 1.31. *Dla dowolnych zbiorów* $A \subset \mathbb{C}$ *i* $B \subset \hat{\mathbb{C}}$*, jeżeli zbiór* $A^{\complement}$ *jest spójny,* $0 \notin A \cap B^{\complement}$ *i* $B \neq \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, to zbiór* $(A * B)^{\complement}$ *jest spójny.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A i B spełniające założenia. Jeśli B jest zbiorem osobliwym, to $B = \hat{\mathbb{C}}$ lub $B = \mathbb{C}$ lub też $B = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, skąd na mocy uwagi 1.9, $(A * B)^{\complement} \subset B^{\complement}$, a więc zbiór $(A * B)^{\complement}$ jest spójny. Zatem dalsze rozważania możemy ograniczyć do przypadku, gdy B nie jest zbiorem osobliwym. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów spójnych zawierających ∞. Z definicji 1.16 wynika, że rodzina $\mathcal{P}$ jest multiplikatywnie niezmiennicza. Ponadto ma mocy definicji 1.17 każdy zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy $X^{\complement} \in \mathcal{P}$. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolnie zadaną niepustą rodziną $\mathcal{P}$-zbiorów. Ponieważ dla każdego $X \in \mathcal{A}$ zbiór $X^{\complement}$ jest spójny i zawiera ∞, więc zbiór $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement} \in \mathcal{P}$ jest spójny jako suma zbiorów spójnych zawierających wspólny punkt ∞. Stąd

$$\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X\Big)^{\complement} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement} \in \mathcal{P}.$$

Dlatego $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, i w konsekwencji warunek (1.19) jest spełniony. Ponieważ A jest $\mathcal{P}$-zbiorem, $\{0, \infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$ i B nie jest zbiorem osobliwym, więc z twierdzenia 1.18 wnioskujemy, że $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Dlatego zbiór $(A * B)^{\complement}$ jest spójny, co było do udowodnienia. □

Uwaga 1.32. Zauważmy, że założenie $A \subset \mathbb{C}$ we wniosku 1.31 nie może być zastąpione przez $A \subset \hat{\mathbb{C}}$. Przyjmując bowiem

$$A := \mathbb{D} \cup \Big(\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}(0,2)\Big) \quad \text{oraz} \quad B := \mathbb{D} \cup \Big(\mathbb{D}(0,5) \setminus \bar{\mathbb{D}}(0,2)\Big) \cup \Big(\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}(0,6)\Big)$$

widzimy, że

$$A * B = \mathbb{D} \cup \Big(\mathbb{D}(0,5) \setminus \bar{\mathbb{D}}(0,4)\Big) \cup \Big(\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}(0,12)\Big),$$

a więc zbiór $(A * B)^{\complement}$ nie jest spójny.

Wniosek 1.33. *Dla dowolnych obszarów $A \subset \mathbb{C}$ i $B \subset \hat{\mathbb{C}}$ takich, że $0 \in A \cap B$ lub $\{0, \infty\} \subset B$, jeżeli zbiór A jest jednospójny to każda składowa spójna zbioru $A * B$ jest jednospójna. W szczególności, jeśli zbiór $A * B$ jest spójny, to jest on jednospójny.*

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory A i B spełniające założenia. Z wniosku 1.31 wynika, że zbiór $(A * B)^{\complement}$ jest spójny. Jeśli więc zbiór $A * B$ jest spójny, to jest jednospójny. Możemy zatem ograniczyć się do przypadku, gdy zbiór $A * B$ nie jest spójny, czyli ma co najmniej dwie składowe spójne. Istnieje wówczas zbiór $\mathcal{A}$ złożony z przynajmniej dwóch elementów i funkcja różnowartościowa $\mathcal{A} \ni \alpha \mapsto C_\alpha \in 2^{\hat{\mathbb{C}}}$ taka, że C_α jest spójną składową zbioru $A * B$ dla $\alpha \in \mathcal{A}$ oraz

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha. \tag{1.25}$$

Z lematu 1.26 wynika, że zbiór $A*B$ jest otwarty. Dlatego C_α jest zbiorem otwartym dla $\alpha \in \mathcal{A}$; por. [11, str. 25]. Załóżmy, że istnieje $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, dla którego C_{α_0} nie jest zbiorem jednospójnym. Wtedy $C_{\alpha_0}^{\complement}$ nie jest zbiorem spójnym, czyli istnieją zbiory otwarte U i V takie, że

$$C_{\alpha_0}^{\complement} \subset U \cup V, \quad U \cap V \cap C_{\alpha_0}^{\complement} = \emptyset \quad \text{oraz} \quad U \cap C_{\alpha_0}^{\complement} \neq \emptyset \neq V \cap C_{\alpha_0}^{\complement}. \tag{1.26}$$

Stąd $p \in U \cap C_{\alpha_0}^{\complement}$ i $q \in V \cap C_{\alpha_0}^{\complement}$ dla pewnych $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$. Niech K_p i K_q oznaczają odpowiednio składowe spójne zbioru $C_{\alpha_0}^{\complement}$ zawierające punkty p i q.
Załóżmy, że $V \cap K_p \neq \emptyset$. Z (1.26) wynika, że

$$U \cap V \cap K_p \subset U \cap V \cap C_{\alpha_0}^{\complement} = \emptyset \quad \text{oraz} \quad K_p \subset C_{\alpha_0}^{\complement} \subset U \cup V.$$

Ponieważ $p \in U \cap K_p$, więc zbiór K_p nie jest spójny. Otrzymana sprzeczność oznacza, że $V \cap K_p = \emptyset$. Dlatego

$$K_p = K_p \cap (U \cup V) = (K_p \cap U) \cup (K_p \cap V) = K_p \cap U,$$

i tym samym $K_p \subset U$. Podobnie dowodzimy, że $K_q \subset V$. Zatem

$$p \in K_p \subset U \quad \text{oraz} \quad q \in K_q \subset V. \tag{1.27}$$

Przyjmując $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{\alpha_0\}$ stwierdzamy na mocy (1.25), że

$$A * B = C_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}'} C_\alpha. \tag{1.28}$$

Załóżmy, że $K_p \subset C_{\alpha_1}$ dla pewnego $\alpha_1 \in \mathcal{A}'$. Ponieważ $C_{\alpha_0} \cap \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}'} C_\alpha = \emptyset$, więc

$$K_p \subset C_{\alpha_1} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}'} C_\alpha \subset C_{\alpha_0}^{\complement}.$$

Z drugiej strony C_{α_1} jest zbiorem spójnym, zaś K_p jest składową spójną zbioru $C^{\complement}_{\alpha_0}$. Dlatego $K_p = C_{\alpha_1}$. Co więcej, $\mathrm{cl}(K_p) \subset \mathrm{cl}(C^{\complement}_{\alpha_0}) = C^{\complement}_{\alpha_0}$ oraz $\mathrm{cl}(K_p)$ jest zbiorem spójnym; por. [5, p. 132, Corollaries 3]. Zatem $K_p = \mathrm{cl}(K_p)$, i w konsekwencji K_p jest zbiorem domkniętym. Ponadto C_{α_1} jest zbiorem otwartym. Ponieważ $\emptyset \neq K_p \subset C^{\complement}_{\alpha_0} \neq \hat{\mathbb{C}}$, więc $\hat{\mathbb{C}}$ nie jest zbiorem spójnym. Otrzymana sprzeczność oznacza, że

$$K_p \setminus C_\alpha \neq \emptyset, \quad \alpha \in \mathcal{A}'. \tag{1.29}$$

Załóżmy, że $K_p \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha$. Jeśli zbiór $\mathcal{A}'$ składa się z jednego elementu α', to $K_p \subset C_{\alpha'}$, co jest sprzeczne z (1.29). Dlatego zbiór $\mathcal{A}'$ zawiera co najmniej dwa elementy. Ponieważ $K_p \cap C_{\alpha_1} \neq \emptyset$ dla pewnego $\alpha_1 \in \mathcal{A}'$ i $C_{\alpha_1} \cap \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'\setminus\{\alpha_1\}} C_\alpha = \emptyset$, więc na mocy (1.29),

$$K_p \cap \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'\setminus\{\alpha_1\}} C_\alpha = \Big(K_p \cap \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big) \setminus (K_p \cap C_{\alpha_1}) = K_p \setminus (K_p \cap C_{\alpha_1}) = K_p \setminus C_{\alpha_1} \neq \emptyset.$$

Zatem K_p jest zbiorem niespójnym. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $K_p \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha \neq \emptyset$. Analogicznie można pokazać, że $K_q \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha \neq \emptyset$. Stąd oraz z (1.28) i (1.27) dostajemy

$$U \cap (A*B)^{\complement} = U \cap \Big(C_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} = U \cap C^{\complement}_{\alpha_0} \cap \Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} \supset K_p \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha \neq \emptyset,$$

i podobnie

$$V \cap (A*B)^{\complement} = V \cap \Big(C_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} = V \cap C^{\complement}_{\alpha_0} \cap \Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} \supset K_q \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha \neq \emptyset.$$

Ponadto z (1.28) i (1.26) wnioskujemy, że

$$(A*B)^{\complement} = \Big(C_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} = C^{\complement}_{\alpha_0} \cap \Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} \subset C^{\complement}_{\alpha_0} \subset U \cup V$$

oraz

$$U\cap V\cap(A*B)^{\complement} = U\cap V\cap\Big(C_{\alpha_0}\cup \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} = U\cap V\cap C^{\complement}_{\alpha_0}\cap\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}'} C_\alpha\Big)^{\complement} \subset U\cap V\cap C^{\complement}_{\alpha_0} = \emptyset.$$

Dlatego $(A*B)^{\complement}$ nie jest zbiorem spójnym, co prowadzi do sprzeczności. W konsekwencji, C_α jest zbiorem jednospójnym dla każdego $\alpha \in \mathcal{A}$, co kończy dowód. □

Uwaga 1.34. Zauważmy, że założenie $A \subset \mathbb{C}$ we wniosku 1.33 jest istotne, czyli nie może być zastąpione przez $A \subset \hat{\mathbb{C}}$. Przyjmując bowiem $A := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$ i $B := \mathbb{D} \setminus \{1/2\}$ widzimy, że zbiory A i B są obszarami, $0 \in A \cap B$ i zbiór A jest jednospójny. Z drugiej strony z wniosku 1.2 wynika, że $A*B = B$, a więc splot $A*B$ jest zbiorem spójnym ale nie jednospójnym.

Poniższy przykład ukazuje, że splot dwóch obszarów jednospójnych nie musi być obszarem jednospójnym, ani nawet zbiorem spójnym.

Przykład 1.35. Przyjmijmy

$$A := \mathbb{D} \cup \mathbb{D}(2\mathrm{i}, \sqrt{2})$$

oraz

$$B := \mathbb{D}\Big(0, \frac{5}{4}\Big) \setminus \bar{\mathbb{D}}\Big(-\frac{50}{51}\mathrm{i}, \frac{35}{51}\Big).$$

Wtedy

$$\frac{1}{B} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Big(\mathbb{D}\Big(0, \frac{4}{5}\Big) \cup \mathbb{D}\Big(2\mathrm{i}, \frac{7}{5}\Big)\Big).$$

Podstawiając $z_1 := (\sqrt{7} + 3\mathrm{i})/4$ i $z_2 := (-\sqrt{7} + 3\mathrm{i})/4$ otrzymujemy $\mathbb{T} \cap \mathbb{T}(2\mathrm{i}, \sqrt{2}) = \{z_1, z_2\}$. Ponadto

$$\begin{aligned}
&\{u \in \mathbb{T} : |uz_1 - 2\mathrm{i}| < \sqrt{2} \wedge |uz_2 - 2\mathrm{i}| < \sqrt{2}\} \\
&\quad = \{u \in \mathbb{T} : |uz_1|^2 - 2\operatorname{Re}(uz_1\overline{2\mathrm{i}}) + |2\mathrm{i}|^2 < 2 \wedge |uz_2|^2 - 2\operatorname{Re}(uz_2\overline{2\mathrm{i}}) + |2\mathrm{i}|^2 < 2\} \\
&\quad = \{u \in \mathbb{T} : 3 + 4\operatorname{Re}(uz_1\mathrm{i}) < 0 \wedge 3 + 4\operatorname{Re}(uz_2\mathrm{i}) < 0\} \\
&\quad \subset \{u \in \mathbb{T} : 6 + 4\operatorname{Re}(u\mathrm{i}(z_1 + z_2)) < 0\} = \{u \in \mathbb{T} : 6 - 6\operatorname{Re}(u) < 0\} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\{uz_1, uz_2\} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(2\mathrm{i}, \sqrt{2})) \neq \emptyset$$

dla $u \in \mathbb{T}$. Zatem

$$\Big\{\frac{zz_1}{|z|}, \frac{zz_2}{|z|}\Big\} \setminus A \neq \emptyset \tag{1.30}$$

dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Z drugiej strony, dla dowolnie ustalonego $z \in \mathbb{T}(0, 3/4)$,

$$\Big|\frac{zz_1}{|z|} - 2z\mathrm{i}\Big|^2 = \Big|z_1 - \frac{3}{2}\mathrm{i}\Big|^2 = 1 + \frac{9}{4} + 3\operatorname{Re}(z_1\mathrm{i}) = 1 < \Big(\frac{21}{20}\Big)^2 = \Big(\frac{7|z|}{5}\Big)^2$$

oraz

$$\Big|\frac{zz_2}{|z|} - 2z\mathrm{i}\Big|^2 = \Big|z_2 - \frac{3}{2}\mathrm{i}\Big|^2 = 1 + \frac{9}{4} + 3\operatorname{Re}(z_2\mathrm{i}) = 1 < \Big(\frac{21}{20}\Big)^2 = \Big(\frac{7|z|}{5}\Big)^2.$$

Stąd

$$\Big\{\frac{zz_1}{|z|}, \frac{zz_2}{|z|}\Big\} \subset \mathbb{D}\Big(2\mathrm{i}z, \frac{7|z|}{5}\Big), \quad z \in \mathbb{T}(0, 3/4),$$

a więc

$$\Big\{\frac{zz_1}{|z|}, \frac{zz_2}{|z|}\Big\} \cap \frac{z}{B} = \emptyset, \quad z \in \mathbb{T}(0, 3/4).$$

To razem z (1.30) implikuje, że inkluzja

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup \frac{z}{B}$$

jest fałszywa dla każdego $z \in \mathbb{T}(0, 3/4)$. Stąd na mocy twierdzenia 1.11,

$$\mathbb{T}\Big(0, \frac{3}{4}\Big) \cap A * B = \emptyset.$$

Ponieważ $0 \in A \cap B$ i $A \cup 1/B = \hat{\mathbb{C}}$, więc z twierdzenia 1.11 wynika, że $\{0, 1\} \subset A * B$. Dlatego zbiór $A * B$ nie jest spójny.

1.5 Własności geometryczne splotu zbiorów

W niniejszym podrozdziale skupimy uwagę na własnościach geometrycznych splotu zbiorów. Przypomnijmy, że zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ nazywamy *półprostą rozszerzoną* $:\Leftrightarrow X = \{a + wt : t \in [0; +\infty)\} \cup \{\infty\}$ dla pewnych $a \in \mathbb{C}$ i $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definicja 1.36. Zbiór $A \subset \mathbb{C}$ nazywamy *zbiorem liniowo osiągalnym* $:\Leftrightarrow$ zbiór $A^{\complement}$ może być przedstawiony jako suma półprostych rozszerzonych.

Uwaga 1.37. Każdy zbiór liniowo osiągalny i spójny $A \subset \mathbb{C}$ jest jednospójny. Ustalając bowiem dowolnie zbiór liniowo osiągalny $A \subset \mathbb{C}$ widzimy, że zbiór $A^{\complement}$ może być przedstawiony jako suma półprostych rozszerzonych. Ponieważ wszystkie półproste rozszerzone zawierają ∞, więc ich suma jest zbiorem spójnym. Dlatego $A^{\complement}$ jest zbiorem spójnym. Jeśli dodatkowo zbiór A jest spójny to jest on jednospójny.

Wniosek 1.38. *Dla dowolnych zbiorów $A \subset \mathbb{C}$ i $B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli A jest zbiorem liniowo osiągalnym, $0 \notin A \cap B^{\complement}$ i B nie jest zbiorem osobliwym, to $A * B$ jest zbiorem liniowo osiągalnym.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A i B spełniające założenia. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich półprostych rozszerzonych. Na mocy definicji 1.16 rodzina $\mathcal{P}$ jest multiplikatywnie niezmiennicza. Z definicji 1.17 wynika, że każdy zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy X jest liniowo osiągalny. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolnie zadaną niepustą rodziną $\mathcal{P}$-zbiorów. Ponieważ dla każdego $X \in \mathcal{A}$ zbiór $X^{\complement}$ jest sumą półprostych rozszerzonych, więc zbiór $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement}$ jest również sumą półprostych rozszerzonych. Ponadto

$$\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X\Big)^{\complement} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement}.$$

Dlatego zbiór $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, i w konsekwencji warunek (1.19) jest spełniony. Ponieważ A jest $\mathcal{P}$-zbiorem, $\{0, \infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$ i B nie jest zbiorem osobliwym, więc z twierdzenia 1.18 wnioskujemy, że $A*B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Stąd $A*B$ jest zbiorem liniowo osiągalnym, co kończy dowód. $\square$

Przypomnijmy, że zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ nazywamy *rozszerzoną półpłaszczyzną domkniętą* $:\Leftrightarrow X = \{a + wt + vs : t \in \mathbb{R} \wedge s \in [0; +\infty)\} \cup \{\infty\}$ dla pewnych $a \in \mathbb{C}$ i $w, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takich, że $v/w \notin \mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.39. *Dla dowolnych zbiorów $A \subset \mathbb{C}$ i $B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli A jest zbiorem wypukłym, $0 \notin A \cap B^{\complement}$ i B nie jest zbiorem osobliwym, to zbiór $A * B$ jest wypukły.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A i B spełniające założenia. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich rozszerzonych półpłaszczyzn domkniętych. Na mocy definicji 1.16 rodzina $\mathcal{P}$ jest multiplikatywnie niezmiennicza. Z definicji 1.17 wynika, że każdy zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem wypukłym. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolnie zadaną niepustą rodziną $\mathcal{P}$-zbiorów. Ponieważ dla każdego $X \in \mathcal{A}$ zbiór $X^{\complement}$ jest sumą rozszerzonych półpłaszczyzn domkniętych, więc zbiór $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement}$ jest również sumą rozszerzonych półpłaszczyzn domkniętych. Ponadto

$$\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X\Big)^{\complement} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement}.$$

Dlatego zbiór $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, i w konsekwencji warunek (1.19) jest spełniony. Ponieważ, $\{0, \infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$ i B nie jest zbiorem osobliwym, więc z twierdzenia 1.18 wnioskujemy, że $A*B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Zatem $A*B$ jest zbiorem wypukłym, co kończy dowód. $\square$

Uwaga 1.40. Przypomnijmy, że przez *obszar prawie wypukły* rozumiemy obszar $\Omega \subset \mathbb{C}$ o tej własności, że $\mathbb{C} \setminus \Omega$ można wyrazić w postaci sumy nieprzecinających się półprostych domkniętych; por. np. [15, Sec. 2.3]. W przykładzie 1.35 obszar A jest prawie wypukły, zaś obszar B jest liniowo osiągalny ale nie prawie wypukły. Splot $A * B$ nie jest nawet zbiorem spójnym, a więc nie jest obszarem prawie wypukłym. Dlatego splot obszaru prawie wypukłego i obszaru liniowo osiągalnego nie jest na ogół obszarem prawie wypukłym. W związku z tym można postawić pytanie, czy splot dwóch obszarów prawie wypukłych jest obszarem prawie wypukłym? Odpowiedź nie wydaje się oczywista.

Przypomnijmy, że dla dowolnego $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ zbiór $X \subset \mathbb{C}$ nazywamy *zbiorem δ-spiralnym względem* $0 :\Leftrightarrow 0 \in X$ oraz

$$\Big\{w e^{t e^{i\delta}} : t \in (-\infty; 0]\Big\} \subset X, \quad w \in X; \tag{1.31}$$

por. [7]. Z warunku (1.31) wynika, że $X \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem 0-spiralnym względem 0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{tw : t \in [0;1]\} \subset X, \quad w \in X, \tag{1.32}$$

czyli gdy X jest zbiorem gwiaździstym względem 0; por. [6].

Twierdzenie 1.41. *Dla dowolnych zbiorów $A \subset \mathbb{C}$ i $B \subset \hat{\mathbb{C}}$ i $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$, jeżeli A jest zbiorem δ-spiralnym względem 0 i $0 \in B \neq \hat{\mathbb{C}}$, to zbiór $A * B$ jest δ-spiralny względem 0.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A, B i δ spełniające założenia. Jeśli B jest zbiorem osobliwym, to $B = \mathbb{C}$, skąd na mocy wzorów (0.8) i (0.7),

$$A * \mathbb{C} = (A^{\complement} \cdot \{\infty\})^{\complement} = \{\infty\}^{\complement} = \mathbb{C},$$

a więc zbiór $A * B$ jest δ-spiralny względem 0. Zatem dalsze rozważania możemy ograniczyć do przypadku, gdy B nie jest zbiorem osobliwym. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich łuków spiral postaci

$$\left\{w e^{t e^{i\delta}} : t \in [0; +\infty)\right\} \cup \{\infty\}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Na mocy definicji 1.16 rodzina $\mathcal{P}$ jest multiplikatywnie niezmiennicza. Z definicji 1.17 i warunku (1.31) wynika, że każdy zbiór $X \subset \hat{\mathbb{C}}$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem δ-spiralnym względem 0. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolnie zadaną niepustą rodziną $\mathcal{P}$-zbiorów. Ponieważ dla każdego $X \in \mathcal{A}$ zbiór $X^{\complement}$ jest sumą łuków spiral z klasy $\mathcal{P}$, więc zbiór $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement}$ jest również sumą łuków spiral z klasy $\mathcal{P}$. Ponadto

$$\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X\Big)^{\complement} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X^{\complement}.$$

Dlatego zbiór $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem, i w konsekwencji warunek (1.19) jest spełniony. Ponieważ A jest $\mathcal{P}$-zbiorem, $\{0, \infty\} \cap A \cap B^{\complement} = \emptyset$ i B nie jest zbiorem osobliwym, więc z twierdzenia 1.18 wnioskujemy, że $A * B$ jest $\mathcal{P}$-zbiorem. Stąd $A * B$ jest zbiorem δ-spiralnym względem 0, co było do udowodnienia. □

W przypadku, gdy $\delta = 0$ z twierdzenia 1.41 płynie następujący wniosek.

Wniosek 1.42. *Dla dowolnych zbiorów $A \subset \mathbb{C}$ i $B \subset \hat{\mathbb{C}}$, jeżeli A jest zbiorem gwiaździstym względem 0 i $0 \in B \neq \hat{\mathbb{C}}$, to zbiór $A * B$ jest gwiaździsty względem 0.*

1.6 Charakteryzacja splotu zbiorów spiralnych

W tym podrozdziale scharakteryzujemy splot obszarów spiralnych względem 0, a w szczególności gwiaździstych względem 0, wykorzystując fakt, że obraz spirali logarytmicznej przez homografię $\hat{\mathbb{C}} \ni z \mapsto 1/z$ nie zmienia jej kształtu. Ustalmy dowolnie $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ oraz $s \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$l_\delta(s) := \{0\} \cup \left\{ \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

jest spiralą logarytmiczną o początku w punkcie 0 i przechodzącą przez punkt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ taką, że dla każdego $z \in l_\delta(s)$ styczna w punkcie z do tej spirali oraz prosta przechodząca przez punkty 0 i z przecinają się pod kątem δ. W szczególności, jeżeli $\delta = 0$ to $l_\delta(s)$ jest półprostą.

Oznaczmy przez $\mathbb{S}^\delta$ klasę wszystkich obszarów δ-spiralnych względem 0 dla $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$. W szczególności $\mathbb{S}^0$ jest klasą wszystkich obszarów gwiaździstych względem zera.

Definicja 1.43. Niech $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ i niech A będzie zbiorem δ-spiralnym względem 0. Wtedy funkcję

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \rho_{A,\delta}(s) := \sup\left(\left\{ t \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \in A \right\} \cup \{0\} \right) \tag{1.33}$$

nazywamy *charakterystyką brzegową zbioru A*.

Wzór (1.33) implikuje, że $\rho_{A,\delta}$ jest funkcją 2π-okresową oraz $\rho_{A,\delta}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dla dowolnego $A \in \mathbb{S}^\delta$.

Lemat 1.44. *Dla dowolnych $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ i $A \in \mathbb{S}^\delta$, funkcja $\rho_{A,\delta}$ jest półciągła z dołu.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ i $A \in \mathbb{S}^\delta$. Niech $s_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon \in (0; +\infty)$ będą dowolnie ustalone. Ze wzoru (1.33) wynika istnienie $t_0 \in \mathbb{R}$ o tej własności, że $w_0 := \mathrm{e}^{t_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s_0} \in A$ oraz $t_0 > \rho_{A,\delta}(s_0) - \varepsilon$, gdy $\rho_{A,\delta}(s_0) < +\infty$, i $t_0 > 1/\varepsilon$, gdy $\rho_{A,\delta}(s_0) = +\infty$. Ponieważ A jest zbiorem otwartym, więc $\mathbb{D}(w_0, r) \subset A$ dla pewnego $r \in (0; +\infty)$. Stąd na mocy ciągłości funkcji $\mathbb{R} \ni s \mapsto \mathrm{e}^{t_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s}$ istnieje $\eta \in (0; +\infty)$ o tej własności, że

$$\mathrm{e}^{t_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \in \mathbb{D}(w_0, r) \subset A, \quad s \in (s_0 - \eta; s_0 + \eta),$$

co wobec wzoru (1.33) daje dla każdego $s \in (s_0 - \eta; s_0 + \eta)$,

$$\rho_{A,\delta}(s) \geqslant t_0 > \begin{cases} \rho_{A,\delta}(s_0) - \varepsilon, & \text{gdy } \rho_{A,\delta}(s_0) < +\infty; \\ 1/\varepsilon, & \text{gdy } \rho_{A,\delta}(s_0) = +\infty. \end{cases}$$

Zatem $\rho_{A,\delta}$ jest funkcją półciągłą z dołu w każdym punkcie $s_0 \in \mathbb{R}$, co daje tezę lematu. $\square$

Twierdzenie 1.45. *Ustalmy dowolnie $\delta \in (-\pi/2;\pi/2)$ oraz $A, B \in \mathbb{S}^\delta$. Wtedy dla każdego $p \in \mathbb{R}$ istnieje minimum*

$$\lambda(p) := \min_{s\in\mathbb{R}}\Big(\rho_{A,\delta}(s) + \rho_{B,\delta}(p-s)\Big), \tag{1.34}$$

i zachodzi równość

$$A * B = \Big\{z \in \mathbb{C} : \bigvee_{p,\theta\in\mathbb{R}} \Big(z = \mathrm{e}^{\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}p} \wedge \theta < \lambda(p)\Big)\Big\} \cup \{0\}. \tag{1.35}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\delta \in (-\pi/2;\pi/2)$ oraz $A, B \in \mathbb{S}^\delta$. Ze wzoru (1.33) wynika, że

$$A = \Big\{w \in \mathbb{C} : \bigvee_{s,t\in\mathbb{R}} \Big(w = \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \wedge t < \rho_{A,\delta}(s)\Big)\Big\}$$

oraz

$$B = \Big\{w \in \mathbb{C} : \bigvee_{s,t\in\mathbb{R}} \Big(w = \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \wedge t < \rho_{B,\delta}(s)\Big)\Big\}.$$

Ustalmy dowolnie $\theta, p \in \mathbb{R}$. Wtedy $z := \mathrm{e}^{\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}p}$ spełnia warunek

$$\frac{z}{B} = \Big\{w \in \mathbb{C} : \bigvee_{s,t\in\mathbb{R}} \Big(w = \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \wedge t > \theta - \rho_{B,\delta}(p-s)\Big)\Big\} \cup \{\infty\}.$$

Ponieważ $0 \in A$, $\infty \in z/B$ oraz

$$A \cup \frac{z}{B} = \Big\{w \in \mathbb{C} : \bigvee_{s,t\in\mathbb{R}} \Big(w = \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \wedge (t < \rho_{A,\delta}(s) \vee t > \theta - \rho_{B,\delta}(p-s))\Big)\Big\} \cup \{\infty\},$$

widzimy, że $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup z/B$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\rho_{A,\delta}(s) > \theta - \rho_{B,\delta}(p-s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1.36}$$

Z lematu 1.44 wynika, że funkcja $\mathbb{R} \ni s \mapsto \rho_{A,\delta}(s) + \rho_{B,\delta}(p-s)$ jest półciągła z dołu. Dlatego minimum w (1.34) istnieje, co jest konsekwencją twierdzenia Bolzano-Weierstrassa; por. [8, p. 53]. Stąd i z (1.36) widzimy, że $\theta < \lambda(p)$. Z drugiej strony, jeśli $\theta < \lambda(p)$, to warunek (1.36) oczywiście zachodzi. Zatem warunek (1.36) jest równoważny nierówności $\theta < \lambda(p)$. Stosując więc twierdzenie 1.11 otrzymujemy równość (1.35), co kończy dowód. $\square$

Uwaga 1.46. Z twierdzenia 1.45 wynika, że działanie $*$ jest działaniem wewnętrznym w klasie $\mathbb{S}^\delta$ dla każdego $\delta \in (-\pi/2;\pi/2)$. W szczególności splot obszarów gwiaździstych jest również obszarem gwiaździstym.

Uwaga 1.47. W przypadku, gdy $\delta = 0$ możliwe jest uproszczenie formy twierdzenia 1.45 poprzez zmodyfikowanie definicji charakterystyki brzegowej zbioru za pomocą podstawienia $\rho_X := \ln(\rho_{X,0})$ dla dowolnego zbioru X gwiaździstego względem 0. Tak określona *charakterystyka brzegowa zbioru gwiaździstego względem* 0 jest funkcją daną wzorem

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \rho_A(s) := \sup\Big(\Big\{r \geqslant 0 : r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \in A\Big\}\Big). \tag{1.37}$$

Wtedy wzór (1.34) i równość (1.35) można zapisać w następującej postaci

$$A * B = \left\{z \in \mathbb{C} : \bigvee_{p \in \mathbb{R}} \Big(z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \wedge |z| < \min_{s \in \mathbb{R}} \Big(\rho_A(s)\rho_B(p-s)\Big)\Big)\right\}. \tag{1.38}$$

Wzór (1.38) jest użyteczny przy konstrukcji przykładów splotu zbiorów gwiaździstych względem 0; zob. przykład 3.5.

Rozdział 2

Uogólnienia iloczynu Hadamarda funkcji holomorficznych

Niniejszy rozdział zawiera główne twierdzenia tej rozprawy dotyczące przedłużalności holomorficznej uogólnionych iloczynów Hadamarda, a w szczególności iloczynów Hadamarda.

2.1 Uogólniony iloczyn Hadamarda

W niniejszym podrozdziale dokonamy uogólnienienia iloczynu Hadamarda.

Przyjmijmy $\mathbb{Z}_{p,q} := \{n \in \mathbb{Z} : p \leqslant n \leqslant q\}$ i $\mathbb{Z}_p := \{n \in \mathbb{Z} : p \leqslant n\}$ dla $p, q \in \mathbb{Z}$. W szczególności $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Niech Λ oznacza klasę wszystkich ciągów $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|} = 0 \quad \text{oraz} \quad \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\lambda_{-n}|} = 0, \tag{2.1}$$

zaś Λ_0 klasę wszystkich ciągów $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|} < +\infty \quad \text{oraz} \quad \lambda_{-n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Lemat 2.1. *Dla wszystkich $\lambda \in \Lambda$ i $a \in \Lambda_0$,*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k a_{n-k}| < +\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_0, \tag{2.3}$$

oraz

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k}\right|} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k a_{n-k}|} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{2.4}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\lambda \in \Lambda$ i $a \in \Lambda_0$. Wtedy $r := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0;+\infty)$, i w konsekwencji dla dowolnie zadanego $R > r$ istnieje $n_R \in \mathbb{N}$ taki, że

$$\sqrt[n]{|a_n|} < R, \quad n \in \mathbb{Z}_{n_R}.$$

Stąd oraz z warunku (2.1) wynika istnienie stałej $M \geqslant 1$ o tej własności, że

$$|a_n| \leqslant MR^n,\ |\lambda_n| \leqslant M(R/2)^n \ \text{ i } \ |\lambda_{-n}| \leqslant M(2R)^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k a_{n-k}| &= \sum_{k=-\infty}^{0} |\lambda_k||a_{n-k}| + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k||a_{n-k}| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda_k||a_{n-k}| \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda_{-k}||a_{n+k}| + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k||a_{n-k}| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} M(2R)^{-k} MR^{n+k} + \sum_{k=1}^{n} M(R/2)^k MR^{n-k} \\
&= M^2R^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \right) < 3M^2R^n,
\end{aligned}$$

więc zachodzi warunek (2.3). Ponadto

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k a_{n-k}|} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3M^2R^n} = R.$$

Powyższa nierówność zachodzi dla każdego $R > r$, co prowadzi do drugiej nierówności w (2.4). Pierwsza nierówność w (2.4) wynika bezpośrednio z nierówności

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k a_{n-k}|,$$

co kończy dowód. □

Z lematu 2.1 wynika, że dla wszystkich $\lambda \in \Lambda$ i $a, b \in \Lambda_0$ szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \right) b_n z^n$$

jest zbieżny bezwzględnie w kole $\mathbb{D}(0, R)$, gdzie

$$\begin{aligned}
R := \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \right| |b_n|} \right)^{-1} &\geqslant \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \right|} \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \right)^{-1} \\
\geqslant \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Definiując zatem dla dowolnej funkcji f holomorficznej w pewnym otoczeniu punktu zero stałą

$$\mathrm{R}_f := \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}}\right)^{-1},$$

możemy sformułować następującą definicję.

Definicja 2.2. Dla dowolnie zadanego ciągu $\lambda \in \Lambda$, *λ-iloczynem Hadamarda funkcji f i g holomorficznych w pewnym otoczeniu zera* nazywamy funkcję określoną wzorem

$$\mathbb{D}(0, \mathrm{R}_f\,\mathrm{R}_g) \ni z \mapsto \mathrm{H}_\lambda(f,g)(z) := \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k}\right) b_n z^n, \tag{2.5}$$

gdzie $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ i $b_n := \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ dla $n \in \mathbb{Z}_0$ oraz $a_{-n} := 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga 2.3. Przyjmując w definicji 2.2, $\lambda_0 := 1$ i $\lambda_k := 0$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dostajemy na mocy wzoru (0.1) równość

$$\mathrm{H}_\lambda(f,g)(z) = f * g(z), \quad z \in \mathbb{D}(0, \mathrm{R}_f\,\mathrm{R}_g),$$

dla dowolnych funkcji f i g holomorficznych w pewnym otoczeniu punktu zero, gdyż $\mathrm{R}_f\,\mathrm{R}_g \leqslant \mathrm{R}_{f,g}$. Dlatego λ-iloczyn Hadamarda jest uogólnieniem klasycznego iloczynu Hadamarda.

Uwaga 2.4. Zauważmy, że w ogólności λ-iloczyn Hadamarda nie jest przemienny ani łączny. Aby to wykazać przyjmijmy $\lambda_0 := 1$, $\lambda_1 := 1$ oraz $\lambda_k := 0$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$. Dla dowolnie zadanych $a, b, c \in \Lambda_0$ spełniających warunek

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1,$$

funkcje

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \mathbb{D} \ni z \mapsto g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \;\text{ i }\; \mathbb{D} \ni z \mapsto h(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

są holomorficzne w kole $\mathbb{D}$. Ze wzoru (2.5) otrzymujemy

$$\mathrm{H}_\lambda(f,g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + a_{n-1}) b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n b_n + a_{n-1} b_n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}$$

oraz

$$\mathrm{H}_\lambda(g,f)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(b_n + b_{n-1}) a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n b_n + a_n b_{n-1}) z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

a więc $\mathrm{H}_\lambda(f,g) \neq \mathrm{H}_\lambda(g,f)$, gdy $a_{n-1}b_n \neq a_n b_{n-1}$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_1$. Ponadto dla dowolnego $z \in \mathbb{D}$,

$$\mathrm{H}_\lambda\Big(\mathrm{H}_\lambda(f,g),h\Big)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n b_n + a_{n-1}b_n + a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-2}b_{n-1})c_n z^n$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_\lambda\Big(f,\mathrm{H}_\lambda(g,h)\Big)(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + a_{n-1})(b_n c_n + b_{n-1}c_n)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n b_n + a_n b_{n-1} + a_{n-1}b_n + a_{n-1}b_{n-1})c_n z^n,\end{aligned}$$

a więc $\mathrm{H}_\lambda\Big(\mathrm{H}_\lambda(f,g),h\Big) \neq \mathrm{H}_\lambda\Big(f,\mathrm{H}_\lambda(g,h)\Big)$, gdy $a_{n-2} \neq a_n$ i $c_n \neq 0 \neq b_{n-1}$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_2$.

2.2 Fakty pomocnicze

W tym podrozdziale podajemy kilka faktów potrzebnych do udowodnienia twierdzenia 2.11, które jest głównym rezultatem niniejszej rozprawy. Na początku przywołamy klasyczne twierdzenie sformułowane przez Zygmunta Janiszewskiego.

Twierdzenie 2.5 ([5, p. 506, Theorem 5])**.** *Niech A i B będą dwoma zbiorami otwartymi lub dwoma zbiorami domkniętymi. Jeśli A i B są spójne oraz zbiór $A \cap B$ jest niespójny, to zbiór $A \cup B$ rozdziela pewną parę punktów $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$, tj. p i q należą do różnych składowych zbioru $(A \cup B)^{\complement}$.*

Korzystając z twierdzenia 2.5, możemy udowodnić następujące lematy.

Lemat 2.6. *Niech Ω_1 i Ω_2 będą obszarami jednospójnymi takimi, że $0 \in \Omega_1^{\complement}$, $\infty \in \Omega_2^{\complement}$ oraz $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \hat{\mathbb{C}}$. Wtedy $\Omega_1 \cap \Omega_2$ jest obszarem dwuspójnym, którego dopełnienie $(\Omega_1 \cap \Omega_2)^{\complement}$ ma domknięte składowe spójne $\Omega_1^{\complement}$ i $\Omega_2^{\complement}$.*

Dowód. Przyjmijmy, że spełnione są założenia lematu. Jeśli $\Omega_1 \cap \Omega_2$ jest zbiorem niespójnym, to z twierdzenia 2.5 wynika, że zbiór $\Omega_1 \cup \Omega_2$ rozdziela pewną parę punktów $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$, gdyż zbiory Ω_1 i Ω_2 są otwarte i spójne. Jest to niemożliwe, ponieważ $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \hat{\mathbb{C}}$. Zatem $\Omega_1 \cap \Omega_2$ jest zbiorem spójnym, i w konsekwencji $\Omega_1 \cap \Omega_2$ jest obszarem. Zauważmy, że dopełnienia zbiorów $\Omega_1^{\complement}$ i $\Omega_2^{\complement}$ są domknięte oraz

$$\Omega_1^{\complement} \cap \Omega_2^{\complement} = (\Omega_1 \cup \Omega_2)^{\complement} = \emptyset.$$

Ponieważ $E(\hat{\mathbb{C}})$ jest przestrzenią normalną, więc istnieją zbiory otwarte U_1 i U_2 takie, że

$$0 \in \Omega_1^{\complement} \subset U_1, \ \ \infty \in \Omega_2^{\complement} \subset U_2 \ \text{ i } \ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Zatem $\Omega_1^{\complement} \cup \Omega_2^{\complement}$ jest zbiorem niespójnym. Ponieważ Ω_1 i Ω_2 są obszarami jednospójnymi, więc $\Omega_1^{\complement}$ i $\Omega_2^{\complement}$ są zbiorami spójnymi. Ponadto, $(\Omega_1 \cap \Omega_2)^{\complement} = \Omega_1^{\complement} \cup \Omega_2^{\complement}$. Zatem zbiór $(\Omega_1 \cap \Omega_2)^{\complement}$ ma dokładnie dwie składowe spójne $\Omega_1^{\complement}$i $\Omega_2^{\complement}$, co kończy dowód lematu. □

Z lematu 2.6 otrzymujemy następujący wynik.

Lemat 2.7. *Dla dowolnych obszarów jednospójnych $A, B \subset \mathbb{C}$, jeżeli $0 \in A \cap B$, to dla każdego $z \in A * B \setminus \{0\}$ zbiór $A \cap z/B$ jest obszarem dwuspójnym, $A \setminus (z/B)$ i $A^{\complement}$ są domkniętymi składowymi zbioru $(A \cap (z/B))^{\complement}$ oraz $0 \in A \setminus (z/B)$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie obszary jednospójne $A, B \subset \mathbb{C}$ takie, że $0 \in A \cap B$, oraz $z \in A * B \setminus \{0\}$. Jeśli $A = \mathbb{C}$ lub $B = \mathbb{C}$, to $A \cup z/B = \hat{\mathbb{C}}$, gdyż $z/0 = \infty$. W przeciwnym przypadku $A \neq \mathbb{C} \neq B$, a więc A i B są zbiorami nieosobliwymi. Z twierdzenia 1.11 wynika, że $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset A \cup z/B$. Ponieważ $0 \in A$ oraz $\infty \in z/B$, więc $A \cup z/B = \hat{\mathbb{C}}$. Dlatego w obu przypadkach $A \cup z/B = \hat{\mathbb{C}}$. Ponadto zbiór z/B jest obszarem jednospójnym, jak również $\infty \in A^{\complement}$ i $0 \in (z/B)^{\complement}$. Korzystając z lematu 2.6 z $\Omega_1 := A$ i $\Omega_2 := z/B$, widzimy, że $A \cap z/B$ jest obszarem dwuspójnym oraz zbiór $(A \cap (z/B))^{\complement}$ ma domknięte składowe spójne $A^{\complement}$ i $(z/B)^{\complement}$. Ponadto, $0 \in A \setminus (z/B)$ oraz

$$(z/B)^{\complement} = \hat{\mathbb{C}} \cap (z/B)^{\complement} = (A \cup z/B) \cap (z/B)^{\complement} = A \cap (z/B)^{\complement} = A \setminus (z/B),$$

co kończy dowód. □

Lemat 2.8. *Dla dowolnych niepustych zbiorów $\Omega \subset \mathbb{C}$ i $K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, jeśli Ω jest otwarty oraz K jest domknięty, to zbiór*

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : K \subset \frac{z}{\Omega} \right\} \tag{2.6}$$

jest otwarty.

Dowód. Dla dowolnie ustalonych zbiorów Ω i K spełniających założenia lematu wykażemy, że zbiór $\Omega_K^{\complement}$ jest domknięty. Ze wzoru (2.6) wynika, że

$$\Omega_K^{\complement} = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : K \cap \frac{z}{\Omega^{\complement}} \neq \emptyset \right\} \cup \{0, \infty\}. \tag{2.7}$$

Jeżeli $\Omega_K^{\complement} = \{0, \infty\}$, to oczywiście $\Omega_K^{\complement}$ jest domknięty. Zatem możemy przyjąć, że $\Omega_K^{\complement} \neq \{0, \infty\}$. Wtedy $\Omega_K^{\complement} \setminus \{0, \infty\} \neq \emptyset$. Załóżmy, że z jest dowolnie ustalonym punktem przyległym zbioru $\Omega_K^{\complement}$. Jeśli $z \in \{0, \infty\}$, to na podstawie (2.7), $z \in \Omega_K^{\complement}$. Zatem możemy ograniczyć nasze rozważania do przypadku, w którym $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wtedy istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \Omega_K^{\complement} \setminus \{0, \infty\}$ taki, że $z_n \to z$, gdy $n \to +\infty$. Z równości (2.7) wynika istnienie ciągu

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto w_n \in K \cap \frac{z_n}{\Omega^{\complement}}. \tag{2.8}$$

Ponieważ K jest zbiorem domkniętym w przestrzeni zwartej $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}})$, więc istnieje ciąg rosnący $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz $w \in K$ takie, że $w_{\sigma(n)} \to w$, gdy $n \to +\infty$. Ponadto $K \cap \{0, \infty\} = \emptyset$, skąd $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $w_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dla $n \in \mathbb{N}$, i w konsekwencji

$$\frac{z_{\sigma(n)}}{w_{\sigma(n)}} \to \frac{z}{w}, \text{ gdy } n \to +\infty. \tag{2.9}$$

Z drugiej strony wobec (2.8), $z_n/w_n \in \Omega^{\complement}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto zbiór $\Omega^{\complement}$ jest domknięty, gdyż zbiór Ω jest otwarty. To razem z (2.9) daje $z/w \in \Omega^{\complement}$, i w konsekwencji $w \in z/\Omega^{\complement}$. Ponieważ $w \in K$, więc $w \in K \cap z/\Omega^{\complement}$. Stąd i z (2.7), $z \in \Omega_K^{\complement} \setminus \{0, \infty\}$. Zatem każdy punkt przyległy z zbioru $\Omega_K^{\complement}$ należy do $\Omega_K^{\complement}$, i w konsekwencji $\Omega_K^{\complement}$ jest zbiorem domkniętym. Stąd Ω_K jest zbiorem otwartym, co było do udowodnienia. □

Lemat 2.9. *Dla dowolnych zbiorów zwartych $E, F \subset \mathbb{C}$, $E \cdot F$ jest zbiorem zwartym. Jeśli dodatkowo $0 \notin F$, to E/F jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiory zwarte $E, F \subset \mathbb{C}$. Dla dowolnego ciągu $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in E \cdot F$ istnieją ciągi $\mathbb{N} \ni n \mapsto u_n \in E$ oraz $\mathbb{N} \ni n \mapsto v_n \in F$ takie, że $z_n = u_n v_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ zbiory E i F są zwarte, więc istnieją $u \in E$, $v \in F$ i funkcja rosnąca $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $u_{\sigma(n)} \to u$ i $v_{\sigma(n)} \to v$, gdy $n \to +\infty$. Stąd

$$z_{\sigma(n)} = u_{\sigma(n)} \cdot v_{\sigma(n)} \to u \cdot v \in E \cdot F, \text{ gdy } n \to +\infty,$$

i w konsekwencji zbiór $E \cdot F$ jest zwarty. Teraz załóżmy, że $0 \notin F$. Wtedy zbiór $1/F$ jest zwarty jako obraz zbioru zwartego F przez funkcję ciągłą. Ponieważ $E/F = E \cdot 1/F$, więc z udowodnionej już części lematu wnioskujemy, że E/F jest zbiorem zwartym, co kończy dowód. □

2.3 Problem przedłużalności holomorficznej uogólnionych iloczynów Hadamarda

W niniejszym podrozdziale zajmiemy się rozszerzeniem twierdzenia o multiplikacji Hadamarda na uogólnione iloczyny Hadamarda. Nawiązując do warunków (0.11) i (0.12) możemy zdefiniować odpowiedniki klasy $\mathcal{H}_2(A, B)$ w następujący sposób. Dla dowolnych niepustych zbiorów otwartych $A, B \subset \mathbb{C}$ oraz ciągu $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ oznaczamy przez $\mathcal{H}_2^{\lambda}(A, B)$ klasę wszystkich zbiorów otwartych $\Omega \subset \mathbb{C}$ takich, że istnieje operator

$T_\lambda : \mathrm{Hol}(A) \times \mathrm{Hol}(B) \to \mathrm{Hol}(\Omega)$ spełniający następujące warunki:

(2.10) $T_\lambda(f,g) = \mathrm{H}_\lambda(f,g)$ dla wszystkich wielomianów f i g;

(2.11) Dla wszystkich ciągów $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n \in \mathrm{Hol}(A)$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto g_n \in \mathrm{Hol}(B)$ oraz wszystkich $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$, jeżeli
$f_n \xrightarrow{\mathrm{ucc}} f$ w A, gdy $n \to +\infty$ oraz $g_n \xrightarrow{\mathrm{ucc}} g$ w B, gdy $n \to +\infty$,
to $T_\lambda(f_n, g_n) \xrightarrow{\mathrm{ucc}} T_\lambda(f,g)$ w Ω, gdy $n \to +\infty$.

Na przykład dla dowolnie zadanego $\lambda \in \Lambda$,

$$\Omega := \mathbb{D}(0, r_1 r_2) \in \mathcal{H}_2^\lambda(\mathbb{D}(0,r_1), \mathbb{D}(0,r_2)), \quad r_1, r_2 > 0. \tag{2.12}$$

W celu udowodnienia tej własności ustalmy dowolnie $r_1, r_2 > 0$. Ponieważ $\mathrm{R}_f \geqslant r_1$ i $\mathrm{R}_g \geqslant r_2$ dla $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_1))$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_2))$, więc $\Omega \subset \mathbb{D}(0, \mathrm{R}_f \, \mathrm{R}_g)$. Definiując

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_1)) \times \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_2)) \ni (f,g) \mapsto T_\lambda(f,g) := \mathrm{H}_\lambda(f,g)$$

stwierdzamy na podstawie wzoru (2.5), że $T_\lambda(f,g) \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ dla $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_1))$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_2))$ oraz zachodzi warunek (2.10). Drugi warunek (2.11) można wyprowadzić z reprezentacji całkowej (2.14) uogólnionego iloczynu Hadamarda z twierdzenia 2.10 Wtedy przechodząc do granicy pod całką otrzymujemy warunek (2.11), i w konsekwencji zachodzi własność (2.12). Zatem w ogólnym przypadku, gdy $A, B \subset \mathbb{C}$ są niepustymi obszarami, operator T_λ może być w naturalny sposób interpretowany jako uogólnienie operatora H_λ. Pokażemy, że taki operator istnieje dla dowolnych obszarów jednospójnych $A, B \subset \mathbb{C}$ zawierających 0 oraz $T_\lambda(f,g) \in \mathrm{Hol}(A * B)$ dla wszystkich $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$. Ponadto, operator T_λ może być wyrażony w sposób jawny jako formuła całkowa podobna do (0.14); por. [2, Theorem 3.4]. Jest to pokazane w twierdzeniu 2.11, które jest wiodącym wynikiem tej rozprawy.

Dla dowolnego ciągu $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ niech L_λ oznacza szereg Laurenta o współczynnikach λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, tzn.

$$\mathbb{D}(0,R) \setminus \bar{\mathbb{D}}(0,r) \ni z \mapsto \mathrm{L}_\lambda(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n z^n, \tag{2.13}$$

gdy $r := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\lambda_{-n}|} < R := 1/\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|}$, przy czym $\mathbb{D}(0,+\infty) := \mathbb{C}$. Wykażemy teraz następujące rozszerzenie twierdzenia 0.1 na przypadek uogólnionych iloczynów Hadamarda.

Twierdzenie 2.10. *Dla wszystkich $\lambda \in \Lambda$, $r_1, r_2 > 0$, $z \in \mathbb{D}(0, r_1 r_2)$ i $r \in (|z|/r_2; r_1)$ równość*

$$\mathrm{H}_\lambda(f,g)(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}^+(0,r)} f(u) g\Big(\frac{z}{u}\Big) \mathrm{L}_\lambda(u) \frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{2.14}$$

zachodzi dla $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_1))$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_2))$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\lambda \in \Lambda$, $r_1, r_2 > 0$, $z \in \mathbb{D}(0, r_1r_2)$ i $r \in (|z|/r_2; r_1)$ oraz $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_1))$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r_2))$. Przyjmijmy $a_n := f^{(n)}(0)/n!$ i $b_n := g^{(n)}(0)/n!$ dla $n \in \mathbb{Z}_0$ oraz $a_{-n} := 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathbb{T}(0,r)$ jest zwartym podzbiorem koła $\mathbb{D}(0,r_1)$, zaś $|z|/\mathbb{T}(0,r)$ jest zwartym podzbiorem koła $\mathbb{D}(0,r_2)$. Dlatego

$$\sup_{u\in\mathbb{T}(0,r)}\left|f(u)-\sum_{n=0}^{N}a_nu^n\right|\to 0 \;\text{ i }\; \sup_{u\in\mathbb{T}(0,r)}\left|g\Big(\frac{z}{u}\Big)-\sum_{n=0}^{N}b_n\Big(\frac{z}{u}\Big)^n\right|\to 0,\ \text{gdy } N\to+\infty.$$

Stąd dla każdego $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}f(u)g\Big(\frac{z}{u}\Big)u^{k-1}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}f(u)\cdot\Big(\sum_{m=0}^{+\infty}b_m\Big(\frac{z}{u}\Big)^m\Big)u^{k-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}\sum_{m=0}^{+\infty}b_m\Big(\frac{z}{u}\Big)^m f(u)u^{k-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}b_m\Big(\frac{z}{u}\Big)^m f(u)u^{k-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{m=0}^{+\infty}b_mz^m\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}f(u)u^{k-m-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{m=0}^{+\infty}b_mz^m\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nu^n\Big)u^{k-m-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{m=0}^{+\infty}b_mz^m\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nu^{n+k-m-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{m=0}^{+\infty}b_mz^m\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}u^{n+k-m-1}\mathrm{d}u\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}b_mz^ma_{m-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_{n-k}b_nz^n.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\tilde{\lambda} := \mathrm{L}_\lambda \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, więc na mocy wzoru (2.13),

$$\sup_{u\in\mathbb{T}(0,r)}\left|\tilde{\lambda}(u)-\sum_{k=-N}^{N}\lambda_ku^k\right|\to 0,\ \text{gdy } N\to+\infty,$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}f(u)g\Big(\frac{z}{u}\Big)\tilde{\lambda}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}f(u)g\Big(\frac{z}{u}\Big)\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_ku^k\Big)\frac{\mathrm{d}u}{u}\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_kf(u)g\Big(\frac{z}{u}\Big)u^{k-1}\mathrm{d}u\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda_k}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)}f(u)g\Big(\frac{z}{u}\Big)u^{k-1}\mathrm{d}u\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n-k}b_nz^n.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Ponieważ $z \in \mathbb{D}(0, r_1 r_2)$, więc istnieje stała $p > 1$ taka, że $p^2|z| < r_1 r_2$. Ponadto

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r_1} \quad \text{oraz} \quad \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leqslant \frac{1}{r_2},$$

gdyż $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, r_1))$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, r_2))$. Stąd na mocy lematu 2.1 wynika istnienie $n_p \in \mathbb{N}$ o tej własności, że

$$\sqrt[n]{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k a_{n-k}|} \leqslant \frac{p}{r_1} \quad \text{oraz} \quad \sqrt[n]{|b_n|} \leqslant \frac{p}{r_2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{n_p}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_p}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k||a_{n-k}||b_n||z|^n &= \sum_{n=n_p}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k||a_{n-k}| \right) |b_n||z|^n \\
&\leqslant \sum_{n=n_p}^{+\infty} \left(\frac{p}{r_1} \right)^n \left(\frac{p}{r_2} \right)^n |z|^n \\
&= \sum_{n=n_p}^{+\infty} \left(\frac{p^2|z|}{r_1 r_2} \right)^n < +\infty.
\end{aligned}$$

Uwzględniając dodatkowo warunek (2.3) z lematu 2.1 otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k||a_{n-k}||b_n||z|^n < +\infty.$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-k} b_n z^n &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} b_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} b_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \right) b_n z^n.
\end{aligned}$$

Stąd na mocy wzoru (2.5) dostajemy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-k} b_n z^n = \mathrm{H}_\lambda(f, g).$$

To wraz z (2.15) prowadzi do równości (2.14), co kończy dowód. □

Dla dowolnego zbioru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy klasę $\mathcal{P}(\Omega)$ wszystkich kawałkami gładkich funkcji $\gamma : [0; 2\pi] \to \Omega$ spełniających warunek $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, tj., $\mathcal{P}(\Omega)$ jest klasą wszystkich zamkniętych dróg w Ω. W klasie $\mathcal{P}(\Omega)$ wyróżniamy podklasę

$$\mathcal{P}_0(\Omega) := \{\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \setminus \{0\}) : \mathrm{ind}_\gamma(0) = 1\}, \tag{2.16}$$

gdzie $\mathrm{ind}_\gamma(a)$ oznacza indeks krzywej γ względem punktu $a \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 2.11. *Dla dowolnych $\lambda \in \Lambda$ i obszarów jednospójnych $A, B \subset \mathbb{C}$, jeżeli $0 \in A \cap B$, to $A * B$ jest zbiorem otwartym i istnieje operator $T_\lambda : \mathrm{Hol}(A) \times \mathrm{Hol}(B) \to \mathrm{Hol}(A * B)$ taki, że dla dowolnych $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$,*

$$(2.17)\quad T_\lambda(f,g)(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(u) g\Big(\frac{z}{u}\Big) \mathrm{L}_\lambda(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}, \quad z \in A * B \setminus \{0\},\ \gamma \in \mathcal{P}_0\Big(A \cap \frac{z}{B}\Big).$$

W szczególności, operator T_λ spełnia warunki (2.10) *i* (2.11)*, czyli $A * B \in \mathcal{H}_2^\lambda(A, B)$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A, B, f, g i λ spełniające założenia oraz $z \in \Omega \setminus \{0\}$, gdzie $\Omega := A * B$. Z lematu 1.26 wynika, że zbiór Ω jest otwarty. Przyjmijmy $\Omega_\zeta := A \cap (\zeta/B)$ dla $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Korzystając z lematu 2.7 widzimy, że Ω_z jest obszarem dwuspójnym oraz zbiór $(\Omega_z)^\complement$ ma składowe domknięte $A \setminus (z/B)$ i $A^\complement$ zawierające odpowiednio 0 i ∞. Ponieważ $0 \in B$, więc $\mathbb{D}(0, 2r) \subset B$ dla pewnego $r > 0$, skąd

$$\mathbb{T}\Big(0, \frac{|z|}{r}\Big) \subset \frac{z}{B}.$$

Jeżeli $A = \mathbb{C}$, to

$$\mathbb{T}\Big(0, \frac{|z|}{r}\Big) \subset A \cap \frac{z}{B} = \Omega_z,$$

i przyjmując

$$(2.18)\qquad [0; 2\pi] \ni t \mapsto \sigma(t) := \frac{|z|}{r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

widzimy, że $\sigma \in \mathcal{P}_0(\Omega_z)$. W przeciwnym przypadku $A \subset \mathbb{C} \neq A$. Wtedy na podstawie twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu konforemnym istnieje odwzorowanie konforemne Φ z $\mathbb{D}$ na obszar A takie, że $\Phi(0) = 0$; por. [16, Theorem 14.8]. Zbiór $A \setminus (z/B)$ jest zwarty, jako zbiór domknięty w przestrzeni zwartej $E(\hat{\mathbb{C}})$. Ponieważ

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi\Big(\mathbb{D}\Big(0, 1 - \frac{1}{n}\Big)\Big) = \Phi\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}\Big(0, 1 - \frac{1}{n}\Big)\Big) = \Phi(\mathbb{D}) = A \supset A \setminus \Omega_z,$$

więc rodzina $\Big\{\Phi(\mathbb{D}(0, 1 - 1/n)) : n \in \mathbb{N}\Big\}$ jest pokryciem otwartym zbioru $A \setminus \Omega_z$. Zatem istnieje zbiór skończony $N \subset \mathbb{N}$ taki, że

$$A \setminus \Omega_z \subset \bigcup_{n \in N} \Phi\Big(\mathbb{D}\Big(0, 1 - \frac{1}{n}\Big)\Big) = \Phi\Big(\mathbb{D}\Big(0, 1 - \frac{1}{n_z}\Big)\Big),$$

gdzie $n_z := \max(N)$. Podstawiając $r := 1 - 1/(2n_z)$ widzimy, że

$$\begin{aligned}\Phi\big(\mathbb{T}(0, r)\big) &\subset \Phi\Big(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}\Big(0, 1 - \frac{1}{n_z}\Big)\Big) = \Phi(\mathbb{D}) \setminus \Phi\Big(\mathbb{D}\Big(0, 1 - \frac{1}{n_z}\Big)\Big) \\ &\subset A \setminus (A \setminus \Omega_z) = \Omega_z.\end{aligned}$$

Stąd $\sigma \in \mathcal{P}(\Omega_z)$, gdzie

$$[0; 2\pi] \ni t \mapsto \sigma(t) := \Phi\left(re^{\mathrm{i}t}\right). \tag{2.19}$$

Ponieważ Φ jest odwzorowaniem konforemnym, więc z twierdzenia o residuach wynika, że

$$\mathrm{ind}_\sigma(0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\sigma \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}^+(0,r)} \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}\mathrm{d}w = 1.$$

Stąd $\sigma \in \mathcal{P}_0(\Omega_z)$, a więc w obu przypadkach ($A = \mathbb{C}$ lub $A \neq \mathbb{C}$),

$$\mathcal{P}_0(\Omega_z) \neq \emptyset, \quad z \in \Omega \setminus \{0\}. \tag{2.20}$$

Możemy zatem rozważać funkcję

$$\bigcup_{w\in\Omega\setminus\{0\}} \{w\} \times \mathcal{P}_0(\Omega_w) \ni (z,\gamma) \mapsto h(z,\gamma) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma H_z(u)\mathrm{d}u, \tag{2.21}$$

gdzie z uwagi na to, że $\tilde{\lambda} := \mathrm{L}_\lambda \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$,

$$\Omega_z \ni u \mapsto H_z(u) := f(u)g\left(\frac{z}{u}\right)\tilde{\lambda}(u)\frac{1}{u}$$

jest dobrze określoną funkcją holomorficzną w Ω_z. Dla dowolnie ustalonych $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}_0(\Omega_z)$, $\Gamma := \{(\gamma_1, 1), (\gamma_2, -1)\}$ jest cyklem w Ω_z takim, że dla każdego $a \in A \setminus \Omega_z$,

$$\mathrm{ind}_\Gamma(a) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(a) - \mathrm{ind}_{\gamma_2}(a) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(0) - \mathrm{ind}_{\gamma_2}(0) = 1 - 1 = 0$$

i dla każdego $a \in \mathbb{C} \setminus A$,

$$\mathrm{ind}_\Gamma(a) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(a) - \mathrm{ind}_{\gamma_2}(a) = 0 - 0 = 0.$$

Zatem Γ jest cyklem homologicznym zeru względem Ω_z. Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego w wersji homologicznej wnioskujemy, że

$$0 = \int_\Gamma H_z(u)\mathrm{d}u = \int_{\gamma_1} H_z(u)\mathrm{d}u - \int_{\gamma_2} H_z(u)\mathrm{d}u,$$

co na podstawie wzoru (2.21) prowadzi do równości

$$h(z,\gamma_1) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1} H_z(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2} H_z(u)\mathrm{d}u = h(z,\gamma_2).$$

Zatem funkcja h jest stała względem drugiego argumentu. Z (2.20) wynika, że istnieje funkcja $h : \Omega \to \mathbb{C}$ spełniająca następujące warunki:

$$h(z) = h(z,\gamma), \quad z \in \Omega \setminus \{0\},\ \gamma \in \mathcal{P}_0(\Omega_z) \tag{2.22}$$

oraz

$$h(0) = \mathrm{H}_\lambda(f,g)(0). \tag{2.23}$$

Wykażemy, że $h \in \mathrm{Hol}(\Omega \setminus \{0\})$. Przyjmując $K := \sigma([0;2\pi])$ widzimy, że $K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz K jest domknięty. Dodatkowo B jest zbiorem otwartym. Stąd na mocy lematu 2.8 zbiór

$$B_K := \left\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : K \subset \frac{\zeta}{B}\right\} \tag{2.24}$$

jest otwarty. Ponieważ $\sigma \in \mathcal{P}_0(\Omega_z)$, więc $K \subset \Omega_z = A \cap z/B$, skąd $K \subset z/B$. To wraz z (2.24) daje $z \in B_K$. Dlatego $\mathbb{D}(z,\eta) \subset B_K$ dla pewnego $\eta > 0$. Stąd dla każdego $w \in \mathbb{D}(z,\eta)$, $w \in B_K$, co z uwagi na (2.24) daje $K \subset (w/B) \cap A = \Omega_w$. Zatem

$$\sigma \in \mathcal{P}_0(\Omega_w), \quad w \in \mathbb{D}(z,\eta). \tag{2.25}$$

Wykażemy teraz, że funkcja h jest różniczkowalna w punkcie z oraz

$$h'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\sigma f(u) g'\Big(\frac{z}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u^2}. \tag{2.26}$$

Korzystając z zależności (2.22) i (2.25) oraz wzoru (2.21) stwierdzamy, że dla dowolnie ustalonego $w \in \mathbb{D}(z,\eta) \setminus \{z\}$,

(2.27)

$$\begin{aligned}\frac{h(w)-h(z)}{w-z} &= \frac{h(w,\sigma)-h(z,\sigma)}{w-z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{w-z} \left(\int_\sigma H_w(u)\mathrm{d}u - \int_\sigma H_z(u)\mathrm{d}u \right) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\sigma \frac{H_w(u)-H_z(u)}{w-z} \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\sigma f(u) \frac{g\Big(\frac{w}{u}\Big) - g\Big(\frac{z}{u}\Big)}{w-z} \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned}$$

Przyjmując $[0;1] \ni t \mapsto \gamma(t) := (w-z)t + z$ widzimy, że $\gamma([0;1]) \subset \mathbb{D}(z,\eta)$. Stąd i z (2.25) dostajemy

$$K \subset \Omega_{\gamma(t)} = A \cap \frac{\gamma(t)}{B}, \quad t \in [0;1].$$

Zatem dla dowolnie ustalonego $u \in K$, $u \in \gamma(t)/B$, i w konsekwencji

$$\frac{\gamma(t)}{u} \in B, \quad t \in [0;1]. \tag{2.28}$$

Ponadto $g \in \mathrm{Hol}(B)$, co implikuje

$$g\Big(\frac{w}{u}\Big) - g\Big(\frac{z}{u}\Big) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\Big(\frac{\gamma(t)}{u}\Big)\mathrm{d}t = \frac{w-z}{u} \int_0^1 g'\Big(\frac{\gamma(t)}{u}\Big)\mathrm{d}t.$$

To razem z (2.27) daje

$$\frac{h(w)-h(z)}{w-z}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\sigma f(u)\Big(\int_0^1 g'\Big(\frac{\gamma(t)}{u}\Big)\mathrm{d}t\Big)\tilde{\lambda}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2},$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned}
&\frac{h(w)-h(z)}{w-z}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\sigma f(u)g'\Big(\frac{z}{u}\Big)\tilde{\lambda}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\
&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\sigma f(u)\Big(\int_0^1 g'\Big(\frac{\gamma(t)}{u}\Big)\mathrm{d}t\Big)\tilde{\lambda}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\sigma f(u)\Big(\int_0^1 g'\Big(\frac{z}{u}\Big)\mathrm{d}t\Big)\tilde{\lambda}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\
&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\sigma f(u)\Big(\int_0^1 \Big(g'\Big(\frac{\gamma(t)}{u}\Big)-g'\Big(\frac{z}{u}\Big)\Big)\mathrm{d}t\Big)\tilde{\lambda}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}.
\end{aligned}$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{h(w)-h(z)}{w-z}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\sigma f(u)g'\Big(\frac{z}{u}\Big)\tilde{\lambda}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big|\\
&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\sigma |f(u)|\Big(\int_0^1\Big|g'\Big(\frac{\gamma(t)}{u}\Big)-g'\Big(\frac{z}{u}\Big)\Big|\mathrm{d}t\Big)|\tilde{\lambda}(u)|\frac{|\mathrm{d}u|}{|u|^2}.
\end{aligned}\tag{2.29}$$

Ponieważ σ jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym $[0;2\pi]$ i $K\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, więc zbiór K jest zwarty. Ponadto funkcje $A\ni u\mapsto f(u)$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}\ni u\mapsto\tilde{\lambda}(u)$ oraz $\mathbb{C}\ni u\mapsto u$ są ciągłe i $K\subset A\setminus\{0\}$. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym otrzymujemy

$$M:=\max\Big(\Big\{\sup\Big(\Big\{|f(u)|:u\in K\Big\}\Big),\sup\Big(\Big\{|\tilde{\lambda}(u)|:u\in K\Big\}\Big)\Big\}\Big)<+\infty\tag{2.30}$$

oraz

$$d:=\inf\Big(\Big\{|u|:u\in K\Big\}\Big)>0.\tag{2.31}$$

Z lematu 2.9 wnioskujemy, że

$$K^*:=\Big\{\frac{\gamma(t)}{u}:t\in[0;1]\wedge u\in K\Big\}$$

jest zbiorem zwartym. Z (2.28) wynika, że $K^*\subset B$. Ponieważ $g'\in\mathrm{Hol}(B)$, więc g' jest jednostajnie ciągła w K^*, tj. dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ o tej własności, że

$$|\zeta-\zeta'|<\delta\Rightarrow|g'(\zeta)-g'(\zeta')|<\varepsilon,\quad \zeta,\zeta'\in K^*.\tag{2.32}$$

Przyjmując $\delta_0:=\min(\{d\delta,\eta\})$ ustalmy dowolnie $w\in\mathbb{D}(z,\delta_0)\setminus\{z\}$. Wtedy z (2.31),

$$\Big|\frac{\gamma(t)}{u}-\frac{z}{u}\Big|=\Big|\frac{(w-z)t}{u}\Big|\leqslant\frac{|w-z|}{|u|}<\frac{\delta_0}{d}\leqslant\delta,\quad t\in[0;1],u\in K.$$

Stąd i z (2.32) mamy

$$\int_0^1 \Big| g'\Big(\frac{\gamma(t)}{u}\Big) - g'\Big(\frac{z}{u}\Big) \Big| \mathrm{d}t < \varepsilon, \quad u \in K.$$

To łącznie z (2.29), (2.30) i (2.31) implikuje, że

$$\left| \frac{h(w)-h(z)}{w-z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\sigma f(u) g'\Big(\frac{z}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_\sigma |f(u)||\tilde{\lambda}(u)| \frac{|\mathrm{d}u|}{|u|^2} \leqslant \frac{M^2|\sigma|_1}{2\pi d^2}\varepsilon,$$

gdzie $|\sigma|_1$ oznacza długość drogi σ. Zatem dla każdego $z \in \Omega \setminus \{0\}$,

$$\lim_{w \to z} \frac{h(w)-h(z)}{w-z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\sigma f(u) g'\Big(\frac{z}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

oraz zachodzi równość (2.26). W ten sposób udowodniliśmy, że

$$h \in \mathrm{Hol}(\Omega \setminus \{0\}). \tag{2.33}$$

Ze wzoru (0.3) wynika, że $\mathbb{D}(0, \rho(A)) \subset A$ oraz $\mathbb{D}(0, \rho(B)) \subset B$. Stąd i z lematu 1.3 otrzymujemy

$$\mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B)) = \mathbb{D}(0, \rho(A)) * \mathbb{D}(0, \rho(B)) \subset A * B = \Omega. \tag{2.34}$$

Wykażemy dodatkowo, że

$$h(z) = \mathrm{H}_\lambda(f, g)(z), \quad z \in \mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B)). \tag{2.35}$$

Ponieważ $0 \in A \cap B \cap \Omega$ oraz zbiory A, B i Ω są otwarte, więc istnieje $r \in (0; 1)$ taki, że $\mathbb{D}(0, r) \subset \Omega \cap A \cap B$. Stąd $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, r))$, i w konsekwencji z twierdzenia 2.10 wynika, że

$$\mathrm{H}_\lambda(f, g)(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(u) g\Big(\frac{z}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}, \quad z \in \mathbb{D}\Big(0, \frac{r^2}{2}\Big), \tag{2.36}$$

gdzie $[0; 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) := (r/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Dla każdego $z \in \mathbb{D}(0, r^2/2) \setminus \{0\}$,

$$\gamma([0; 2\pi]) = \mathbb{T}(0, r/2) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, |z|/r) \subset z/B,$$

gdyż $\mathbb{D}(0, r) \subset B$ i $|z|/r < r/2$. Ponadto $\gamma([0; 2\pi]) \subset \mathbb{D}(0, r) \subset A$ oraz $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 1$. Zatem $\gamma \in \mathcal{P}_0(A \cap z/B) = \mathcal{P}_0(\Omega_z)$, i korzystając z (2.21) i (2.22) otrzymujemy

$$h(z) = h(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(u) g\Big(\frac{z}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}, \quad z \in \mathbb{D}\Big(0, \frac{r^2}{2}\Big) \setminus \{0\}.$$

To wraz z (2.36) daje

$$\mathrm{H}_\lambda(f, g)(z) = h(z), \quad z \in \mathbb{D}\Big(0, \frac{r^2}{2}\Big) \setminus \{0\}. \tag{2.37}$$

Ponieważ $\mathrm{H}_\lambda(f,g) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0,r^2))$, więc z własności (2.37), (2.23) i (2.33) wynika, że $h \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Ponadto z (0.4), (2.34) i (2.37) wynika, że zachodzi równość (2.35). Istnieje więc dokładnie jeden operator $T_\lambda : \mathrm{Hol}(A) \times \mathrm{Hol}(B) \to \mathrm{Hol}(A * B)$ o tej własności, że dla dowolnych $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$, $T_\lambda(f,g) = h$, gdzie h jest funkcja określoną przez (2.21) i (2.22). W szczególności zachodzi równość (2.17).

Pozostaje do wykazania, że operator T_λ spełnia warunki (2.10) i (2.11). Dla dowolnych wielomianów f i g istnieją $n \in \mathbb{N}$ oraz ciągi $\mathbb{Z} \ni k \mapsto a_k \in \mathbb{C}$ i $\mathbb{Z} \ni k \mapsto b_k \in \mathbb{C}$ takie, że $a_k = b_k = 0$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_{0,n}$ oraz

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{oraz} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ustalmy dowolnie $z \in \Omega \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathcal{P}_0(\Omega_z)$. Ponieważ $\tilde{\lambda} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ i $\gamma([0;2\pi])$ jest podzbiorem zwartym zbioru $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, więc na mocy wzoru (2.13),

$$\sup_{u \in \gamma([0;2\pi])} \left| \tilde{\lambda}(u) - \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k u^k \right| \to 0, \text{ gdy } N \to +\infty.$$

Korzystając teraz z warunku (2.17) dostajemy

$$\begin{aligned}
T_\lambda(f,g)(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k u^k\right) \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \lambda_k u^{k-1} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \lambda_k u^{k-1} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma \left(\sum_{l=0}^{n} a_l u^l\right) \left(\sum_{m=0}^{n} b_m \frac{z^m}{u^m}\right) \lambda_k u^{k-1} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma \lambda_k \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_l b_m z^m u^{l+k-m-1} \mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \lambda_k a_{m-k} b_m z^m.
\end{aligned}$$

Stąd na mocy wzoru (2.5) otrzymujemy

$$T_\lambda(f,g)(z) = \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{m-k}\right) b_m z^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{m-k}\right) b_m z^m = \mathrm{H}_\lambda(f,g)(z),$$

co dowodzi warunku (2.10).

Dla zadanych $f \in \mathrm{Hol}(A)$, $g \in \mathrm{Hol}(B)$ oraz ciągów $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n \in \mathrm{Hol}(A)$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto$

$g_n \in \mathrm{Hol}(B)$ załóżmy, że

$$f_n \xrightarrow{\text{ucc}} f \text{ w } A \quad \text{oraz} \quad g_n \xrightarrow{\text{ucc}} g \text{ w } B, \text{ gdy } n \to +\infty. \tag{2.38}$$

Ustalmy dowolnie $z \in \Omega \setminus \{0\}$. Stąd na mocy (2.20) istnieje $\gamma_z \in \mathcal{P}_0(\Omega_z)$. Biorąc pod uwagę otwartość zbioru Ω i (2.25) widzimy, że

$$\mathbb{D}(z, 2r_z) \subset \Omega \setminus \{0\} \text{ oraz } \gamma_z \in \mathcal{P}_0(\Omega_w), \ w \in \mathbb{D}(z, 2r_z), \tag{2.39}$$

dla pewnego $r_z > 0$. Stosując równość (2.17), otrzymujemy dla każdego $w \in \mathbb{D}(z, 2r_z)$,

$$\begin{aligned} T(f_n, g_n)(w) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_z} f_n(u) g_n\Big(\frac{w}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ T(f_n, g)(w) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_z} f_n(u) g\Big(\frac{w}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ T(f, g)(w) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_z} f(u) g\Big(\frac{w}{u}\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Z (2.39) wynika, że $K_z := \gamma_z([0; 2\pi]) \subset \Omega_w = A \cap w/B$ dla $w \in \mathbb{D}(z, 2r_z)$. Stąd $K'_z := \overline{\mathbb{D}}(z, r_z)/K_z \subset B$, i w świetle lematu 2.9 zbiór K'_z jest zwarty. Ponieważ oba zbiory K_z i K'_z są zwarte, więc z (2.38) wnioskujemy, że

$$\sup_{u \in K_z} |f_n(u) - f(u)| \to 0 \text{ oraz } \sup_{u \in K'_z} |g_n(u) - g(u)| \to 0, \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon \in (0; 1)$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sup_{u \in K_z} |f_n(u) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{M_z + 1} \text{ oraz } \sup_{u \in K'_z} |g_n(u) - g(u)| < \frac{\varepsilon}{M_z + 1}, \ n \in \mathbb{Z}_{n_\varepsilon}, \tag{2.41}$$

gdzie

$$M_z := \max\Big(\Big\{\sup_{u \in K_z} |f(u)|, \sup_{u \in K'_z} |g(u)|, \sup_{u \in K_z} |\tilde{\lambda}(u)/u|\Big\}\Big) < +\infty.$$

Łącząc zależności (2.40) z (2.41) widzimy, że dla wszystkich $w \in \mathbb{D}(z, r_z)$ i $n \in \mathbb{Z}_{n_\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} |T_\lambda(f_n, g_n)(w) - T_\lambda(f_n, g)(w)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \Big| \int_{\gamma_z} \Big(f_n(u) g_n\Big(\frac{w}{u}\Big) - f_n(u) g\Big(\frac{w}{u}\Big)\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u} \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_z} |f_n(u)| \Big| g_n\Big(\frac{w}{u}\Big) - g\Big(\frac{w}{u}\Big)\Big| |\tilde{\lambda}(u)| \frac{|\mathrm{d}u|}{|u|} \\ &\leqslant \frac{|\gamma_z|_1}{2\pi}(M_z + 1)\frac{\varepsilon}{M_z + 1} M_z \leqslant \frac{|\gamma_z|_1 M_z}{2\pi}\varepsilon \end{aligned}$$

jak również

$$\begin{aligned} |T_\lambda(f_n, g)(w) - T_\lambda(f, g)(w)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \Big| \int_{\gamma_z} \Big(f_n(u) g\Big(\frac{w}{u}\Big) - f(u) g\Big(\frac{w}{u}\Big)\Big) \tilde{\lambda}(u) \frac{\mathrm{d}u}{u} \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_z} |f_n(u) - f(u)| \Big| g\Big(\frac{w}{u}\Big)\Big| |\tilde{\lambda}(u)| \frac{|\mathrm{d}u|}{|u|} \\ &\leqslant \frac{|\gamma_z|_1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{M_z + 1} M_z^2 < \frac{|\gamma_z|_1 M_z}{2\pi}\varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd

$$\Big|T_\lambda(f_n,g_n)(w)-T_\lambda(f,g)(w)\Big| < \frac{|\gamma_z|_1 M_z}{\pi}\varepsilon, \quad w\in\mathbb{D}(z,r_z),\ n\in\mathbb{Z}_{n_\varepsilon},$$

i w konsekwencji

$$\sup_{w\in\mathbb{D}(z,r_z)}\Big|T_\lambda(f_n,g_n)(w)-T_\lambda(f,g)(w)\Big| \to 0,\ \text{gdy } n\to+\infty. \tag{2.42}$$

Załóżmy, że E jest zbiorem zwartym takim, że $E\subset\Omega\setminus\{0\}$. Ponieważ $E\subset\bigcup_{z\in E}\mathbb{D}(z,r_z)$, istnieje skończony podzbiór $E'\subset E$ taki, że $E\subset\bigcup_{z\in E'}\mathbb{D}(z,r_z)$. Ustalając dowolnie $\varepsilon>0$ wnosimy z (2.42), że dla każdego $z\in E'$ istnieje $n_z\in\mathbb{N}$ spełniający warunek

$$\Big|T_\lambda(f_n,g_n)(w)-T_\lambda(f,g)(w)\Big| < \varepsilon, \quad n\in\mathbb{Z}_{n_z},\ w\in\mathbb{D}(z,r_z).$$

Przyjmując więc $N_\varepsilon := \max\Big(\{n_z : z\in E'\}\Big)$ mamy

$$\Big|T_\lambda(f_n,g_n)(w)-T_\lambda(f,g)(w)\Big| < \varepsilon, \quad n\in\mathbb{Z}_{N_\varepsilon},\ w\in E,$$

czyli ciąg $\mathbb{N}\ni n\mapsto T_\lambda(f_n,g_n)$ jest zbieżny jednostajnie do $T_\lambda(f,g)$ w E. Dlatego

$$T_\lambda(f_n,g_n)\xrightarrow{\text{ucc}} T_\lambda(f,g)\ \text{w } \Omega\setminus\{0\},\ \text{gdy } n\to+\infty. \tag{2.43}$$

Ponieważ Ω jest zbiorem otwartym i $0\in\Omega$, więc istnieje $r>0$ o tej własności, że $\overline{\mathbb{D}}(0,r)\subset\Omega$. Stąd $\mathbb{T}(0,r)$ jest podzbiorem zwartym zbioru $\Omega\setminus\{0\}$, i korzystając z zasady maksimum dla funkcji holomorficznych wnioskujemy z (2.43), że

$$\begin{aligned}\sup_{w\in\overline{\mathbb{D}}(0,r)}&\Big|T_\lambda(f_n,g_n)(w)-T_\lambda(f,g)(w)\Big|\\ &=\sup_{w\in\mathbb{T}(0,r)}\Big|T_\lambda(f_n,g_n)(w)-T_\lambda(f,g)(w)\Big| \to 0,\ \text{gdy } n\to+\infty.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Zauważmy, że dla każdego zbioru zwartego $E\subset\Omega$, $E\subset\overline{\mathbb{D}}(0,r)\cup(E\setminus\mathbb{D}(0,r))$ oraz $E\setminus\mathbb{D}(0,r)$ jest zwartym podzbiorem zbioru $\Omega\setminus\{0\}$. To łącznie z (2.43) i (2.44) implikuje

$$T_\lambda(f_n,g_n)\xrightarrow{\text{ucc}} T_\lambda(f,g)\ \text{w } \Omega,\ \text{gdy } n\to+\infty.$$

Zatem warunek (2.11) jest spełniony, co kończy dowód. □

Wzorując się na definicji klasy $\mathcal{H}_1(A,B)$ możemy dla dowolnie zadanych obszarów $A,B\subset\mathbb{C}$ zawierających 0 i $\lambda\in\Lambda$ określić klasę $\mathcal{H}_1^\lambda(A,B)$ wszystkich obszarów $\Omega\subset\mathbb{C}$ takich, że $\mathbb{D}(0,\rho(A)\rho(B))\subset\Omega$ oraz dla dowolnych $f\in\mathrm{Hol}(A)$ i $g\in\mathrm{Hol}(B)$ istnieje funkcja $h\in\mathrm{Hol}(\Omega)$, która pokrywa się z funkcją $\mathrm{H}_\lambda(f,g)$ w $D:=\mathbb{D}(0,\rho(A)\rho(B))\subset\mathbb{D}(0,\mathrm{R}_f\,\mathrm{R}_g)$, tj.,

$$h(z)=\mathrm{H}_\lambda(f,g)(z), \quad z\in D. \tag{2.45}$$

Innymi słowy funkcja $\mathrm{H}_\lambda(f,g)|_D$ ma rozszerzenie holomorficzne h na każdy obszar $\Omega\in\mathcal{H}_1^\lambda(A,B)$.

Wniosek 2.12. *Dla dowolnych obszarów jednospójnych* $A, B \subset \mathbb{C}$ *i* $\lambda \in \Lambda$*, jeżeli* $0 \in A \cap B$*, to* $\Omega := \mathrm{CC}_0(A * B) \in \mathcal{H}_1^\lambda(A, B)$*. Co więcej, dla wszystkich* $f \in \mathrm{Hol}(A)$ *i* $g \in \mathrm{Hol}(B)$ *warunek* (2.45) *zachodzi z* $h := T_\lambda(f, g)|_\Omega \in \mathrm{Hol}(\Omega)$*, gdzie* T_λ *jest operatorem określonym poprzez warunek* (2.17)*.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A i B spełniające założenia oraz $\lambda \in \Lambda$. Z lematu 1.26 wynika, że $\Omega := \mathrm{CC}_0(A * B)$ jest obszarem, gdyż każda składowa spójna zbioru otwartego jest zbiorem spójnym; por. [11, str. 25]. Z twierdzenia 2.11 wynika zaś, że dla dowolnie ustalonych $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$, $h := T_\lambda(f, g)|_\Omega \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Z (2.34) mamy $\mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B)) \subset \Omega$. Ponieważ $\mathrm{H}_\lambda(f, g) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, \mathrm{R}_f\, \mathrm{R}_g))$ oraz $\rho(A) \leqslant \mathrm{R}_f$ i $\rho(B) \leqslant \mathrm{R}_g$, więc $\mathrm{H}_\lambda(f, g) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B)))$. Zauważmy, że $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, \rho(A)))$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(0, \rho(B)))$. Porównując równości (2.17) i (2.14) otrzymujemy na podstawie twierdzenia 2.11 i twierdzenia 2.10 zależność

$$\mathrm{H}_\lambda(f, g)(z) = T_\lambda(f, g)(z), \quad z \in \mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B)) \setminus \{0\}.$$

Zatem $\mathrm{H}_\lambda(f, g)(z) = h(z)$ dla $z \in \mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B))$, czyli warunek (2.45) jest spełniony. Uwzględniając definicję klasy $\mathcal{H}_1^\lambda(A, B)$ otrzymujemy $\Omega \in \mathcal{H}_1^\lambda(A, B)$, co kończy dowód. □

Uwaga 2.13. Niech $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ będzie ciągiem spełniającym równości $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_k = 0$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Z uwagi 2.3 wynika, że $\mathcal{H}_1^\lambda(A, B) = \mathcal{H}_1(A, B)$. Zatem wniosek 2.12 ma w szczególności zastosowanie do iloczynu Hadamarda $*$. W konsekwencji $\Omega := \mathrm{CC}_0(A * B) \in \mathcal{H}_1(A, B)$ dla dowolnych obszarów jednospójnych $A, B \subset \mathbb{C}$ spełniających warunek $0 \in A \cap B$; por. [14, Corollary 3.2]. Co więcej, z warunku (0.10) wynika, że Ω jest największym w sensie inkluzji obszarem w klasie $\mathcal{H}_1(A, B)$. Jeżeli dodatkowo $A * B$ jest spójny, to $A * B = \mathrm{CC}_0(A * B)$, a więc $A * B \in \mathcal{H}_1(A, B)$; por. [14, Remark 3.3]. Ponadto, $h := T_\lambda(f, g)|_\Omega$ jest rozszerzeniem holomorficznym funkcji $(f * g)|_{\mathbb{D}(0, \rho(A)\rho(B))}$ dla wszystkich $f \in \mathrm{Hol}(A)$ i $g \in \mathrm{Hol}(B)$.

Rozdział 3

Przykłady zastosowań

3.1 Przykłady do rozdziału pierwszego

Wymienione niżej przykłady ilustrują rozważania z rozdziału pierwszego. Dotyczą one różnych metod wyznaczania splotów zbiorów.

Przykład 3.1. Podstawiając

$$A := \mathbb{C} \setminus \left([1; +\infty) \cup \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right\}\right)$$

otrzymujemy

$$A * A = (\mathbb{D} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}) \setminus \mathbb{T}.$$

Zatem $A * A$ nie jest zbiorem spójnym mimo, że obszar A jest jednospójny. Obliczenia są tutaj znacznie łatwiejsze w porównaniu z przykładem 1.35, ale obszar A nie jest liniowo osiągalny.

Kolejny przykład ilustruje splot zbioru gwiaździstego względem 0 i zbioru $\pi/6$-spiralnego względem 0. Z twierdzenia 1.41 wiemy, że taki splot będzie posiadał obie te własności.

Przykład 3.2. Przyjmijmy

$$A := \mathbb{C} \setminus [1; +\infty)$$

oraz

$$B := \mathbb{C} \setminus \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}} : t \geqslant 0\right\}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} A^{\complement} \cdot B^{\complement} &= \left([1; +\infty) \cdot \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}} : t \geqslant 0\right\}\right) \cup \{\infty\} \\ &= \left\{r\mathrm{e}^{t\sqrt{3}}\mathrm{e}^{t\mathrm{i}} : t \in [0; 2\pi) \wedge r \geqslant 1\right\} \cup \{\infty\}, \end{aligned}$$

i w konsekwencji

$$A * B = \mathbb{C} \setminus \left\{ r e^{t\sqrt{3}} e^{ti} : t \in [0; 2\pi) \wedge r \geqslant 1 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \bigvee_{p \in [0;2\pi)} \left(z = |z| e^{ip} \wedge |z| < e^{p\sqrt{3}} \right) \right\}.$$

Kolejny przykład ilustruje splot dwóch dowolnych kół. Okazuje się, że nie jest to tak trywialny problem jak splot dwóch kół o środkach w punkcie 0.

Przykład 3.3. Rozważmy koła $A := \mathbb{D}(1, 2)$ oraz $B := \mathbb{D}(3, 5)$. Wtedy

$$\frac{z}{B} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}\left(-\frac{3z}{16}, \frac{5|z|}{16} \right).$$

Zatem z twierdzenia 1.11 wynika, że $A * B$ jest zbiorem wszystkich liczb zespolonych z, dla których okrąg $\mathbb{T}(-3z/16, 5|z|/16)$ leży w kole $\mathbb{D}(1, 2)$. Zatem

$$A * B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |3z + 16| + 5|z| < 32 \right\}.$$

Następujący przykład ilustruje splot obszarów wertykalnie wypukłych.

Przykład 3.4. Przyjmijmy $A := \mathbb{D}(0, 5) \cup \mathbb{D}(8, 5)$. Wtedy

$$\frac{z}{A} = \left(\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}\left(0, \frac{|z|}{5} \right) \right) \cup \mathbb{D}\left(\frac{8z}{39}, \frac{5|z|}{39} \right).$$

Zatem z twierdzenia 1.11 wynika, że $A * A$ jest zbiorem wszystkich liczb zespolonych z, dla których $\bar{\mathbb{D}}(0, |z|/5) \subset \mathbb{D}(0, 5)$. Zatem $A * A = \mathbb{D}(0, 25)$.

Używanie definicji do wyznaczania splotu $A * B$ jest często trudne. W takich przypadkach czasem udaje się to zrobić za pomocą twierdzeń charakteryzujących splot $A*B$. W następujących dwóch przykładach zostaną użyte uwaga 1.47 oraz twierdzenie 1.45, które dotyczą wyznaczania splotu obszarów spiralnych względem 0, a w szczególności obszarów gwiaździstych względem 0.

Przykład 3.5. Zbiór $A := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 1\}$ jest obszarem gwiaździstym względem 0. Dlatego jego charakterystyka brzegowa może być wyrażona za pomocą wzoru (1.37) i przyjmuje postać

$$\rho_A(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos(t)}, & t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right), \\ +\infty, & t \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2} \right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi \right]. \end{cases}$$

Ustalmy dowolnie $z = |z| e^{i\theta}$, gdzie $\theta \in (-\pi; \pi]$. Wtedy

$$\rho_A(t)\rho_A(\theta - t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos(t)\cos(\theta - t)}, & t \in I_\theta := \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right) \cap \left(\theta - \dfrac{\pi}{2}; \theta + \dfrac{\pi}{2} \right), \\ +\infty, & t \in [-\pi; \pi] \setminus I_\theta. \end{cases}$$

Jeśli $\theta = \pi$, to $I_\theta = \emptyset$, a więc $\rho_A(t)\rho_A(\theta - t) = +\infty$. Jeśli $\theta \in (-\pi; \pi)$, to

$$\rho_A(t)\rho_A(\theta-t) = \frac{2}{\cos(\theta) + \cos(2t - \theta)}, \quad t \in \left(\max\left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \theta-\frac{\pi}{2}\right\}\right); \min\left(\left\{\frac{\pi}{2}, \theta+\frac{\pi}{2}\right\}\right)\right).$$

Załóżmy, że $\theta \in [0; \pi)$. Wtedy $t \in (\theta - \pi/2; \pi/2)$ i $2t - \theta \in (\theta - \pi; \pi - \theta)$. Zauważmy, że $0 \in (\theta-\pi; \pi-\theta)$ niezależnie od wyboru θ. Funkcja $\rho_A(t)\rho_A(\theta-t)$ przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu t, dla którego $\cos(2t - \theta)$ będzie największy. Podstawiając $\tau := 2t - \theta$ otrzymujemy

$$\max\left(\left\{\cos(2t-\theta) : t \in \left(\theta-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right\}\right) = \max\Big(\big\{\cos(\tau) : \tau \in (\theta-\pi; \pi-\theta)\big\}\Big) = \cos(0) = 1.$$

Zatem

$$\min_{t\in\mathbb{R}}\Big(\rho_A(t)\rho_A(\theta - t)\Big) = \frac{2}{\cos(\theta) + 1} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Załóżmy teraz, że $\theta \in (-\pi; 0)$. Wtedy $t \in (-\pi/2; \pi/2 + \theta)$ i $2t - \theta \in (-\theta - \pi; \pi + \theta)$. Zauważmy, że $0 \in (-\theta - \pi; \pi + \theta)$ niezależnie od wyboru θ. Postępując analogicznie do przypadku, gdy $\theta \in [0; \pi)$, otrzymamy ten sam wynik. Zatem

$$\rho_{A*A}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, & \theta \in (-\pi; \pi), \\ +\infty, & \theta = \pi. \end{cases}$$

Stąd i ze względu na okresowość funkcji ρ_{A*A} dostajemy

$$A * A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + |z| < 2\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 1 - \frac{1}{4}(\mathrm{Im}(z))^2\right\}.$$

Przykład 3.6. Dla dowolnie zadanego $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ przyjmijmy

$$A := \left\{w \in \mathbb{C} : \bigvee_{t\in\mathbb{R}} \bigvee_{s\in[0;2\pi)} \left(w = \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \wedge t < 1 + s\right)\right\} \cup \{0\}.$$

Wtedy $\rho_{A,\delta}(s) = 1 + s$ dla $s \in [0; 2\pi)$. Ponieważ dla dowolnych $s \in [0; 2\pi)$ i $p \in [s; 2\pi)$,

$$\rho_{A,\delta}(s) + \rho_{A,\delta}(p - s) = 1 + s + 1 + p - s = 2 + p,$$

więc na mocy twierdzenia 1.45 otrzymujemy

$$A * A = \left\{w \in \mathbb{C} : \bigvee_{t\in\mathbb{R}} \bigvee_{s\in[0;2\pi)} \left(w = \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}s} \wedge t < 2 + s\right)\right\} \cup \{0\}.$$

3.2 Przykłady do rozdziału drugiego

W tym rozdziale sygnalizujemy możliwość zastosowania rezultatów z rozdziału drugiego.

Przykład 3.7. Dla dowolnie zadanego ciągu $\lambda \in \Lambda$ otrzymujemy na mocy wzoru (2.5),

$$\mathrm{H}_\lambda(f,g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{n}\lambda_k a_{n-k}\right)b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_{n-k}a_k\right)b_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}(0, \mathrm{R}_f\,\mathrm{R}_g),$$

gdzie $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ i $b_n := \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ dla $n \in \mathbb{Z}_0$. Przyjmując w szczególności $\lambda_1 := 1$ i $\lambda_k := 0$ dla $k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$ oraz $\mathbb{D} \ni z \mapsto g(z) := 1/(1-z)$ dostajemy

$$\mathrm{H}_\lambda(f,g)(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+1}, \quad f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}),\ z \in \mathbb{D}.$$

Zatem przekształcenie $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \ni f \mapsto \mathrm{H}_\lambda(f,g)$ jest klasycznym operatorem przesunięcia Beurlinga odgrywającym istotną rolę w teorii przestrzeni Hardy'ego; por. np. [1, p. 82] i [16, Sec. 17.20].

Przykład 3.8. Rozważmy funkcje zadane szeregami potęgowymi

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto \varphi(z) := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2} \ \text{ oraz } \ \mathbb{D} \ni z \mapsto \psi(z) := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n^2}.$$

Z tych wzorów wynika, że obie funkcje φ i ψ są holomorficzne w kole $\mathbb{D}$ i mają ciągłe rozszerzenia na koło domknięte $\bar{\mathbb{D}}$. Stosując wniosek 2.12 można uzyskać znacznie dokładniejszą informację. Przyjmując $A := \mathbb{C}\setminus(-\infty;-1]$ i $B := \mathbb{C}\setminus[1;+\infty)$ widzimy, że

$$\begin{aligned} A * B &= (A^{\complement}\cdot B^{\complement})^{\complement} = \Big(((-\infty;-1]\cup\{\infty\})\cdot([1;+\infty)\cup\{\infty\})\Big)^{\complement} \\ &= \Big((-\infty;-1]\cup\{\infty\}\Big)^{\complement} = \mathbb{C}\setminus(-\infty;-1] = A \end{aligned}$$

oraz podobnie $A * A = B * B = B$. Rozważmy funkcje

$$A \ni z \mapsto f(z) := \log(1+z) \ \text{ oraz } \ B \ni z \mapsto g(z) := -\log(1-z),$$

gdzie funkcja log jest określona jako funkcja odwrotna do obcięcia funkcji $\exp|_D$, gdzie $D := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \pi/2\}$. Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} \ \text{ oraz } \ g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}, \quad z \in \mathbb{D},$$

i w konsekwencji $f * g = \psi$ i $f * f = g * g = \varphi$. Z wniosku 2.12 wynika zatem, że funkcja φ ma holomorficzne rozszerzenie na obszar B, zaś funkcja ψ ma holomorficzne rozszerzenie na obszar A. Co więcej, rozszerzenia te mają odpowiednio postać $T_\lambda(f,f)$ i $T_\lambda(f,g)$, gdzie T_λ jest operatorem określonym poprzez warunek (2.17) z $\lambda \in \Lambda$ spełniającym równości $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_k = 0$ dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Biorąc pod uwagę dowolny ciąg $\lambda \in \Lambda$ stwierdzamy w analogiczny sposób, że funkcja

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto \varphi_\lambda(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} \frac{\lambda_k}{n-k} \right) \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_{n-k}}{k} \right) \frac{z^n}{n}$$

ma holomorficzne rozszerzenie na obszar B postaci $T_\lambda(g,g)$. Różniczkując funkcje φ i ψ można holomorficzną rozszerzalność tych funkcji na obszary B i A uzyskać w alternatywny sposób. W przypadku ogólnym funkcji φ_λ użycie tej metody nie wydaje się proste.

Bibliografia

[1] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[2] K. G. Grosse-Erdmann, *On the Borel-Okada Theorem and the Hadamard Multiplication Theorem*, Complex Variables **22** (1993), 101–112.

[3] J. Hadamard, *Théorème sur les séries entières*, Mathematica **22** (1899), 53–63.

[4] E. Hille, *Analytic Function Theory*, vol. II, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[5] K. Kuratowski, *Topology*, vol. II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1968.

[6] A. Lecko and D. Partyka, *Intern. Conference "60 Years of Analytic Functions in Lublin", In Memory of our Professors and Friends, J. G. Krzyż, Z. Lewandowski and W. Szapiel*, ch. A revised proof of starlikeness, pp. 85–95, Innovatio Press Scientific publishing house, Lublin, 2012.

[7] ______, *A revised proof of spirallikeness*, Contemporary Mathematics **591** (2013), 171–181.

[8] S. Łojasiewicz, *An Introduction to the Theory of Real Functions*, John Wiley & Sons, 1988.

[9] T. Lorson, *Hadamard Convolution Operators on Spaces of Holomorphic Functions*, University of Trier, 2013, Disseration.

[10] T. Lorson and J. Müller, *Convolution operators on spaces of holomorphic functions*, Studia Mathematica **227** (2015), 111–131.

[11] J. Mioduszewski, *Wykłady z topologii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 1994.

[12] J. Müller, *The Hadamard multiplication theorem and applications in summability theory*, Complex Variables **18** (1992), 155–166.

[13] J. Müller and T. Pohlen, *The Hadamard product on open sets in the extended plane*, Complex Analysis and Operator Theory **6** (2012), 257–274.

[14] M. Parol and D. Partyka, *Contribution to the Hadamard multiplication theorem*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A **75** (2021), no. 2, 93–107.

[15] C. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[16] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third ed., McGraw-Hill International Editions, Mathematics Series, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1987.