Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Mariola Walczyk

Zbiory diametralnie zupełne z pustym wnętrzem

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
dr hab. Moniki Budzyńskiej, prof. UMCS

LUBLIN **2022**

Spis treści

Wstęp

Definicja zbioru diametralnie zupełnego została wprowadzona w 1911 roku przez E. Meissnera ([71]). Zbiór ten jest ściśle związany ze zbiorem o stałej szerokości. Zbiory o stałej szerokości były rozważane już przez L. Eulera. Okazuje się, że w dwuwymiarowych przestrzeniach Banacha, wszystkich skończenie wymiarowych przestrzeniach euklidesowych i przestrzeniach Hilberta pojęcia zbioru diametralnie zupełnego i zbioru o stałej szerokości są równoważne ([17]). Chociaż jak zauważył już E. Meissner ([71]) każdy zbiór o stałej szerokości w przestrzeni Banacha o wymiarze skończonym jest zbiorem diametralnie zupełnym, to w [29] H. G. Eggleston pokazał, że nawet w trójwymiarowych przestrzeniach liniowych ta równoważność już nie jest prawdziwa - zbiór diametralnie zupełny nie musi mieć stałej szerokości. Następnie J. P. Moreno, P. L. Papini i R. R. Phelps udowodnili, że każda przestrzeń Banacha o wymiarze co najmniej 3 po odpowiednim równoważnym przenormowaniu zawiera zbiór diametralnie zupełny o niepustym wnętrzu, który nie jest zbiorem o stałej szerokości ([74]). Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt, że diametralnie zupełne podzbiory przestrzeni Banacha o wymiarze skończonym mają niepuste wnętrze. Natomiast w przypadku przestrzeni Banacha o wymiarze nieskończonym mogą istnieć zbiory diametralnie zupełne o pustym wnętrzu. Przykład zbioru o stałej szerokości i pustym wnętrzu w przestrzeni c_0 podali J. P. Moreno, P. L. Papini i R. R. Phelps w [74].

Badanie zbiorów diametralnie zupełych w ostatnim czasie skupiło się na trzech następujących problemach:

- znajdowaniu zbiorów diametralnie zupełnych w klasycznych przestrzeniach Banacha i wyznaczaniu rodzin zbiorów wypukłych związanych ze zbiorami diametralnie zupełnymi ([74], [75], [77]),
- znajdowaniu najmniejszego w sensie inkluzji diametralnie zupełnego zbioru dla danego zbioru ([69], [76]),
- istnieniu zbiorów diametralnie zupełnych z pustym wnętrzem ([14], [15], [16], [48], [49], [64], [66], [67]).

W przedstawionej rozprawie doktorskiej zajmiemy się trzecim problemem, tzn. problemem istnienia, przy odpowiednim równoważnym przenormowaniu, zbiorów diametralnie zupełnych o pustym wnętrzu w nieskończenie wymiarowych i refleksywnych przestrzeniach Banacha. Dodatkowo uogólnimy wynik E. Maluty i D. Yosta ([67]) o istnieniu zbiorów o stałej szerokości z pustym wnętrzem w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha z bezwarunkową baza Schaudera.

Przypomnijmy, że w [66] E. Maluta i P. L. Papini podali warunek wystarczający na istnienie zbiorów diametralnie zupełnych z pustym wnętrzem w nieskończenie wymiarowych i refleksywnych przestrzeniach Banacha. W 2017 roku w [64] E. Maluta wykorzystując wspomniany warunek dostateczny skonstruowała refleksywną i lokalnie jednostajnie wypukłą przestrzeń Banacha, która zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem. Warto wspomnieć, że E. Maluta i D. Yost udowodnili również, że każda przestrzeń Banacha, która posiada bezwarunkową bazę Schaudera ma równoważną normę przy której przestrzeń ta zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem - w szczególności niektóre klasyczne refleksywne przestrzenie Banacha dają się tak przenormować ([67]).

Praca składa się z piętnastu rozdziałów i czterech dodatków. Dla wygody czytelnika wiadomości pomocnicze będą podane w rozdziałach 1, 2, 6, 9, 10, 12 i 14, przed rozdziałami, w których te wiadomości będą wykorzystane. W pierwszym i drugim rozdziale wprowadzimy kolejno oznaczenia oraz przypomnimy definicje i fakty z teorii szeregów liczbowych i geometrii przestrzeni Banacha, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

W trzecim rozdziale przedstawimy definicję uogólnionej normy Daya i udowodnimy jej podstawowe własności.

Udowodnione w rozdziale czwartym twierdzenie o istnieniu w ośrodkowej przestrzeni Banacha równoważnej normy z własnościami Opiala i Kadeca-Klee'ego będzie jednym z głównych narzędzi przy rozwiązywaniu naszego problemu. Zauważmy, że nasze wyniki tego rozdziału, niezależnie od przedstawionego tutaj ich zastosowania, są też interesujące z punktu widzenia geometrii przestrzeni Banacha.

W rozdziale piątym skonstruujemy normę $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ typu Daya, przy pomocy której określimy normę w dowodzie podstawowego dla nas twierdzenia 7.1.

W rozdziale szóstym przypomnimy definicję i własności zbioru diametralnie zupełnego.

Rozdział siódmy poświęcony będzie twierdzeniu o istnieniu zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem w odpowiednio przenormowanych (przy pomocy normy typu Daya), nieskończenie wymiarowych, ośrodkowych i refleksywnych przestrzeniach Banacha (twierdzenie 7.2).

W rozdziale ósmym pokażemy jak nasz problem rozważany w nieskończenie wymiarowych i refleksywnych przestrzeniach Banacha można zredukować przy pomocy twierdzenia A. R. Lovaglii ([63]) i S. L. Troyanskiego ([95]) do problemu w nieskończenie wymiarowych, ośrodkowych i refleksywnych przestrzeniach Banacha. W ten sposób całkowicie rozwiążemy problem istnienia zbiorów diametralnie zupełnych z pustym wnętrzem w refleksywnych przestrzeniach Banacha.

W rozdziale dziewiątym przypomnimy podstawowe wiadomości dotyczące szeregów i baz bezwarunkowo zbieżnych, które będą przydatne w rozdziale 11, a w rozdziale dziesiątym przytoczymy kilka znanych faktów o zbiorach o stałej szerokości.

W rozdziale jedenastym uogólnimy wynik E. Maluty i D. Yosta o istnieniu zbioru o stałej szerokości z pustym wnętrzem. To pozwoli nam udowodnić, że przestrzeń $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ ma równoważną normę, taką że w $C([0,1],\mathbb{R})$ z tą normą istnieje zbiór o stałej szerokości i pustym wnętrzu.

Rozdział dwunasty jest rozdziałem pomocniczym w którym przypomnimy wyniki o rozszerzonych bazach bezwarunkowych w nieośrodkowej przestrzeni Banacha. Wykorzystamy je by uogólnić wynik E. Maluty i D. Yosta do przestrzeni Banacha z takimi bazami.

W rozdziale trzynastym uogólnimy twierdzenie E. Maluty i D. Yosta o istnieniu zbioru o stałej szerokosci z pustym wnetrzem w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha z bezwarunkową baza Schaudera.

Rozdział czternasty jest rozdziałem przygotowawczym do ostatniego - piętnastego rozdziału. Podamy w nim znane przykłady przestrzeni Banacha, które mają różne własności związane z bezwarunkowymi bazami Schaudera i bezwarunkowymi ciągami bazowymi.

W ostatnim rozdziale porównamy zakresy zastosowań podstawowych twierdzeń z naszej rozprawy i twierdzenia E. Maluty i D. Yosta.

Pracę zakończymy czterema dodatkami. W pierwszym dodatku wzmocnimy twierdzenie 4.3, tzn. zastąpimy własność Kadeca-Klee'ego występującą w twierdzeniu 4.3 przez lokalną jednostajną wypukłość.

W drugim dodatku pokażemy, że w nieośrodkowej i refleksywnej przestrzeni Banacha mającej słabą własność Opiala i własność Kadeca-Klee'ego również można skonstruować (metodą podobną do tej z rozdziału piątego, tzn. przy pomocy normy typu Daya) równoważną normę, która jest lokalnie jednostajnie wypukła i przestrzeń z tą normą zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem. Niestety dodatkowe założenie o słabej własności Opiala i własności Kadeca-Klee'ego pokazuje duże ograniczenie naszej metody dowodowej w ogólnym przypadku i dlatego w rozdziale ósmym w przypadku nieośrodkowej przestrzeni refleksywnej musieliśmy zastosować inne podejście dowodowe, by osiągnąć ogólny wynik.

W trzecim dodatku zajmiemy się istnieniem równoważnej normy ze słabą własnością Opiala w nieośrodkowych przestrzeniach Banacha z rozszerzoną bazą bezwarunkową.

W dodatku czwartym pokażemy inny niż w rozdziale trzynastym dowód twierdzenia mówiącego, że w nieośrodkowej przestrzeni Banacha z rozszerzoną bazą bezwarunkową istnieje zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.

Część rezultatów została już opublikowana ([12], [13], [15], [16], [48]), przy czym kilka z nich jest podana w naszej pracy w silniejszej postaci (np. twierdzenie 3.2 i 7.2). Prace prezentujące rezultaty z rozdziałów 11, 13 i 15 oraz dodatków 1, 3 i 4 są w przygotowaniu.

Rozdział 1

Pewne fakty z geometrii przestrzeni Banacha

W naszej pracy będziemy rozważać przestrzenie Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jeżeli będzie to potrzebne zamiast normy $\|\cdot\|$ w przestrzeni Banacha X będziemy pisać $\|\cdot\|_X$.

Na początku podamy podstawowe oznaczenia używane w rozprawie. W całej pracy zakładamy, że Γ jest zbiorem nieskończonym i przez $c_0(\Gamma)$ oznaczamy przestrzeń Banacha złożoną z funkcji $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, $u = \{u^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, takich że dla każdego $\epsilon > 0$ zbiór $\{\gamma \in \Gamma : |u^\gamma| \geqslant \epsilon\}$ jest skończony. W przestrzeni $c_0(\Gamma)$ klasyczną normę supremum oznaczamy przez $\|\cdot\|_{c_0(\Gamma)}$, tzn.

$$\|u\|_{c_0(\Gamma)} := \sup_{\gamma\in\Gamma} |u^\gamma|$$

dla $u = \{u^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$. Gdy $\Gamma = \mathbb{N}$, to zamiast pisać $c_0(\mathbb{N})$ będziemy pisać c_0. Nośnik funkcji u, tzn. zbiór $\{\gamma \in \Gamma : u^\gamma \neq 0\}$ będziemy oznaczać przez $N(u)$.

Jeśli ustalimy dowolną liczbę $1 \leqslant p < +\infty$, to przestrzeń złożoną z wszystkich funkcji $u \in c_0(\Gamma)$, takich że $\sum_{\gamma\in N(u)} |u^\gamma|^p < \infty$ oznaczamy symbolem $\ell^p(\Gamma)$. Norma w tej przestrzeni jest dana wzorem

$$\|u\|_{l^p} := \left(\sum_{\gamma\in N(u)} |u^\gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dla $u = \{u^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in \ell^p(\Gamma) \setminus \{0\}$ i $\|0\|_{l^p} = 0$. Przestrzeń $\ell^p(\mathbb{N})$ jest tradycyjnie oznaczana przez ℓ^p. W dalszych rozważaniach dla $1 < p < \infty$, gdy nie będzie to konieczne, zamiast symbolu $\|\cdot\|_{\ell^p}$ będziemy pisać $\|\cdot\|_p$.

Symbolem $L^p([0,1],\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < +\infty$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich mierzalnych w sensie Lebesgue'a funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (przy czym utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie na przedziale $[0,1]$), takich że $\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty$. W przestrzeni $L^p([0,1],\mathbb{R})$ mamy normę

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

dla $f \in L^p([0,1],\mathbb{R})$.

Symbolem $C([0,1],\mathbb{R})$ oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ciągłych na przedziale $[0,1]$. W przestrzeni $C([0,1],\mathbb{R})$ mamy klasyczną normę

$$\|f\|_C := \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

dla $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

W pracy pojawią się też przestrzeń $\ell^\infty := \{u = (u^n)_{n=1}^\infty : \sup_{n\in\mathbb{N}} |u^n| < \infty\}$ ze standardową normą $\|u\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u^n|$ dla każdego $u = (u^n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ i przestrzeń $c := \{u = (u^n)_{n=1}^\infty : \lim_n u^n$ istnieje i $\lim_n u^n < \infty\}$ z normą $\|u\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u^n|$ dla $u = (u^n)_{n=1}^\infty \in c$.

Przypomnimy teraz definicje i twierdzenia z geometrii przestrzeni Banacha, które będziemy wykorzystywać w dalszej części pracy.

Zaczniemy od definicji przestrzeni uniwersalnej, a następnie przejdziemy do definicji własności związanych z wypukłością kuli.

Definicja 1.1. Mówimy, że przestrzeń Banacha $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jest uniwersalna dla ośrodkowych przestrzeni Banacha, jeśli każda ośrodkowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ jest izometrycznie izomorficzna z podprzestrzenią $Y_1 \subset Y$, tzn. istnieje liniowy i zachowujący normę izomorfizm $T : X \to Y_1$, taki że $T(X) = Y_1$.

Uwaga 1.2. Jeśli $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ są przestrzeniami Banacha i $T: X \to Y$ jest liniowym zanurzeniem izometrycznym X w Y, to będziemy utożsamiać $T(X)$ z X i pisać $X \subset Y$.

Podamy teraz dwa ważne przykłady przestrzeni Banacha uniwersalnych dla ośrodkowych przestrzeni Banacha [42].

Twierdzenie 1.3. *Przestrzeń $C([0,1],\mathbb{R})$ z normą maksimum $\|\cdot\|_C$ jest uniwersalna dla ośrodkowych przestrzeni Banacha.*

Twierdzenie 1.4. *Przestrzeń Banacha ℓ^∞ z normą supremum $\|\cdot\|_\infty$ jest uniwersalna dla ośrodkowych przestrzeni Banacha.*

Przypomnimy teraz pojęcie przestrzeni dopełnialnej.

Definicja 1.5. ([45]) Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha i $Y \neq X$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni X o wymiarze $\dim Y \geqslant 1$. Jeśli istnieje liniowa i ciągła projekcja przestrzeni X na Y, to mówimy, że podprzestrzeń Y jest dopełnialna w X.

Mamy następujące wyniki o dopełnialnej podprzestrzeni.

Twierdzenie 1.6. ([80]) *Załóżmy, że Y jest nieskończenie wymiarową i dopełnialną podprzestrzenią w przestrzeni ℓ^1 ze standardową normą. Wtedy podprzestrzeń Y jest izomorficzna z ℓ^1.*

Twierdzenie 1.7. ([37]) *W przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ nie istnieje nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń, która jest refleksywna i dopełnialna.*

Twierdzenie 1.8. ([91], [96]) *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Jeśli Y jest domkniętą i izomorficzną z c_0 podprzestrzenią przestrzeni X, to Y zawiera domkniętą i dopełnialną w X podprzestrzeń Y_1 izomorficzną z c_0.*

Ponieważ przestrzeń Banacha $C([0,1],\mathbb{R})$ ze standardową normą maksimum $\|\cdot\|_C$ jest uniwersalna dla ośrodkowych przestrzeni Banacha (patrz twierdzenie 1.3), to mamy następujący wniosek.

Wniosek 1.9. ([91], patrz też [1]) Przestrzeń Banacha $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ zawiera domkniętą i dopełnialną w $C([0,1],\mathbb{R})$ podprzestrzeń Y izomorficzną z c_0.

Zajmiemy się teraz geometrycznymi własnościami przestrzeni Banacha.

Definicja 1.10. ([32], [33], [42]) Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest ściśle wypukła, jeśli dla każdych $x, y \in X$, takich że $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ i $x \neq y$, mamy $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

Kolejną definicją jest definicja przestrzeni jednostajnie wypukłej. Została ona wprowadzona przez J. A. Clarksona.

Definicja 1.11. ([19]) Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest jednostajnie wypukła, jeśli dla każdego $0 < \epsilon \leqslant 2$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że dla każdych $x, y \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ i $\|x-y\| \geqslant \epsilon$ spełniona jest nierówność $\|\frac{x+y}{2}\| \leqslant 1-\delta$.

Klasycznymi przykładami takich przestrzeni są przestrzenie ℓ^p ze standardowymi normami $(1 < p < +\infty)$. W dowodzie jednostajnej wypukłości tych przestrzeni korzysta się z podanych niżej nierówności, zwanych nierównościami Hannera (patrz [19]).

Twierdzenie 1.12. ([19], [40]) *Załóżmy, że $1 < p < +\infty$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in \ell^p$ i $q = \frac{p}{p-1}$ spełnione są następujące nierówności:*

1. $\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)$ *dla* $2 \leqslant p < \infty$,
2. $\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q \leqslant 2\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)^{q-1}$ *dla* $1 < p \leqslant 2$.

Uwaga 1.13. Każda jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha jest ściśle wypukła, ale nie każda przestrzeń ściśle wypukła jest jednostajnie wypukła. Dodatkowo każda jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha jest przestrzenią refleksywną ([32]).

Mamy również trzecią podobnego typu własność przestrzeni Banacha.

Definicja 1.14. ([31]) Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku, jeśli dla każdego $z \in X$, $z \neq 0$ i każdego $0 < \epsilon \leqslant 2$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że dla każdych $x, y \in X$ z $\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1$, $x - y = \alpha z$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\|x - y\| \geqslant \epsilon$ spełniona jest nierówność $\|\frac{x+y}{2}\| \leqslant 1 - \delta$.

Uwaga 1.15. ([89]) Każda jednostajnie wypukła w każdym kierunku przestrzeń Banacha jest ściśle wypukła, ale nie każda ściśle wypukła przestrzeń Banacha jest przestrzenią jednostajnie wypukłą w każdym kierunku.

Twierdzenie 1.16. ([32], [98]) *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ są przestrzeniami Banacha, T jest liniowym, różnowartościowym i ciągłym odwzorowaniem przestrzeni X w Y. Załóżmy również, że przestrzeń $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku $Tz/\|Tz\|_Y$, gdzie $z \in X$ i $\|z\|_X = 1$. Wtedy X ma równoważną jednostajnie wypukłą w każdym kierunku normę $|||\cdot|||_X$, określoną wzorem*

$$|||x|||_X := \sqrt{\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2}$$

dla $x \in X$.

Wniosek 1.17. ([98]) Załóżmy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ ma ograniczony ciąg funkcjonałów $\{f_i^*\}_i$ w $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$, który rozdziela punkty w $(X, \|\cdot\|_X)$ i że równoważna norma w X jest dla każdego $x \in X$ określona następującym wzorem

$$|||x|||_X := \sqrt{\|x\|_X^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{f_i^*(x)}{2^i}\right)}.$$

Wtedy przestrzeń $(X, |||\cdot|||_X)$ jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku.

Mamy też, istotne w naszych późniejszych rozważaniach, pojęcie przestrzeni lokalnie jednostajnie wypukłej.

Definicja 1.18. ([63]) Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest lokalnie jednostajnie wypukła (w skrócie LUR), jeśli dla każdego punktu $x \in X$ każdy ciąg $\{x_n\}_n \subset X$, taki że $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$ oraz $\lim_n \|x + x_n\| = 2\|x\|$, jest zbieżny do x w $(X, \|\cdot\|)$.

Ponieważ prawdziwe są następujące nierówności

$$2(\|x\|^2 + \|x_n\|^2) - \|x + x_n\|^2 \geqslant 2(\|x\|^2 + \|x_n\|^2) - (\|x\| + \|x_n\|)^2 = (\|x\|^2 - \|x_n\|^2) \geqslant 0$$

to jest rzeczą oczywistą, że poniższa definicja jest równoważną definicją lokalnej jednostajnej wypukłości.

Definicja 1.19. Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest lokalnie jednostajnie wypukła, jeśli dla każdego $x \in X$ każdy ciąg $\{x_n\}_n \subset X$ spełniający warunek $\lim_n \left[2(\|x\|^2 + \|x_n\|^2) - \|x + x_n\|^2\right] = 0$ jest zbieżny do x w $(X, \|\cdot\|)$.

Uwaga 1.20. ([89]) Każda jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha jest lokalnie jednostajnie wypukła. Każda przestrzeń lokalnie jednostajnie wypukła jest ściśle wypukła.

A. R. Lovaglia udowodnił następujące twierdzenie, które odgrywa ważną rolę w dowodzie najważniejszego wyniku tej pracy, tzn. twierdzenia 8.3.

Twierdzenie 1.21. ([63]) *Załóżmy, że przestrzenie Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ są lokalnie jednostajnie wypukłe. Wtedy przestrzeń $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$, gdzie norma $\|\cdot\|_{X\times Y}$ jest określona wzorem*

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2} \quad \text{dla } (x, y) \in X \times Y,$$

jest również lokalnie jednostajnie wypukła.

W dowodzie twierdzenia 8.3 zastosujemy również twierdzenie Troyanskiego, które podajemy w słabszej, ale wystarczającej dla naszych potrzeb, postaci.

Twierdzenie 1.22. ([95]) *Każda refleksywna przestrzeń Banacha ma równoważną lokalnie jednostajnie wypukłą normę.*

Kolejne własności przestrzeni Banacha są związane ze słabo zbieżnymi ciągami.

Definicja 1.23. Jeśli w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ każdy ciąg słabo zbieżny jest zbieżny, to mówimy, że przestrzeń X ma własność Schura.

Przykładem przestrzeni z własnością Schura jest przestrzeń $(l^1, \|\cdot\|_1)$ ([32]).

Definicja 1.24. ([78]) Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma własność Opiala, jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}_n \subset X$, takiego że $x_n \rightharpoonup 0$ oraz każdego $x \in X$, $x \neq 0$ spełniona jest nierówność

$$\limsup_n \|x_n\| < \limsup_n \|x_n - x\|.$$

Definicja 1.25. ([78]) Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma słabą własność Opiala, jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}_n \subset X$, takiego że $x_n \rightharpoonup 0$ oraz każdego $x \in X$ spełniona jest nierówność

$$\limsup_n \|x_n\| \leqslant \limsup_n \|x_n - x\|.$$

Uwaga 1.26. W [78] Z. Opial pokazał, że dla $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ przestrzeń Banacha $(L^p[0,1], \|\cdot\|_p)$ nie ma słabej własności Opiala, ale własność Opiala mają przestrzenie $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ dla $1 \leqslant p < +\infty$ (patrz także [34] i [39]).

Mamy też następujące twierdzenie D. van Dulsta.

Twierdzenie 1.27. ([27]) *Każda ośrodkowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ ma własność Opiala.*

Przypomnimy również twierdzenie wykorzystane w dowodzie twierdzenia D. van Dulsta, które będzie jednym z podstawowych narzędzi przy konstrukcji normy w rozdziale czwartym (baza Schaudera - patrz definicja 1.40).

Twierdzenie 1.28. ([27]) *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ będzie przestrzenią Banacha z bazą Schaudera $\{e_i\}_i$ i niech $\mathcal{P} = \{P_n\}_{n\geqslant 0}$ będzie ciągiem projekcji związanych z tą bazą, tzn. $P_0 = 0$ oraz $P_n x = P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$ dla każdego $x = \sum_{i=1}^{\infty} a^i e_i \in X$. Wtedy norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ zdefiniowana na X w następujący sposób*

$$\|x\|_{\mathcal{P}} = \sup_{k=0,1,\dots} \|x - P_k x\|_X$$

dla każdego $x \in X$, jest równoważna normie $\|\cdot\|_X$ i przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ ma słabą własność Opiala.

Będziemy też potrzebować normy mającej własność Kadeca-Klee'ego. Ta własność jest również związana z zachowaniem się ciągów słabo zbieżnych.

Definicja 1.29. ([50], [55]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Mówimy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ ma własność Kadeca-Klee'ego ze względu na słabą topologię (w skrócie własność Kadeca-Klee'ego), jeśli każdy ciąg $\{x_n\}_n \subset X$, taki że $\lim_n \|x_n\| = 1$ i $x_n \rightharpoonup x$ z $\|x\| = 1$, jest zbieżny do x. W takim przypadku mówimy też, że norma $\|\cdot\|$ ma własność Kadeca-Klee'ego.

Podane niżej twierdzenie pokazuje związek między lokalną jednostajną wypukłością a własnością Kadeca-Klee'ego.

Twierdzenie 1.30. ([25]) *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest lokalnie jednostajnie wypukła, to $(X, \|\cdot\|)$ ma własność Kadeca-Klee'ego ze względu na słabą topologię.*

Oczywiście implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa. Mamy jednak następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.31. ([95], patrz też [84]) *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Następujące zdania są równoważne*

1. *Przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ ma równoważną lokalnie jednostajnie wypukłą normę.*

2. Przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ ma równoważną ściśle wypukłą normę i ma równoważną normę z własnością Kadeca-Klee'ego ze względu na słabą topologię.

Podamy teraz twierdzenie M. I. Kadeca i V. L. Klee'ego, które będzie kluczowe w dalszych rozważaniach. Było ono też podstawą do wprowadzenia pojęcia własności Kadeca-Klee'ego. Twierdzenie to przedstawimy w formie podanej przez W. J. Davisa i W. B. Johnsona.

Twierdzenie 1.32. ([50], [55], patrz też [20], [42]) *Niech $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha, $(Y^*, \|\cdot\|_{Y^*})$ jej przestrzenią dualną z normą $\|\cdot\|_{Y^*}$ i niech X będzie domkniętą i ośrodkową podprzestrzenią przestrzeni $(Y^*, \|\cdot\|_{Y^*})$. Wtedy istnieje równoważna norma $\|\cdot\|_{Y,1}$ w Y, taka że jeśli $\{y_i\}_i \subset Y^*$ jest *-słabo zbieżny do $\tilde{y} \in X$ i $\lim_i \|y_i\|_{Y^*,1} = \|\tilde{y}\|_{Y^*,1}$, to $\lim_i \|y_i - \tilde{y}\|_{Y^*} = 0$, gdzie norma $\|\cdot\|_{Y^*,1}$ w Y^* jest związana z normą $\|\cdot\|_{Y,1}$.*

Twierdzenie 1.32 wiąże się z problemem 89 z Księgi Szkockiej ([56]). Podajemy ten problem w oryginalnej postaci:

89) Problemat Mazur
Niech $\mathcal{W}$ będzie ciałem wypukłym w przestrzeni ($\mathcal{L}^2$), którego brzeg $\mathcal{W}_b$ nie zawiera odcinka; niech $x_n \in \mathcal{W}$ ($n = 1, 2, \ldots$), $x_0 \in \mathcal{W}_b$ i przytem ciąg (x_n) niech będzie słabo zbieżny do x_0. Czy wtedy ciąg (x_n) jest silnie zbieżny do x_0? Wiadomo, że twierdzenie jest prawdziwe w przypadku, gdy $\mathcal{W}$ jest kulą. To samo zagadnienie zbadać w przypadku innych przestrzeni.

W drugim wydaniu w języku angielskim Księgi Szkockiej ([93]) S. Kwapień podał negatywną odpowiedź na to pytanie. Warto też tutaj dodać, że w [82] A. M. Plichko udowodnił, że gdy ośrodkowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nie ma własności Schura, to ma równoważną ściśle wypukłą normę $\|\cdot\|_0$, która nie ma własności Kadeca-Klee'ego.

W naszej pracy będziemy zajmować się zbiorami diametralnie zupełnymi (definicję tego typu zbiorów podamy w rozdziale 6), które mają puste wnętrze. Głównym problemem, który będziemy rozważać, jest problem istnienia zbiorów diametralnie zupełnych z pustym wnętrzem w każdej odpowiednio przenormowanej, nieskończenie wymiarowej i refleksywnej przestrzeni Banacha. Aby podać jedną z kluczowych własności zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem potrzebne będą pojęcia zbioru diametralnego i struktury normalnej ([11], [33], [66]).

Definicja 1.33. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha i zbiór $\emptyset \neq C \subset X$ jest ograniczony i wypukły. Liczbę

$$r_{\|\cdot\|}(C, C) := \inf\{\sup\{\|y - y'\| : y' \in C\} : y \in C\}$$

nazywamy promieniem Czebyszewa zbioru C.

Definicja 1.34. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha i zbiór $\emptyset \neq C \subset X$ jest ograniczony, wypukły i nie jest zbiorem jednopunktowym. Mówimy, że zbiór C jest diametralny, jeśli $r_{\|\cdot\|}(C, C) = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|} C$, tzn. promień Czebyszewa zbioru C jest równy średnicy tego zbioru.

Definicja 1.35. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Mówimy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ ma strukturę normalną, jeśli nie zawiera zbioru diametralnego, tzn. nierówność $r_{\|\cdot\|}(C, C) < \mathrm{diam}_{\|\cdot\|} C$ jest prawdziwa dla każdego niepustego, ograniczonego i wypukłego zbioru $C \subset X$, który nie jest zbiorem jednopunktowym.

Uwaga 1.36. ([32]) Jeśli przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest refleksywna i ma własność Opiala, to ma strukturę normalną. Każda jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha ma strukturę normalną.

M.S. Brodski i D. P. Milman scharakteryzowali pojęcie struktury normalnej przy pomocy ciągu diametralnego ([11]).

Definicja 1.37. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha i ciąg $\{x_n\}_n \subset X$ jest ograniczony i nie jest ciągiem stałym. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}_n$ jest diametralny, jeśli

$$\lim_n \mathrm{dist}_{\|\cdot\|}(x_{n+1}, \mathrm{conv}\{x_1, ..., x_n\}) = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|}\{x_1, x_2, ...\}.$$

Twierdzenie 1.38. *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha i zbiór $\emptyset \neq C \subset X$ jest ograniczony, wypukły i nie jest zbiorem jednopunktowym. Zbiór C ma strukturę normalną wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ciągu diametralnego.*

Oczywiście wprost z istnienia ciągu diametralnego wynika, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ jest nieskończenie wymiarowa.

Definicja 1.39. ([5]) Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Mówimy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ ma asymptotyczną strukturę normalną, jeśli dla każdego niepustego, ograniczonego i wypukłego zbioru C, który nie jest zbiorem jednopunktowym i każdego ciągu $\{x_n\}_n \subset C$, takiego że $\lim_n (x_n - x_{n+1}) = 0$ istnieje punkt $\tilde{x} \in C$, taki że $\liminf_n \|x_n - \tilde{x}\| < \mathrm{diam}_{\|\cdot\|}\mathrm{C}$.

Przypomnimy teraz pojęcie bazy Schaudera.

Definicja 1.40. ([85], [86]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Ciąg $\{e_i\}_i \subset X$ nazywamy bazą Schaudera w przestrzeni X, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $\{a^i\}_i$, taki że $x = \sum_{i=1}^{\infty} a^i e_i$. Bazę $\{e_i\}_i \subset X$ nazywamy znormalizowaną, jeśli $\|e_i\| = 1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.41. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha z bazą Schaudera $\{e_i\}_i$. Funkcjonały e_j^* określone w następujący sposób

$$e_j^*(\sum_{i=1}^{\infty} a^i e_i) := a^j \qquad \text{dla każdego } j \in \mathbb{N}$$

nazywamy funkcjonałami biortogonalnymi związanymi z bazą $\{e_i\}_i$.

Uwaga 1.42. W całej pracy będziemy zakładać, że dla każdej rozważanej bazy Schaudera $\{e_i\}_i$ w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ istnieją stałe $0 < \tilde{m} \leqslant \tilde{M} < \infty$, takie że $\tilde{m} \leqslant \|e_i\|_X \leqslant \tilde{M}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Stąd dla biortogonalnych funkcjonałów $\{e_i^*\}_i$ związanych z bazą $\{e_i\}_i$ również będą istniały stałe $0 < \tilde{m}_1 \leqslant \tilde{M}_1 < \infty$, takie że $\tilde{m}_1 \leqslant \|e_i^*\|_{X^*} \leqslant \tilde{M}_1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Dodatkowo mamy $\lim_i e_i^*(x) = 0$ dla każdego $x \in X$.

Twierdzenie 1.43. ([41]) *Załóżmy, że $\{e_i\}_i$ jest bazą Schaudera w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ o współczynnikach $e_i^*(x) = a^i$ będących funkcjonałami liniowymi. Wtedy mamy*

(a) funkcjonały e_i^*, $i = 1, 2, \dots$ są ciągłe na X,

(b) $\sup_n \|P_n\|_{XX} < \infty$, gdzie $P_n x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) x_i$ dla $x = \sum_{i=1}^\infty a^i x_i \in X$, $n = 1, 2, ...$ i $\|\cdot\|_{XX}$ jest normą operatorową związaną z normą $\|\cdot\|_X$,

(c) norma $\|\cdot\|_0$, określona wzorem

$$\|x\|_0 := \sup_n \|P_n x\|_{XX}$$

dla $x \in X$, jest równoważna normie $\|\cdot\|$.

Twierdzenie 1.44. ([87], [88]) *Przestrzenie Banacha $L^p([0,1], \mathbb{R})$ dla $1 < p < \infty$, ℓ^p dla $1 \leqslant p < \infty$, c i c_0 (ze standardowymi normami) mają bazę Schaudera.*

Twierdzenie 1.45. ([30]) *Istnieje nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa przestrzeń Banacha, która nie ma bazy Schaudera.*

Twierdzenie 1.46. ([92]) *Istnieje nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa i superrefleksywna przestrzeń Banacha, która nie ma bazy Schaudera.*

Definicja 1.47. ([61]) Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Ciąg $\{e_i\}_i \subset X$, który jest bazą Schaudera w swojej domkniętej otoczce liniowej $\overline{\operatorname{span}}\, \{e_i\}_i$, nazywamy ciągiem bazowym w $(X, \|\cdot\|)$.

Podamy teraz twierdzenie, które było znane już S. Banachowi ([6], dowód S. Mazura jest podany w [61]).

Twierdzenie 1.48. *Każda nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha ma ciąg bazowy.*

Podamy teraz trzy twierdzenia, które odgrywają kluczową rolę podczas naszych rozważań w rozdziałach 4 i 7.

Twierdzenie 1.49. ([62], [87]) *Przestrzeń Banacha* $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ *ma bazę Schaudera.*

Twierdzenie 1.50. ([46]) *Każda nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ma nieskończenie wymiarową przestrzeń ilorazową* $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ *z bazą Schaudera.*

Trzecie twierdzenie pokazuje związek między bazą Schaudera w przestrzeni Banacha a bazą Schaudera w przestrzeni ilorazowej.

Twierdzenie 1.51. ([87]) *Załóżmy, że* $(X, \|\cdot\|_X)$ *jest przestrzenią Banacha z bazą Schaudera* $\{e_i\}_i$. *Niech* $\{i_n\}_n$ *będzie skończonym lub nieskończonym rosnącym ciągiem liczb naturalnych i niech* $\{j_m\}_m$ *będzie nieskończonym rosnącym ciągiem liczb naturalnych dopełniającym ciąg* $\{i_n\}_n$ *do całego* $\mathbb{N}$. *Jeśli* Y *jest domkniętą otoczką liniową ciągu* $\{e_{i_n}\}_n$ *w* X, *a* ι *odwzorowaniem standardowym przestrzeni* X *na przestrzeń ilorazową* X/Y *z normą kanoniczną* $\|\cdot\|_{X/Y}$, *to* $\{\iota(e_{j_m})\}_m$ *jest bazą Schaudera przestrzeni* $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$.

W drugim dodatku, przy konstruowaniu odpowiedniej rodziny funkcjonałów, będziemy korzystać z następującego twierdzenia, które udowodnił J. Lindenstrauss w [60].

Twierdzenie 1.52. *Załóżmy, że* $(X, \|\cdot\|)$ *jest nieskończenie wymiarową, refleksywną przestrzenią Banacha. Wtedy istnieje różnowartościowy i ograniczony operator liniowy* $T : X \to c_0(\Gamma)$.

W dowodzie twierdzenia 8.3 będziemy również wykorzystywać następujące wyniki.

Twierdzenie 1.53. ([2]) *Niech* Y *będzie liniową, domkniętą i ośrodkową podprzestrzenią refleksywnej przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$. *Wtedy istnieje liniowa, domknięta i ośrodkowa podprzestrzeń* Z *przestrzeni* X *zawierająca* Y *oraz liniowa i ograniczona projekcja* P *przestrzeni* X *na* Z *z normą operatorową* $\|P\|_{XZ} = 1$.

Wniosek 1.54. ([2]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie nieośrodkową i refleksywną przestrzenią Banacha. Wtedy istnieje nieskończenie wymiarowa, liniowa, domknięta i ośrodkowa podprzestrzeń Z przestrzeni X oraz liniowa projekcja P przestrzeni X na Z z normą operatorową $\|P\|_{XZ} = 1$.

Rozdział 2

Kilka uwag o rzeczywistych szeregach liczbowych

W tym rozdziale przypomnimy kilka własności związanych z rzeczywistymi szeregami liczbowymi ([21], [83]). Własności te będą odgrywać kluczową rolę w dowodach naszych wyników. Zaczniemy od wprowadzenia funkcji $\tau(\cdot, u)$ związanej z ciągiem $u = \{u^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Dla $u = \{u^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$ określamy ciąg wskaźników $\{\tau(j,u)\}_j$ w następujący sposób:

1. jeśli nośnik $N(u)$ elementu u jest nieskończony, to $N(u)$ porządkujemy przy pomocy funkcji $\{\tau(j,u)\}_j$ w ten sposób, że $|u^{\tau(j,u)}| \geqslant |u^{\tau(j+1,u)}|$ dla $j \in \mathbb{N}$,

2. jeśli $N(u) = \{\tilde{\gamma}\}$ jest zbiorem jednoelementowym, to przyjmujemy $\tau(1,u) = \tilde{\gamma}$ i $\{\tau(j,u)\}_{j=2}^{\infty}$ tak, aby $\tau(\cdot,u) : \mathbb{N} \to \Gamma$ było funkcją różnowartościową,

3. jeśli nośnik $N(u)$ elementu u jest zbiorem skończonym, złożonym z $k(u) \geqslant 2$ elementów, to przyjmujemy $\{\tau(j,u)\}_{j=1}^{k(u)}$ w taki sposób, aby $|u^{\tau(j,u)}| \geqslant |u^{\tau(j+1,u)}|$ dla $j \in \{1,\ldots,k(u)-1\}$ i $\{\tau(j,u)\}_{j=k(u)+1}^{\infty}$ tak, aby $\tau(\cdot,u) : \mathbb{N} \to \Gamma$ było funkcją różnowartościową,

4. jeśli $u = 0$, to przyjmujemy za $\tau(\cdot,u) : \mathbb{N} \to \Gamma$ dowolnie wybraną funkcję różnowartościową.

Dla każdego $u = \{u^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$ przyjmujemy $\tilde{N}(u) := \{\tau(j,u) \in \Gamma : j \in \mathbb{N}\}$.

Dalej mamy ogólnie znane nierówności.

Jeżeli $m \in \mathbb{N}$ i $\tilde{g} : \{1,\ldots,m\} \to \mathbb{N}$ jest funkcją ściśle rosnącą, to $\tilde{g}(j) \geqslant j$ dla $1 \leqslant j \leqslant m$. Stąd natychmiast dostajemy, że gdy $\{t^j\}_j$ jest malejącym ciągiem o wyrazach nieujemnych i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją różowartościową, to $\sum_{j=1}^{m} t^{g(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{m} t^j$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i $\sum_{j=1}^{\infty} t^{g(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} t^j$.

Przypomnimy teraz kilka lematów dotyczących rzeczywistych szeregów liczbowych. Dla wygody czytelnika podamy też ich dowody.

Lemat 2.1. ([18], [83]) *Załóżmy, że*

(1) $\{s^j\}_j$, $\{t^j\}_j$ *są malejącymi ciągami o wyrazach nieujemnych,*

(2) funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *jest różnowartościowa.*

Wtedy

(i) dla każdego $m \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\sum_{k=1}^{m}(s^k - s^{k+1})\left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} s^k t^k - \sum_{k=1}^{m} s^k t^{g(k)} - s^{m+1}\left(\sum_{j=1}^{m} t^j - \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(s^k - s^{m+1})(t^k - t^{g(k)}).$$

(ii) dla każdego $m \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\sum_{j=1}^{m} s^j t^{g(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{m} s^j t^j.$$

(iii) jeśli dodatkowo ciąg $\{s^j\}_j$ *jest ściśle malejący i* $t^{g(\tilde{j})} \neq t^{\tilde{j}}$ *dla pewnego* $\tilde{j} \in \mathbb{N}$, *to*

$$\sum_{j=1}^{m} s^j t^{g(j)} < \sum_{j=1}^{m} s^j t^j$$

dla każdego $m > \tilde{j}$.

(iv)

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j t^{g(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} s^j t^j.$$

(v) jeżeli $\{g(1), \ldots, g(m)\}$ *nie pokrywa się ze zbiorem* $\{1, \ldots, m\}$, *to*

$$\sum_{j=1}^{m} s^j t^j - \sum_{j=1}^{m} s^j t^{g(j)} \geqslant s^m(t^m - t^{m+1}).$$

Dowód. *(i)* Dla $m = 1$ równości są oczywiste, bo

$$(s^1 - s^2)(t^1 - t^{g(1)}) = s^1 t^1 - s^1 t^{g(1)} - s^2(t^1 - t^{g(1)}).$$

Dalej dla każdego $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{k=1}^{m}(s^k - s^{k+1})\left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} s^k \left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \right) - \sum_{k=1}^{m} s^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \right) =$$

$$= s^1[t^1 - t^{g(1)}] + \sum_{k=2}^{m} s^k \left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \right) -$$

$$- \sum_{k=2}^{m} s^k \left(\sum_{j=1}^{k-1} t^j - \sum_{j=1}^{k-1} t^{g(j)} \right) - s^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{m} t^j - \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} s^k \left(t^k - t^{g(k)} \right) - s^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{m} t^j - \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)} \right),$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{m} (s^k - s^{k+1}) \left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \right) = \sum_{k=1}^{m} s^k t^k - \sum_{k=1}^{m} s^k t^{g(k)} - s^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{m} t^j - \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)} \right).$$

(ii) Z *(i)* mamy

$$\sum_{k=1}^{m} s^k t^k - \sum_{k=1}^{m} s^k t^{g(k)} = \sum_{k=1}^{m} (s^k - s^{k+1}) \left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \right) + s^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{m} t^j - \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)} \right).$$

Ponieważ $s^k - s^{k+1} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \geqslant 0$ dla $1 \leqslant k \leqslant m$ i $s^{m+1} \geqslant 0$, to ostatecznie dostajemy

$$\sum_{k=1}^{m} s^k t^k - \sum_{k=1}^{m} s^k t^{g(k)} \geqslant 0.$$

(iii) Dla $m = 1$ jest to oczywiste, bo wtedy $\tilde{j} = 1$ i stąd $g(1) > 1$. Dlatego mamy $t^{g(1)} < t^1$ i $s^1 t^{g(1)} < s^1 t^1$.

Załóżmy więc, że $m \geqslant 2$. Przyjmijmy $\tilde{j} = \min\{1 \leqslant j \leqslant m : t^j \neq t^{g(j)}\}$. Jeśli $\tilde{j} > 1$, to mamy $g(1) = 1, \ldots, g(\tilde{j} - 1) = \tilde{j} - 1$, $\sum_{j=1}^{\tilde{j}-1} s^j t^{g(j)} = \sum_{j=1}^{\tilde{j}-1} s^j t^j$ i $g(\tilde{j}) \neq \tilde{j}$. Z różnowartościowości funkcji g dostajemy, że $g(\tilde{j}) > \tilde{j}$ i $g(j) \geqslant \tilde{j}$ dla $j \geqslant \tilde{j}$. Stąd biorąc $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $g_1(l) = g(\tilde{j} + l - 1)$ dla $l = 1, 2, \ldots$ i ciąg $\{s_{l,1}\}_l$ dany wzorem $s_{l,1} = s_{\tilde{j}+l-1}$ dla $l = 1, 2, \ldots$ redukujemy nasz problem do przypadku $\tilde{j} = 1$. Dlatego bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $\tilde{j} = 1$. Rozpatrujemy 2 przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\min_{2 \leqslant j \leqslant m} g(j) > g(1) > 1$. Stąd ($\tilde{j} = 1$) mamy $t^1 > t^{g(1)}$. Biorąc funkcję $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daną wzorem

$$g_2(j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 1 \\ g(j) & \text{dla } j \geqslant 2 \end{cases}$$

i stosując *(ii)* otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m} s^j t^{g(j)} < s^1 t^1 + \sum_{j=2}^{m} s^j t^{g(j)} = \sum_{j=1}^{m} s^j t^{g_2(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{m} s^j t^j.$$

Przypadek 2. Niech $\min_{2\leqslant j\leqslant m} g(j)<g(1)$. Weźmy $\tilde{j}=\min\{2\leqslant j\leqslant m : g(j) < g(1)\}$. Wtedy mamy

$$s^1t^{g(1)} + s^{\tilde{j}}t^{g(\tilde{j})} < s^1t^{g(\tilde{j})} + s^{\tilde{j}}t^{g(1)}$$

i otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m} s^jt^{g(j)} < s^1t^{g(\tilde{j})} + s^{\tilde{j}}t^{g(1)} + \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\tilde{j}}} s^jt^{g(j)} = \sum_{j=1}^{m} s^jt^{g_3(j)},$$

gdzie funkcja $g_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem

$$g_3(j) = \begin{cases} g(\tilde{j}) & \text{dla } j = 1 \\ g(1) & \text{dla } j = \tilde{j} \\ g(j) & \text{dla pozostałych } j. \end{cases}$$

Z *(ii)* dostajemy

$$\sum_{j=1}^{m} s^jt^{g_3(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{m} s^jt^j$$

i to kończy dowód *(iii)*.

(iv) Jest to natychmiastowy wniosek z *(ii)*.

(v) Dla $m = 1$ jest to oczywiste, bo wtedy $t^{g(1)} \leqslant t^2$. Weźmy $m \geqslant 2$. Ustawmy $g(1), \ldots, g(m)$ w ściśle rosnący skończony ciąg $\{g(i_1), \ldots, g(i_m)\}$. Wtedy na mocy *(ii)* dostajemy

$$\sum_{j=1}^{m} s^jt^{g(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{m} s^jt^{g(i_j)}.$$

Zauważmy teraz, że $t^{g(i_j)} \leqslant t^j$ dla $j = 1, \ldots, m-1$ i $t^{g(i_m)} \leqslant t^{m+1}$. Stąd otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{m} s^jt^j - \sum_{j=1}^{m} s^jt^{g(j)} \geqslant \sum_{j=1}^{m} s^jt^j - \sum_{j=1}^{m} s^jt^{g(i_j)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{j=1}^{m-1} s^jt^j + s^mt^m\right) - \left(\sum_{j=1}^{m-1} s^jt^j + s^mt^{m+1}\right) = s^m(t^m - t^{m+1}).$$

□

Z powyższego lematu dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 2.2. ([18], [83]) *Załóżmy, że*

(1) $s = \{s^j\}_j$ *jest malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich,*

(2) $t = \{t^j\}_j \in c_0$,

(3) $t^j \geqslant 0$ *dla każdego* $j \in \mathbb{N}$,

(4) funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest różnowartowartościowa.

Wtedy prawdziwe są nierówności

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j \cdot t^{g(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} s^j \cdot t^{\tau(j,t)}$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{m} s^j \cdot t^{g(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{m} s^j \cdot t^{\tau(j,t)}$$

dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Wniosek 2.3. ([18], [83]) *Załóżmy, że*

(1) Γ jest zbiorem nieskończonym,

(2) $s = \{s^j\}_j$ jest malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich,

(3) $t = \{t^\gamma\}_\gamma \in c_0(\Gamma)$,

(4) funkcja $\tilde{g} : \mathbb{N} \to \Gamma$ jest różnowartowartościowa.

Wtedy prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j \cdot |t^{\tilde{g}(j)}| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} s^j \cdot |t^{\tau(j,t)}|.$$

Lemat 2.4. ([18], [83]) *Załóżmy, że*

(1) $\{s^j\}_j$, $\{t^j\}_j$ są malejącymi ciągami o wyrazach nieujemnych,

(2) funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest różnowartowartościowa,

(3) szereg $\sum_{j=1}^{\infty} s^j$ jest zbieżny.

Wtedy prawdziwa jest równość

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j t^j - \sum_{j=1}^{\infty} s^j t^{g(j)} = \sum_{m=1}^{\infty} (s^m - s^{m+1}) \left(\sum_{j=1}^{m} t^j - \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)} \right).$$

Dowód. Wiemy, że

$$\sum_{j=1}^{m} t^j \geqslant \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)}$$

dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Korzystając z faktu, że gdy $\{s^j\}_j$ jest malejącym ciągiem liczb nieujemnych i szereg $\sum_{j=1}^{\infty} s^j$ jest zbieżny, to $\lim_{j\to\infty} js^j = 0$ (patrz [47]) oraz powyższej nierówności mamy

$$0 \leqslant s^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \right) \leqslant s^{k+1} k t^1 \leqslant s^{k+1}(k+1)t^1 \xrightarrow{k} 0.$$

Z tego, że zbieżny szereg $\sum_{j=1}^{\infty} s^j$ ma wyrazy nieujemne i $0 \leqslant t^j \leqslant t^1$ dla każdego $j = 1, 2, \ldots$ wynika zbieżność szeregów $\sum_{j=1}^{\infty} s^j t^j$ i $\sum_{j=1}^{\infty} s^j t^{g(j)}$. Z lematu 2.1 *(i)* mamy

$$\sum_{k=1}^{m} (s^k - s^{k+1}) \left(\sum_{j=1}^{k} t^j - \sum_{j=1}^{k} t^{g(j)} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} s^k t^k - \sum_{k=1}^{m} s^k t^{g(k)} - s^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{m} t^j - \sum_{j=1}^{m} t^{g(j)} \right)$$

dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i to w połączeniu z powyższymi wiadomościami daje nam żądaną równość. $\square$

Następny lemat był częściowo znany ([83]). Musimy jednak dokładniej określić liczbę δ, by później móc zastosować ten lemat.

Lemat 2.5. *Załóżmy, że*

(1) ciąg $s = \{s^j\}_j$ jest dodatni i ściśle malejący do 0,

(2) $t = \{t^j\}_j \in c_0 \setminus \{0\}$,

(3) $t^j \geqslant 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$,

(4) $m \in \mathbb{N}$ jest takie, że $t^{\tau(m,t)} > t^{\tau(m+1,t)}$,

(5) jeśli $t^{\tau(1,t)} > t^{\tau(m,t)}$, to $\omega := \min\{\sum_{j=1}^{m} s^j t^{\tau(j,t)} - \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\sigma(j)} : \sigma$ odwzorowuje $\{1, ..., m\}$ na $\{\tau(1,t), ..., \tau(m,t)\}$ i $\sum_{j=1}^{m} s^j t^{\sigma(j)} < \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\tau(j,t)}\} > 0$ i $\delta := \min\{s^m \left(t^{\tau(m,t)} - t^{\tau(m+1,t)}\right), \omega\} > 0$,

(6) jeśli $t^{\tau(1,t)} = t^{\tau(m,t)}$, to $\delta = s^m \left(t^{\tau(m,t)} - t^{\tau(m+1,t)}\right)$,

(7) funkcja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest różnowartościowa,

(8) $\sum_{j=1}^{m} s^j t^{\tau(j,t)} - \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\varphi(j)} < \delta$.

Wtedy

$$\sum_{j=1}^{l} s^j t^{\tau(j,t)} = \sum_{j=1}^{l} s^j t^{\varphi(j)},$$

dla każdego $1 \leqslant l \leqslant m$, $\varphi_{|\{1,\ldots,m\}}$ odwzorowuje $\{1, ..., m\}$ na $\{\tau(1,t), ..., \tau(m,t)\}$ oraz $t^{\tau(j,t)} = t^{\varphi(j)}$ dla $j = 1, ..., m$.

Dowód. Załóżmy, że $\sum_{j=1}^{m} s^j t^{\tau(j,t)} - \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\varphi(j)} < \delta$. Udowodnimy najpierw, że φ odwzorowywuje zbiór $\{1, 2, \ldots, m\}$ na $\{\tau(1,t), ..., \tau(m,t)\}$. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy z lematu 2.1*(v)* otrzymujemy następującą sprzeczność

$$\delta > \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\tau(j,t)} - \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\varphi(j)} \geqslant s^m \left(t^{\tau(m,t)} - t^{\tau(m+1,t)}\right) \geqslant \delta.$$

Pokażemy teraz, że $t^{\tau(j,t)} = t^{\varphi(j)}$ dla $j = 1, ..., m$. Jeśli $t^{\tau(1,t)} = t^{\tau(m,t)}$, to z tego, że φ odwzorowuje $\{1, 2, \ldots, m\}$ na zbiór $\{\tau(1, t), ..., \tau(m, t)\}$ mamy

$$t^{\tau(1,t)} = t^{\tau(m,t)} = t^{\tau(j,t)} = t^{\varphi(j)}$$

dla $j = 1, 2, \ldots, m$.

Jeśli natomiast $t^{\tau(1,t)} > t^{\tau(m,t)}$, to z określenia liczb ω i δ dostajemy równość

$$\sum_{j=1}^{m} s^j t^{\tau(j,t)} = \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\varphi(j)}.$$

Następnie z lematu 2.1 *(iii)* i z tego, że ciąg $\{s^j\}_j$ jest ściśle malejący otrzymujemy

$$t^{\tau(j,t)} = t^{\varphi(j)}$$

dla $j = 1, 2, \ldots, m$. Stąd też mamy, że

$$\sum_{j=1}^{l} s^j t^{\tau(j,t)} = \sum_{j=1}^{l} s^j t^{\varphi(j)}.$$

dla każdego $1 \leqslant l \leqslant m$. $\square$

Rozdział 3

Uogólniona norma Daya w przestrzeni $c_0(\Gamma)$

W pracy [83] J. Rainwater udowodnił, że przestrzeń $c_0(\Gamma)$ z normą Daya $|||\cdot|||$ jest przestrzenią lokalnie jednostajnie wypukłą. Wynik ten został zastosowany przez E. Malutę w dowodzie twierdzenia o istnieniu równoważnej normy w przestrzeni ℓ^2 przy której istnieje zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem. W naszej pracy będziemy posługiwać się uogólnioną normą Daya $|||\cdot|||_{\beta,p}$ w $c_0(\Gamma)$, która też ma własność LUR.

Wzorując się na normie Daya w przestrzeni $c_0(\Gamma)$ ([21]), wprowadzimy teraz jej uogólnienie $|||\cdot|||_{\beta,p}$. Ustalmy $1 < p < \infty$ i weźmy ściśle malejący ciąg o wyrazach dodatnich $\beta = \{\beta_j\}_j$, taki że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p$ jest zbieżny. Dla $u = \{u^i\}_{i\in\Gamma} \in c_0(\Gamma) \setminus \{0\}$ określamy $D_{\beta,p}(u) = \{D^i_{\beta,p}(u)\}_{i\in\Gamma} \in \ell^p(\Gamma)$ w następujący sposób:

$$D^i_{\beta,p}(u) := \begin{cases} \beta_j u^{\tau(j,u)}, & \text{gdy } i = \tau(j,u) \text{ dla pewnego } j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przyjmujemy

$$|||u|||_{\beta,p} := \|D_{\beta,p}(u)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\beta_j u^{\tau(j,u)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dla $u \in c_0(\Gamma) \setminus \{0\}$ i $|||0|||_{\beta,p} := \|D_{\beta,p}(0)\|_p = 0$.

Lemat 3.1. *Dla każdego $1 < p < \infty$ $|||\cdot|||_{\beta,p}$ jest normą w przestrzeni $c_0(\Gamma)$.*

Dowód. Dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, u = \{u^i\}_i \in c_0(\Gamma) \setminus \{0\}$ mamy

$$|||\alpha u|||_{\beta,p} = \|D(\alpha u)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\beta_j (\alpha u)^{\tau(j,\alpha u)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(|\alpha|^p \sum_{j=1}^{\infty} \left|\beta_j u^{\tau(j,u)}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot |||u|||_{\beta,p}.$$

Następnie, na podstawie wniosku 2.2 otrzymujemy

$$|||u+v|||_{\beta,p} = \|D_{\beta,p}(u+v)\|_p =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j (u+v)^{\tau(j,u+v)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u+v)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j v^{\tau(j,u+v)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j v^{\tau(j,v)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= |||u|||_{\beta,p} + |||v|||_{\beta,p}$$

dla $u = \{u^i\}_i, \{v^i\}_i \in c_0(\Gamma) \setminus \{0\}$ i $u \neq v$. □

Zauważmy, że dla uogólnionej normy Daya spełnione są następujące nierówności

$$\beta_1 \|u\|_{c_0(\Gamma)} \leqslant |||u|||_{\beta,p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{c_0(\Gamma)},$$

tzn. norma $|||\cdot|||_{\beta,p}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_{c_0(\Gamma)}$.
W przypadku $\{\beta_j\}_j = \{\frac{1}{2^j}\}_j$ i $p = 2$ otrzymujemy klasyczną normę Daya $|||\cdot|||$ ([21]).

Możemy teraz podać podstawową własność uogólnionej normy Daya. Nasze twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia J. Rainwatera ([83]).

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli dodatkowo założymy, że istnieją stała $L > 1$ i ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_n\}_n$, takie że $\sum_{j=j_n+1}^{\infty} \beta_j^p \leqslant L\beta_{j_n+1}^p$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to przestrzeń Banacha $(c_0(\Gamma), |||\cdot|||_{\beta,p})$ jest przestrzenią lokalnie jednostajnie wypukłą.*

Dowód. Ustalmy dowolny element $u \in c_0(\Gamma) \setminus \{0\}$. Niech $\{u_n\}_n \subset c_0(\Gamma)$ będzie ciągiem, takim że $\lim_n |||u_n|||_{\beta,p} = |||u|||_{\beta,p}$ oraz $\lim_n |||u+u_n|||_{\beta,p} = 2|||u|||_{\beta,p}$. Musimy pokazać, że $\lim_n u_n = u$. Bez straty ogólności możemy założyć, że

(1) $\Gamma = \mathbb{N}$ i tym samym $c_0(\Gamma) = c_0(\mathbb{N}) = c_0$, ponieważ zbiór wskaźników

$$\tilde{N}(u) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{N}(u+u_n) \cup \tilde{N}(u-u_n) \cup \tilde{N}(u_n) \right)$$

jest przeliczalny i przy badaniu zachowania się ciągu $\{u_n\}$ w stosunku do u wystarczy ograniczyć się do tego zbioru wskaźników, który możemy utożsamić z $\mathbb{N}$,

(2) $|||u|||_{\beta,p} = \lim_n |||u_n|||_{\beta,p} = 1$,

(3) $u_n^i \neq 0$, $u^i + u_n^i \neq 0$ i $u^i - u_n^i \neq 0$ dla każdego $n, i \in \mathbb{N}$, to znaczy nośniki $N(u_n)$, $N(u+u_n)$ i $N(u-u_n)$ są równe $\mathbb{N}$ (w przeciwnym razie możemy zastąpić ciąg $\{u_n\}_n$ przez odpowiednio dobrany ciąg $\{\tilde{u}_n\}_n$, taki że $\lim_n(u_n - \tilde{u}_n) = 0$).

Zauważmy, że korzystając z nierówności Hannera z twierdzenia 1.12 dla $2 \leqslant p < \infty$ otrzymujemy

$$2^{p-1}\left(|||u|||_{\beta,p}^{p} + |||u_n|||_{\beta,p}^{p}\right) - |||u+u_n|||_{\beta,p}^{p} = \tag{3.1}$$

$$= 2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u^{\tau(j,u)}\right|^p + \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}\right|^p\right) - \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p \geqslant$$

$$\geqslant 2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p + \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p\right) - \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j (u-u_n)^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j\left(u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}\right)\right|^p \geqslant 0,$$

a dla $1 < p \leqslant 2$ mamy

$$2\left(|||u|||_{\beta,p}^{p} + |||u_n|||_{\beta,p}^{p}\right)^{q-1} - |||u+u_n|||_{\beta,p}^{q} = \tag{3.2}$$

$$= 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u^{\tau(j,u)}\right|^p + \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}\right|^p\right)^{q-1} - \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p\right]^{\frac{q}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p + \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p\right)^{q-1} - \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p\right]^{\frac{q}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j (u-u_n)^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p\right]^{\frac{q}{p}} = \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j\left(u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}\right)\right|^p\right]^{\frac{q}{p}} \geqslant 0.$$

Ponieważ z założenia

$$\lim_n \left[2^{p-1}\left(|||u|||_{\beta,p}^{p} + |||u_n|||_{\beta,p}^{p}\right) - |||u+u_n|||_{\beta,p}^{p}\right] = 2^{p-1}\cdot 2 - 2^p = 0 \tag{3.3}$$

dla $p \geqslant 2$ oraz

$$\lim_n \left[2\left(|||u|||_{\beta,p}^{p} + |||u_n|||_{\beta,p}^{p}\right)^{q-1} - |||u+u_n|||_{\beta,p}^{q}\right] = 2\cdot 2^{q-1} - 2^q = 0 \tag{3.4}$$

dla $1 < p \leqslant 2$, to w obu przypadkach uwzględniając nierówności (3.1) - (3.4) dostajemy

$$\lim_n \left[u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}\right] = 0 \tag{3.5}$$

dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Dalej, z nierówności (3.1) i (3.2) mamy

$$2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right) - \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p \geqslant$$

$$\geqslant 2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right) - \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p \geqslant 0$$

dla $p \geqslant 2$ oraz

$$2\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right)^{q-1} - \left[\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right]^{\frac{q}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right)^{q-1} - \left[\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right]^{\frac{q}{p}} \geqslant 0$$

dla $1 < p \leqslant 2$. Ponieważ

$$\lim_n \left[2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right) - \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right] =$$

$$= \lim_n \left[2^{p-1}\left(|||u|||_{\beta,p}^p + |||u_n|||_{\beta,p}^p\right) - |||u+u_n|||_{\beta,p}^p\right] = 0$$

oraz

$$\lim_n \left[2\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right)^{q-1} - \left[\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right]^{\frac{q}{p}}\right] =$$

$$= \lim_n \left[2\left(|||u|||_{\beta,p}^p + |||u_n|||_{\beta,p}^p\right)^{q-1} - |||u+u_n|||_{\beta,p}^q\right] = 0$$

odpowiednio dla $p \geqslant 2$ i $1 < p \leqslant 2$, to korzystając z (3.5) otrzymujemy

$$0 = \lim_n \left[2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right) - \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right] =$$

$$= \lim_n \left[2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right)\right] =$$

$$= \lim_n \left[2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (2u)^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j (2u_n)^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right)\right] =$$

$$= \lim_n \left[2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p\right) -\right.$$

$$\left. -2^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p\right)\right]$$

dla $p \geqslant 2$ i podobnie, uwzględniając dodatkowo równość $\frac{q}{p} = q - 1 = \frac{1}{p-1}$, mamy

$$0 = \lim_n \left[2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u^{\tau(j,u)}\right|^p + \sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}\right|^p\right)^{q-1} - \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)}\right|^p\right]^{\frac{q}{p}}\right] =$$

$$= \lim_n \left[2\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u^{\tau(j,u)} \right|^p + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u_n^{\tau(j,u_n)} \right|^p \right)^{q-1} - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j (u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right] =$$

$$= \lim_n \left[2\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u^{\tau(j,u)} \right|^p + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u_n^{\tau(j,u_n)} \right|^p \right)^{q-1} - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j (2u)^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j (2u_n)^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right] =$$

$$= \lim_n \left[2\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u^{\tau(j,u)} \right|^p + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u_n^{\tau(j,u_n)} \right|^p \right)^{q-1} - \right.$$

$$\left. -\left(2^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right] =$$

$$= \lim_n \left[2\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u^{\tau(j,u)} \right|^p + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u_n^{\tau(j,u_n)} \right|^p \right)^{q-1} - \right.$$

$$\left. -2\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)} \right|^p \right)^{q-1} \right]$$

dla $1 < p \leqslant 2$. Ostatecznie dla $1 < p < +\infty$ dostajemy

$$\lim_n \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(|\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p - |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) \right] = 0.$$

Ponadto z wniosku 2.2 mamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p.$$

i to w połączeniu z wcześniejszymi równościami daje

$$\lim_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) = 0 \tag{3.6}$$

dla każdego $1 < p < +\infty$.

Załóżmy, że ciąg $\{|||u-u_n|||_{\beta,p}\}_n$ nie jest zbieżny do 0. Ponieważ norma $|||\cdot|||_{\beta,p}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_{c_0}$, to bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że istnieje liczba naturalna $\eta > 0$, taka że

$$|||u|||_{\beta,p} \geqslant \eta, |||u-u_n|||_{\beta,p} \geqslant \eta, \|u\|_{c_0} \geqslant \eta \text{ i } \|u-u_n\|_{c_0} \geqslant \eta \tag{3.7}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Rozpatrujemy dwa przypadki.

Przypadek 1. Funkcja u ma skończony nośnik $N(u)$ o m wyrazach, czyli

$$|u^{\tau(1,u)}| \geqslant |u^{\tau(2,u)}| \geqslant \ldots \geqslant |u^{\tau(m,u)}| > 0 = |u^{\tau(m+1,u)}| = |u^{\tau(m+2,u)}| = \ldots . \tag{3.8}$$

Z założenia mamy też

$$\{\tau(1,u), \ldots, \tau(m,u)\} \subset \mathbb{N} = N(u+u_n) = N(u-u_n) = N(u_n)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Kładąc w lematach 2.1 i 2.4 $\{s^j\}_j = \{\beta_j^p\}_j$, $\{t^j\}_j = \{|u^{\tau(j,u)}|^p\}$ oraz $\{g(j)\}_j = \{\tau(j, u+u_n)\}_j$ i korzystając z granicy (3.6) dostajemy

$$\lim_n \left(\sum_{j=1}^m |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^m |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) = 0 \tag{3.9}$$

Istotnie, z równości (3.6) i lematu 2.4 mamy

$$0 = \lim_n \left(\sum_{j=1}^\infty \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^\infty \beta_j^p |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) =$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^\infty \left(\beta_k^p - \beta_{k+1}^p \right) \left(\sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right)$$

i to w połączeniu z nierównościami

$$\beta_k^p - \beta_{k+1}^p > 0$$

i

$$\sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \geqslant 0$$

dla $k = 1, 2, \ldots$ daje nam

$$\lim_n \left(\sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) = 0$$

dla $k = 1, 2, \ldots$. Stąd stosując lemat 2.1 otrzymujemy

$$0 = \lim_n \sum_{k=1}^m \left(\beta_k^p - \beta_{k+1}^p \right) \left(\sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^k |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) +$$

$$+\beta_{m+1}^p \left(\sum_{j=1}^m |u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^m |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) =$$

$$= \lim_n \left(\sum_{j=1}^m |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^m |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right).$$

Zauważmy teraz, że stosując lemat 2.5 do tych samych ciągów i biorąc nasze m (bo z (3.8) mamy $|u^\tau(m,u)|^p > |u^\tau(m+1,u)|^p$) dostajemy taką liczbę $\delta > 0$, że dla różnowartościowej funkcji $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(j) = \tau(j, u+u_n)$ dla $j = 1, 2, \ldots$ z nierówności

$$\sum_{j=1}^{m} s^j t^{\tau(j,t)} - \sum_{j=1}^{m} s^j t^{\varphi(j)} = \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p < \delta \tag{3.10}$$

wynika, że zbiory wskaźników $\{\tau(1,u), \ldots, \tau(m,u)\}$ i $\{\tau(1,u+u_n), \ldots, \tau(m,u+u_n)\}$ są takie same,

$$\sum_{j=1}^{l} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p = \sum_{j=1}^{l} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p$$

dla $l = 1, \ldots, m$ i

$$|u^{\tau(j,u)}| = |u^{\tau(j,u+u_n)}|$$

dla $j = 1, \ldots, m$. Ze zbieżności (3.9) dostajemy $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p < \delta$$

dla każdego $n \geqslant n_0$, czyli nierówność (3.10) jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant n_0$. Stąd mamy

$$|u^{\tau(j,u)}| = |u^{\tau(j,u+u_n)}| \tag{3.11}$$

i

$$\{\tau(1,u), \ldots, \tau(m,u)\} = \{\tau(1,u+u_n), \ldots, \tau(m,u+u_n)\} \tag{3.12}$$

dla każdego $j = 1, \ldots, m$ i każdego $n \geqslant n_0$. Biorąc ewentualnie podciąg ciągu $\{u_n\}_n$ i uwzględniając równości (3.11) i (3.12) możemy bez straty ogólności rozważań przyjąć, że

$$\tau(j, u+u_n) = \tau(j,u) = \tilde{\tau}(j) \tag{3.13}$$

dla $j = 1, \ldots, m$ i każdego $n \geqslant n_0$. Ponieważ dla każdego $j \in \mathbb{N}$ (patrz (3.5)) mamy

$$\lim_n \left[u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)} \right] = 0,$$

to dla $j = 1, \ldots, m$ dostajemy

$$0 = \lim_n \left[u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)} \right] = \lim_n \left[u^{\tilde{\tau}(j)} - u_n^{\tilde{\tau}(j)} \right] = \lim_n \left[u^{\tau(j,u)} - u_n^{\tau(j,u)} \right]. \tag{3.14}$$

Zauważmy teraz, że dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$(u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)} = (u+u_n)^{\tilde{\tau}(j)} = (u+u_n)^{\tau(j,u)}$$

dla $j = 1, \ldots, m$ oraz

$$(u+u_n)^{\tau(j,u+u_n)} = u_n^{\tau(j,u+u_n)}$$

dla $j > m$ i dlatego ciąg $\{|u_n^{\tau(j,u+u_n)}|\}_{j=m+1}^{\infty}$ jest ciągiem malejącym. Następnie korzystając z równości (3.11) - (3.14) i $\lim_n |||u_n|||_{\beta,p}^p = |||u|||_{\beta,p}^p$ oraz biorąc pod uwagę wniosek 2.2 otrzymujemy

$$|||u|||_{\beta,p}^p = \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p = \lim_n \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u_n^{\tau(j,u)}|^p = \lim_n \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \leqslant$$

$$\leqslant \lim_n \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \liminf_n \sum_{j=m+1}^{\infty} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \leqslant$$

$$\leqslant \lim_n \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \limsup_n \sum_{j=m+1}^{\infty} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p = \limsup_n \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_n \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u_n^{\tau(j,u_n)}|^p = \lim_n |||u_n|||_{\beta,p}^p = |||u|||_{\beta,p}^p$$

Stąd

$$\lim_n \sum_{j=m+1}^{\infty} |\beta_j u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p = 0. \tag{3.15}$$

Możemy teraz przejść do badania $|||u - u_n|||_{\beta,p}^p$. Dla $n \geqslant n_0$ określamy zbiór $A_n \subset \mathbb{N}$ następująco

$$A_n := \{\tilde{k}_i^n \in \mathbb{N} : \tilde{\tau}(i) = \tau(i,u) = \tau(i,u+u_n) = \tau(\tilde{k}_i^n, u-u_n), 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Dalej ustawiamy zbiór $\mathbb{N} \setminus A_n$ w ściśle rosnący ciąg $\{k_l^n\}_l$. Ponieważ dla $l = 1, 2, \ldots$ mamy

$$|u^{\tau(k_l^n, u-u_n)}| = 0,$$

to dostajemy

$$|u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}| = |u^{\tau(k_l^n,u-u_n)} - u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}| = |(u-u_n)^{\tau(k_l^n,u-u_n)}| \geqslant$$

$$\geqslant |(u-u_n)^{\tau(k_{l+1}^n,u-u_n)}| = |u^{\tau(k_{l+1}^n,u-u_n)} - u_n^{\tau(k_{l+1}^n,u-u_n)}| = |u_n^{\tau(k_{l+1}^n,u-u_n)}|$$

dla $l = 1, 2, \ldots$. Stąd ciąg $\{|u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}|\}_{l=1}^{\infty}$ jest ciągiem malejącym. Ponieważ z założenia $N(u_n) = N(u - u_n) = N(u + u_n) = \mathbb{N}$, to ciąg $\{|u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}|\}_{l=1}^{\infty}$ powstał z ciągu malejącego $\{|u_n^{\tau(j,u+u_n)}|\}_{j=m+1}^{\infty} = \{|u_n^{\tau(j,u_n)}|\}_{j=m+1}^{\infty}$ po ewentualnej permutacji jego wyrazów. Dlatego mamy

$$|u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}| = |u_n^{\tau(m+l,u+u_n)}| \tag{3.16}$$

i

$$|u^{\tau(k_l^n,u-u_n)}| = |u^{\tau(m+l,u+u_n)}| = 0 \tag{3.17}$$

dla $l = 1, 2, \ldots$ i $n \geqslant n_0$.

Dla naszego $\eta > 0$ istnieje $m+1 \leqslant m_1 \in \mathbb{N}$, takie że

$$2^p M^p \sum_{j=m_1+1}^{\infty} \beta_j^p < \frac{\eta^p}{3}, \tag{3.18}$$

gdzie $0 < M := \sup_n \|u_n\|_{c_0}^p < \infty$. Stałe m i m_1 są niezależne od u_n, $n = 1, 2, \ldots$.Zauważmy teraz, że w wyrazach sumy

$$\sum_{j=1}^{m_1} \beta_j^p |(u-u_n)^{\tau(j,u-u_n)}|^p$$

występuje co najwyżej m czynników $|(u-u_n)^{\tau(\tilde{k}_i^n, u-u_n)}|^p$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$, i co najwyżej m_1 początkowych czynników spośród

$$|u^{\tau(k_l^n,u-u_n)} - u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}|^p = |u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}|^p = |u_n^{\tau(m+l,u+u_n)}|^p,$$

gdzie $1 \leqslant l \leqslant m_1$ (patrz (3.16), (3.17)). Po uwzględnieniu, że ciąg $\{\beta_j\}_j$ jest ciągiem ściśle malejącym o wyrazach dodatnich i równości (3.16) mamy

$$\sum_{l=1}^{m_1} \beta_l^p |u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}|^p \leqslant \beta_1^p \sum_{l=1}^{m_1} |u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}|^p = \tag{3.19}$$

$$= \beta_1^p \sum_{l=1}^{m_1} |u_n^{\tau(m+l,u+u_n)}|^p = \beta_1^p \sum_{j=m+1}^{m+m_1} |u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta_1^p}{\beta_{m+m_1}^p} \sum_{j=m+1}^{m+m_1} |u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \leqslant \frac{\beta_1^p}{\beta_{m+m_1}^p} \sum_{j=m+1}^{\infty} |u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p$$

i

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j^p |(u-u_n)^{\tau(\tilde{k}_j^n,u-u_n)}|^p = \sum_{j=1}^{m} \beta_j^p |u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \leqslant \tag{3.20}$$

$$\leqslant \beta_1^p \sum_{j=1}^{m} |u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p.$$

Z (3.7), (3.18), (3.19) i (3.20) dostajemy następujące oszacowanie

$$\eta^p \leqslant |||u-u_n|||_{\beta,p}^p = \tag{3.21}$$

$$= \sum_{j=1}^{m_1} \beta_j^p |(u-u_n)^{\tau(j,u-u_n)}|^p + \sum_{j=m_1+1}^{\infty} \beta_j^p |(u-u_n)^{\tau(j,u-u_n)}|^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \beta_j^p |(u-u_n)^{\tau(\tilde{k}_j^n,u-u_n)}|^p + \sum_{l=1}^{m_1} \beta_l^p |(u_n^{\tau(k_l^n,u-u_n)}|^p + \sum_{j=m_1+1}^{\infty} \beta_j^p |(u-u_n)^{\tau(j,u-u_n)}|^p \leqslant$$

$$\leqslant \beta_1^p \sum_{j=1}^{m} |u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \frac{\beta_1^p}{\beta_{m+m_1}^p} \sum_{j=m+1}^{m_1} |u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p + 2^p M^p \sum_{j=m_1+1}^{\infty} \beta_j^p <$$

$$< \beta_1^p \sum_{j=1}^{m} |u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \frac{\beta_1^p}{\beta_{m+m_1}^p} \sum_{j=m+1}^{m+m_1} |u^{\tau(j,u+u_n)} - u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p + \frac{\eta^p}{3}.$$

Następnie z (3.5) dostajemy $n_1 \geqslant n_0$ dla którego mamy

$$\beta_1^p \sum_{j=1}^{m} |u^{\tau(j,u+u_{n_1})} - u_{n_1}^{\tau(j,u+u_{n_1})}|^p < \frac{\eta^p}{3} \tag{3.22}$$

i

$$\frac{\beta_1^p}{\beta_{m+m_1}^p} \sum_{j=m+1}^{m+m_1} |u^{\tau(j,u+u_{n_1})} - u_{n_1}^{\tau(j,u+u_{n_1})}|^p < \frac{\eta^p}{3}. \tag{3.23}$$

Ostatecznie z (3.21), (3.22) i (3.23) otrzymujemy następującą sprzeczność

$$\eta^p \leqslant |||u - u_{n_1}|||_{\beta,p}^p < \frac{\eta^p}{3} + \frac{\eta^p}{3} + \frac{\eta^p}{3} = \eta^p.$$

Przypadek 2. Nośnik funkcji u jest zbiorem nieskończonym, czyli równolicznym z $\mathbb{N}$.

Wybierzmy liczbę $\lambda > 0$, taką że

$$\lambda < \frac{1}{3(3L)^{\frac{1}{p}}} < \frac{1}{3}. \tag{3.24}$$

Wtedy mamy

$$\lambda\eta < \frac{1}{3}\eta. \tag{3.25}$$

Weźmy największe $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, takie że

$$|u^{\tau(j,u)}| < \lambda\eta \tag{3.26}$$

dla każdego $j > \tilde{m}$. Wtedy dla $\tilde{m}$ istnieje $j_k > \tilde{m}$, takie że $\sum_{j=j_k+1}^{\infty} \beta_j^p \leqslant L\beta_{j_k+1}^p$. Weźmy teraz $m > j_k$, takie że $|u^{\tau(m,u)}| > |u^{\tau(m+1,u)}|$. Podobnie jak w przypadku 1, kładąc w lematach 2.1 i 2.4 $\{s^j\}_j = \{\beta_j^p\}_j$, $\{t^j\}_j = \{|u^{\tau(j,u)}|^p\}$ oraz $\{g(j)\}_j = \{\tau(j, u + u_n)\}_j$ i korzystając z granicy (3.6) dostajemy dla naszego m równość

$$\lim_n \left(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) = 0. \tag{3.27}$$

Weźmy liczbę $\delta > 0$ określoną w lemacie 2.5 dla tego m. Z (3.27) dostajemy $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^{m} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p \right) < \delta \tag{3.28}$$

dla każdego $n \geqslant n_0$.

Zastosujemy teraz do szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p$ lemat 2.5, przyjmując $\{t^j\} = \{|u^{\tau(j,u)}|^p\}_j$ i $\{s^j\} = \{\beta_j^p\}_j$. Na podstawie (3.28) otrzymujemy równość sum

$$\sum_{j=1}^{l} |\beta_j u^{\tau(j,u)}|^p = \sum_{j=1}^{l} |\beta_j u^{\tau(j,u+u_n)}|^p,$$

$1 \leqslant l \leqslant m$, równość zbiorów

$$\{\tau(1,u), ..., \tau(m,u)\} = \{\tau(1,u+u_n), ...\tau(m,u+u_n)\}$$

oraz równość wyrazów

$$|u^{\tau(j,u)}| = |u^{\tau(j,u+u_n)}|$$

dla $j = 1, ..., m$ i $n \geqslant n_0$.

Biorąc jeszcze raz podciąg ciągu $\{u_n\}$, możemy założyć, że $\tau(j, u + u_n) = \tau(j, u)$ dla $j = 1, ..., m$ i $n \geqslant n_0$. Dlatego bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że

$$\tau(j, u) = \tau(j, u + u_n) = \tilde{\tau}(j) \tag{3.29}$$

dla $j = 1, ..., m$, $n \geqslant n_0$.
Z (3.5), (3.29) i równości $\lim_n |||u_n|||_{\beta,p} = |||u|||_{\beta,p} = 1$ wynika istnienie $n_1 \geqslant n_0$, takiego że

$$|u^{\tau(j,u)} - u_n^{\tau(j,u)}| < \eta \tag{3.30}$$

dla $j = 1, ..., m$,

$$\sum_{j=1}^{l} \beta_j^p \Big| |u^{\tau(j,u)}|^p - |u_n^{\tau(j,u)}|^p \Big| = \sum_{j=1}^{l} \beta_j^p \Big| |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p - |u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \Big| \tag{3.31}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p \Big| |u^{\tau(j,u+u_n)}|^p - |u_n^{\tau(j,u+u_n)}|^p \Big| < \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3 \cdot 3^p}$$

dla $1 \leqslant l \leqslant m$ i

$$|||u_n|||_{\beta,p}^p - |||u|||_{\beta,p}^p < \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3 \cdot 3^p} \tag{3.32}$$

dla $n \geqslant n_1$. Następnie z (3.7), dla każdego $n \geqslant n_1$ istnieje $\tilde{j}_n \in \mathbb{N}$, takie że

$$|u^{\tau(\tilde{j}_n,u-u_n)} - u_n^{\tau(\tilde{j}_n,u-u_n)}| = |(u - u_n)^{\tau(\tilde{j}_n,u-u_n)}| = \|u - u_n\|_{c_0} \geqslant \eta. \tag{3.33}$$

Dlatego z nierówności (3.30) dostajemy

$$\tau(\tilde{j}_n, u - u_n) \notin \{\tau(1, u), ..., \tau(m, u)\} = \{\tau(1, u_n), ..., \tau(m, u_n)\}$$

dla każdego $n \geqslant n_1$. Biorąc teraz pod uwagę wniosek 2.2 i nierówność $j_k < m$ otrzymujemy

$$|||u_n|||_{\beta,p}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p |u_n^{\tau(j,u_n)}|^p \geqslant \tag{3.34}$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u_n^{\tau(j,u)}|^p + \beta_{j_k+1}^p |u_n^{\tau(j_{k+1},u_n)}|^p \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u_n^{\tau(j,u)}|^p + \beta_{j_k+1}^p |u_n^{\tau(\tilde{j}_n,u-u_n)}|^p.$$

Z (3.24) i (3.26) mamy

$$|||u|||_{\beta,p}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p < \tag{3.35}$$

$$< \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p + \lambda^p \eta^p \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \beta_j^p <$$

$$< \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p + \frac{1}{3^p \cdot 3L} \eta^p \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \beta_j^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p + \frac{1}{3^p \cdot 3L} \eta^p L \beta_{j_k+1}^p =$$

$$= \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p + \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3 \cdot 3^p}.$$

Korzystając z nierówności (3.25), (3.26), (3.31) - (3.35), równości (3.29) i z tego, że $j_k < m$ otrzymujemy następującą sprzeczność

$$2\frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3^p} < \frac{2^p \beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3^p} = \beta_{j_k+1}^p \left| \eta - \frac{\eta}{3} \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{j_k+1}^p \left| |u^{\tau(\tilde{j}_n, u-u_n)} - u_n^{\tau(\tilde{j}_n, u-u_n)}| - |u^{\tau(\tilde{j}_n, u-u_n)}| \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{j_k+1}^p |u_n^{\tau(\tilde{j}_n, u-u_n)}|^p \leqslant |||u_n|||_{\beta,p}^p - \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u_n^{\tau(j,u)}|^p =$$

$$= \left(|||u_n|||_{\beta,p}^p - |||u|||_{\beta,p}^p \right) + |||u|||_{\beta,p}^p - \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u_n^{\tau(j,u)}|^p <$$

$$< \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3 \cdot 3^p} + \left(|||u|||_{\beta,p}^p - \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p \right) + \left(\sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u^{\tau(j,u)}|^p - \sum_{j=1}^{j_k} \beta_j^p |u_n^{\tau(j,u)}|^p \right) <$$

$$< \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3 \cdot 3^p} + \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3 \cdot 3^p} + \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3 \cdot 3^p} = \frac{\beta_{j_k+1}^p \eta^p}{3^p},$$

i to kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 3.3. Ponieważ w twierdzeniu 3.2 założenia o normie $||| \cdot |||_{\beta,p}$ są ogólniejsze od tych, które są w pracy [83], to nasz dowód twierdzenia 3.2 jest zdecydowanie bardziej skomplikowany w porównaniu z dowodem twierdzenia J. Rainwatera. W szczególności musimy rozważyć w nim dwa przypadki.

Wniosek 3.4. Przestrzeń Banacha $(c_0(\Gamma), ||| \cdot |||_{\beta,p})$ jest ściśle wypukła.

Mamy jednak następujące twierdzenie mówiące, że nie można wzmocnić twierdzenia 3.2.

Twierdzenie 3.5. *Przestrzeń Banacha* $(c_0(\Gamma), ||| \cdot |||_{\beta,p})$ *nie jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku.*

Dowód. Wystarczy przyjąć $\Gamma = \mathbb{N}$. Niech $z = e_1$, $u_n = \sum_{i=2}^{n+1} e_i$, $v_n = u_n + z = \sum_{i=1}^{n+1} e_i$ dla $n = 1, 2, ...$ Wtedy mamy

$$D^i_{\beta,p}(u_n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 1, \\ \beta_{i-1} & \text{dla } 2 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 0 & \text{dla } i > n+1, \end{cases}$$

$$D^i_{\beta,p}(v_n) = \begin{cases} \beta_i & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 0 & \text{dla } i > n+1, \end{cases}$$

$$D^i_{\beta,p}\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\beta_{n+1}}{2} & \text{dla } i = 1 \\ \beta_{i-1} & \text{dla } 2 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 0 & \text{dla } i > n+1, \end{cases}$$

$$D^i_{\beta,p}(z) = \begin{cases} \beta_1 & \text{dla } i = 1 \\ 0 & \text{dla } i > 1. \end{cases}$$

Dlatego otrzymujemy

$$|||v_n - u_n|||_{\beta,p} = |||z|||_{\beta,p} = \beta_1 > 0,$$

$$|||u_n|||_{\beta,p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, |||v_n|||_{\beta,p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dla $n = 1, 2, ...$ i

$$\lim_n \left|\left|\left|\frac{u_n + v_n}{2}\right|\right|\right|_{\beta,p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

W związku z twierdzeniem 3.5 zauważmy, że gdy Γ jest zbiorem nieprzeliczalnym, to jest ono prawdziwe w $c_0(\Gamma)$ niezależnie od wyboru normy równoważnej normie standardowej. Mamy bowiem następujące twierdzenie udowodnione przez M. M. Daya, R. C. Jamesa i S. Swaminathana ([22]).

Twierdzenie 3.6. *Załóżmy, że zbiór Γ jest nieprzeliczalny. Wtedy nie można przenormować przestrzeni Banacha $c_0(\Gamma)$ z normą maximum tak, by otrzymać przestrzeń jednostajnie wypukłą w każdym kierunku.*

Przejdźmy teraz do badania dalszych własności przestrzeni $(c_0(\Gamma), |||\cdot|||_{\beta,p})$.

Twierdzenie 3.7. *Przestrzeń Banacha $(c_0(\Gamma), |||\cdot|||_{\beta,p})$ ma słabą własność Opiala.*

Dowód. Jest to modyfikacja dowodu twierdzenia 3.1 w [64]. Wystarczy zbadać przestrzeń $c_0 = c_0(\mathbb{N})$, tzn. $\Gamma = \mathbb{N}$ (patrz początek dowodu twierdzenia 3.2).

Załóżmy, że ciąg $\{u_n\} \subset c_0$ jest słabo zbieżny do $0 \in c_0$ i $u \in c_0 \setminus \{0\}$.
Weźmy dowolne $0 < \epsilon < 1$. Wtedy istnieje $\tilde{i} \in \mathbb{N}$, takie że

$$|u^i| < \epsilon$$

dla każdego $i > \tilde{i}$, $i \in \mathbb{N}$. Dlatego otrzymujemy następujące oszacowanie

$$|u_n^i| \leqslant |u_n^i - u^i| + |u^i| < |u_n^i - u^i| + \epsilon$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego $\tilde{i} < i \in \mathbb{N}$.

Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant \tilde{i}$ mamy albo $u^i = 0$ albo $u^i \neq 0$. Rozpatrzmy oddzielnie te dwa przypadki.
1) Załóżmy, że $u^i \neq 0$. Połóżmy $\eta_i = \min\{\epsilon, \frac{1}{2}|u^i|\}$. Ponieważ $u_n \rightharpoonup 0$, to istnieje $\tilde{n}_i \in \mathbb{N}$, takie że

$$|u_n^i| < \eta_i$$

dla $\tilde{n}_i < n \in \mathbb{N}$. Stąd dostajemy

$$|u_n^i - u^i| \geqslant |u^i| - |u_n^i|$$
$$> |u^i| - \eta_i \geqslant \frac{1}{2}|u^i| \geqslant \eta_i > |u_n^i|.$$

2) Załóżmy, że $u^i = 0$. Wtedy oczywista jest nierówność

$$|u_n^i| \leqslant |u_n^i - u^i|$$

i przyjmujemy $\tilde{n}_i = 1$.

Oznacza to, że

$$|u_n^i| \leqslant |u_n^i - u^i|$$

dla każdego $1 \leqslant i \leqslant \tilde{i}$ i każdego $n > \max\{\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{i}}\}$. Łącząc wszystkie powyższe nierówności mamy

$$|u_n^i| \leqslant |u_n^i - u^i| + \epsilon \tag{3.36}$$

dla każdego $i \in \mathbb{N}$ i każdego $n > \max\{\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{i}}\}$.

Ustalmy liczbę naturalną $n > \max\{\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{i}}\}$. Przyjmując we wniosku 2.2 ciągi $\{s^j\}_j = \{\beta_j^p\}_j$, $\{t^j\}_j = \{|(u_n - u)^{\tau(j,u_n-u)}|^p\}_j$, $\{g(j)\}_j = \{\tau(j, u_n)\}_j$ i korzystając z (3.36), otrzymujemy

$$|||u_n - u|||_{\beta,p} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\beta_j |(u_n - u)^{\tau(j,u_n-u)}|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(\beta_j|(u_n-u)^{\tau(j,u_n)}|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} + \epsilon\left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left[\beta_j\left(|u_n^{\tau(j,u_n)} - u^{\tau(j,u_n)}| + \epsilon\right)\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(\beta_j|u_n^{\tau(j,u_n)}|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = |||u_n|||_{\beta,p}$$

Przechodząc z n do $+\infty$ dostajemy

$$\limsup_n |||u_n|||_{\beta,p} \leqslant \limsup_n |||u_n - u|||_{\beta,p} + \epsilon\left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ponieważ $0 < \epsilon < 1$ było wybrane dowolnie, to ostatecznie mamy

$$\limsup_n |||u_n|||_{\beta,p} \leqslant \limsup_n |||u_n - u|||_{\beta,p}.$$

□

Zauważmy, że przestrzeń Banacha $(c_0(\Gamma), |||\cdot|||_{\beta,p})$ nie ma jednak własności Opiala.

Przykład 3.8. Rozważmy przestrzeń $(c_0, |||\cdot|||_{\beta,p})$ ze standardową bazą $\{e_i\}_i$. Weźmy ciąg $\{u_n\}_n = \{e_{n+1} + \cdots + e_{n+n}\}_n$. Ciąg ten jest słabo zbieżny do $0 \in c_0$ oraz

$$|||u_n|||_{\beta,p} = \|D_{\beta,p}(u_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Biorąc teraz $u = e_1$ dostajemy

$$|||u_n - u|||_{\beta,p} = \|D_{\beta,p}(u_n - u)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dlatego mamy następujące równości

$$\lim_n |||u_n|||_{\beta,p} = \lim_n |||u_n - u|||_{\beta,p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Twierdzenie 3.9. *Przestrzeń Banacha* $(c_0(\Gamma), |||\cdot|||_{\beta,p})$ *nie ma struktury normalnej.*

Dowód. Załóżmy, że $\Gamma = \mathbb{N}$, $c_0 = c_0(\mathbb{N})$. Połóżmy

$$x_n = \sum_{i=\frac{n(n+1)}{2}+1}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} e_i$$

dla $n = 1, 2, ...$ Dla $n_2 > n_1$ mamy

$$|||x_{n_2} - x_{n_1}|||_{\beta,p} = \left(\sum_{j=1}^{n_1+n_2+2} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Stąd

$$\mathrm{diam}_{|||\cdot|||_{\beta,p}}\{x_1, x_2, ...\} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Obliczymy teraz $\lim_n \mathrm{dist}_{\|\cdot\|_{\beta,p}}(x_{n+1}, \mathrm{conv}\{x_1, ..., x_n\})$. Załóżmy, że $a_1 + \ldots + a_n = 1$, gdzie $0 \leqslant a_k \leqslant 1$ dla $k = 1, \ldots, n$. Wtedy otrzymujemy

$$x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = (0, -a_1, -a_1, -a_2, -a_2, -a_2, -a_3, -a_3, -a_3, -a_3, \ldots,$$

$$\underbrace{-a_n, \ldots, -a_n}_{n+1 \ razy}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n+2 \ razy}, 0, ...).$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i to daje nam następujące nierówności

$$\left(\sum_{j=1}^{n+2} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |||x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k|||_{\beta,p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\lim_n \mathrm{dist}_{|||\cdot|||_{\beta,p}}(x_{n+1}, \mathrm{conv}\{x_1, ..., x_n\}) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}} = \mathrm{diam}_{|||\cdot|||_{\beta,p}}\{x_1, x_2, ...\},$$

czyli ciąg $\{x_n\}_n$ jest diametralny w $(c_0(\Gamma), ||| \cdot |||_{\beta,p})$. $\square$

Twierdzenie 3.10. *Przestrzeń Banacha* $(c_0(\Gamma), |||\cdot|||_{\beta,p})$ *nie ma asymptotycznej struktury normalnej.*

Dowód. Załóżmy, że $\Gamma = \mathbb{N}$, $c_0 = c_0(\mathbb{N})$. Weźmy

$$u_i = \sum_{k=\frac{i(i+1)}{2}+1}^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}} e_k$$

dla $i = 1, 2, ...,$

$$x_n = \begin{cases} (1 - \frac{j}{2^{2i}})u_i + u_{i+1}, & \text{gdy } n = 2^{2i} + j, \quad j = 1, 2, ..., 2^{2i} \\ u_{i+1} + \frac{j}{2^{2i+1}} u_{i+2}, & \text{gdy } n = 2^{2i+1} + j, \quad j = 1, 2, ..., 2^{2i+1}. \end{cases}$$

oraz

$$C = \overline{\mathrm{conv}}\{x_n : n = 5, 6, ...\}.$$

Wtedy mamy

$$0 = \lim_n \|x_n - x_{n+1}\|_{c_0} = \lim_n |||x_n - x_{n+1}|||_{\beta,p}$$

Zauważmy, że $|x_n^k - x_m^k| \leqslant 1$ dla każdych $k, m, n \in \mathbb{N}$ i dlatego

$$|||x_n - x_m|||_{\beta,p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Z drugiej strony, na przykład dla $i_2 > i_1 + 2$, $n_1 = 2^{2i_1} + 1$, $n_2 = 2^{2i_2} + 1 > 2^{2i_1+4} + 1$ mamy

$$x_{n_2} - x_{n_1} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1 - \frac{1}{2^{2i_2}}, \ldots, 1 - \frac{1}{2^{2i_2}}}_{i_2+1 \text{ razy}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i_2+2 \text{ razy}}, 0, \ldots) -$$

$$-(0, \ldots, 0, \underbrace{1 - \frac{1}{2^{2i_1}}, \ldots, 1 - \frac{1}{2^{2i_1}}}_{i_1+1 \text{ razy}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i_1+2 \text{ razy}}, 0, \ldots) =$$

$$= (0, ..., 0, \underbrace{\frac{1}{2^{2i_1}} - 1, \ldots, \frac{1}{2^{2i_1}} - 1}_{i_1+1 \text{ razy}}, \underbrace{-1 \ldots, -1}_{i_1+2 \text{ razy}}, 0, ..., 0, \underbrace{1 - \frac{1}{2^{2i_2}}, \ldots, 1 - \frac{1}{2^{2i_2}}}_{i_2+1 \text{ razy}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i_2+2 \text{ razy}}, 0, ...).$$

Stąd dostajemy

$$\left(\sum_{j=1}^{i_1+i_2+4} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |||x_{n_2} - x_{n_1}|||_{\beta,p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

a to oznacza, że

$$\operatorname{diam}_{|||\cdot|||_{\beta,p}} C = \operatorname{diam}_{|||\cdot|||_{\beta,p}} \{x_n\} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podobnie otrzymujemy

$$\left|\left|\left| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k - x_n \right|\right|\right|_{\beta,p} \geqslant \left(\sum_{j=1}^{i+2} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dla każdej wypukłej kombinacji $\sum_{k=1}^m a_k x_k$ i odpowiednio dużego $n = 2^{2i} + 1$. To daje nam

$$\lim_n \left|\left|\left| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k - x_n \right|\right|\right|_{\beta,p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}} = \operatorname{diam}_{|||\cdot|||_{\beta,p}} C$$

i ostatecznie mamy

$$\lim_n |||x - x_n|||_{\beta,p} = \operatorname{diam}_{|||\cdot|||_{\beta,p}} C$$

dla każdego $x \in C$. □

Rozdział 4

Konstrukcja równoważnej normy mającej własność Kadeca-Klee'ego i własność Opiala

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenie o istnieniu równoważnej normy z własnościami Opiala i Kadeca-Klee'ego w każdej nieskończenie wymiarowej ośrodkowej przestrzeni Banacha. Twierdzenie to będzie jednym z głównych narzędzi przy rozwiązywaniu problemu istnienia w przestrzeni refleksywnej przy odpowiednim równoważnym przenormowaniu zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem. Twierdzenie Kadeca-Klee'ego (twierdzenie 1.32), przestrzenie uniwersalne $C([0,1],\mathbb{R})$, ℓ^∞ i metoda podana w [27] w dowodzie twierdzenia D. van Dulsta będą podstawowymi narzędziami w konstrukcji nowej normy.

Zaczniemy od twierdzeń pomocniczych. Następujące dwa twierdzenia pokazują istnienie w nieskończenie wymiarowych i ośrodkowych przestrzeniach Banacha równoważnej normy mającej jednocześnie własność Kadeca-Klee'ego i własność Opiala. Dowody tych twierdzeń częściowo opierają się na metodach zaprezentowanych w [19], [27], [98]. Nasze twierdzenia są nawet mocniejsze niż potrzebujemy, ponieważ pokażemy dodatkowo, że każda nieskończenie wymiarowa i ośrodkowa przestrzeń Banacha z odpowiednio skonstruowaną równoważną normą ma oprócz własności Kadeca-Klee'ego i własności Opiala także własność jednostajnej wypukłości w każdym kierunku. Zaczniemy od przestrzeni uniwersalnej $C([0,1],\mathbb{R})$ z normą maksimum.

Twierdzenie 4.1. *Przestrzeń Banacha $C([0,1],\mathbb{R})$ z normą maksimum $\|\cdot\|_C$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_{C,1}$, taką że przestrzeń $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,1})$ ma jednocześnie własność Kadeca-Klee'ego i własność Opiala i jest przestrzenią jednostajnie wypukłą w każdym kierunku.*

Dowód. Do przestrzeni Banacha $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_C)$ nie możemy bezpośrednio stosować twierdzenia 1.32, ponieważ przestrzeń ta nie ma predualnej. Dlatego wykorzystamy tutaj przestrzeń ℓ^∞ (w ℓ^∞ mamy standardową normę $\|\cdot\|_\infty$), która ma przestrzeń predualną i jest przestrzenią uniwersalną dla ośrodkowych przestrzeni Banacha. Przyjmijmy więc $Y = \ell^1$ (w ℓ^1 też mamy standardową normę $\|\cdot\|_1$). Wtedy $Y^* = (\ell^1)^* = \ell^\infty$. Z uniwersalności przestrzeni $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ dla ośrodkowych przestrzeni Banacha wynika, że $X = C([0,1],\mathbb{R}) \subset \ell^\infty = Y^*$. Następnie stosując twierdzenie 1.32 do przestrzeni $Y = \ell^1$ i $Y^* = \ell^\infty$ otrzymujemy w ℓ^∞ równoważną normę $\|\cdot\|_{\infty,1}$, taką że jeśli $\{y_m\}_m \subset \ell^\infty$ jest *-słabo zbieżny do $\tilde{y} \in C([0,1],\mathbb{R})$ i $\lim_m \|y_m\|_{\infty,1} = \|\tilde{y}\|_{\infty,1}$, to $\lim_m \|y_m - \tilde{y}\|_{\infty,1} = \lim_m \|y_m - \tilde{y}\|_\infty = 0$. Otrzymujemy więc w przestrzeni $C([0,1],\mathbb{R})$ normę $\|\cdot\|_{\infty,1}$ równoważną wyjściowej z własnością Kadeca-Klee'ego względem słabej topologii, ponieważ słaba zbieżność ciągu w przestrzeni Banacha $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ jest równoważna słabej zbieżności tego ciągu w $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ po utożsamieniu $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ z podprzestrzenią przestrzeni $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ i dlatego ten ciąg jest też *-słabo zbieżny w $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Niech teraz $\{g_i\}_i$ będzie bazą Schaudera przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$, taką że $\|g_i\|_C = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots$ i niech $\{g_i^*\}_i$ będzie ciągiem biortogonalnych funkcjonałów związanych z tą bazą. Wiemy, że ciąg $\{g_i^*\}_i$ jest ograniczony (uwaga 1.42). Dalej niech $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ będzie ciągiem projekcji w przestrzeni $C([0,1],\mathbb{R})$, określonych w następujący sposób: $P_0 = 0$, $P_n h = \sum_{i=1}^n g_i^*(h) g_i$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i $h \in C([0,1],\mathbb{R})$. Ciąg $\{\|P_n\|_{CC}\}_{n=0}^\infty$ norm tych projekcji ze względu na normę $\|\cdot\|_C$ w $C([0,1],\mathbb{R})$ jest również ograniczony (twierdzenie 1.43).

Możemy teraz wprowadzić nową normę w $C([0,1],\mathbb{R})$ określoną w następujący sposób

$$\|h\|_{C,1} := \sqrt{\|h\|^2_{\mathcal{P},\infty,1} + \|h\|^2_{\tilde{2}}},$$

gdzie

$$\|h\|_{\mathcal{P},\infty,1} := \sup_{n=0,1,2,\ldots} \|h - P_n h\|_{\infty,1}$$

oraz

$$\|h\|_{\tilde{2}} := \sqrt{\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{g_i^*(h)}{2^i}\right)^2}$$

dla $h \in C([0,1],\mathbb{R})$.

Norma $\|\cdot\|_{C,1}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_{\infty,1}$ w $C([0,1],\mathbb{R})$. Istotnie, weźmy $h \in C([0,1],\mathbb{R})$. Ponieważ $\|h\|_{\mathcal{P},\infty,1} = \sup_{n=0,1,2,\ldots} \|h - P_n h\|_{\infty,1} \geqslant \|h\|_{\infty,1}$, to mamy $\|h\|_{C,1} \geqslant \|h\|_{\infty,1}$ dla $h \in C([0,1],\mathbb{R})$. Ponadto istnieją stałe $\tilde{K}, \tilde{M} > 0$, takie że $\|h\|_{\mathcal{P},\infty,1} \leqslant \tilde{K}\|h\|_{\infty,1}$ oraz $\|h\|_{\tilde{2}} \leqslant \tilde{M}\|h\|_{\infty,1}$. Stąd otrzymujemy

$$\|h\|_{C,1} \leqslant \sqrt{(\tilde{K}^2 + \tilde{M}^2)\|h\|^2_{\infty,1}} \leqslant \sqrt{(\tilde{K} + \tilde{M})^2 \|h\|^2_{\infty,1}} = (\tilde{K} + \tilde{M})\|h\|_{\infty,1}.$$

dla $h \in C([0,1],\mathbb{R})$. Spełnione są więc nierówności

$$\|h\|_{\infty,1} \leqslant \|h\|_{C,1} \leqslant (\tilde{K} + \tilde{M})\|h\|_{\infty,1}$$

dla każdego $h \in C([0,1],\mathbb{R})$. Stąd natychmiast dostajemy, że norma $\|\cdot\|_{C,1}$ jest równoważna normie maksimum $\|\cdot\|_C$ w $C([0,1],\mathbb{R})$, ponieważ norma $\|\cdot\|_{C,1}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_{\infty,1}$, a norma $\|\cdot\|_{\infty,1}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_C$.

Dalej, z wniosku 1.17 przestrzeń Banacha $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,1})$ jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku.

Pokażemy teraz, że przestrzeń Banacha $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,1})$ ma własność Opiala. Weźmy ciąg $\{h_m\}_m \subset C([0,1],\mathbb{R})$, który jest słabo zbieżny do $0 \in C([0,1],\mathbb{R})$. Wtedy dla każdego $h \in C([0,1],\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ mamy

$$\lim_m \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{g_i^*(h_m)}{2^i}\right)^2 = 0$$

oraz

$$\lim_m \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{g_i^*(h_m - h)}{2^i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{g_i^*(h)}{2^i}\right)^2 .$$

Tak więc, stosując słabą własność Opiala normy $\|\cdot\|_{\mathcal{P},\infty,1}$ (twierdzenie 1.28) otrzymujemy

$$\limsup_m \|h_m - h\|_{C,1} = \limsup_m \sqrt{\|h_m - h\|^2_{\mathcal{P},\infty,1} + \|h_m - h\|^2_{\tilde{2}}} =$$

$$= \limsup_m \sqrt{\|h_m - h\|^2_{\mathcal{P},\infty,1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{g_i^*(h_m - h)}{2^i}\right)^2} =$$

$$= \limsup_m \sqrt{\|h_m - h\|^2_{\mathcal{P},\infty,1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{g_i^*(h)}{2^i}\right)^2} > \limsup_m \|h_m - h\|_{\mathcal{P},\infty,1} \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_m \|h_m\|_{\mathcal{P},\infty,1} = \limsup_m \sqrt{\|h_m\|^2_{\mathcal{P},\infty,1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{g_i^*(h_m)}{2^i}\right)^2} = \limsup_m \|h_m\|_{C,1}.$$

Pokażemy teraz, że przestrzeń Banacha $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,1})$ ma własność Kadeca-Klee'ego. Załóżmy więc, że dany jest ciąg $\{\tilde{h}_m\}_m \subset C([0,1],\mathbb{R})$, który jest słabo zbieżny do $\tilde{h} \in C([0,1],\mathbb{R})$ i $\lim_m \|\tilde{h}_m\|_{C,1} = \|\tilde{h}\|_{C,1} = 1$. Wtedy

$$\|\tilde{h}\|_{\mathcal{P},\infty,1} > 0,$$

$$\|\tilde{h}\|_{\tilde{2}} > 0$$

i

$$0 < \lim_m \|\tilde{h}_m\|_{\tilde{2}} = \|\tilde{h}\|_{\tilde{2}} = \beta < 1.$$

Tym samym granica $\lim_m \|\tilde{h}_m\|_{\mathcal{P},\infty,1}$ istnieje i mamy

$$0 < \lim_m \|\tilde{h}_m\|_{\mathcal{P},\infty,1} = \|\tilde{h}\|_{\mathcal{P},\infty,1} = \sqrt{1-\beta^2} = \gamma < 1.$$

Ponieważ $\lim_n P_n\tilde{h} = \tilde{h}$, to mamy

$$\gamma = \|\tilde{h}\|_{\mathcal{P},\infty,1} = \|\tilde{h} - P_{\bar{n}}\tilde{h}\|_{\infty,1}$$

dla pewnego $0 \leqslant \bar{n} < \infty$. Zauważmy teraz, że

$$\lim_m P_{\bar{n}} \tilde{h}_m = P_{\bar{n}} \tilde{h} \tag{4.1}$$

w normie $\|\cdot\|_C$ (a więc również w normach $\|\cdot\|_{\infty,1}, \|\cdot\|_{C,1}$). Stąd $\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m \rightharpoonup \tilde{h} - P_{\bar{n}}\tilde{h}$ w przestrzeni $C([0,1],\mathbb{R})$. Dlatego mamy

$$\gamma = \|\tilde{h}\|_{\mathcal{P},\infty,1} = \|\tilde{h} - P_{\bar{n}}\tilde{h}\|_{\infty,1} \leqslant \liminf_m \|\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m\|_{\infty,1} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \|\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m\|_{\infty,1} \leqslant \lim_m \|\tilde{h}_m\|_{\mathcal{P},\infty,1} = \gamma$$

i stąd dostajemy

$$\lim_m \|\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m\|_{\infty,1} = \|\tilde{h} - P_{\bar{n}}\tilde{h}\|_{\infty,1} = \gamma.$$

Korzystając z własności Kadeca-Klee'ego normy $\|\cdot\|_{\infty,1}$ w $C([0,1],\mathbb{R})$ otrzymujemy

$$\lim_m (\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m) = \tilde{h} - P_{\bar{n}}\tilde{h}$$

w $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty,1})$. Ponieważ normy $\|\cdot\|_{\infty,1}$ i $\|\cdot\|_{C,1}$ są równoważne, to mamy taką samą zbieżność

$$\lim_m (\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m) = \tilde{h} - P_{\bar{n}}\tilde{h}$$

w normie $\|\cdot\|_{C,1}$. Stąd i z równości (4.1) otrzymujemy

$$\tilde{h} = \lim_m (\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m) + P_{\bar{n}}\tilde{h} = \lim_m (\tilde{h}_m - P_{\bar{n}}\tilde{h}_m) + \lim_m P_{\bar{n}}\tilde{h}_m = \lim_m \tilde{h}_m$$

w normie $\|\cdot\|_{C,1}$.

□

Uwaga 4.2. Bez straty ogólności rozważań (w razie potrzeby wystarczy przemnożyć normę $\|\cdot\|_{C,1}$ przez odpowiednią stałą większą od 1) możemy założyć, że

$$\|\cdot\|_C \leqslant \|\cdot\|_{C,1} \leqslant L_{C,1}\|\cdot\|_C$$

w $C([0,1],\mathbb{R})$.

Zauważmy, że twierdzenie 4.1 jest również prawdziwe, jeśli zastąpimy przestrzeń Banacha $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ dowolną przestrzenią z bazą Schaudera $(X, \|\cdot\|_X)$. Biorąc pod uwagę uniwersalność przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ dla ośrodkowych przestrzeni Banacha i twierdzenie 4.1 dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3. *Każda nieskończenie wymiarowa i ośrodkowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_{X,1}$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{X,1})$ ma jednocześnie własność Kadeca-Klee'ego i własność Opiala oraz*

$$\|\cdot\|_X \leqslant \|\cdot\|_{X,1} \leqslant L_{C,1}\|\cdot\|_X.$$

Ponadto przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{X,1})$ jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku.

Dowód. Z twierdzenia 4.1 wynika, że przestrzeń Banacha $C([0,1],\mathbb{R})$ z normą maksimum $\|\cdot\|_C$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_{C,1}$, taką że przestrzeń $(C([0,1.],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,1})$ ma własność Kadeca-Klee'ego i własność Opiala oraz

$$\|\cdot\|_C \leqslant \|\cdot\|_{C,1} \leqslant L_{C,1}\|\cdot\|_C.$$

Przestrzeń $(C([0,1.],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,1})$ jest również jednostajnie wypukła w każdym kierunku. Z uniwersalności przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_C)$ dla ośrodkowych przestrzeni Banacha mamy, że $X \subset C([0,1],\mathbb{R})$ dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha $(X,\|\cdot\|_X)$. Wystarczy więc zawęzić normę $\|\cdot\|_{C,1}$ do X, aby uzyskać szukaną normę $\|\cdot\|_{X,1}$. $\square$

Rozdział 5

Norma $|||\cdot|||_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ typu Daya w przestrzeni Banacha

W tym rozdziale pokażemy w jaki sposób w przestrzeniach ośrodkowych można wprowadzić równoważną normę $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$, która jest związana z normą Daya i której użyjemy w dowodzie twierdzenia 7.1 będącego podstawowym narzędziem w dowodzie twierdzenia 7.2 o istnieniu zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem w nieskończenie wymiarowej, ośrodkowej i refleksywnej przestrzeni Banacha. Określamy normę typu Daya $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ w następujący sposób – jest to modyfikacja metody M. A. Smitha ([89]).

Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_X)$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Ustalmy $\alpha \in (0,1)$ i niech $\mathcal{F} = \{f_k^*\}_k$ będzie ciągiem niezerowych funkcjonałów w X^*. Załóżmy, że ciąg $\mathcal{F} = \{f_k^*\}_k$ rozdziela punkty w X oraz że $\lim_k f_k^*(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wtedy z twierdzenia Banacha-Steinhausa ([7]) ciąg $\mathcal{F} = \{f_k^*\}_k$ jest ograniczony w X^*, czyli $\|f_k^*\|_{X^*} \leqslant \bar{K}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, przy czym możemy przyjąć, że $1 \leqslant \bar{K} \in \mathbb{R}$. Każdemu $x \in X$ przyporządkowujemy teraz ciąg postaci

$$u(x) = \{u^i(x)\}_i = \{\alpha\|x\|_X, f_1^*(x), f_2^*(x), f_2^*(x), ..., f_k^*(x), ..., f_k^*(x), ...\} \in c_0,$$

gdzie k-ty wyraz ciągu $\mathcal{F}(x) = \{f_k^*(x)\}_k$ występuje tutaj dokładnie k razy. Ustalmy $1 < p < \infty$ i weźmy ściśle malejący ciąg o wyrazach dodatnich $\beta = \{\beta_j\}_j$, taki że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p$ jest zbieżny. Następnie, przy pomocy uogólnionej normy Daya $\|\cdot\|_{\beta,p}$, możemy wprowadzić nową normę w X wzorem

$$\|x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} = |||u(x)|||_{\beta,p} = \|D_{\beta,p}(u(x))\|_p,$$

gdzie $\|\cdot\|_p$ jest standardową normą w przestrzeni ℓ^p. Ponieważ $\|f_k^*\|_{X^*} \leqslant \bar{K}$ oraz $\|f_k^*(x)\|_{X^*} \leqslant \|f_k^*\|_{X^*} \cdot \|x\|_X$ dla $k = 1, 2, ..., x \in X$, to natychmiast dostajemy nierówność

$$\|x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} = |||\{\alpha\|x\|_X, f_1^*(x), f_2^*(x), f_2^*(x), ..., f_k^*(x), ..., f_k^*(x), ...\}|||_{\beta,p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \bar{K}^p \|x\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} = \bar{K}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_X.$$

Stąd mamy

$$\alpha\beta_1\|x\|_X \leqslant \|x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} \leqslant \bar{K}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_X \tag{5.1}$$

dla każdego $x \in X$.

Pokażemy teraz, że funkcja $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ jest normą. Wystarczy stwierdzić, że spełnia ona nierówność trójkąta. Wynika to z definicji $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ i następującego lematu pomocniczego.

Lemat 5.1. *Przy powyższych założeniach i oznaczeniach, dla każdego $x, y \in X$ spełniona jest następująca nierówność*

$$|||u(x+y)|||_{\beta,p} \leqslant |||u(x)+u(y)|||_{\beta,p} \leqslant |||u(x)|||_{\beta,p} + |||u(y)|||_{\beta,p}.$$

Dowód. Dla $x, y \in X$ mamy

$$u(x+y) = \{u^i(x+y)\}_i =$$
$$= \{\alpha\|x+y\|_X, f_1^*(x+y), f_2^*(x+y), f_2^*(x+y), ..., f_k^*(x+y), ..., f_k^*(x+y), ...\}$$

i

$$u(x)+u(y) = \{u^i(x)+u^i(y)\}_i$$
$$= \{\alpha\|x\|_X + \alpha\|y\|_X, f_1^*(x+y), f_2^*(x+y), f_2^*(x+y), ..., f_k^*(x+y), ..., f_k^*(x+y), ...\}.$$

Stąd dostajemy

$$|u^i(x)| + |u^i(y)| \geqslant |u^i(x+y)|$$

dla $i = 1, 2, ...$ Następnie stosując nierówność podaną we wniosku 2.2 i lemat 3.1 otrzymujemy

$$|||u(x+y)|||_{\beta,p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p |u^{\tau(j,u(x+y))}(x+y)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left(|u^{\tau(j,u(x+y))}(x) + u^{\tau(j,u(x+y))}(y)|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left(|u^{\tau(j,u(x)+u(y))}(x) + u^{\tau(j,u(x)+u(y))}(y)|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= |||u(x)+u(y)|||_{\beta,p} \leqslant$$

$$\leqslant |||u(x)|||_{\beta,p} + |||u(y)|||_{\beta,p}.$$

□

Modyfikując dowód twierdzenia Maluty (twierdzenie 3.1 w [64], patrz też dowód twierdzenia 3.7 w naszej pracy), możemy udowodnić twierdzenie o przenoszeniu się słabej własności Opiala z przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$ na przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}})$.

Twierdzenie 5.2. *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Jeśli przestrzeń $(X, \|\cdot\|_X)$ ma słabą własność Opiala, to przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}})$ ma ją również.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}_n \subset X$ jest słabo zbieżny do $0 \in X$ i $x \in X \setminus \{0\}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że istnieją granice $\lim_n \|x_n\|_X$ oraz $\lim_n \|x_n - x\|_X$. Weźmy dowolne $0 < \epsilon < 1$. Ze słabej własności Opiala przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$ mamy nierówność

$$\lim_n \|x_n\|_X \leqslant \lim_n \|x_n - x\|_X.$$

Istnieje więc $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\|x_n\|_X < \lim_n \|x_n\|_X + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \|x_n - x\|_X + \epsilon \tag{5.2}$$

dla każdego $\tilde{n}_0 < n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\lim_k f_k^*(x) = 0$, to istnieje $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, takie że

$$|f_k^*(x)| < \epsilon$$

dla każdego $\tilde{k} < k \in \mathbb{N}$. Stąd mamy

$$|f_k^*(x_n)| \leqslant |f_k^*(x_n) - f_k^*(x)| + |f_k^*(x)|$$

$$< |f_k^*(x_n) - f_k^*(x)| + \epsilon$$

dla każdego $\tilde{k} < k \in \mathbb{N}$ i każdego $n \in \mathbb{N}$.

Następnie dla każdego $1 \leqslant k \leqslant \tilde{k}$ mamy albo $f_k^*(x) = 0$ albo $f_k^*(x) \neq 0$. Dlatego, by otrzymać nierówność $|f_k^*(x_n)| \leqslant |f_k^*(x_n) - f_k^*(x)|$, rozpatrujemy dwa przypadki.
1) Jeśli $f_k^*(x) \neq 0$, to połóżmy $\eta_k = \min\{\epsilon, \frac{1}{2}|f_k^*(x)|\}$. Ponieważ $x_n \rightharpoonup 0$, to istnieje $\tilde{n}_k \in \mathbb{N}$, takie że

$$|f_k^*(x_n)| < \eta_k$$

dla $\tilde{n}_k < n \in \mathbb{N}$.
Stąd mamy

$$|f_k^*(x_n) - f_k^*(x)| \geqslant |f_k^*(x)| - |f_k^*(x_n)|$$

$$> |f_k^*(x)| - \eta_k \geqslant \frac{1}{2}|f_k^*(x)| \geqslant \eta_k > |f_k^*(x_n)|$$

dla $n > \tilde{n}_k$.
2) Jeśli $f_k^*(x) = 0$ to oczywiste jest, że spełniona jest nierówność

$$|f_k^*(x_n)| \leqslant |f_k^*(x_n) - f_k^*(x)|$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i przyjmujemy wtedy $\tilde{n}_k := 1$.

Ostatecznie dla każdego $1 \leqslant k \leqslant \tilde{k}$ i każdego $\max\{\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\} < n \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$|f_k^*(x_n)| \leqslant |f_k^*(x_n) - f_k^*(x)|.$$

Łącząc powyższe nierówności otrzymujemy

$$|f_k^*(x_n)| \leqslant |f_k^*(x_n) - f_k^*(x)| + \epsilon = |f_k^*(x_n - x)| + \epsilon \tag{5.3}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i każdego $\max\{\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\} < n \in \mathbb{N}$. Dlatego z z nierówności (5.2), (5.3) i z określenia funkcji $u(\cdot)$ wynika, że

$$|u^i(x_n)| \leqslant |u^i(x_n - x)| + \epsilon \tag{5.4}$$

dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz każdego $\max\{\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\} < n \in \mathbb{N}$.

Weźmy teraz liczbę naturalną $n > \max\{\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\}$. Przyjmując we wniosku 2.2 $\{s^j\}_j = \{\beta_j^p\}_j$, $\{t^j\}_j = \{|u^{\tau(j,u(x_n-x))}(x_n - x)|^p\}_j$, $\{g(j)\}_j = \{\tau(j, u(x_n))\}_j$ i korzystając z nierówności (5.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} &= |||u(x_n)|||_{\beta,p} = \|D_{\beta,p}(u(x_n))\|_p = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p |u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left(|u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n - x)| + \epsilon\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left|u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n - x)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left|u^{\tau(j,u(x_n - x))}(x_n - x)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \|D_{\beta,p}(u(x_n - x))\|_p + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= |||u(x_n - x)|||_{\beta,p} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} =
\end{aligned}$$

$$= \|x_n - x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Przechodząc z n do $+\infty$ dostajemy

$$\limsup_n \|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} \leqslant \limsup_n \|x_n - x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ponieważ $0 < \epsilon < 1$ było wybrane dowolnie, to ostatecznie mamy żądaną nierówność

$$\limsup_n \|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} \leqslant \limsup_n \|x_n - x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}.$$

Oznacza to, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}})$ ma też słabą własność Opiala. $\square$

Zajmiemy się teraz lokalną jednostajną wypukłością normy $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$. Zakładając dodatkowo, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_X)$ ma własność Kadeca-Klee'ego oraz że dla ciągu $\beta = \{\beta_j\}_j$ istnieją stała $L > 1$ i ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_n\}_n$, takie że $\sum_{j=j_n+1}^{\infty} \beta_j^p \leqslant L\beta_{j_n+1}^p$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i stosując twierdzenie 3.2 oraz metodę M. A. Smitha otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.3. *Jeśli nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa i refleksywna przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ ma własność Kadeca-Klee'ego, to przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}})$ jest LUR.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}_n \subset X$ i punkt $x \in X$ spełniają następujące warunki: $\|x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} = 1$, $\lim_n \|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} = 1$ i $\lim_n \|x + x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} = 2$. Stąd wynika, że $|||u(x)|||_{\beta,p} = 1$, $\lim_n |||u(x_n)|||_{\beta,p} = 1$ oraz $\lim_n |||u(x + x_n)|||_{\beta,p} = 2$. Stosując lemat 5.1 dostajemy

$$2 = |||u(x)|||_{\beta,p} + \lim_n |||u(x_n)|||_{\beta,p} \geqslant \limsup_n |||u(x) + u(x_n)|||_{\beta,p} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_n |||u(x) + u(x_n)|||_{\beta,p} \geqslant \lim_n ||||u(x + x_n)|||_{\beta,p} = 2,$$

a to oznacza, że $\lim_n |||u(x) + u(x_n)|||_{\beta,p} = 2$. Następnie z lokalnej jednostajnej wypukłości przestrzeni $(c_0, |||\cdot|||_{\beta,p})$ (twierdzenie 3.2) wynika zbieżność ciągu $\{u(x_n)\}_n$ do funkcji $u(x)$ w normie $|||\cdot\ |||_{\beta,p}$. Ponieważ mamy

$$\beta_1 \|u(x) - u(x_n)\|_{c_0} \leqslant |||u(x) - u(x_n)|||_{\beta,p} \xrightarrow{n} 0$$

i

$$\|u(x) - u(x_n)\|_{c_0} =$$

$$= \max\{\alpha|\|x\|_X - \|x_n\|_X|, |f_1^*(x) - f_1^*(x_n)|, |f_2^*(x) - f_2^*(x_n)|, ...\},$$

to dostajemy, że $\lim_n \|x_n\|_X = \|x\|_X$ i $\lim_n f_k^*(x_n) = f_k^*(x)$ dla $k = 1, 2, ...$. Dalej, z założenia ciąg funkcjonałów $\mathcal{F} = \{f_k^*\}_k \subset X^*$ rozdziela punkty w przestrzeni Banacha

$(X,\|\cdot\|_X)$ i dlatego z refleksywności przestrzeni $(X,\|\cdot\|_X)$ i zbieżności $\lim_n f_k^*(x_n) = f_k^*(x)$ dla każdego $k = 1, 2, ...$ wynika słaba zbieżność ciągu $\{x_n\}_n$ do x. Następnie z własności Kadeca-Klee'ego przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$, słabej zbieżności ciągu $\{x_n\}_n$ do x i równości $\lim_n \|x_n\|_X = \|x\|_X$ otrzymujemy, że $\lim_n x_n = x$ w $(X, \|\cdot\|_X)$. Z nierówności (5.1) dostajemy, że normy $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ są równoważne, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Rozdział 6

Zbiory diametralnie zupełne

W tym rozdziale przypomnimy definicję kluczowego dla nas zbioru diametralnie zupełnego ([71]). Definicja ta jest ściśle związana z pojęciem średnicy zbioru. Podamy również podstawowy związek między zbiorem diametralnie zupełnym a zbiorem diametralnym.

Definicja 6.1. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Mówimy, że ograniczony zbiór $\emptyset \neq C \subset X$, który nie jest zbiorem jednopunktowym, jest diametralnie zupełny w X, jeśli

$$\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(C \cup \{x\}) = \sup\{\|y - y'\| : y, y' \in C \cup \{x\}\} >$$

$$> \operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(\mathrm{C}) = \sup\{\|y - y'\| : y, y' \in C\}$$

dla każdego $x \in X \setminus C$, tzn. dołączenie punktu spoza zbioru C zwiększa średnicę rozszerzonego zbioru.

W przypadku skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ diametralnie zupełny zbiór $C \subset X$ ma niepuste wnętrze. W przypadku przestrzeni o nieskończonym wymiarze nie musi tak być. Istnieją zbiory diametralnie zupełne o pustym wnętrzu. Prosty przykład takiego zbioru w przestrzeni c_0 podali J. P. Moreno, P. L. Papini i R. R. Phelps.

Przykład 6.2. ([74]) Weźmy zbiór $C \subset c_0$ określony w następujący sposób

$$C = \{x = \{x^i\}_{i \in \mathbb{N}} \in c_0 : 0 \leqslant x^i \leqslant 1\}.$$

Pokażemy, że zbiór C ma puste wnętrze w $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$. Weźmy dowolne $x = \{x^i\}_i \in C$ i przyjmijmy $y_n = \{y_n^i\}_i = x - (x^n + \frac{1}{n})e_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie e_n są wektorami ze standardowej bazy przestrzeni c_0. Wtedy $\|y_n - x\|_{c_0} = |x^n + \frac{1}{n}| \to 0$, ale z drugiej strony mamy, że $y_n^n = -\frac{1}{n}$, czyli $y_n \notin C$, a to oznacza, że x nie jest punktem wewnętrznym zbioru C.

Zauważmy teraz, że zbiór C jest zbiorem diametralnie zupełnym. Istotnie, jeśli $y = \{y^i\}_i \notin C$, to istnieje $i_0 \in \mathbb{N}$, takie że $y^{i_0} \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ i biorąc następnie $x_0 = \{x_0^i\}$, gdzie $x_0^i = 0$ dla $i \neq i_0$ i $x_0^{i_0} = 1$ lub $x_0^{i_0} = 0$ (odpowiednio), otrzymujemy $\mathrm{diam}_{\|\cdot\|_{c_0}}(C \cup \{y\}) > 1 = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|_{c_0}}\mathrm{C}$.

Podamy teraz podstawowy związek między diametralnością zbioru i własnością diametralnej zupełności zbioru.

Twierdzenie 6.3. ([74]) *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha i zbiór $C \subset X$ jest diametralnie zupełny. Jeśli zbiór C ma puste wnętrze, to jest diametralny.*

Zauważmy tutaj, że E. Maluta i P. L. Papini podali następujący przykład zbioru diametralnego o pustym wnętrzu, który nie jest diametralnie zupełny, czyli implikacja odwrotna nie jest prawdziwa ([66]).

Przykład 6.4. Niech $X = E_{\sqrt{2}}$, $E_{\sqrt{2}} = (\ell^2, |\cdot|_{\sqrt{2}})$, gdzie $|x|_{\sqrt{2}} = \max\{\|x\|_2, \sqrt{2}\|x\|_\infty\}$ dla $x \in \ell^2$. Weźmy zbiór $C = \overline{\mathrm{conv}}\{e_i\}$, gdzie $\{e_i\}_i$ jest standardową bazą przestrzeni ℓ^2. Wtedy zbiór C jest diametralny w $E_{\sqrt{2}}$ i $\mathrm{diam}_{|\cdot|_{\sqrt{2}}}\mathrm{C} = \sqrt{2}$, ale zbiór C nie jest diametralnie zupełny, bo dla $y = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots) \notin C$ mamy $\mathrm{diam}_{|\cdot|_{\sqrt{2}}}(\mathrm{C} \cup \{\mathrm{y}\}) = \sqrt{2}$. Oczywiście $\mathrm{int}\, C = \emptyset$.

Mamy więc warunek konieczny na istnienie w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem, który jak pokażemy później nie jest warunkiem dostatecznym.

Potrzebny nam będzie następujący warunek dostateczny na istnienie w przestrzeni refleksywnej zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem, który podali E. Maluta i P. L. Papini w pracy [66].

Twierdzenie 6.5. *Każda nieskończenie wymiarowa i refleksywna przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$, która ma słabą własność Opiala i nie ma struktury normalnej, zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.*

Jeżeli przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ spełnia założenia twierdzenia 6.5, to nie może być przestrzenią jednostajnie wypukłą ani przestrzenią jednostajnie wypukłą w każdym kierunku ani też przestrzenią z własnością Opiala, bo te przestrzenie mają strukturę normalną. Okazuje się jednak, że taka przestrzeń może być przestrzenią lokalnie jednostajnie wypukłą ([66]).

Rozdział 7

Istnienie zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem w refleksywnej i ośrodkowej przestrzeni Banacha

W tym rozdziale udowodnimy, że po odpowiednim przenormowaniu w każdej nieskończenie wymiarowej, ośrodkowej i refleksywnej przestrzeni Banacha istnieje zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem. Pokażemy bowiem, że istnieje równoważna norma, która spełnia założenia twierdzenia E. Maluty i P. L. Papiniego (twierdzenie 6.5).

Jeśli przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ jest przestrzenią nieskończenie wymiarową i ośrodkową, to z twierdzenia 4.3 wynika, że przestrzeń ta ma równoważną normę $\|\cdot\|_{X,1}$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{X,1})$ ma jednocześnie własność Kadeca-Klee'ego i własność Opiala. Bez straty ogólności możemy więc założyć, że norma $\|\cdot\|_X$ ma obie te własności. Następnie na mocy twierdzenia 1.50 istnieje taka domknięta podprzestrzeń Y przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$, że przestrzeń ilorazowa X/Y z normą $\|\cdot\|_{X/Y}$ ma bazę Schaudera. Możemy również założyć, że $\dim Y \geqslant 1$ (twierdzenie 1.51). Niech $\iota : X \to X/Y$ będzie standardowym odwzorowaniem X na X/Y, $\{\hat{z}_m\}_m$ znormalizowaną bazą Schaudera przestrzeni $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ i niech $\{\hat{z}_m^*\}$ będzie ciągiem biortogonalnych funkcjonałów związanych z tą bazą. Wtedy istnieje stała $\tilde{K} > 1$, taka że $\|\hat{z}_m^*\|_{(X/Y)^*} \leqslant \tilde{K}$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Dalej, weźmy znormalizowany ciąg funkcjonałów $\{\tilde{f}_r^*\}_r$ w $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$, które rozdzielają punkty w $(X, \|\cdot\|_X)$. Ustalmy również $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Dla każdego $x \in X$ definiujemy ciąg $\{\hat{\mathfrak{F}}(x)\}$ w następujący sposób

$$\hat{\mathfrak{F}}(x) = \{\hat{f}_k^*(x)\}_k = \{\frac{\alpha}{2}\tilde{f}_1^*(x), \hat{z}_1^*(\iota(x)), \frac{\alpha}{2^2}\tilde{f}_2^*(x), \hat{z}_2^*(\iota(x)), ...\} \in c_0.$$

Oczywiście ciąg $\hat{\mathfrak{F}} = \{\hat{f}_k^*\}_k$ jest ograniczony w X^*, ponieważ $\|f_k^*\|_{X^*} \leqslant \tilde{K}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Używając tego ciągu konstruujemy (jak w rozdziale 5) normę $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}}$, gdzie $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$ i $\beta = \{\beta_j\}_j$ jest ściśle malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich, takim że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p$ jest zbieżny. Norma ta jest równoważna normie $\|\cdot\|_X$.

Modyfikując metodę M. A. Smitha i B. Turetta podaną w [90] możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1. *Załóżmy, że*

1. $(X, \|\cdot\|_X)$ *jest nieskończenie wymiarową, ośrodkową i refleksywną przestrzenią Banacha,*
2. Y *jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni* $(X, \|\cdot\|_X)$ *z* $\dim Y \geqslant 1$ *i przestrzeń ilorazowa* X/Y *z normą kanoniczną* $\|\cdot\|_{X/Y}$ *ma bazę Schaudera,*
3. $\iota : X \to X/Y$ *jest standardowym odwzorowaniem,*
4. $\{\hat{z}_m\}_m$ *jest znormalizowaną bazą Schaudera przestrzeni ilorazowej* $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ *i* $\{\hat{z}_m^*\}$ *jest ciągiem biortogonalnych funkcjonałów związanych z tą bazą,*
5. $\{\tilde{f}_r^*\}_r$ *jest znormalizowanym ciągiem funkcjonałów w* $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$*, które rozdzielają punkty w* $(X, \|\cdot\|_X)$*,*
6. $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$,
7. $1 < p < \infty$,
8. $\beta = \{\beta_j\}_j$ *jest ściśle malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich, takim że szereg* $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p$ *jest szeregiem zbieżnym,*
9. $\hat{\mathfrak{F}}(x) = \{\hat{f}_k^*(x)\}_k = \{\frac{\alpha}{2}\tilde{f}_1^*(x), \hat{z}_1^*(\iota(x)), \frac{\alpha}{2^2}\tilde{f}_2^*(x), \hat{z}_2^*(\iota(x)), ...\} \in c_0$.

Wtedy przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}})$ *nie ma struktury normalnej.*

Dowód. Z refleksywności przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$ wynika, że istnieje ciąg $\{z_m\}_m \subset X$, taki że $z_m \in \hat{z}_m$ i $\|z_m\|_X = 1$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Wtedy dla $m_2 > m_1$ mamy

$$\hat{\mathfrak{F}}(z_{m_2} - z_{m_1}) = \{\hat{f}_k^*(z_{m_2} - z_{m_1})\}_k =$$

$$= \{\frac{\alpha}{2}\tilde{f}_1^*(z_{m_2} - z_{m_1}), \hat{z}_1^*(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \frac{\alpha}{2^2}\tilde{f}_2^*(z_{m_2} - z_{m_1}), \hat{z}_2^*(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), ...\} =$$

$$= \Big\{\frac{\alpha}{2}\tilde{f}_1^*(z_{m_2} - z_{m_1}), 0, \frac{\alpha}{2^2}\tilde{f}_2^*(z_{m_2} - z_{m_1}), 0, ...,$$

$$\frac{\alpha}{2^{m_1-1}}\tilde{f}_{m_1-1}^*(z_{m_2} - z_{m_1}), 0, \frac{\alpha}{2^{m_1}}\tilde{f}_{m_1}^*(z_{m_2} - z_{m_1}), -1, \frac{\alpha}{2^{m_1+1}}\tilde{f}_{m_1+1}^*(z_{m_2} - z_{m_1}), 0, ...,$$

$$\frac{\alpha}{2^{m_2-1}}\tilde{f}_{m_2-1}^*(z_{m_2} - z_{m_1}), 0, \frac{\alpha}{2^{m_2}}\tilde{f}_{m_2}^*(z_{m_2} - z_{m_1}), 1, \frac{\alpha}{2^{m_2+1}}\tilde{f}_{m_2+1}^*(z_{m_2} - z_{m_1}), 0, ...\Big\}$$

i

$$\frac{\alpha}{2^r}|\tilde{f}_r^*(z_{m_2} - z_{m_1})| \leqslant \frac{\alpha}{2^r}2 \leqslant \frac{1}{2}$$

dla każdego $r \in \mathbb{N}$. Dalej mamy również

$$\alpha\|z_{m_2} - z_{m_1}\|_X \leqslant 2\alpha \leqslant 1.$$

To daje nam

$$\left(\sum_{j=1}^{2m_1+2m_2} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|z_{m_2} - z_{m_1}\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

a to oznacza, że $\operatorname{diam}_{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}}}\{z_m\}_m = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Obliczymy teraz $\lim_m \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}}}(z_{m+1}, \operatorname{conv}\{z_1, ..., z_m\})$. Załóżmy, że $a_1 + \ldots + a_m = 1$, gdzie $0 \leqslant a_k \leqslant 1$ dla $k = 1, \ldots, m$. Wtedy mamy

$$\hat{\mathfrak{F}}(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k) = \{\hat{f}_k^*(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k)\}_k =$$

$$= \left\{\frac{\alpha}{2}\tilde{f}_1^*(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k), -a_1, \frac{\alpha}{2^2}\tilde{f}_2^*(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k), -a_2, ..., \right.$$

$$\frac{\alpha}{2^m}\tilde{f}_m^*(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k), -a_m, \frac{\alpha}{2^{m+1}}\tilde{f}_{m+1}^*(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k), 1,$$

$$\left.\frac{\alpha}{2^{m+2}}\tilde{f}_{m+2}^*(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k), 0, ...\right\}$$

i

$$\frac{\alpha}{2^r}|\tilde{f}_r^*(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k)| \leqslant \frac{\alpha}{2^r}2 \leqslant \frac{1}{2}$$

dla każdego $r \in \mathbb{N}$. Dalej zauważmy, że

$$\alpha\|z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\|_X \leqslant 2\alpha \leqslant 1.$$

Stąd otrzymujemy

$$\left(\sum_{j=1}^{2m+2} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}} \leqslant \operatorname{diam}_{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}}}\{z_m\}_m = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

a to oznacza, że $\lim_m \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}}}(z_{m+1}, \operatorname{conv}\{z_1, ..., z_m\}) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$ i dlatego ciąg $\{z_m\}_m \subset X$ jest diametralny w $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}})$. Z twierdzenia 1.38 dostajemy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}})$ nie ma struktury normalnej. □

Możemy teraz udowodnić twierdzenie, które jest podstawowym narzędziem w dowodzie głównego twierdzenia tej pracy, tzn. twierdzenia 8.3.

Twierdzenie 7.2. *Każda nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa i refleksywna przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ jest LUR i zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.*

Dowód. Jak już wspomnieliśmy na początku rozdziału, możemy założyć, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ ma własność Kadeca-Klee'ego i własność Opiala. Przyjmijmy więc $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}}$, gdzie norma $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\hat{\mathfrak{F}}}$ została określona wcześniej w tym rozdziale, przy czym $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $1 < p < \infty$ i $\beta = \{\beta_j\}_j$ jest ściśle malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich, takim że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p$ jest zbieżny. Dodatkowo zakładamy, że istnieją stała $L > 1$ i ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_n\}_n$, takie że $\sum_{j=j_n+1}^{\infty} \beta_j^p \leqslant L\beta_{j_n+1}^p$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy na mocy twierdzenia 5.2 przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ ma słabą własność Opiala, a ponieważ $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, to z twierdzenia 7.1 dostajemy, że przestrzeń ta nie ma struktury normalnej. Możemy więc do przestrzeni $(X, \|\cdot\|_0)$ zastosować twierdzenie 6.5, z którego wynika, że w przestrzeni tej istnieje zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem. Dalej z twierdzenia 5.3 otrzymujemy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ jest LUR. $\square$

Rozdział 8

Istnienie zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem w refleksywnej przestrzeni Banacha- redukcja problemu do przestrzeni ośrodkowej

W tym rozdziale pokażemy, jak można zredukować problem istnienia zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem w dowolnej nieskończenie wymiarowej, refleksywnej przestrzeni Banacha do tego samego problemu w nieskończenie wymiarowej, ośrodkowej i refleksywnej przestrzeni Banacha.

Zacznijmy od następującego twierdzenia.

Twierdzenie 8.1. *Załóżmy, że $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ są nieskończenie wymiarowymi przestrzeniami Banacha i w iloczynie kartezjańskim $X = X_1 \times X_2$ mamy normę*

$$\|x\| := \sqrt{\|x^1\|_1^2 + \|x^2\|_2^2}$$

dla $x = (x^1, x^2) \in X$. Jeśli przestrzeń $(X_1, \|\cdot\|_1)$ zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem wnętrzem, to przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ również zawiera taki zbiór.

Dowód. Niech C_1 będzie zbiorem diametralnie zupełnym w $(X_1, \|\cdot\|_1)$, takim że wnętrze zbioru C_1 jest puste w przestrzeni $(X_1, \|\cdot\|_1)$. Połóżmy $C = C_1 \times \{0\} \subset X$. Wnętrze zbioru C jest puste w $(X, \|\cdot\|)$ i $\mathrm{diam}_{\|\cdot\|}\mathrm{C} = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|_1}\mathrm{C}_1$. Aby pokazać, że zbiór C jest diametralnie zupełny, weźmy dowolne $x = (x^1, x^2) \in X \setminus C$ i rozważmy dwa możliwe przypadki.

1) $x^1 \notin C_1$. Ponieważ zbiór C_1 jest diametralnie zupełny w $(X_1, \|\cdot\|_1)$, to dostajemy

$$\mathrm{diam}_{\|\cdot\|}(C \cup \{x\}) \geqslant \sup_{(\tilde{x}^1,0)\in C} \|(\tilde{x}^1, 0) - (x^1, x^2)\| = \sup_{\tilde{x}^1\in C_1} \sqrt{\|\tilde{x}^1 - x^1\|_1^2 + \|x^2\|_2^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\tilde{x}^1\in C_1} \|\tilde{x}^1 - x^1\|_1 > \mathrm{diam}_{\|\cdot\|_1} C_1 = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|} C.$$

2) $x^1 \in C_1$. Wtedy z założenia, że $x = (x^1, x^2) \notin C = C_1 \times \{0\}$ mamy $x^2 \neq 0$. Ponieważ zbiór C_1 jest diametralnie zupełny z pustym wnętrzem, to C_1 jest diametralny i dlatego

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(C \cup \{x\}) &\geqslant \sup_{\tilde{x}^1 \in C_1} \sqrt{\|\tilde{x}^1 - x^1\|_1^2 + \|x^2\|_2^2} > \\ &> \sup_{\tilde{x}^1 \in C_1} \|\tilde{x}^1 - x^1\|_1 = \operatorname{diam}_{\|\cdot\|_1} C_1 = \operatorname{diam}_{\|\cdot\|} C.\end{aligned}$$

□

Uwaga 8.2. Twierdzenie 8.1 jest prawdziwe również w przypadku, gdy przestrzeń $(X_2, \|\cdot\|_2)$ jest skończenie wymiarową przestrzenią Banacha.

Możemy teraz rozszerzyć twierdzenie 7.2 do wszystkich nieskończenie wymiarowych i refleksywnych przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 8.3. *Każda nieskończenie wymiarowa i refleksywna przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ jest LUR i zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.*

Dowód. Z twierdzenia 7.2 wynika, że nasze twierdzenie jest prawdziwe w przypadku przestrzeni ośrodkowych. Załóżmy więc, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieskończenie wymiarową, nieośrodkową i refleksywną przestrzenią Banacha. Wtedy na mocy wniosku 1.54 istnieje nieskończenie wymiarowa, liniowa, domknięta i ośrodkowa podprzestrzeń X_1 przestrzeni X oraz liniowa projekcja P przestrzeni X na X_1 z normą operatorową $\|P\|_{XX_1} = 1$. Przestrzeń X możemy więc traktować jako sumę prostą $X_1 \oplus X_2$, gdzie $X_2 = (I-P)(X)$, a $I : X \to X$ jest operatorem identycznościowym.

Z twierdzenia 7.2 wynika, że $(X_1, \|\cdot\|)$, jako nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa i refleksywna przestrzeń Banacha, ma równoważną lokalnie jednostajnie wypukłą normę $\|\cdot\|_1$, taką że przestrzeń $(X_1, \|\cdot\|_1)$ zawiera zbiór C_1, który jest diametralnie zupełny i ma puste wnętrze. Dalej, z twierdzenia 1.22 refleksywna przestrzeń Banacha $(X_2, \|\cdot\|)$ ma równoważną lokalnie jednostajnie wypukłą normę $\|\cdot\|_2$. Możemy teraz wprowadzić w X normę $\|\cdot\|_0$ równoważną normie $\|\cdot\|$ przyjmując

$$\|x\|_0 := \sqrt{\|x^1\|_1^2 + \|x^2\|_2^2}$$

dla $x = x^1 \oplus x^2 \in X$, gdzie $x^1 = Px \in X_1$ i $x^2 = (I-P)x \in X_2$. Z twierdzenia 1.21 dostajemy, że $(X, \|\cdot\|_0)$ jest LUR, a z twierdzenia 8.1 mamy, że $C = C_1 \times \{0\} \subset X$ jest zbiorem diametralnie zupełnym o pustym wnętrzu. □

Jako wniosek z twierdzeń 8.1, 8.3 i uwagi 8.2 otrzymujemy następujące uogólnienie twierdzenia 8.3.

Twierdzenie 8.4. *Załóżmy, że $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ są przestrzeniami Banacha i w iloczynie kartezjańskim $X = X_1 \times X_2$ mamy normę*

$$\|x\| = \sqrt{\|x^1\|_1^2 + \|x^2\|_2^2}$$

dla $x = (x^1, x^2) \in X$. Jeśli przestrzeń $(X_1, \|\cdot\|_1)$ jest nieskończenie wymiarowa i refleksywna, to przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.

Zauważmy, że warunek na istnienie zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem podany w twierdzeniu 6.5 jest jedynie warunkiem dostatecznym. Podamy bowiem przykład, który pokazuje, że warunek L. Maluty i P. L. Papiniego ([66]) nie jest warunkiem koniecznym.

Przykład 8.5. ([64]) E. Maluta pokazała, że przestrzeń $(\ell^2, \|\cdot\|_L)$ (przy naszych oznaczeniach $\|x\|_L = \|D_{\beta,2}(u(x))\|_2 = \|x\|_{\frac{1}{2},\beta,2,\mathcal{F}}$, gdzie $\{\beta_j\}_j = \{\frac{1}{2^j}\}_j$, $\mathcal{F} = \{f_j^*\}_j$ jest ciągiem biortogonalnych funkcjonałów liniowych związanych ze standardową bazą $\{e_j\}_j$ w l^2, $u(x) = (\frac{1}{2}\|x\|_2, x^1, x^2, x^2, \ldots, x^j, \ldots, x^j, \ldots)$, przy czym element x^j występuje dokładnie j razy) jest LUR i zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem. Rozważmy przestrzeń Banacha $(L^p[0,1], \|\cdot\|_p)$, gdzie $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ i połóżmy

$$X := \ell^2 \times L^p([0,1])$$

i

$$\|\cdot\|_X := \sqrt{\|\cdot\|_L^2 + \|\cdot\|_p^2}.$$

Oczywiście $(X, \|\cdot\|_X)$ jest przestrzenią refleksywną. Na mocy twierdzenia 1.21 przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ jest LUR. Z uwagi 1.26 wynika, że przestrzeń ta nie ma słabej własności Opiala, ale z twierdzenia 8.1 dostajemy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_X)$ zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.

Przykład 8.6. Nie wiemy, czy każda refleksywna przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ może być równoważnie przenormowana do przestrzeni mającej słabą własność Opiala. Przestrzeni $\ell^\infty(\Gamma)$, gdzie Γ jest zbiorem nieprzeliczalnym, nie można przenormować do przestrzeni ze słabą własnością Opiala, ani do przestrzeni LUR czy nawet przestrzeni ściśle wypukłej ([24]). Dlatego dla nieprzeliczalnego zbioru Γ, przestrzeń

$$X := \ell^2 \times \ell^\infty(\Gamma)$$

z normą

$$\|(x^1, x^2)\| := \sqrt{\|x^1\|_L^2 + \|x^2\|_\infty^2},$$

nie ma równoważnej normy ze słabą własnością Opiala ani równoważnej normy ściśle wypukłej, ale z twierdzenia 8.4 wynika, że zawiera ona zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.

Przykład 8.7. Jeśli $(X, \|\cdot\|_X)$ jest refleksywną przestrzenią Banacha, to istnieje równoważna norma $\|\cdot\|_{X,0}$ w X, taka że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{X,0})$ jest LUR i zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem, który leży w podprzestrzeni X_1 z $\operatorname{codim} X_1 = 1$. Istotnie, rozważmy dowolną podprzestrzeń X_1 przestrzeni X z $\operatorname{codim} X_1 = 1$. Wtedy X można traktować jako sumę prostą X_1 i $\mathbb{R}$, tzn. $X = X_1 \oplus \mathbb{R}$. Z twierdzenia 8.3 wynika, że w X_1 istnieje norma $\|\cdot\|_0$, która jest równoważna normie $\|\cdot\|_X$ zawężonej do X_1 i przestrzeń $(X_1, \|\cdot\|_0)$ zawiera diametralnie zupełny zbiór C z pustym wnętrzem. Wystarczy więc wziąć normę $\|\cdot\|_{X,0}$ w X zdefiniowaną następująco

$$\|x\|_{X,0} := \sqrt{\|x_1\|_0^2 + |t|^2}$$

dla $x = x_1 \oplus t \in X_1 \oplus \mathbb{R}$ i zastosować twierdzenie 8.1 i uwagę 8.2.

Rozdział 9

Szeregi i bazy bezwarunkowo zbieżne

Przejdziemy teraz do podania definicji i własności bezwarunkowo zbieżnych szeregów i bezwarunkowo zbieżnych baz. Wiadomości te wykorzystamy w rozdziałach 10 i 11. Zaczniemy od następujących oznaczeń.

Niech I będzie zbiorem co najmniej przeliczalnym. Przez $\mathcal{A}_1(I)$ będziemy oznaczać rodzinę zbiorów złożoną z wszystkich niepustych i skończonych podzbiorów zbioru I, przez $\mathcal{A}_2(I)$ – rodzinę złożoną z wszystkich przeliczalnych podzbiorów zbioru I i przez $\mathcal{A}(I)$ – zbiór $\mathcal{A}_1(I) \cup \mathcal{A}_2(I)$. Każda z tych rodzin uporządkowana jest przy pomocy inkluzji ([88]).

Definicja 9.1. ([41], [61]) Niech $\{x_i\}_i$ będzie ciągiem w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Mówimy, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest bezwarunkowo zbieżny, jeśli dla każdej permutacji π zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ jest zbieżny w $(X, \|\cdot\|)$.

Definicja 9.2. ([41]) Niech $\{x_i\}_i$ będzie ciągiem w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i $x \in X$. Jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ spełnia warunek

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N})} \bigwedge_{A \subset A_1 \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N})} \|x - \sum_{i \in A_1} x_i\| < \epsilon,$$

to mówimy, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest zbieżny do x ze względu na rodzinę $\mathcal{A}_1(\mathbb{N})$ i piszemy $x = \lim_{A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N})} \sum_{i \in A} x_i$.
Jeśli $A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N})$, to przez $P_A x$ oznaczamy sumę $\sum_{i \in A} x_i$.

Twierdzenie 9.3. ([41]) *Niech $\{x_i\}_i$ będzie ciągiem w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

(a) szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest bezwarunkowo zbieżny,

(b) istnieje granica $\lim_{A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N})} \sum_{i \in A} x_i$,

(c) dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\tilde{i} > 0$, takie że

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N})} \left(\min A > \tilde{i} \Rightarrow \| \sum_{i \in A} x_i \| < \epsilon \right),$$

(d) szereg $\sum_{j=1}^{\infty} x_{i_j}$ *jest zbieżny dla każdego rosnącego ciągu* $0 < i_1 < i_2 < \dots$,

(e) szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i x_i$ *jest zbieżny dla każdego wyboru* $\epsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots$,

(f) szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ *jest zbieżny dla każdego ograniczonego ciągu skalarów* $\{\lambda_i\}_i$,

(g) szereg $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(x_i)|$ *jest jednostajnie zbieżny ze względu na kulę jednostkową w* X^*, *tzn.*

$$\lim_{j\to\infty} \sup \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} |x^*(x_i)| : x^* \in X^*, \ \|x^*\|_{X^*} \leqslant 1 \right\} = 0.$$

Wniosek 9.4. ([41]) Niech $\{x_i\}_i$ będzie ciągiem w przestrzeni Banach $(X, \|\cdot\|)$. Jeśli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest bezwarunkowo zbieżny, to $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ dla każdej permutacji π zbioru liczb naturalnych.

Jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest bezwarunkowo zbieżny, to rozszerzamy definicję P_A do wszystkich zbiorów $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ przyjmując $P_A(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) := \sum_{i\in A} x_i$ (patrz twierdzenie 9.3 *(f)*).

Twierdzenie 9.5. ([41]) *Niech* $\{x_i\}_i$ *będzie ciągiem w przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$. *Jeśli szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *jest bezwarunkowo zbieżny, to spełnione są następujące nierówności*

$$0 \leqslant \sup\left\{ \|\sum_{i\in A} x_i\| : A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N}) \right\} = \sup\left\{ \|\sum_{i\in A} x_i\| : \emptyset \neq A \subset \mathbb{N} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{ \|\sum_{i\in A} \epsilon_i x_i\| : A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N}) \ \text{ i } \ \epsilon_\text{i} = \pm 1 \ \text{ dla } \ \text{i} = 1, 2, \dots \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{ \|\sum_{i\in A} \lambda_i x_i\| : A \in \mathcal{A}_1(\mathbb{N}) \ \text{ i } \ |\lambda_\text{i}| \leqslant 1 \ \text{ dla } \ \text{i} = 1, 2, \dots \right\} < \infty.$$

Możemy teraz wprowadzić pojęcie bezwarunkowej bazy Schaudera.

Definicja 9.6. ([41]) Załóżmy, $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Mówimy, że baza Schaudera $\{e_i\}_i$ przestrzeni $(X, \|\cdot\|)$ jest bezwarunkowa, jeśli przedstawienie $x \in X$ w tej bazie, tzn. $x = \sum_{i=1}^{\infty} a^i e_i$, jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym dla każdego $x \in X$.

Definicja 9.7. ([41]) Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Mówimy, że ciąg $\{e_i\}_i \subset X$ jest bezwarunkowym ciągiem bazowym w $(X, \|\cdot\|)$, jeśli jest on bezwarunkową bazą Schaudera w podprzestrzeni $\overline{\operatorname{span}}\, \{e_i\}_i$.

Twierdzenie 9.8. ([41]) *Załóżmy, że* $\{e_i\}_i$ *jest bezwarunkową bazą Schaudera w przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$. *Wtedy mamy*

$$x = \lim_{A\in\mathcal{A}_1(\mathbb{N})} P_A x = \lim_{A\in\mathcal{A}_1(\mathbb{N})} \sum_{i\in A} a^i e_i$$

i

$$\sup_{A\in\mathcal{A}_1(\mathbb{N})}\|P_A\|_{XX_A}=\sup\left\{\|\sum_{i\in A}a^ie_i\|:A\in\mathcal{A}_1(\mathbb{N}),\ \ x=\sum_{i=1}^{\infty}a^ie_i\in X,\ \ \|x\|\leqslant 1\right\}<\infty$$

dla norm operatorowych $\|P_A\|_{XX_A}$ *operatorów* $P_A:X\to X_A=\overline{\operatorname{span}}\,\{e_i\}_{i\in A}$. *Ponadto*

$$\sup\left\{\|\sum_{i\in A}a^ie_i\|:A\in\mathcal{A}(\mathbb{N}),\ \ x=\sum_{i=1}^{\infty}a^ie_i\in X,\ \ \|x\|\leqslant 1\right\}<\infty.$$

Uwaga 9.9. ([87], [88]) Przestrzenie $L^p([0,1],\mathbb{R})$ dla $1<p<\infty$, ℓ^p dla $1\leqslant p<\infty$, c i c_0 (ze standardowymi normami) mają bezwarunkową bazę Schaudera.

Twierdzenie 9.10. ([53], [61]) *Przestrzeń* $C([0,1],\mathbb{R})$ *ze standardową normą* $\|\cdot\|_C$ *nie jest izomorficzna z żadną podprzestrzenią przestrzeni Banacha z bezwarunkową bazą Schaudera.*

Rozdział 10

Zbiory o stałej szerokości

W tym rozdziale przypomnimy kilka znanych faktów dotyczących zbiorów o stałej szerokości. Zaczniemy od definicji tego typu zbiorów.

Definicja 10.1. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_X)$ jest przestrzenią Banacha, zbiór $C \subset X$ jest ograniczony, domknięty, wypukły i nie jest zbiorem jednopunktowym. Mówimy, że zbiór $C \subset X$ jest zbiorem o stałej szerokości $\lambda > 0$ (lub krótko o stałej szerokości), jeśli dla każdego funkcjonału $f \in X^*$, takiego że $\|f\|_{X^*} = 1$ spełniony jest warunek

$$\sup f(C) - \inf f(C) = \sup f(C - C) = \lambda.$$

Oczywiście, gdy C jest zbiorem o stałej szerokości λ, to $\lambda = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|_X} \mathrm{C}$.

Zauważmy tutaj, że w przestrzeni Minkowskiego (tzn. unormowanej przestrzeni liniowej o wymiarze skończonym) zbiór o stałej szerokości ma niepuste wnętrze.

Wprost z definicji zbioru o stałej szerokości wynika, że $\overline{\mathrm{span}}\ C = X$, gdy C jest takim zbiorem w $(X, \|\cdot\|)$, a zdanie to nie jest prawdziwe w przypadku zbiorów diametralnie zupełnych (patrz przykład 8.7). Dodatkowo mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.2. ([79]) *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha, $C \subset X$ jest ograniczonym, domkniętym i wypukłym zbiorem o dodatniej średnicy $\lambda = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|} \mathrm{C}$. Wtedy następujące zdania są równoważne*

(a) zbiór C jest zbiorem o stałej szerokości λ,

(b) zbiór $C - C$ zawiera wnętrze kuli $\lambda\overline{B(0,1)}$,

(c) zbiór $C - C$ jest gęsty w kuli $\lambda\overline{B(0,1)}$.

Oczywiście każda kula domknięta w przestrzeni Banacha jest zbiorem o stałej szerokości, ale już na płaszczyźnie euklidesowej istnieją zbiory o stałej szerokości różne od kul. Taką figurą jest np. trójkąt Reulaux ([38], [57]).

W [71] E. Meissner pokazał związki między zbiorami o stałej szerokości a zbiorami diametralnie zupełnymi.

Twierdzenie 10.3. *Załóżmy, że* $(X, \|\cdot\|)$ *jest przestrzenią Banacha. Jeśli* $C \subset X$ *jest zbiorem o stałej szerokości, to jest zbiorem diametralnie zupełnym.*

Twierdzenie 10.4. *W każdej przestrzeni Minkowskiego* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ *zbiór* C *jest zbiorem o stałej szerokości wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem diametralnie zupełnym.*

Zauważmy jednak, że nie tylko na płaszczyźnie euklidesowej rodzina zbiorów o stałej szerokości pokrywa się z rodziną zbiorów diametralnie zupełnych. Prawdziwe są bowiem następujace twierdzenia.

Twierdzenie 10.5. ([17]) *W skończenie wymiarowych przestrzeniach euklidesowych pojęcia zbioru o stałej szerokości i zbioru diametralnie zupełnego są równoważne.*

Powyższe twierdzenie jest też prawdziwe w każdej przestrzeni Hilberta.

Twierdzenie 10.6. ([74]) *W przestrzeni* $c_0(\Gamma)$ *z normą supremum zbiór* C *jest zbiorem o stałej szerokości wtedy i tylko wtedy, gdy jest diametralnie zupełny.*

Wróćmy teraz do twierdzenia 10.4. Okazuje się, że założenie w tym twierdzeniu, że przestrzeń ma wymiar 2 jest istotne. Najpierw w [29] H. H. Eggleston udowodnił, że w przestrzeni liniowej X o wymiarze 3 istnieją norma $\|\cdot\|$ i zbiór $C \subset X$, takie że C jest zbiorem diametralnie zupełnym, ale nie jest zbiorem o stałej szerokości w $(X, \|\cdot\|)$. Następnie w [74] J. P. Moreno, P. L. Papini i R. R. Phelps rozszerzyli ten wynik na wszystkie przestrzenie Banacha o wymiarze co najmniej równym 3. W dowodzie tego twierdzenia kluczową rolę odgrywa następujący lemat.

Lemat 10.7. *Niech* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *i* $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *będą nieskończenie wymiarowymi przestrzeniami Banacha. W iloczynie* $X = X_1 \times X_2$ *wprowadzamy normę*

$$\|x\| := \max\{\|x^1\|_1, \|x^2\|_2\},$$

gdzie $x = (x^1, x^2) \in X$. *Jeśli* $C_1 \subset X_1$ *i* $C_2 \subset X_2$ *są zbiorami o stałej szerokości (zbiorami diametralnie zupełnymi) odpowiednio w* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *i* $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *oraz* $\mathrm{diam}_{\|\cdot\|_1} \mathrm{C}_1 = \mathrm{diam}_{\|\cdot\|_2} \mathrm{C}_2 = \lambda > 0$, *to zbiór* $C = C_1 \times C_2$ *jest także zbiorem o stałej szerokości (zbiorem diametralnie zupełnym) w* $(X, \|\cdot\|)$ *z* $\mathrm{diam}_{\|\cdot\|} \mathrm{C} = \lambda$.

Dowód. Jeśli C_1 i C_2 są zbiorami o stałej szerokości, to z twierdzenia 10.2 wynika, że zbiory $C_1 - C_1$ i $C_2 - C_2$ zawierają odpowiednio wnętrze kuli $\lambda\overline{B_{X_1}(0,1)}$ i $\lambda\overline{B_{X_2}(0,1)}$. Stąd zbiór

$$C - C = (C_1 - C_1) \times (C_2 - C_2)$$

zawiera wnętrze kuli $\lambda\overline{B_X(0,1)}$. Wystarczy więc znów zastosować twierdzenie 10.2, by stwierdzić, że C jest zbiorem o stałej szerokości.

Jeśli C_1 i C_2 są zbiorami diametralnie zupełnymi i $y = (y^1, y^2) \notin C = C_1 \times C_2$, to albo $y^1 \notin C_1$ albo $y^2 \notin C_2$. Gdy $y^1 \notin C_1$, to z tego, że C_1 jest zbiorem diametralnie zupełnym dostajemy

$$\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(C \cup \{y\}) \geqslant \sup_{(x^1,x^2)\in C} \Big(\max\{\|x^1 - y^1\|_1, \|x^2 - y^2\|_2\}\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{x^1\in C_1} \|x^1 - y^1\|_1 > \operatorname{diam}_{\|\cdot\|_1}\mathrm{C}_1 = \lambda = \operatorname{diam}_{\|\cdot\|}\mathrm{C}.$$

Podobnie, gdy $y^2 \notin C_2$, to korzystając z diametralnej zupełności zbioru C_2 dostajemy

$$\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(C \cup \{y\}) > \operatorname{diam}_{\|\cdot\|}\mathrm{C}.$$

□

Dalej w dowodzie twierdzenia J. P. Moreny, P. L. Papiniego i R. R. Phelpsa wykorzystuje się zbiór $\tilde{C} \subset (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{l^1})$, który określony jest następująco

$$\tilde{C} := \operatorname{conv}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}.$$

Zbiór ten jest zbiorem diametralnie zupełnym, ale nie jest zbiorem o stałej szerokości w $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_{l^1})$. Następnie, gdy $\dim X > 3$, to X daje się przedstawić w postaci $X = \mathbb{R}^3 \times Z$ i bierzemy normę

$$\|x\|_0 = \|(y,z)\|_0 = \max\{\|y\|_{\ell^1}, \|z\|\}.$$

Wtedy zbiór

$$C := \tilde{C} \times \overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)},$$

gdzie $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)}$ jest domkniętą kulą jednostkową w przestrzeni $(Z, \|\cdot\|)$, jest zbiorem diametralnie zupełnym, ale nie jest zbiorem o stałej szerokości w $(X, \|\cdot\|_0)$.

Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.8. ([74]) *Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha o wymiarze co najmniej 3, to istnieje równoważna norma $\|\cdot\|_0$ w X i zbiór $C \subset X$, który jest zbiorem diametralnie zupełnym, ale nie jest zbiorem o stałej szerokości w $(X, \|\cdot\|_0)$.*

Zauważmy tutaj, że diametralnie zupełny zbiór C występujący w dowodzie twierdzenia 10.8 ma niepuste wnętrze.

Przypomnimy teraz prosty przykład zbioru o stałej szerokości z pustym wnętrzem ([74]).

Przykład 10.9. Weźmy zbiór $C \subset c_0$ określony w następujący sposób (dla wygody zapisu zmienimy pozycję indeksu i w stosunku do jego pozycji w przykładzie 6.2)

$$C := \{x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in c_0 : 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}.$$

Zbiór C jest domknięty, wypukły i ograniczony w przestrzeni c_0 z normą supremum $\|\cdot\|_{c_0}$. Oczywiste jest, że $C - C \subset \overline{B_{\|\cdot\|_{c_0}}(0,1)}$. Dalej, jeśli $x = \{x_i\}_i \in \overline{B_{\|\cdot\|_{c_0}}(0,1)}$, to $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ i $x_i \to 0$. Połóżmy $x_i^+ := \max\{x_i, 0\}$ i $x_i^- := \max\{-x_i, 0\}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, $x^+ := \{x_i^+\}_i$ i $x^- := \{x_i^-\}_i$. Ponieważ $x^+, x^- \in C$ i $x = x^+ - x^-$, to $x \in C - C$. Stąd $C - C = \overline{B_{\|\cdot\|_{c_0}}(0,1)}$ i z twierdzenia 10.2 otrzymujemy, że C jest zbiorem o stałej szerokości. W przykładzie 6.2 pokazaliśmy, że zbiór C ma puste wnętrze.

Wzorując się na tym przykładzie E. Maluta i D. Yost w [67] udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.10. *Każda nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ z bezwarunkową bazą Schaudera ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, ||\cdot||_0)$ zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.*

Rozdział 11

Uogólnienie twierdzenia E. Maluty i D. Yosta

W tym rozdziale uogólnimy twierdzenie 10.10. Zaczniemy od następującego twierdzenia.

Twierdzenie 11.1. *Załóżmy, że* $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *są nieskończenie wymiarowymi przestrzeniami Banacha. W iloczynie* $X = X_1 \times X_2$ *wprowadzamy normę*

$$\|x\| := \max\{\|x^1\|_1, \|x^2\|_2\},$$

gdzie $x = (x^1, x^2) \in X$. *Jeśli przestrzeń* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem, to przestrzeń* $(X, \|\cdot\|)$ *również zawiera taki zbiór.*

Dowód. Niech $C_1 \subset X_1$ będzie zbiorem o stałej szerokości w $(X_1, \|\cdot\|_1)$, takim że wnętrze zbioru C_1 jest puste w $(X_1, \|\cdot\|_1)$. Możemy założyć, że $\operatorname{diam}_{\|\cdot\|_1} \mathrm{C}_1 = 2$. Połóżmy $C = C_1 \times \overline{B_{\|\cdot\|_2}(0,1)} \subset X$, gdzie $\overline{B_{\|\cdot\|_2}(0,1)}$ jest domkniętą kulą jednostkową w $(X_2, \|\cdot\|_2)$. Z lematu 10.7 dostajemy, że C jest zbiorem o stałej szerokości w $(X, \|\cdot\|)$. Oczywiste jest, że wnętrze zbioru C jest puste w $(X, \|\cdot\|)$. $\square$

Jako wniosek dostajemy następujące uogólnienie twierdzenia 10.10.

Twierdzenie 11.2. *Załóżmy, że* $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *są nieskończenie wymiarowymi przestrzeniami Banacha. W iloczynie* $X = X_1 \times X_2$ *wprowadzamy normę*

$$\|x\| := \max\{\|x^1\|_1, \|x^2\|_2\},$$

gdzie $x = (x^1, x^2) \in X$. *Jeśli przestrzeń* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *ma bezwarunkową bazę Schaudera, to przestrzeń* $(X, \|\cdot\|)$ *ma równoważną normę* $||\cdot||_0$, *taką że przestrzeń* $(X, ||\cdot||_0)$ *zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.*

Uwaga 11.3. Zauważmy, że lemat 10.7 i twierdzenia 11.1 i 11.2 są prawdziwe również wtedy, gdy $(X_2, \|\cdot\|_2)$ jest przestrzenią skończenie wymiarową.

Twierdzenie 11.2 możemy zastosować do przestrzeni $C([0,1],\mathbb{R})$ z normą maksimum $\|\cdot\|_C$.

Twierdzenie 11.4. *Przestrzeń Banacha* $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_C)$ *ma równoważną normę* $\|\cdot\|_0$, *taką że przestrzeń* $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_0)$ *zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.*

Dowód. Na podstawie wniosku 1.9 mamy

$$C([0,1],\mathbb{R}) = c_0 \oplus \tilde{X}.$$

W $C([0,1],\mathbb{R})$ wprowadzamy równoważną normę określoną wzorem

$$|||(x,\tilde{f})||| = \max\{\|x\|_{c_0}, \|\tilde{f}\|_C\}$$

dla $(x,\tilde{f}) \in c_0 \oplus \tilde{X} = C([0,1],\mathbb{R})$. Z twierdzenia 11.1 i przykładu 10.9 wnioskujemy, że $C([0,1],\mathbb{R})$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_0)$ zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem. □

Uwaga 11.5. Warto zauważyć, że w przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_C)$ jedynymi zbiorami o stałej szerokości są kule domknięte ([74]), ale z twierdzenia 11.4 mamy, że w przestrzeni $C([0,1],\mathbb{R})$ z odpowiednią równoważną normą $\|\cdot\|_0$ istnieje zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.

Rozdział 12

Rozszerzona baza bezwarunkowa w nieośrodkowej przestrzeni Banacha

Z definicji 9.2 i twierdzenia 9.3 (punkty *(a)* i *(b)*) mamy naturalne rozszerzenie pojęcia szeregów bezwarunkowo zbieżnych do dowolnych szeregów $\sum_{i\in I} x_i$. Podobnie jak w definicji 9.2 przez $\mathcal{A}_1(I)$ oznaczmy rodzinę złożoną z wszystkich niepustych i skończonych podzbiorów zbioru I.

Definicja 12.1. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha, I jest dowolnym nieskończonym zbiorem, $x_i \in X$ dla każdego $i \in I$ i $x \in X$. Jeżeli szereg $\sum_{i\in I} x_i$ spełnia warunek

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{A\in\mathcal{A}_1(I)} \bigwedge_{A\subset A_1\in\mathcal{A}_1(I)} \|x - \sum_{i\in A_1} x_i\| < \epsilon,$$

to mówimy, że szereg $\sum_{i\in I} x_i$ jest bezwarunkowo zbieżny.

Uwaga 12.2. Wprost z bezwarunkowej zbieżności szeregu $\sum_{i\in I} x_i$ wynika, że dla każdego $\eta > 0$ zbiór $\{i \in I : \|x_i\| > \eta\}$ jest skończony.

Przejdziemy teraz do przypadku nieośrodkowych przestrzeni Banacha. W 1939 roku E. R. Lorch [62] wprowadził pojęcie rozszerzonej bazy bezwarunkowej.

Definicja 12.3. ([62], [88]) Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieośrodkową przestrzenią Banacha. Nieprzeliczalną rodzinę $\{e_i\}_{i\in I}$ elementów przestrzeni X nazywamy rozszerzoną bazą bezwarunkową w $(X, \|\cdot\|)$, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna rodzina skalarów $\{a^i\}_{i\in I}$, taka że szereg $\sum_{i\in I} a^i e_i$ jest bezwarunkowo zbieżny do x.

Następna definicja jest równoważną definicją rozszerzonej bazy bezwarunkowej (patrz uwaga 12.2).

Definicja 12.4. ([62]) Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieośrodkową przestrzenią Banacha. Nieprzeliczalną rodzinę $\{e_i\}_{i\in I}$ elementów przestrzeni X nazywamy rozszerzoną bazą bezwarunkową w $(X, \|\cdot\|)$, jeśli $\overline{\operatorname{span}}\{e_i\}_{i\in I} = X$ i każda przeliczalna podrodzina rodziny $\{e_i\}_{i\in I}$ jest bezwarunkowym ciągiem bazowym.

Dla każdego $x \in X$ piszemy wtedy $x = \sum_{i \in I} a^i e_i$, gdzie rodzina skalarów $\{a^i\}_{i \in I}$ jest jednoznacznie określona przez tę rozszerzoną bazę bezwarunkową $\{e_i\}_{i \in I}$ i przez x. Dodatkowo dla każdego $x \in X$ zbiór $A(x) = \{i \in I : a^i \neq 0\}$ jest co najwyżej przeliczalny i $x = \sum_{i \in A(x)} a^i e_i$ dla $x \neq 0$. Zauważmy również, że dla każdego $A \in \mathcal{A}_2(I)$ szereg $\sum_{i \in A} a^i e_i$ jest wtedy bezwarunkowo zbieżny i $\sum_{i \in A} a^i e_i = \sum_{i \in A \cap A(x)} a^i e_i$ (patrz definicja 12.3, uwaga 12.2 i twierdzenie 9.3).

Definicja 12.5. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieośrodkową przestrzenią Banacha z rozszerzoną bazą bezwarunkową $\{e_i\}_{i \in I}$. Funkcjonały liniowe f^i $(i \in I)$, określone wzorem

$$f^i(x) := a^i$$

dla $x = \sum_{i \in I} a^i e_i \in X$, nazywamy biortogonalnymi funkcjonałami związanymi z rozszerzoną bazą bezwarunkową $\{e_i\}_{i \in I}$.

Jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest nieośrodkową przestrzenią Banacha z rozszerzoną bazą bezwarunkową $\{e_i\}_{i \in I}$, $x = \sum_{i \in I} f^i(x) e_i \in X$ i $A \in \mathcal{A}(I)$, to projekcję $\sum_{i \in A} f^i(x) e_i$ oznaczamy przez $P_A x$.

Twierdzenie 12.6. ([41]) *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieośrodkową przestrzenią Banacha z rozszerzoną bazą bezwarunkową $\{e_i\}_{i \in I}$ i $\{f^i\}_{i \in I}$ są biortogonalnymi funkcjonałami związanymi z tą bazą. . Wtedy mamy*

(a) biortogonalne funkcjonały f^i związane z rozszerzoną bazą bezwarunkową $\{e_i\}_{i \in I}$ są ciągłe na X,

(b) $\sup_{A \in \mathcal{A}_1(I)} \|P_A\|_{XX_A} < \infty$ i $\sup_{A \in \mathcal{A}(I)} \|P_A\|_{XX_A} < \infty$, gdzie $X_A = \mathrm{span}\,\{\mathrm{e_i}\}_{\mathrm{i \in A}}$

(c) norma $\|\cdot\|_0$, określona wzorem

$$\|x\|_0 := \sup_{A \in \mathcal{A}_1(I)} \|P_A x\|_{XX_A}$$

dla $x \in X$ jest równoważna normie $\|\cdot\|$.

Definicja 12.7. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest nieośrodkową przestrzenią Banacha z rozszerzoną bazą bezwarunkową $\{e_i\}_{i \in I}$. Najmniejszą liczbę rzeczywistą M spełniającą warunek

$$\|P_A x\|_{XX_A} \leqslant M\|x\|$$

dla każdego $A \in \mathcal{A}_1(I)$ i każdego $x \in X$, nazywamy stałą bazową rozszerzonej bazy bezwarunkowej $\{e_i\}_{i \in I}$ i oznaczamy przez K.

Rozdział 13

Zbiory o stałej szerokości w przestrzeniach Banacha z rozszerzoną bazą bezwarunkową

W przypadku przestrzeni nieośrodkowych mamy następujące uogólnienie twierdzenia 10.10.

Twierdzenie 13.1. *Każda nieośrodkowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ z rozszerzoną bazą bezwarunkową ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć $I = \mathbb{N} \cup I_1$, przy czym $\mathbb{N} \cap I_1 = \emptyset$. Wtedy z twierdzenia 12.6 mamy

$$X = \overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \oplus \overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i\in I_1}.$$

Następnie z twierdzenia 10.10 dostajemy, że w $\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ istnieje równoważna norma $\|\cdot\|_1$, taka że przestrzeń $(\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \|\cdot\|_1)$ zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem. Wystarczy teraz zastosować twierdzenie 11.2 do przestrzeni Banacha $(\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \|\cdot\|_1)$ i $(\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i\in I_1}, \|\cdot\|)$, aby otrzymać tezę twierdzenia. □

Jako wniosek dostajemy następujące uogólnienie powyższego twierdzenia (patrz twierdzenie 11.1).

Twierdzenie 13.2. *Załóżmy, że $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ są przestrzeniami Banacha. W iloczynie $X = X_1 \times X_2$ wprowadzamy normę*

$$\|x\| := \max\{\|x^1\|_1, \|x^2\|_2\},$$

gdzie $x = (x^1, x^2) \in X$. Jeśli przestrzeń $(X_1, \|\cdot\|_1)$ ma bezwarunkową rozszerzoną bazę, to przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.

Uwaga 13.3. Gdy przestrzeń Banacha $(X,\|\cdot\|)$ spełnia założenia twierdzenia 10.10 (lub 11.2 lub 13.1 lub 13.2) albo gdy przestrzeń $(X,\|\cdot\|)$ jest refleksywna, to X ma równoważną normę $\|\cdot\|_{00}$, taką że w przestrzeni $(X,\|\cdot\|_{00})$ istnieje zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem, który nie jest zbiorem o stałej szerokości. Wystarczy bowiem posłużyć się metodą podaną w przykładzie 8.7. Założenie o refleksywności przestrzeni $(X,\|\cdot\|)$ można zastąpić założeniami z twierdzenia 8.4.

Rozdział 14

Kilka faktów związanych z bezwarunkowymi bazami Schaudera i bezwarunkowymi ciągami bazowymi

W tym rozdziale podamy twierdzenia, które wykorzystamy w następnym rozdziale.
Twierdzenie 14.1. ([81]) *Przestrzeń $L^1([0,1],\mathbb{R})$ ze standardową normą nie jest izomorficzna z żadną podprzestrzenią przestrzeni Banacha z bezwarunkową bazą Schaudera.*

Twierdzenie 14.2. ([43]) *Przestrzeń Jamesa J ze standardową normą $\|\cdot\|_J$ nie ma bezwarunkowej bazy Schaudera.*

Przypomnimy, że przestrzeń Jamesa J składa się z ciągów $u = \{u^n\}_n \in c_0$, takich że

$$\sup_{n_1<n_2<\ldots<n_k} \left\{(u^{n_1} - u^{n_2})^2 + (u^{n_2} - u^{n_3})^2 + \ldots + (u^{n_{k-1}} - u^{n_k})^2\right\} < \infty$$

i standardowa norma $\|\cdot\|_J$ jest postaci

$$\|u\|_J = \sup_{n_1<n_2<\ldots<n_k} \left((u^{n_1} - u^{n_2})^2 + (u^{n_2} - u^{n_3})^2 + \ldots + (u^{n_{k-1}} - u^{n_k})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dla $u = \{u^n\}_n \in J$.
Mamy nawet wzmocnienie twierdzenia 14.2.

Twierdzenie 14.3. ([9], [44]) *Przestrzeń Jamesa J ze standardową normą nie jest izomorficzna z żadną podprzestrzenią przestrzeni Banacha z bezwarunkową bazą Schaudera.*

Twierdzenie 14.4. ([72] - przykład A. Pełczyńskiego) *Istnieje nieskończenie wymiarowa, refleksywna i ośrodkowa przestrzeń Banacha, która nie ma bezwarunkowej bazy Schaudera.*

Bezwarunkowe ciągi bazowe w odróżnieniu od zwykłych ciągów bazowych (patrz twierdzenie 1.48) mogą nie istnieć w przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 14.5. ([36]) *Istnieje nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa i refleksywna przestrzeń Banacha, która nie ma bezwarunkowego ciągu bazowego.*

Twierdzenie 14.6. ([35]) *Istnieje nierefleksywna przestrzeń Banacha, która nie ma bezwarunkowego ciągu bazowego, ani nie zawiera nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni refleksywnej.*

Mamy jednak następujące twierdzenie o istnieniu bezwarunkowych ciągów bazowych.

Twierdzenie 14.7. ([45]) *Każda nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni Banacha z bezwarunkową bazą Schaudera zawiera bezwarunkowy ciąg bazowy.*

Rozdział 15
Porównanie wyników

W tym rozdziale pokażemy zakres stosowania twierdzeń 8.3, 8.4, 10.10, 11.2, 13.1 i 13.2.

Przykład 15.1. Twierdzenia 8.3, 8.4, 10.10 i 11.2 możemy zastosować do przestrzeni ℓ^p i $L^p([0,1])$ ze standardowymi normami dla $1 < p < \infty$. Istotnie, każda z tych przestrzeni jest refleksywna i ma bezwarunkową bazę Schaudera (patrz uwaga 9.9). Przestrzenie te możemy także traktować jako sumę prostą podprzestrzeni, tzn. odpowiednio $\ell^p = \ell^p \oplus \ell^p$ i $L^p([0,1],\mathbb{R}) = X_1 \oplus X_2$, gdzie $1 < p < \infty$, $\{x_i\}_i$ jest bezwarunkową bazą Schaudera w przestrzeni $L^p([0,1],\mathbb{R})$, $X_1 := \overline{\text{span}}\ \{x_{2i-1}\}_{i=1}^{\infty}$ i $X_2 := \overline{\text{span}}\ \{x_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ (patrz twierdzenie 9.8).

Przykład 15.2. Z twierdzenia 10.10 wynika, że przestrzeń $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(\ell^1, \|\cdot\|_0)$ zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem. Przestrzeń $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ spełnia też założenia twierdzenia 11.2 ($\ell^1 = \ell^1 \oplus \ell^1$). Głównego twierdzenia naszej pracy, tj. twierdzenia 8.3 nie możemy zastosować do przestrzeni $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$, ponieważ nie jest to przestrzeń refleksywna. Ponadto z twierdzenia 1.6 wynika, że przestrzeni $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ nie można przedstawić w postaci sumy prostej $X_1 \oplus X_2$ spełniającej założenia twierdzenia 8.4.

Przykład 15.3. Z uwagi 9.9 wnioskujemy, że przestrzenie Banacha c_0 i c ze standardowymi normami spełniają założenia twierdzenia 10.10, ale nie spełniają założeń głównego twierdzenia naszej rozprawy, czyli twierdzenia 8.3.

Przykład 15.4. Z twierdzenia 14.5 wynika, że istnieje przestrzeń Banacha, która spełnia założenia twierdzenia 8.3, ale nie spełnia założeń twierdzeń 10.10 i 11.2.

Przykład 15.5. Z twierdzenia 14.6 wynika, że istnieje przestrzeń Banacha, która nie spełnia założeń twierdzeń 8.3, 8.4, 10.10 i 11.2.

Przykład 15.6. Przestrzenie Banacha z twierdzeń 1.46 i 14.4 spełniają założenia głównego twierdzenia naszej pracy, tj. twierdzenia 8.3, ale nie spełniają założeń twierdzenia 10.10.

Przykład 15.7. Przestrzeń Banacha $C([0,1],\mathbb{R})$ ze standardową normą $\|\cdot\|_C$ nie spełnia założeń twierdzeń 8.3, 8.4 i 10.10 (patrz twierdzenia 1.7 i 9.10), ale po odpowiednim przenormowaniu spełnia założenia twierdzenia 11.2 (patrz twierdzenie 11.4).

Przykład 15.8. Przestrzenie Banacha J i $L^1([0,1],\mathbb{R})$ ze standardowymi normami nie spełniają założeń twierdzeń 8.3 i 10.10 (patrz twierdzenia 14.1 i 14.2)

Podamy teraz podobne przykłady zastosowań twierdzeń 8.3, 8.4, 11.2, 13.1 i 13.2 w przypadku pewnych nieośrodkowych przestrzeni Banacha, których konstrukcję podajemy niżej. Niech $\tilde{\Gamma}$ będzie zbiorem nieprzeliczalnym i takim, że $\tilde{\Gamma}\cap\mathbb{N}=\emptyset$. Połóżmy $\Gamma:=\mathbb{N}\cup\tilde{\Gamma}$ i $\Gamma_1:=\Gamma\setminus\{1\}$. Dla dowolnej przestrzeni Banacha $(Y,\|\cdot\|)$ tworzymy przestrzeń

$$X=\ell^2(Y,\Gamma):=\{x=\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\in\prod_{\gamma\in\Gamma}Y:\sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|^2<\infty\}$$

z normą

$$\|x\|_\sim:=\left[\sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Przykład 15.9. Jeśli $0<p<\infty$ i $Y:=\ell^p$, to przestrzeń $X=\ell^2(Y,\Gamma)$ z odpowiednio dobranymi normami (równoważnymi normie $\|\cdot\|_\sim$) spełnia założenia twierdzeń 8.3, 8.4, 13.1 i 13.2.

Przykład 15.10. Niech $(Y,\|\cdot\|)$ będzie nieskończenie wymiarową, refleksywną i ośrodkową przestrzenią Banacha, która nie ma bezwarunkowego ciągu bazowego (patrz twierdzenie 14.5). Wtedy dostajemy nieośrodkową i refleksywną przestrzeń Banacha $(X,\|\cdot\|_\sim)$, która nie ma rozszerzonej bazy bezwarunkowej (patrz twierdzenie 14.7). Dlatego do przestrzeni $(X,\|\cdot\|_\sim)$ możemy zastosować twierdzenie 8.3, ale nie możemy zastosować twierdzenia 13.1.

Przykład 15.11. Niech $(Y,\|\cdot\|)$ będzie nieskończenie wymiarową, nierefleksywną i ośrodkową przestrzenią Banacha, która nie ma bezwarunkowego ciągu bazowego i nie zawiera nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni refleksywnej (14.6). Wtedy dostajemy nieośrodkową i nierefleksywną przestrzeń Banacha $(X,\|\cdot\|_\sim)$, która nie ma rozszerzonej bazy bezwarunkowej (patrz twierdzenie 14.7). Dlatego do przestrzeni $(X,\|\cdot\|_\sim)$ nie możemy zastosować twierdzeń 8.3 i 13.1.

Przykład 15.12. Niech $Y:=c_0(\Gamma)$, gdzie w przestrzeni $c_0(\Gamma)$ mamy standardową normę supremum. Wtedy do przestrzeni $X=\ell^2(Y,\Gamma)$ z odpowiednio dobranymi normami (równoważnymi normie $\|\cdot\|_\sim$) możemy zastosować twierdzenia 13.1 i 13.2, ale nie możemy zastosować twierdzenia 8.3.

Przykład 15.13. Niech $Y := c_0(\Gamma) \oplus X_2$, gdzie $(X_2, \|\cdot\|_1)$ jest nieskończenie wymiarową, refleksywną i ośrodkową przestrzenią Banacha, która nie ma bezwarunkowego ciągu bazowego (patrz twierdzenie 14.5). W przestrzeni $X := \ell^2(Y, \Gamma)$ wprowadzamy normę $\|\cdot\|_\sim$. Wtedy przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_\sim)$ nie jest refleksywna i nie ma rozszerzonej bazy bezwarunkowej (patrz twierdzenie 14.7) i dlatego do przestrzeni $(X, \|\cdot\|_\sim)$ nie możemy zastosować twierdzeń 8.3 i 13.1. Ponieważ $X = c_0(\Gamma) \oplus (\tilde{X}_2 \oplus \ell^2(Y, \Gamma_1))$ (patrz wniosek 1.9), to do przestrzeni $X = \ell^2(Y, \Gamma)$ z odpowiednio dobraną normą (równoważną normie $\|\cdot\|_\sim$) możemy zastosować twierdzenie 13.2.

Przykład 15.14. Załóżmy, że $Y := C([0,1], \mathbb{R}) \oplus X_2$, przy czym w $C([0,1], \mathbb{R})$ mamy standardową normę $\|\cdot\|_C$ i $(X_2, \|\cdot\|_1)$ jest nieskończenie wymiarową, refleksywną i ośrodkową przestrzenią Banacha, która nie zawiera bezwarunkowego ciągu bazowego (patrz twierdzenie 14.5). Dalej niech $X := \ell^2(Y, \Gamma)$ będzie przestrzenią z normą $\|\cdot\|_\sim$. Wtedy przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_\sim)$ nie jest refleksywna i nie ma rozszerzonej bazy bezwarunkowej (patrz twierdzenie 14.7) i dlatego do przestrzeni $(X, \|\cdot\|_\sim)$ nie możemy zastosować twierdzeń 8.3 i 13.1. Ponieważ $X = c_0 \oplus (\tilde{X}_2 \oplus \ell^2(Y, \Gamma_1)$ (patrz wniosek 1.9), to do przestrzeni $X = \ell^2(Y, \Gamma)$ z odpowiednio dobraną normą (równoważną normie $\|\cdot\|_\sim$) możemy zastosować twierdzenie 11.2.

Przykład 15.15. Niech $Y := c_0(\Gamma) \oplus X_2$, gdzie $(X_2, \|\cdot\|_1)$ jest nierefleksywną i ośrodkową przestrzenią Banacha, która nie ma bezwarunkowego ciągu bazowego i nie zawiera nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni refleksywnej (patrz twierdzenie 14.6). Dalej załóżmy, że $X := \ell^2(Y, \Gamma)$ jest przestrzenią z normą $\|\cdot\|_\sim$. Wtedy przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_\sim)$ nie jest refleksywna i nie ma rozszerzonej bazy bezwarunkowej (patrz twierdzenie 14.7) i dlatego do przestrzeni $(X, \|\cdot\|_\sim)$ nie możemy zastosować twierdzeń 8.3 i 13.1. Ponieważ $X = c_0(\Gamma) \oplus (\tilde{X}_2 \oplus \ell^2(Y, \Gamma_1))$ (patrz wniosek 1.9), to do przestrzeni $X = \ell^2(Y, \Gamma)$ z odpowiednio dobraną normą (równoważną normie $\|\cdot\|_\sim$) możemy zastosować twierdzenie 13.2.

Na koniec przedstawimy podobną konstrukcję przestrzeni Banacha, do której możemy zastosować twierdzenia 11.2 i 13.2.

Załóżmy, że Γ jest zbiorem co najmniej przeliczalnym. Niech $\{(Y_\gamma, \|\cdot\|_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha z $\dim Y_\gamma \geqslant 2$ i niech $0 \leqslant p < \infty$. Przyjmujemy

$$X = \ell^p(\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}) := \{x = \{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in \prod_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma : \sum_{\gamma\in\Gamma} \|y_\gamma\|^p < \infty\}$$

z normą

$$\|x\|_\sim := \left[\sum_{\gamma\in\Gamma} \|y_\gamma\|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

dla każdego $x \in X$. Ponieważ każda przestrzeń Y_γ może być przedstawiona w postaci

$$Y_\gamma := \mathbb{R} \oplus Y_{\gamma,1} = P_{\mathbb{R},\gamma}(Y) \oplus (I - P_{\mathbb{R},\gamma}(Y)),$$

gdzie $\|P_{\mathbb{R},\gamma}\| = 1$, to mamy $X = \ell^p(\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}) = \ell^p(\Gamma) \oplus \ell^p(\{Y_{\gamma,1}\}_{\gamma\in\Gamma})$.

Przykład 15.16. Załóżmy, że $0 \leqslant p < \infty$, zbiór Γ jest co najmniej przeliczalny oraz $X := \{(Y_\gamma, \|\cdot\|_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ jest rodziną przestrzeni Banacha z $\mathrm{dimY}_\gamma \geqslant 2$. Wtedy po zastosowaniu twierdzenia odpowiednio 11.2 lub 13.2, dostajemy w X równoważną normę, taką że przestrzeń X z tą normą zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.

Dodatek 1

Wzmocnienie twierdzenia 4.3

W [52] M. I. Kadec udowodnił następujące twierdzenie o przenormowaniu ośrodkowej przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 16.1. *Każda ośrodkowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ jest lokalnie jednostajnie wypukła.*

Przy pomocy tego twierdzenia uogólnimy najpierw twierdzenie 4.1, a następnie twierdzenie 4.3. Zaczniemy od przestrzeni uniwersalnej $C([0,1],\mathbb{R})$ z normą maksimum $\|\cdot\|_C$.

Twierdzenie 16.2. *Przestrzeń Banacha $C([0,1],\mathbb{R})$ z normą maksimum $\|\cdot\|_C$ ma równoważną normę $\|\cdot\|_{C,2}$, taką że przestrzeń $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C,2})$ jest jednocześnie przestrzenią lokalnie jednostajnie wypukłą i jednostajnie wypukłą w każdym kierunku i ma własność Opiala.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 16.1 przestrzeń $C([0,1],\mathbb{R})$ ma równoważną lokalnie jednostajnie wypukłą normę $\|\cdot\|_0$. Niech $\{g_i\}_i$ będzie znormalizowaną bazą Schaudera przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_C)$ i niech $\{g_i^*\}_i$ będzie ciągiem biortogonalnych funkcjonałów związanych z tą bazą. Ciąg $\{g_i^*\}_i$ jest ciągiem ograniczonym (uwaga 1.42). Określmy teraz ciąg liniowych projekcji $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ w przestrzeni $C([0,1],\mathbb{R})$ w następujący sposób: $P_0 = 0$, $P_n h = \sum_{i=1}^{n} g_i^*(h) g_i$ dla $n = 1,2,...$ i $h \in C([0,1],\mathbb{R})$. Z twierdzenia 1.43 mamy, że ciąg $\{\|P_n\|_{CC}\}_{n=0}^{\infty}$ norm tych projekcji w $C([0,1],\mathbb{R})$ jest ciągiem ograniczonym.

Możemy teraz wprowadzić nową normę w $C([0,1],\mathbb{R})$ określoną w następujący sposób

$$\|h\|_{C,2} := \sqrt{\|h\|_{\mathcal{P},0}^2 + \|h\|_{\tilde{2}}^2},$$

gdzie

$$\|h\|_{\mathcal{P},0} := \sup_{n=0,1,2,...} \|h - P_n h\|_0$$

i

$$\|h\|_{\tilde{2}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{g_i^*(h)}{2^i}\right)^2}$$

dla $h \in C([0,1],\mathbb{R})$.

Norma $\|\cdot\|_{C,2}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_C$ i ma własność Opiala (patrz dowód twierdzenia D. van Dulsta w [27]).

Z wniosku 1.17 przestrzeń $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,2})$ jest jednostajnie wypukła w każdym kierunku.

Pokażemy teraz, że przestrzeń $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,2})$ jest lokalnie jednostajnie wypukła. Ustalmy więc dowolną funkcję $h \in C([0,1],\mathbb{R})\setminus\{0\}$. Niech ciąg $\{h_k\}_k \subset C([0,1],\mathbb{R})$ będzie ciągiem takim, że

$$\lim_k \left[2\left(\|h\|_{C,2}^2 + \|h_k\|_{C,2}^2\right) - \|h+h_k\|_{C,2}^2\right] = 0. \tag{16.1}$$

Ponieważ prawdziwe są nierówności

$$2\left(\|h\|_{C,2}^2 + \|h_k\|_{C,2}^2\right) - \|h+h_k\|_{C,2}^2 =$$

$$= 2\left(\|h\|_{\mathcal{P},0}^2 + \|h_k\|_{\mathcal{P},0}^2\right) - \|h+h_k\|_{\mathcal{P},0}^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}\left[(g_i^*(h))^2 - 2g_i^*(h)g_i^*(h_k) + (g_i^*(h_k))^2\right] \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\|h\|_{\mathcal{P},0}^2 + \|h_k\|_{\mathcal{P},0}^2\right) - \left(\|h\|_{\mathcal{P},0} + \|h_k\|_{\mathcal{P},0}\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}\left[g_i^*(h) - g_i^*(h_k)\right]^2 =$$

$$= \left(\|h\|_{\mathcal{P},0} - \|h_k\|_{\mathcal{P},0}\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}\left[g_i^*(h) - g_i^*(h_k)\right]^2 \geqslant 0$$

to z (16.1) mamy

$$\lim_k \|h_k\|_{\mathcal{P},0} = \|h\|_{\mathcal{P},0} = \alpha \tag{16.2}$$

i

$$\lim_k \|h+h_k\|_{\mathcal{P},0} = 2\alpha. \tag{16.3}$$

Wiemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $n_k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, takie że

$$\|h+h_k\|_{\mathcal{P},0} = \|(I-P_{n_k})(h+h_k)\|_0.$$

Stąd z (16.3) otrzymujemy

$$\lim_k \|(I-P_{n_k})(h+h_k)\|_0 = \lim_k \|h+h_k\|_{\mathcal{P},0} = 2\alpha. \tag{16.4}$$

Zauważmy teraz, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\|(I-P_{n_k})h\|_0 \leqslant \|h\|_{\mathcal{P},0}, \tag{16.5}$$

$$\|(I-P_{n_k})h_k\|_0 \leqslant \|h_k\|_{\mathcal{P},0} \tag{16.6}$$

i

$$\|h\|_{\mathcal{P},0} + \|h_k\|_{\mathcal{P},0} \geqslant \|(I-P_{n_k})h\|_0 + \|(I-P_{n_k})h_k\|_0 \geqslant \|(I-P_{n_k})(h+h_k)\|_0. \tag{16.7}$$

Z (16.2), (16.4) - (16.7) dostajemy

$$\lim_k \|(I - P_{n_k})h\|_0 = \alpha \tag{16.8}$$

i

$$\lim_k \|(I - P_{n_k})h_k\|_0 = \alpha. \tag{16.9}$$

Wiemy, że $\lim_n \|(I - P_n)h\|_0 = 0$ i to w połączeniu z (16.8) daje nam (po ewentualnym wybraniu podciągu), że $n_k = n_{\tilde{k}}$ dla k=1,2,.... Mamy więc

$$\|(I - P_{n_{\tilde{k}}})h\|_0 = \alpha,$$

$$\lim_k \|(I - P_{n_{\tilde{k}}})h_k\|_0 = \alpha$$

i

$$\lim_k \|(I - P_{n_{\tilde{k}}})(h + h_k)\|_0 = 2\alpha.$$

Z lokalnej jednostajnej wypukłości normy $\|\cdot\|_0$ dostajemy

$$\lim_k \|(I - P_{n_{\tilde{k}}})h_k - (I - P_{n_{\tilde{k}}})h\|_0 = 0. \tag{16.10}$$

Dalej, ciąg $\{P_{n_{\tilde{k}}} h_k\}_k$ jest ograniczony w przestrzeni Banacha $\Big(P_{n_{\tilde{k}}}(C([0,1],\mathbb{R})), \|\cdot\|_0\Big)$ o wymiarze skończonym i dlatego bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że jest on ciągiem zbieżnym do $\tilde{h}$. Wtedy biorąc $\tilde{\tilde{h}} = \tilde{h} + P_{n_{\tilde{k}}} h$ z (16.10) otrzymujemy

$$\tilde{\tilde{h}} = \tilde{h} + (I - P_{n_{\tilde{k}}})h = \lim_k \Big[P_{n_{\tilde{k}}} h_k + (I - P_{n_{\tilde{k}}})h_k\Big] = \lim_k h_k \tag{16.11}$$

w $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$. Ponieważ normy $\|\cdot\|_0$ i $\|\cdot\|_{C,2}$ są równoważne, to z (16.11) mamy

$$\|\tilde{\tilde{h}}\|_{C,2} = \lim_k \|h_k\|_{C,2}. \tag{16.12}$$

Natomiast z (16.1) i z nierówności

$$2\left(\|h\|_{C,2}^2 + \|h_k\|_{C,2}^2\right) - \|h + h_k\|_{C,2}^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\|h\|_{C,2}^2 + \|h_k\|_{C,2}^2\right) - \left(\|h\|_{C,2} + \|h_k\|_{C,2}\right)^2 =$$

$$= \left(\|h\|_{C,2} - \|h_k\|_{C,2}\right)^2 \geqslant 0$$

dostajemy

$$\lim_k \|h_k\|_{C,2} = \|h\|_{C,2} \tag{16.13}$$

i

$$\lim_k \|h + h_k\|_{C,2} = 2\|h\|_{C,2}. \tag{16.14}$$

Z (16.11) - (16.14) otrzymujemy

$$\|h + \tilde{\tilde{h}}\|_{C,2} = \lim_k \|h + h_k\|_{C,2} = 2\|h\|_{C,2}$$

i

$$\|\tilde{\tilde{h}}\|_{C,2} = \|h\|_{C,2}.$$

Ze ścisłej wypukłości przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,2})$ dostajemy, że $\tilde{\tilde{h}} = h$ i to w połączeniu z (16.11) daje nam równość $\lim_k h_k = h$ w $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{C,2})$. □

Ponieważ przestrzeń $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_C)$ jest przestrzenią uniwersalną dla ośrodkowych przestrzeni Banacha, to z twierdzenia 16.2 otrzymujemy natychmiast następujące wzmocnienie twierdzenia 4.3 (patrz dowód twierdzenia 4.3).

Twierdzenie 16.3. *Każda nieskończenie wymiarowa i ośrodkowa przestrzeń Banacha* $(X,\|\cdot\|_X)$ *ma równoważną normę* $\|\cdot\|_{X,2}$*, taką że przestrzeń* $(X,\|\cdot\|_{X,2})$ *jest lokalnie jednostajnie wypukła i jednostajnie wypukła w każdym kierunku i ma własność Opiala.*

Uwaga 16.4. W 1958 roku (czyli wcześniej niż ukazała się praca [52]) M. I. Kadec udowodnił w [51], że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha ma równoważną normę z własnością Kadeca-Klee'ego. Możemy więc użyć tego twierdzenia zamiast twierdzenia 1.32 w pierwszej części dowodu twierdzenia 4.1. Oczywiście można też zastosować twierdzenie 16.1, ponieważ lokalnie jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha ma własność Kadeca-Klee'ego (twierdzenie 1.30). Dowód twierdzenia 4.1 podany w naszej pracy jest dowodem z opublikowanej pracy [16] i jest prostszy w części dotyczącej własności Kadeca-Klee'ego.

Dodatek 2

Konstrukcja normy $|||\cdot|||_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ w przypadku nieośrodkowych refleksywnych przestrzeni Banacha ze słabą własnością Opiala

W tym dodatku pokażemy rozszerzenie do nieośrodkowej i refleksywnej przestrzeni Banacha konstrukcji równoważnej normy opartej na uogólnionej normie Daya podobnej do tej podanej w rozdziałach 5 i 7. Niestety nie można przy jej pomocy rozwiązać ogólnego problemu istnienia w refleksywnej przestrzeni Banacha zbioru diametralnie zupełnego z pustym wnętrzem.

Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_X)$ jest nieskończenie wymiarową i refleksywną przestrzenią Banacha. Niech $\mathcal{F} = \{f^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ będzie rodziną niezerowych funkcjonałów w X^*. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest ograniczona w X^*, tzn. $\|f^*_\gamma\|_{X^*} \leqslant \tilde{K}$ dla każdego $\gamma \in \Gamma$, gdzie $1 \leqslant \tilde{K} \in \mathbb{R}$. Załóżmy również, że $\{f^*_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}$ należy do $c_0(\Gamma)$ dla każdego $x \in X$, tzn. zbiór $\{\gamma \in \Gamma : |f^*_\gamma(x)| > \epsilon\}$ jest skończony dla każdego $x \in X$ i każdego $\epsilon > 0$. Następnie podzielmy zbiór Γ w następujący sposób $\Gamma = \Gamma_1 \cup \mathbb{N}$, przy czym $\Gamma_1 \cap \mathbb{N} = \emptyset$ (Γ_1 może być zbiorem pustym). Dalej ustalmy $\alpha \in (0, 1)$. Dla każdego $x \in X$ określamy $u(x) = \{u^\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$ w następujący sposób

$$u^\gamma(x) := f^*_\gamma(x)$$

dla $\gamma \in \Gamma_1$,

$$u^1(x) := \alpha\|x\|_X$$

oraz

$$\{u^2(x), u^3(x), \dots\} := \{f^*_1(x), f^*_2(x), f^*_2(x), \dots, f^*_j(x), \dots, f^*_j(x), \dots\},$$

gdzie k-ty wyraz ciągu $\{f^*_k(x)\}_k$ występuje tutaj dokładnie k razy dla $k \in \mathbb{N} \subset \Gamma$. Ustalmy $1 < p < \infty$ i załóżmy, że ciąg $\beta = \{\beta_j\}_j$ jest ciągiem ściśle malejącym o wyrazach dodatnich, takim że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p$ jest zbieżny.

Następnie, wprowadzamy $D(u(x)) = \{D^\gamma(u(x))\}_{\gamma\in\Gamma} \in \ell^p(\Gamma)$ przyjmując

$$D^\gamma(u(x)) := \begin{cases} \beta_j u^{\tau(j,u(x))}(x), & \text{gdy } \gamma = \tau(j, u(x)) \text{ dla pewnego } j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

(patrz rozdział 3) i kładziemy

$$\|x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} := |||u(x)|||_{\beta,p} := \|D_{\beta,p}(u(x))\|_p.$$

Uogólniona norma Daya $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}}$ jest równoważna normie $\|\cdot\|_X$, ponieważ spełnia ona następujące nierówności

$$\beta_1\alpha\|x\|_X \leqslant \beta_1\|u(x)\|_{c_0(\Gamma)} \leqslant |||u(x)|||_{\beta,p} = \|x\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \|u(x)\|_{c_0(\Gamma)} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{K}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_X$$

dla każdego $x \in X$.

Twierdzenie 17.1. *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ będzie nieskończenie wymiarową i refleksywną przestrzenią Banacha. Jeśli przestrzeń $(X, \|\cdot\|_X)$ ma słabą własność Opiala, to przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}})$ ma ją również.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}_n \subset X$ jest słabo zbieżny do $0 \in X$ i $x \in X \setminus \{0\}$. Bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że istnieją granice $\lim_n \|x_n\|_X$ oraz $\lim_n \|x_n - x\|_X$. Wprowadźmy następujący podzbiór M zbioru Γ

$$M := \{\tau(j, x_n) : j, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\tau(j, x) : j \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma = \Gamma_1 \cup \mathbb{N}.$$

Wtedy M jest zbiorem przeliczalnym. Przyjmijmy więc $M = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ i weźmy dowolne $0 < \epsilon < 1$. Ze słabej własności Opiala przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$ mamy

$$\lim_n \|x_n\|_X \leqslant \lim_n \|x_n - x\|_X.$$

Istnieje więc $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\|x_n\|_X < \|x_n - x\|_X + \epsilon \tag{17.1}$$

dla każdego $\tilde{n}_0 < n \in \mathbb{N}$. Ponieważ założyliśmy, że zbiór $\{\gamma \in \Gamma : |f_\gamma^*(x)| > \epsilon\}$ jest skończony, to istnieje $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, takie że

$$|f_{\gamma_k}^*(x)| < \epsilon$$

dla każdego $\tilde{k} < k \in \mathbb{N}$. Stąd otrzymujemy

$$|f^*_{\gamma_k}(x_n)| \leqslant |f^*_{\gamma_k}(x_n) - f^*_{\gamma_k}(x)| + |f^*_{\gamma_k}(x)|$$

$$< |f^*_{\gamma_k}(x_n) - f^*_{\gamma_k}(x)| + \epsilon$$

dla każdego $\tilde{k} < k \in \mathbb{N}$ i każdego $n \in \mathbb{N}$.

Następnie dla każdego $1 \leqslant k \leqslant \tilde{k}$ mamy albo $f^*_{\gamma_k}(x) = 0$ albo $f^*_{\gamma_k}(x) \neq 0$. Dlatego rozpatrujemy dwa przypadki.

1) Jeśli $f^*_{\gamma_k}(x) \neq 0$, to przyjmijmy $\eta_k = \min\{\epsilon, \frac{1}{2}|f^*_{\gamma_k}(x)|\}$. Ponieważ ciąg $\{x_n\}_n$ jest słabo zbieżny do 0, to istnieje $\tilde{n}_k \in \mathbb{N}$, takie że

$$|f^*_{\gamma_k}(x_n)| < \eta_k$$

dla $\tilde{n}_k < n \in \mathbb{N}$. Stąd mamy

$$|f^*_{\gamma_k}(x_n) - f^*_{\gamma_k}(x)| \geqslant |f^*_{\gamma_k}(x)| - |f^*_{\gamma_k}(x_n)| >$$

$$> |f^*_{\gamma_k}(x)| - \eta_k \geqslant \frac{1}{2}|f^*_{\gamma_k}(x)| \geqslant \eta_k > |f^*_{\gamma_k}(x_n)|$$

dla $n > \tilde{n}_k$.

2) Jeśli $f^*_{\gamma_k}(x) = 0$, to spełniona jest nierówność

$$|f^*_{\gamma_k}(x_n)| \leqslant |f^*_{\gamma_k}(x_n) - f^*_{\gamma_k}(x)|$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i przyjmujemy wtedy $\tilde{n}_k = 1$.

Ostatecznie dostajemy

$$|f^*_{\gamma_k}(x_n)| \leqslant |f^*_{\gamma_k}(x_n) - f^*_{\gamma_k}(x)|$$

dla każdego $1 \leqslant k \leqslant \tilde{k}$ i każdego $\max\{\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\} < n \in \mathbb{N}$.

Łącząc powyższe nierówności otrzymujemy

$$|f^*_{\gamma_k}(x_n)| \leqslant |f^*_{\gamma_k}(x_n) - f^*_{\gamma_k}(x)| + \epsilon = |f^*_{\gamma_k}(x_n - x)| + \epsilon \tag{17.2}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i każdego $\max\{\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\} < n \in \mathbb{N}$. Z określenia fukcji $u(\cdot)$ oraz z nierówności (17.1) i (17.2) wynika nierówność

$$|u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n)| \leqslant |u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n - x)| + \epsilon \tag{17.3}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz każdego $\max\{\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\} < n \in \mathbb{N}$.

Weźmy teraz liczbę naturalną $n > \max\{\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{\tilde{k}}\}$. Przyjmując we wniosku 2.2 $\{s^j\}_j = \{\beta^p_j\}_j$, $\{t^j\}_j = \{|u^{\tau(j,u(x_n-x))}(x_n - x)|^p\}_j$, $\{g(j)\}_j = \{\tau(j, u(x_n))\}_j$ i korzystając z nierówności (17.3) otrzymujemy

$$\|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathcal{F}} = |||u(x_n)|||_{\beta,p} = \|D_{\beta,p}(u(x_n))\|_p =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p |u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left(|u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n - x)| + \epsilon\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left|u^{\tau(j,u(x_n))}(x_n - x)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \left|u^{\tau(j,u(x_n - x))}(x_n - x)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|D_{\beta,p}(u(x_n - x))\|_p + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= |||u(x_n - x)|||_{\beta,p} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|x_n - x\|_{\alpha,\beta,p,\mathfrak{F}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Przechodząc z n do $+\infty$ dostajemy

$$\limsup_n \|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathfrak{F}} \leqslant \limsup_n \|x_n - x\|_{\alpha,\beta,p,\mathfrak{F}} + \epsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ponieważ $0 < \epsilon < 1$ było wybrane dowolnie, to ostatecznie mamy

$$\limsup_n \|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\mathfrak{F}} \leqslant \limsup_n \|x_n - x\|_{\alpha,\beta,p,\mathfrak{F}}.$$

□

Twierdzenie 17.1 jest oczywiście uogólnieniem twierdzenia 5.2 i dowód twierdzenia 17.1 jest prawie identyczny jak dowód twierdzenia 5.2.

Chcemy teraz, by przestrzeń X z wyżej określoną normą $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\mathfrak{F}}$ nie miała struktury normalnej. W tym celu musimy wskazać w miejsce rodziny $\mathfrak{F}$ konkretną rodzinę funkcjonałów $\tilde{\mathfrak{F}}$ określających tę normę. Z twierdzenia 1.50 wynika, że istnieje domknięta podprzestrzeń Y nieskończenie wymiarowej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$, taka że przestrzeń ilorazowa X/Y z normą $\|\cdot\|_{X/Y}$ ma bazę Schaudera. Dla przestrzeni ilorazowej X/Y, istnieje standardowe odwzorowanie $\iota : X \to X/Y$. Niech $\{\hat{z}_m\}_m$ będzie znormalizowaną bazą przestrzeni $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ i niech $\{\hat{z}_m^*\}$ będzie ciągiem biortogonalnych funkcjonałów związanych z tą bazą. Wtedy istnieje stała $K_1 > 1$, taka że $\|\hat{z}_m^*\|_{(X/Y)^*} \leqslant K_1$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Dla $\gamma = m \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$\tilde{f}_\gamma^* := \hat{z}_m^* \circ \iota \in X^*. \tag{17.4}$$

Następnie niech Γ_1 będzie zbiorem takim, że $\Gamma_1 \cap \mathbb{N} = \emptyset$ (Γ_1 może być zbiorem pustym) i niech $\{\tilde{f}^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ będzie rodziną niezerowych i ograniczonych (w normie $\|\cdot\|_{X^*}$) przez $\frac{1}{2}$ funkcjonałów w $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$. Załóżmy również, że dla każdego $x \in X$ i każdego $\epsilon > 0$ zbiór $\{\gamma \in \Gamma_1 : |\tilde{f}^*_\gamma(x)| > \epsilon\}$ jest skończony. Przyjmijmy $\Gamma = \Gamma_1 \cup \mathbb{N}$. Otrzymujemy w ten sposób rodzinę $\tilde{\mathfrak{F}} := \{\tilde{f}^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ niezerowych funkcjonałów w X^*. Dalej ustalmy $\alpha \in (0, 1)$. Dla każdego $x \in X$ definiujemy tak jak poprzednio ciągi $u(x) = \{u^\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$ oraz $D_{\beta,p}(u(x)) = \{D^\gamma_{\beta,p}(u(x))\}_{\gamma\in\Gamma} \in \ell^p(\Gamma)$ i przyjmujemy

$$\|x\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}} := |||u(x)|||_{\beta,p} = \|D_{\beta,p}(u(x))\|_p.$$

Wtedy

$$\beta_1 \alpha \|x\|_X \leqslant \|x\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}} \leqslant K_1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_X$$

dla każdego $x \in X$.

Twierdzenie 17.2. *Przy powyższych założeniach i $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$ nie ma struktury normalnej.*

Dowód. Ponieważ przestrzeń $(X, \|\cdot\|_X)$ jest refleksywna, a baza $\{\hat{z}_m\}_m$ znormalizowana, to istnieje ciąg $\{z_m\}_m \subset X$, taki że $z_m \in \hat{z}_m$ (czyli $\iota(z_m) = \hat{z}_m$) i $\|z_m\|_X = 1$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Wtedy dla $m_2 > m_1$ mamy

$$|u^\gamma(z_{m_2} - z_{m_1})| = |f^*_\gamma(z_{m_2} - z_{m_1})| \leqslant \frac{1}{2}\|z_{m_2} - z_{m_1}\|_X \leqslant 1$$

dla $\gamma \in \Gamma_1$,

$$u^1(z_{m_2} - z_{m_1}) = \alpha\|z_{m_2} - z_{m_1}\|_X \leqslant 2\alpha \leqslant 1$$

oraz

$$\begin{gathered}\{u^2(z_{m_2} - z_{m_1}), u^3(z_{m_2} - z_{m_1}), u^3(z_{m_2} - z_{m_1}), \ldots\} = \\ = \{\hat{z}^*_1(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \hat{z}^*_2(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \hat{z}^*_2(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \ldots, \\ \hat{z}^*_{m_1-1}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \hat{z}^*_{m_1}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \ldots, \hat{z}^*_{m_1}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \\ \hat{z}^*_{m_1+1}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \ldots, \hat{z}^*_{m_2-1}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \\ \hat{z}^*_{m_2}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \ldots, \hat{z}^*_{m_2}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \hat{z}^*_{m_2+1}(\iota(z_{m_2} - z_{m_1})), \ldots\} = \\ = \{0, 0, 0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\}.\end{gathered}$$

Stąd dostajemy

$$\left(\sum_{j=1}^{m_1+m_2} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|z_{m_2} - z_{m_1}\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

a to oznacza, że $\operatorname{diam}_{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}}}\{z_m\}_m = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Pokażemy teraz, że $\lim_m \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}}}(z_{m+1}, \operatorname{conv}\{z_1, ..., z_m\}) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Załóżmy więc, że $a_1 + \ldots + a_m = 1$, gdzie $0 \leqslant a_k \leqslant 1$ dla $1 \leqslant k \leqslant m$. Wtedy mamy

$$\left|u^\gamma\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right| = \left|f_\gamma^*\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\|z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right\|_X \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k \|z_{m+1} - z_k\|_X \leqslant 1$$

dla $\gamma \in \Gamma_1$,

$$\left|u^1(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k)\right| = \alpha\left\|z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right\|_X \leqslant 2\alpha \leqslant 1$$

oraz

$$\left\{u^2\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right), u^3\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right), u^3\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right), \ldots\right\} =$$

$$= \left\{\hat{z}_1^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \hat{z}_2^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \hat{z}_2^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \ldots,\right.$$

$$\hat{z}_m^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \ldots, \hat{z}_m^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \hat{z}_{m+1}^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \ldots$$

$$\left.\hat{z}_{m+1}^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \hat{z}_{m+2}^*\left(l\left(z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right)\right), \ldots\right\} =$$

$$= \{-a_1, -a_2, -a_2, \ldots, -a_m, \ldots, -a_m, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\left(\sum_{j=1}^{m+1} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\|z_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k z_k\right\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}} \leqslant \operatorname{diam}_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}}\{z_m\}_m = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

To oznacza, że $\lim_m \operatorname{dist}_{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}}}(z_{m+1}, \operatorname{conv}\{z_1, ..., z_m\}) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$ i dlatego ciąg $\{z_m\}_m \subset X$ jest diametralny w $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$. Z twierdzenia 1.38 dostajemy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$ nie ma struktury normalnej dla $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. $\square$

Przy powyższych założeniach o α, β, p i $\tilde{\mathfrak{F}}$ z naszych dotychczasowych rezultatów wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 17.3. *Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ będzie nieskończenie wymiarową i refleksywną przestrzenią Banacha. Jeśli przestrzeń $(X, \|\cdot\|_X)$ ma słabą własność Opiala, to istnieje równoważna norma $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}}$, taka że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$ zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.*

Dowód. Z twierdzenia 1.52 wynika, że istnieje zbiór Γ_1, taki że $\Gamma_1 \cap \mathbb{N} = \emptyset$ oraz różnowartościowy i ograniczony operator liniowy T przekształcający X w $c_0(\Gamma_1)$. Niech $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ będzie standardową bazą przestrzeni $c_0(\Gamma_1)$ i niech $\{e^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ będzie rodziną biortogonalnych funkcjonałów związanych z tą bazą, to znaczy $e^*_\gamma(y) = y^\gamma$ dla każdego $y = \{y^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1} \in c_0(\Gamma_1)$ oraz

$$e^*_\gamma(e_{\gamma\prime}) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \gamma = \gamma\prime \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

dla $\gamma, \gamma\prime \in \Gamma_1$. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że dla każdego $\gamma \in \Gamma_1$ istnieje punkt $x \in X$, taki że $e^*_\gamma(Tx) \neq 0$. Następnie weźmy $0 < s < 1$ i połóżmy $\{\tilde{f}^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1} = \{se^*_\gamma \circ T\}_{\gamma\in\Gamma_1}$. Wtedy $\{\tilde{f}^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ jest rodziną niezerowych funkcjonałów w X^*, które rozdzielają punkty w X. Załóżmy dodatkowo, że $0 < s < 1$ jest tak małe, że rodzina $\{\tilde{f}^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ jest ograniczona w normie $\|\cdot\|_{X^*}$ przez $\frac{1}{2}$. Dla każdego $x \in X$ i każdego $\epsilon > 0$ zbiór $\{\gamma \in \Gamma_1 : |\tilde{f}^*_\gamma(x)| > \epsilon\}$ jest skończony.

Niech teraz $\Gamma = \Gamma_1 \cup \mathbb{N}$. Dla $\gamma \in \mathbb{N}$ funkcjonał $\tilde{f}^*_\gamma$ jest zadany wzorem (17.4). Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ z rodziną $\tilde{\mathfrak{F}} = \{\tilde{f}^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ spełnia założenia twierdzeń 17.1 i 17.2. Dlatego przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$ ma własność Opiala i nie ma struktury normalnej. Na podstawie twierdzenia 6.5 dostajemy więc, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$ zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.

□

Uwaga 17.4. Nie wiemy, czy każda nieskończenie wymiarowa i refleksywna przestrzeń Banacha ma równoważną normę ze słabą własnością Opiala i to pokazuje kres możliwości zastosowania metody dowodowej opartej na normie typu Daya.

Zakładając dodatkowo, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_X)$ ma własność Kadeca-Klee'ego oraz że dla ciągu $\beta = \{\beta_j\}_j$ istnieją stała $L > 1$ i ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_n\}_n$, takie że $\sum_{j=j_n+1}^{\infty} \beta_j^p \leqslant L\beta_{j_n+1}^p$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy następujące twierdzenie, przy czym $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}}$ jest normą określoną w dowodzie twierdzenia 17.3.

Twierdzenie 17.5. *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_X)$ jest nieskończenie wymiarową i refleksywną przestrzenią Banacha, która ma własność Kadeca-Klee'ego. Jeśli rodzina funkcjonałów $\{\tilde{f}^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ rozdziela punkty w przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$, to przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$ jest lokalnie jednostajnie wypukła.*

Dowód. Załóżmy, że dany jest ciąg $\{x_n\}_n \subset X$ i element $x \in X$, takie że $\|x\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}} = 1$, $\lim_n \|x_n\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}} = 1$ oraz $\lim_n \|x + x_n\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}} = 2$. Stąd mamy, że $|||u(x)|||_{\beta,p} = 1$, $\lim_n |||u(x_n)|||_{\beta,p} = 1$ oraz $\lim_n |||u(x + x_n)||| = 2$. Z lematu 5.1 mamy

$$2 = |||u(x)|||_{\beta,p} + \lim_n |||u(x_n)|||_{\beta,p} \geqslant \limsup_n |||u(x) + u(x_n)|||_{\beta,p} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_n |||u(x) + u(x_n)|||_{\beta,p} \geqslant \lim_n ||||u(x + x_n)|||_{\beta,p} = 2,$$

a to oznacza, że $\lim_n |||u(x) + u(x_n)|||_{\beta,p} = 2$. Z lokalnej jednostajnej wypukłości przestrzeni $(c_0(\Gamma), |||\cdot|||_{\beta,p})$ wynika więc zbieżność ciągu $\{u(x_n)\}_n$ do $u(x)$ w normie $|||\cdot|||_{\beta,p}$. Ponieważ

$$\beta_1 \|u(x) - u(x_n)\|_{c_0(\Gamma)} \leqslant |||u(x) - u(x_n)|||_{\beta,p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \|u(x) - u(x_n)\|_{c_0(\Gamma)}$$

i

$$\|u(x) - u(x_n)\|_{c_0(\Gamma)} \geqslant \alpha \max \left\{ |\|x\|_X - \|x_n\|_X|, \sup \left\{ |u_\gamma(x) - u_\gamma(x_n)| : \gamma \in \Gamma_1 \right\} \right\},$$

to $\lim_n \|x_n\|_X = \|x\|_X$ i $\lim_n \tilde{f}_\gamma^*(x_n) = \tilde{f}_\gamma^*(x)$ dla każdego $\gamma \in \Gamma_1$. Z tego, że ciąg funkcjonałów $\{\tilde{f}_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma_1} \subset X^*$ rozdziela punkty w $(X, \|\cdot\|_X)$, przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$ jest refleksywna i $\lim_n \tilde{f}_\gamma(x_n) = \lim_n \tilde{f}_\gamma(x)$ dla $\gamma \in \Gamma$ wynika, że ciąg $\{x_n\}_n$ jest słabo zbieżny do x. Korzystając z własności Kadeca-Klee'ego przestrzeni $(X, \|\cdot\|_X)$ otrzymujemy, że $\lim_n x_n = x$ w $(X, \|\cdot\|_X)$ i dlatego ciąg $\{x_n\}_n$ jest również zbieżny do x w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}})$. □

Możemy teraz udowodnić, że każda nieskończenie wymiarowa i refleksywna przestrzeń Banacha ze słabą własnością Opiala i własnością Kadeca-Klee'ego może być równoważnie przenormowana do lokalnie jednostajnie wypukłej przestrzeni, która zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.

Twierdzenie 17.6. *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_X)$ jest nieskończenie wymiarową i refleksywną przestrzenią Banacha, która ma słabą własność Opiala i własność Kadeca-Klee'ego. Wtedy istnieje równoważna norma $\|\cdot\|_0$, taka że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ jest LUR i zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem.*

Dowód. Załóżmy, że $1 < p < \infty$, $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ i ciąg $\beta = \{\beta_j\}_j$ jest ciągiem ściśle malejącym o wyrazach dodatnich, takim że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^p$ jest zbieżny. Dodatkowo zakładamy, że istnieją stała $L > 1$ i ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_n\}_n$, takie że $\sum_{j=j_n+1}^{\infty} \beta_j^p \leqslant L\beta_{j_n+1}^p$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Konstruujemy rodzinę niezerowych funkcjonałów $\{\tilde{f}_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma}$ w X^* jak w dowodzie twierdzenia 17.3 i kładziemy $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\alpha,\beta,p,\tilde{\mathfrak{F}}}$. Wtedy z twierdzenia 17.3 dostajemy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ zawiera zbiór diametralnie zupełny z pustym wnętrzem, a następnie z twierdzenia 17.5 otrzymujemy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ jest LUR. □

Dodatek 3
Słaba własność Opiala

Stosując metodę podobną do metody D. van Dulsta ([27]) możemy udowodnić twierdzenie o istnieniu równoważnej normy ze słabą własnością Opiala w nieośrodkowej przestrzeni Banacha . Dowód twierdzenia D. van Dulsta o istnieniu równoważnej normy z własnością Opiala opiera się silnie na założeniu ośrodkowości przestrzeni Banacha i uniwersalności przestrzeni $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_C)$, która ma bazę Schaudera, ale nie ma bezwarunkowej bazy Schaudera (patrz twierdzenia 1.49 i 9.10). Aby więc osiągnąć nasz wynik w przypadku nieośrodkowych przestrzeni Banacha musimy dodatkowo założyć istnienie rozszerzonej bazy bezwarunkowej.

Twierdzenie 18.1. *Każda nieośrodkowa przestrzeń Banacha $(X,\|\cdot\|)$ z rozszerzoną bazą bezwarunkową ma równoważną normę $||\cdot||_0$, taką że przestrzeń $(X,||\cdot||_0)$ ma słabą własność Opiala.*

Dowód. Załóżmy, że $\{x_i\}_{i\in I}$ jest rozszerzoną bazą bezwarunkową w $(X,\|\cdot\|)$. Połóżmy $P_\emptyset = 0$ i określmy normę $\|\cdot\|_0$ w następujące sposób

$$\|x\|_0 = \sup_{A\in\mathcal{A}_1(I)\cup\{\emptyset\}} \|(I-P_A)x\|$$

dla każdego $x\in X$, gdzie $I : X\to X$ jest odwzorowaniem identycznościowym. Wtedy mamy

$$\|x\| \leqslant \|x\|_0 \leqslant (1+K)\|x\|$$

dla każdego $x\in X$, gdzie K jest stałą bazową naszej bazy. Następnie dla każdego $B\in\mathcal{A}_1(I)\cup\{\emptyset\}$ i każdego $x\in X$ otrzymujemy

$$\|(I-P_B)x\|_0 = \sup_{A\in\mathcal{A}_1(I)\cup\{\emptyset\}} \|(I-P_A)(I-P_B)x\| = \sup_{A\in\mathcal{A}_1(I)\cup\{\emptyset\}} \|(I-P_{A\cup B})x\| \tag{18.1}$$

$$\leqslant \sup_{A\in\mathcal{A}_1(I)\cup\{\emptyset\}} \|(I-P_A)x\| = \|x\|_0.$$

Załóżmy teraz, że ciąg $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset X$ jest słabo zbieżny do 0. Wtedy dla każdego $B\in\mathcal{A}_1(I)$ mamy

$$\lim_j \|P_B y_j\|_0 = 0$$

i dlatego dostajemy

$$\limsup_j \|y_j\|_0 = \limsup_j \|(I - P_B)y_j\|_0. \tag{18.2}$$

Następnie weźmy dowolne $y \in X \setminus \{0\}$ i $\epsilon > 0$. Wtedy istnieje zbiór $B_0 \in \mathcal{A}(I)$, taki że

$$\|(I - P_{B_0})y\|_0 < \epsilon. \tag{18.3}$$

Z (18.1) - (18.3) otrzymujemy

$$\limsup_j \|y_j - y\|_0 \geqslant \limsup_j \|(I - P_{B_0})(y_j - y)\|_0 \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_j \|(I - P_{B_0})y_j\|_0 - \|(I - P_{B_0})y\|_0 >$$
$$> \limsup_j \|(I - P_{B_0})y_j\|_0 - \epsilon = \limsup_j \|y_j\|_0 - \epsilon.$$

Ponieważ $\epsilon > 0$ było wybrane dowolnie, to ostatecznie mamy

$$\limsup_j \|y_j - y\|_0 \geqslant \limsup_j \|y_j\|_0.$$

$\square$

Dodatek 4

Drugi dowód twierdzenia 13.1 o istnieniu w nieośrodkowej przestrzeni Banacha zbioru o stałej szerokości z pustym wnętrzem

W tym dodatku pokażemy, jak modyfikując dowód twierdzenia 2.1 podany w [67] można bezpośrednio udowodnić twierdzenie 13.1.

Twierdzenie 19.1. *Każda nieośrodkowa przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ z rozszerzoną bazą bezwarunkową ma równoważną normę $\|\cdot\|_0$, taką że przestrzeń $(X, \|\cdot\|_0)$ zawiera zbiór o stałej szerokości z pustym wnętrzem.*

Dowód. Załóżmy, że $\{x_i\}_{i\in I}$ jest rozszerzoną bazą bezwarunkową w $(X, \|\cdot\|)$ i K jej stałą bazową. Wtedy w X mamy naturalny częściowy porządek określony w następujący sposób: $x = \sum_{i\in I} a^i x_i \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^i \geqslant 0$ dla każdego $i \in I$. Oznaczmy teraz dodatni stożek w X przez C^+ i połóżmy $S^+ = \overline{B_{\|\cdot\|}(0,1) \cap C^+}$. Wtedy S^+ jest niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym zbiorem o pustym wnętrzu (patrz przykład 6.2). Pokażemy, że

$$\frac{1}{K}\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} \subset S^+ - S^+.$$

Jeśli $x = \sum_{i\in I} a^i x_i \in \overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)}$, to z bezwarunkowości naszej bazy dostajemy, że sumy $x = \sum_{i\in I} a^i_+ x_i$ i $x = \sum_{i\in I} a^i_- x_i$ są zbieżne odpowiednio do $x^+ \in KS^+$ i $x^- \in KS^+$, gdzie $a^i_+ = \max\{a^i, 0\}$ i $a^i_- = \max\{-a^i, 0\}$ dla $i \in I$. Oczywiście $x = x^+ - x^- \in S^+ - S^+$. Oznacza to, że symetryczny, ograniczony i wypukły zbiór $S^+ - S^+$ ma niepuste wnętrze i zbiór $\overline{S^+ - S^+}$ generuje równoważną normę $\|\cdot\|_0$ przy której zbiór $\overline{S^+ - S^+}$ jest jednostkową kulą domkniętą $\overline{B_{\|\cdot\|_0}(0,1)}$. Z twierdzenia 10.2 wynika, że w $(X, \|\cdot\|_0)$ zbiór S^+ jest zbiorem o stałej szerokości i ma puste wnętrze. $\square$

Literatura

[1] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, 233, Springer, New York 2006.

[2] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math. (2) 88, 35–46.

[3] S. A. Argyros, P. Motakis, *The scalar-plus-compact property in spaces without reflexive subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2019), 1887–1924.

[4] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides, G. López Acedo, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, Birkhäuser, 1997.

[5] J. B. Baillon, R. Schöneberg *Asymptotic normal structure and fixed points of nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 257–264.

[6] S. Banach, *Théorie des opérations linéaries*, Warszawa, 1932.

[7] S. Banach, H. Steinhaus, *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fund. Math. 9 (1927), 50–61.

[8] C. Bessaga, A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. 17 (1958), 151–164.

[9] C. Bessaga and A. Pełczyński, *A generalization of results of R.C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, Studia Math. 17 (1958), 165–174.

[10] R. P. Boas, Jr., *Some uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 304–311.

[11] M. S. Brodskii, D. P. Mil'man, *On the center of a convex set*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 59 (1948), 837–840.

[12] M. Budzyńska, A. Grzesik, M. Kot, *The generalized Day norm. Part I. Properties*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 71 (2017), 33–49.

[13] M. Budzyńska, A. Grzesik, M. Kot, *The generalized Day norm. Part II. Applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 71 (2017), 51–62.

[14] M. Budzyńska, A. Grzesik, W. Kaczor, T. Kuczumow, *Schauder bases and diametrically complete sets with empty interior*, J. Math. Anal. Appl. 463 (2018), 452–460.

[15] M. Budzyńska, W. Kaczor, M. Kot, T. Kuczumow, *Schauder bases, LUR Banach spaces and diametrically complete sets with empty interior*, J. Nonlinear Conv. Anal. 20 (2019), 199 – 214.

[16] M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, M. Walczyk, *Existence of diametrically complete sets with empty interior in reflexive and separable Banach spaces*, J. Funct. Anal. 278 (2020), 452 – 460.

[17] L. Caspani, P.L. Papini, *On constant width sets in Hilbert spaces and around*, J. Convex Anal. 22 (2015), 889-900

[18] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Mathematics and its Applications, 62, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[19] J. A. Clarkson, *Unifomly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1936), 396–414.

[20] W. J. Davis, W. B. Johnson, *A renorming of nonreflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 486–488.

[21] M. M. Day, *Strict convexity and smoothness of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 516–528.

[22] M. M. Day, R. C. James, S. Swaminathan,*Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction*, Canad. J. Math. 23 (1971), 1051–1059.

[23] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 64, Longman Scientific & Technical, 1993.

[24] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces – selected topics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485, Springer, 1975.

[25] P. G. Dodds, T. K. Dodds, A. A. Sedaev, F. A. Sukochev, *Local uniform convexity and Kadec-Klee type properties in K-interpolation spaces. I: General theory*, J. Funct. Spaces Appl. 2 (2004), 125–173.

[26] T. Domínguez Benavides, P. L. Papini, *Simple problems on maximal and minimal convex sets, trivial or nontrivial solutions*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (2017), 113–122.

[27] D. van Dulst,*Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. London Math. Soc. (2) 25 (1982), 139–144.

[28] D. van Dulst, B. Sims, *Fixed points of nonexpansive mappings and Chebyshev centers in Banach spaces with norms of type (KK)*, Banach space theory and its applications (Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math. 991, Springer, 1983, 35–43.

[29] H. G. Eggleston, *Sets of constant width in finite-dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. 3 (1965), 163–172.

[30] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. 130 (1973), 309-317.

[31] A. L. Garkavi, *On the optimal net and best cross-section of a set in a normed space* (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 26 (1962), 87–106.

[32] K. Goebel, W. A. Kirk, *T*opics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, 1990.

[33] K. Goebel, S. Reich, *U*niform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings, Marcel Dekker, 1984.

[34] J. P. Gossez, E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. 40 (1972), 565–573.

[35] W. T. Gowers, *A Banach space not containing* c_0*,* l_1 *or a reflexive subspace* Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994), 407 – 420.

[36] W. T. Gowers, B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851-874.

[37] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*, Canad. J. Math. 5 (1953), 129–173.

[38] Handbook of Convex Geometry, Vols. A, B (P. M. Gruber, J. M. Wills, Editors), North-Holland, Amsterdam, 1993.

[39] Handbook of Metric Fixed Point Theory (W. A. Kirk, B. Sims, Editors), Kluwer Academic Publishers, 2001.

[40] O. Hanner, *On the uniform convexity of* L^p *and* l^p, Ark. Mat. 3 (1956), 239–244.

[41] Ch. Heil, *A Basis Theory Primer. Expanded Edition*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser/Springer, New York, 2011.

[42] R. B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1975.

[43] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. 52 (1950), 518–527.

[44] R. C. James, *Bases in Banach spaces*, Amer. Math. Monthly 89 (1982), 625-640.

[45] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. I, 184, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[46] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal, *On ω^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces*, Studia Math. 43 (1972), 77–92.

[47] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, cz. 1. Liczby rzeczywiste, ciągi i szeregi liczbowe*, PWN, Warszawa 2005.

[48] W. Kaczor, T. Kuczumow, S. Reich, M. Walczyk, *Renormings of nonseparable reflexive Banach spaces and diametrically complete sets with empty iterior*, Taiwanesse J. Math. 25 (2021), 743-755.

[49] W. Kaczor, T. Kuczumow, S. Reich, *Diametrically complete sets with empty interior in reflexive Banach spaces with the nonstrict Opial property*, J. Nonlinear Conv. Anal. 20 (2019), 1981–1986.

[50] M. I. Kadec, *On the connection between weak and strong convergence*, Dopovidi Akad. Nauk Uktain. RSR 9 (1959), 949–952.

[51] M. I. Kadec, *On strong and weak convergence*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 122 (1958), 13–16.

[52] M. I. Kadec, *Spaces isomorphic to a locally uniformly convex spaces*, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 6 (1959), 51–57.

[53] S. Karlin, *Bases in Banach spaces*, Duke Math. J. 15 (1948), 971–985.

[54] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004–1006.

[55] V. L. Klee, *Mappings into normed linear spaces*, Fund. Math. 49 (1960/1961), 25–34.

[56] *Księga Szkocka*, http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/pdf/ks-szkocka/ks-szkocka1pol.pdf.

[57] I. E. Leonard, J.E. Lewis, *Geometry of Convex Sets*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2016.

[58] Å Lima, *On M-ideals and best approximation*, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 27-36.

[59] P. K. Lin, *Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. 116 (1985), 69–76.

[60] J. Lindenstrauss, On nonseparable reflexive Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 967-970.

[61] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I and II*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1996.

[62] E. R. Lorch, *Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 564–569.

[63] A. R. Lovaglia, *Locally uniformly convex Banach spaces*, Trans. Amer Math. Soc. 78 (1955), 225–238.

[64] E. Maluta, *A diametrically complete set with empty interior in a reflexive LUR space*, J. Nonlinear Conv. Anal. 18 (2017), 105–111.

[65] E. Maluta, *Diametral points and diametral pairs in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 494 (2021), 124648, 10 pp.

[66] E. Maluta, P. L. Papini, *Diametrically complete sets and normal structure*, J. Math. Anal. Appl. 424 (2015), 1335–1347.

[67] E. Maluta, D. Yost, *Thin sets of constant width*, J. Math. Anal. Appl. 469 (2019), 1080–1087.

[68] S. A. Mariadoss, P. M. Soardi, *A remark on asymptotic normal structure in Banach spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 44 (1986), 393–395.

[69] H. Martini, P. L. Papini, M. Spirova, *Complete sets and completion of sets in Banach spaces*, Monatsh. Math. 174 (2014), 587–597.

[70] B. Maurey, H. P. Rosenthal, *Normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence*, Studia Math. 61 (1977), no. 1, 77–98.

[71] E. Meissner, *Über Punktmengen konstanter Breite*, Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich 56 (1911), 42–50.

[72] V. D. Mil'man, *Geometric theory of Banach spaces. I. Theory of basic and minimal systems*, Uspehi Mat. Nauk 25 (1970), 113–174, Russian Math. Surveys 25 (1970), 111–170.

[73] V. D. Milman, *Geometric theory of Banach spaces. II. Geometry of the unit ball*, Uspehi Mat. Nauk 26 (1971), 73–149, Russian Math. Surveys 26 (1971), 79–163.

[74] J. P. Moreno, P. L. Papini, R. R. Phelps, *Diametrically maximal and constant width sets in Banach spaces*, Canad. J. Math. 58 (2006), 820–842.

[75] J. P. Moreno, P. L. Papini, R. R. Phelps, *New families of convex sets related to diametrical maximality*, J. Convex Anal. 13 (2006), 823–837.

[76] J. P. Moreno, R. Schneider, *Local Lipschitz continuity of the diametric completion mapping*, Houston J. Math. 38 (2012), 1207–1223

[77] J. P. Moreno, R. Schneider, *Some geometry of convex bodies in C(K) spaces*, J. Math. Pures Appl. 103 (2015), 352-373.

[78] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591–597.

[79] R. Payá, A. R. Palacios, *Banach spaces which are semi-L-summands in their biduals*, Math. Ann. 289 (1991), 529–542.

[80] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), 209–228.

[81] A. Pełczyński, *On the impossibility of embedding of the space L in certain Banach spaces*, Colloq. Math. 8 (1961), 199–203.

[82] A. M. Plichko, *Banach spaces without the Kadec H-property (solution of a problem from the "Scottish Book")*, Math. Stud. 7 (1997), 59–60.

[83] J. Rainwater, *Local uniform convexity of Day's norm on* $c_0(\Gamma)$, Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), 335–339.

[84] M. Raja, *Locally uniformly rotund norms*, Mathematika 46 (1999), 343–358.

[85] J. Schauder, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Z. 26 (1927), 47–65.

[86] J. Schauder, *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*, Math. Z. 28 (1928), 317–320.

[87] I. Singer, *Bases in Banach spaces, I*, Springer, 1970.

[88] I. Singer, *Bases in Banach spaces, II*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.

[89] M. A. Smith, *Some examples concerning rotundity in Banach spaces*, Math. Ann. 233 (1978), 155–161.

[90] M. A. Smith, B. Turett, *A reflexive LUR Banach space that lacks normal structure*, Canad. Math. Bull. 28 (1985), 492–494.

[91] A. Sobczyk, *Projection of the space* (m) *on its subspace* (c_0), Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 938–947.

[92] S. J. Szarek,*A Banach space without a basis which has the bounded approximation property*, Acta Math. 159 (1987), 81–98.

[93] *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café with selected problems from the new Scottish Book. Second Edition. Including selected papers presented at the Scottish Book Conference held at North Texas University*, Denton, TX, May 1979. Edited by R. Daniel Mauldin. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[94] S. L. Troyanski, *On a property of the norm which is close to local uniform convexity*, Math. Ann. 271 (1985), 305–313.

[95] S. L. Troyanski, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces*, Studia Math. 37 (1971), 173–180.

[96] W. A. Veech, *Short proof of Sobczyk's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 627–628.

[97] M. Wójtowicz, *Effective constructions of separable quotients of Banach spaces*, Collect. Math. 48, 4–6 (1997), 809–815.

[98] Zizler, V. *On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces*, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 87 (1971).