Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Agnieszka Monika Gdula

Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sum zmiennych losowych i pól losowych

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dra hab. Andrzeja Krajki

Lublin 2021

Składam serdeczne podziękowania
Panu dr.hab Andrzejowi Krajce
za poświęcony czas, nieocenioną pomoc w opracowaniu
niniejszej pracy oraz okazaną życzliwość.

Spis treści

Wykaz skrótów

CTG	Centralne Twierdzenie Graniczne (*Central Limit Theorem*)	16
MPWL	Mocne Prawo Wielkich Liczb (*Strong Law of Large Numbers*)	9–16, 19, 36, 37, 39, 52, 53, 65, 77
PIL	Prawo Iterowanego Logarytmu (*Law of Iterated Logarithm*)	16
PPCTG	Prawie Pewne Centralne Twierdzenie Graniczne (*Almost Sure Central Limit Theorem*)	15, 65, 66
SPWL	Słabe Prawo Wielkich Liczb (*Weak Law of Large Numbers*)	9

Wykaz oznaczeń

$G_{\alpha,\beta,\gamma,\theta}$	dystrybuanta rozkładu stabilnego z parametrami $\alpha \in (0,2], \beta \in [-1,1], \gamma \in \mathbb{R}, \theta > 0$	17, 73
$I[A]$	indykator zdarzenia A	15, 65
$Lip(\mathbb{R})$	klasa funkcji Lipschitzowskich w $\mathbb{R}$	68
$N(\mu,\sigma)$	rozkład normalny z parametrami μ i σ	17, 74
$T_V(x)$	suma czynników Dirichleta (*divisor summatory function*)	20, 78
V_θ	sektor w $\mathbb{N}^d$	19, 78
$X \sim Y$	X i Y mają ten sam rozkład	16, 17, 31, 47–49, 74
$X_n \xrightarrow{D} X$	zbieżność słaba (*convergence in distribution, weakly convergence*)	9
$X_n \xrightarrow{P} X$	zbieżność wg. prawdopodobieństwa (*convergence in probability*)	9
$X_n \xrightarrow{komp.} X$	zbieżność kompletna (*complete convergence*)	10, 77
$X_n \xrightarrow{p.p.} X$	zbieżność prawie pewna (*almost sure convergence*)	10
$\Delta[x(\underline{n})]$	pole przyrostów pola $x(\underline{n})$	56
Φ	dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego	17, 65, 73–75
$\overline{f}$	$\overline{f}(x) = \sup_{0\leqslant u\leqslant x} f(u)$	21, 22
$\underline{f}$	$\underline{f}(x) = \inf_{u\geqslant x} f(u)$	21, 22
$\underline{k} \prec \underline{n}$	porządek diagonalny w $\mathbb{N}^d$	82
$\partial\triangle_f$	$\mathbb{N}^2$ - brzeg grafu	22
$\pi(X,Y)$	metryka Ky-Fana	17, 68, 75
$\overset{def.}{\equiv}$	definicja pojęcia	9, 10, 16, 17, 69
$\tau_V(n)$	czynnik Dirichleta (*divisor function*)	20, 78
$n.w.$	zajdzie nieskończenie wiele zdarzeń (*infinitely often*)	59
$x \vee y$	$\max\{x,y\}$	16
$x \wedge y$	$\min\{x,y\}$	16

$x_n \asymp y_n$	$x_n = O(y_n)$ oraz $y_n = O(x_n)$	20
$x_n \cong y_n$	$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$	16, 17
$\lvert A\rvert$	moc zbioru A	12, 53
$\lvert\underline{n}\rvert$	moc zbioru $\{\underline{k} \in \mathbb{N}^d : \underline{k} \leqslant \underline{n}\}$	14, 17, 61

Wstęp

Prawa Wielkich Liczb jest to grupa twierdzeń w rachunku prawdopodobieństwa, które opisują związki podstawowych pojęć probabilistycznych z ich intuicyjnymi oszacowaniami występującymi w zastosowaniach praktycznych. Do takich pojęć należą np. prawdopodobieństwo i jego intuicyjny estymator - częstość względna (statystyczna defnicja prawdopodobieństwa Richarda von Misesa) oraz wartość oczekiwana i jej estymator - średnia arytmetyczna z próby.

Matematykiem, który po raz pierwszy zasugerował Prawo Wielkich Liczb, był Gerolamo Cardano (1501-1576). Stwierdził on, że *dokładność statystyki empirycznej ma tendencję do zwiększania się wraz z liczbą prób.* Po raz pierwszy Prawo Wielkich Liczb dla binarnych zmiennych losowych udowodnił Jacob Bernoulli [7]. Nazwał ten wynik *złotym twierdzeniem*, ale powszechnie w tym czasie przyjęła się nazwa - *twierdzenie Bernoulliego.* Pierwszy nazwę Prawo Wielkich Liczb wprowadził S. D. Poisson. Wielu matematyków kontynuowało badania Bernouilliego i Poissona. W szczególności Chińczyn A. I. [31] w 1929 roku wykazał, że jeśli szereg składa się z niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach, to wystarczy, że istnieje wartość oczekiwana na to, aby Prawo Wielkich Liczb ze zbieżnością według prawdopodobieństwa było prawdziwe. Od tego czasu Prawa Wielkich Liczb rozdzieliły się na dwie formy:

- ⋆ Słabe Prawo Wielkich Liczb (SPWL), gdzie dowodzi się zbieżności wg. prawdopodobieństwa znormalizowanych sum.

- ⋆ Mocne Prawo Wielkich Liczb (MPWL), gdzie dowodzi się zbieżności prawie pewnej znormalizowanych sum.

Zbieżność słaba, według prawdopodobieństwa, prawie pewna i kompletna ciągu zmiennych losowych $\{X_n,\, n \geqslant 1\}$ do zmiennej losowej X oznaczają odpowiednio,

$$X_n \xrightarrow{D} X \quad \overset{def.}{\equiv} \quad \forall_{x\in\mathbb{R}:P[X=x]=0} \quad \lim_{n\to\infty} P[X_n < x] = P[X < x],$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \overset{def.}{\equiv} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| \geqslant \varepsilon] = 0,$$

$$X_n \xrightarrow{p.p.} X \quad \overset{def.}{\equiv} \quad P[\lim_{n\to\infty} X_n = X] = 1,$$

$$X_n \xrightarrow{komp.} X \quad \overset{def.}{\equiv} \quad \forall_{\varepsilon>0} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty.$$

W tej pracy zajmować się będziemy tylko Mocnym Prawem Wielkich Liczb, dlatego na początku przypomnijmy klasyczny wynik MPWL, tj. Twierdzenie Kołmogorowa.

Twierdzenie 1 (Kołmogorow [35]). *Załóżmy, że* $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ *jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.*

(a) Jeżeli $E|X| < \infty$, *to*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.p.} EX, \quad gdy \quad n \to \infty.$$

(b) Jeżeli $E|X|$ *nie istnieje, to*

$$P\left[\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| = \infty\right] = 1,$$

gdzie

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uwaga 1. *Zwróćmy uwagę, że Twierdzenie 1 dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie ustanawia równoważność dwóch warunków:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p.p.} EX \tag{1}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > n] < \infty, \tag{2}$$

ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > n] \leqslant E|X| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > n]$.

Pierwsze uogólnienia Twierdzenia 1 również należą do Kołmogorowa ([35] oraz [49]) i polegają na opuszczeniu założeń o jednakowym rozkładzie i rozważaniu ogólniejszych ciągów normujących.

Twierdzenie 2 (Kołmogorow [35]). *Jeżeli* $\{a_n, n \geqslant 1\}$ *jest rosnącym do nieskończoności ciągiem liczb dodatnich,* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *jest ciągiem niezależnych całkowalnych z kwadratem zmiennych losowych oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{a_n} < \infty,$$

to

$$\frac{S_n - ES_n}{a_n} \xrightarrow{p.p.} 0, \qquad gdy \quad n \to \infty.$$

Z kolei Twierdzenie 1 oraz Uwagę 1 w tym samym kierunku uogólnili Marcinkiewicz i Zygmund:

Twierdzenie 3 (Prawo Wielkich Liczb Marcinkiewicza-Zygmunda [37])**.** *Jeżeli* $\{X, X_n,\ n \geqslant 1\}$ *jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, to następujące warunki są równoważne:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^{1/p}} \xrightarrow{p.p.} EX \tag{3}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > n^{1/p}] < \infty \quad \text{ i jeśli } \quad p > 1, \text{ to } EX = 0. \tag{4}$$

Natomiast dla zmiennych losowych o różnych rozkładach odsyłamy do wyników Brunka [8].

Wśród ogromnej liczby wyników dotyczących MPWL możemy wyróżnić następujące uogólnienia przedstawionych dotąd wyników:

(i) Rozważane są różne operacje sumowania zmiennych losowych. Mogą to być losowo indeksowane sumy, sumy dla podciągów, sumy ważone, jak na przykład sumy średnich arytmetycznych itp.

(ii) Rozważane są różne typy ciągów normujących i centrujących.

(iii) Rozważane są różne typy zależności pomiędzy zmiennymi losowymi, np. zależność typu mixing, martyngały czy zmienne losowe dodatnio lub ujemnie kwadrantowo zależne. Szczególnym rodzajem MPWL jest Prawie Pewne Centralne Twierdzenie Graniczne, gdzie sumujemy zależne składniki, które są indykatorami pewnych zdarzeń.

(iv) Zamiast zmiennych losowych rozważa się elementy losowe określone na różnych przestrzeniach (np. elementy losowe określone na przestrzeni Banacha).

(v) Zamiast ciągów zmiennych losowych i ich sum rozważa się ich ciągłe odpowiedniki, tj. procesy stochastyczne i ich całki. Tego typu uogólnienie nazywa się często Twierdzeniem Ergodycznym. Pojęcie to występuje głównie na gruncie mechaniki statystycznej i zostało zapoczątkowane pracami Boltzmanna i Birkhoffa. Ergodyczność oznacza taki proces, który zmierza do stanu równowagi, a hipoteza ergodyczna to hipoteza według której średnia stanów zespołu obiektów jest równa średniej jednego obiektu w długim okresie czasu. Dla układów dyskretnych Twierdzenie Ergodyczne staje się zwykłym Mocnym Prawem Wielkich Liczb.

(vi) Podaje się oszacowania szybkości zbieżności w Mocnym Prawie Wielkich Liczb.

W niniejszej pracy koncentrujemy się na uogólnieniach typu (i),(ii),(iii) i (vi), dlatego opiszemy dalej te uogólnienia bardziej szczegółowo.

Dla ciągu niezależnych zmiennych losowych $\{X_n, n \geqslant 1\}$ definiujemy ich sumy jako $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, n \geqslant 1$, dla ciągu zależnych zmiennych losowych $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ definiujemy podobnie sumy $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, n \geqslant 1$. Niech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Przez zbiór losowy A rozumiemy mierzalne odwzorowanie $A : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$. Czasem rozważać będziemy zbiory losowe przyjmujące wartości w podzbiorach d-wymiarowej kraty $\mathbb{N}^d$, $1 < d < \infty$. Oczywiście, dla tak określonego zbioru losowego $|A|$ jest zmienną losową, gdzie przez $|A| = \overline{\overline{A}} = \mathfrak{card}(A)$ wszędzie w tej pracy oznaczamy liczebność (moc) zbioru A. Jeśli A i B są zbiorami losowymi, to oczywiście również zbiorami losowymi są $A \cup B, A \cap B, A \backslash B$. Więcej na temat zbiorów losowych czytelnik znajdzie w klasycznej książce Matherona [39] lub bardziej współczesnych pozycjach książkowych Molchanova [41] oraz Nguyena [42]. Dla ciągu zbiorów losowych $\{A_n, n \geqslant 1\}$ oraz ciągu zmiennych losowych $\{X_n, n \geqslant 1\}$ możemy zdefiniować ciąg sum $S(A_n) = \sum_{i \in A_n} X_i$ z możliwym centrowaniem $\sum_{i \in A_n} EX_i$ lub $E \sum_{i \in A_n} X_i$, $n \geqslant 1$. Analogicznie możemy określić $Z(A_n) = \sum_{i \in A_n} Y_i$, $n \geqslant 1$. Zaznaczmy tylko, że w całej pracy wszystkie rozważane przez nas zbiory losowe mają prawie pewnie ograniczoną liczebność (chociaż czasami to ograniczenie liczebności może dążyć do nieskończoności), dlatego zdefiniowane sumy $S(A_n)$ i możliwe centrowania tych sum są skończone. Niech $\{N_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych przyjmujących wartości w zbiorze liczb naturalnych. Możemy zdefiniować sumy $S_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} X_i$, $n \geqslant 1$ i również rozważać MPWL dla tych sum. Przegląd wyników dla takich sum można znaleźć w książce Allana Guta [19]. Niech $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych dowolnie zależnych i wspólnie ograniczonych przez stałą, ale niezależnych od ciągu niezależnych zmiennych losowych $\{X_n, n \geqslant 1\}$. Możemy wtedy rozważać sumy $S_n(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ z możliwym centrowaniem $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i EX_i$ lub $\sum_{i=1}^{n} E(\alpha_i X_i)$ dla $n \geqslant 1$. Ciąg zmiennych losowych $\{\alpha_n X_n, n \geqslant 1\}$ jest ciągiem zależnych zmiennych losowych, ale o zależności decyduje "ograniczony" składnik α_n.Jeden przypadek wydaje się tutaj szczególnie ważny, gdy $\boldsymbol{\alpha}$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie $P[\alpha_n = 1] = 1 - P[\alpha_n = 0] = p$, gdzie $0 \leqslant p \leqslant 1, n \geqslant 1$. Ciąg taki oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{\epsilon}$ a jego sumy przez $S_n(\boldsymbol{\epsilon}) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i X_i, n \geqslant 1$. Mają one prostą interpretację praktyczną: suma składa się z "zaobserwowanych" ($\epsilon_n = 1$) i "niezaobserwowanych" ($\epsilon_n = 0$) składników. Wspomnijmy jeszcze o wprowadzonych w kontekście MPWL przez Bauma i Strattona ([3] i [4]) sumach "regułowych" (angielski termin "ruled sums"). "Regułą" nazywamy dowolną funkcję $(n) : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$, a sumy po tych "regułach" określamy wzorem $S_{(n)} = \sum_{i \in (n)} X_i, n \geqslant 1$. Aby czytelnikowi uporządkować obraz opiszemy w Uwadze 2 związki występujące pomiędzy tymi rozmaitymi sposobami sumowania dla rozmaitych ciągów.

Uwaga 2. *Zależności różnych operacji sumowania ciągu zmiennych losowych:*

- *Sumy "regułowe" ("rule") $S_{(n)}$ są szczególnym przypadkiem sum $S(A_n)$, gdyż możemy położyć $A_n = (n)$, p.p. dla $n \geqslant 1$.*

- *Sumy losowo indeksowane S_{N_n} są szczególnym przypadkiem sum $S(A_n)$, bo wystarczy położyć $A_n = \{1, 2, 3, \dots N_n\}$. Dla ciągów $\{N_n, n \geqslant 1\}$ prawie pewnie rosnących mamy zbiory losowe $\{A_n, n \geqslant 1\}$ takie, że $A_n \subset A_{n+1}$, p.p. dla $n \geqslant 1$.*

- *Ponieważ ciąg $\boldsymbol{\epsilon}$ jest szczególnym przypadkiem $\boldsymbol{\alpha}$, więc wyniki dla sum $S_n(\boldsymbol{\alpha})$ są uogólnieniem wyników dla sum $S_n(\boldsymbol{\epsilon})$.*

- *Sumy $S_n(\boldsymbol{\epsilon})$ są szczególnym przypadkiem sum $S(A_n)$ ze zbiorami losowymi $\{A_n, n \geqslant 1\}$ takimi, że $A_n \subset A_{n+1}, n \geqslant 1$ oraz $A_n \subset \{1, 2, 3, \dots n\}$. Rzeczywiście, wystarczy położyć $A_n = \{i : 1 \leqslant i \leqslant n, \epsilon_i = 1\}$, zaś oznaczając przez $v_i(\epsilon_i) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jeśli } \epsilon_i = 0, \\ \{i\}, & \text{jeśli } \epsilon_i = 1, \end{cases}$ mamy $A_n = \bigcup_{i=1}^n v_i(\epsilon_i)$.*

- *Jeśli zbiory losowe $\{A_n, n \geqslant 1\}$ są rosnące względem relacji zawierania ($A_n \subset A_{n+1}, n \geqslant 1$), to sumy $S(A_n)$ są szczególnym przypadkiem sum zależnych zmiennych losowych Z_n. Rzeczywiście, wystarczy położyć $A_o = \emptyset, Y_n = \sum_{i \in A_n \setminus A_{n-1}} X_i, n \geqslant 1$. Zależność tak zdefiniowanych zmiennych losowych wynika z zależności zbiorów sumowania.*

Mocne Prawo Wielkich Liczb dla zależnych zmiennych losowych $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ zapoczątkowały prace Serflinga [48] dla ciągów ortogonalnych, dla ciągu różnic martyngałowych Twierdzenie 2.19 [22] oraz praca [52], dla ciągów typu "mixing" prace [25], [26], [27], dla ujemnie kwadrantowo zależnych [40]. Z drugiej strony badano MPWL dla sum Z_n zmiennych losowych dowolnie zależnych, ale o jednakowym rozkładzie ([38], [46]). W tej pracy badamy MPWL dla sum typu $S(A_n)$, $S_n(\boldsymbol{\alpha})$, $S_n(\boldsymbol{\epsilon})$ przy ciągach dowolnie zależnych między sobą zbiorów losowych $\{A_n, n \geqslant 1\}$ czy zmiennych $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\alpha}$, ale zawsze niezależnych od $\{X_n, n \geqslant 1\}$. Tego typy MPWL nie występowały dotąd w literaturze. Ponadto w trzecim rozdziale rozważamy ciągi sum $Z(A_n)$ zmiennych losowych $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ dowolnie zależnych, ale o jednakowym rozkładzie.

Jednym z uogólnień typu (i) jest badanie sumowania wielowymiarowych pól losowych. Tutaj operacje sumowania przebiegają po d-wymiarowej kracie $\mathbb{N}^d = \{\underline{i} = (i_1, i_2, \dots i_d), i_j \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j \leqslant d\}$ (wszędzie w tej pracy d wymiarowe wektory odróżniać będziemy znakiem podkreślenia). Tutaj sumy definiujemy przez $S_{\underline{n}} = \sum_{\underline{1} \leqslant \underline{k} \leqslant \underline{n}} X_{\underline{k}}$, gdzie $\underline{k} \leqslant \underline{n}$ oznacza, że $k_i \leqslant n_i$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant d$ oraz $\underline{1} =$

$(1, 1, \dots 1)$. Dla wielowymiarowych indeksów wprowadzamy też oznaczenie $|\underline{n}| = \prod_{j=1}^{d} n_j$, a rozbieżność $\underline{n} \to \infty$ rozumiemy w sensie minimum $\min\{n_i, 1 \leqslant i \leqslant d\} \to \infty$. Podstawowe wyniki rachunku prawdopodobieństwa dla tego typu sum zostały opisane w książce Olega Klesova [32]. Swój pierwszy rozdział poświęcił on zebraniu wszystkich "paradoksów" pokazujących, że "przeniesienia" klasycznych wyników na wielowymiarowe pola są nietrywialne, a wiele wyników dla takich pól po prostu nie zachodzi (np. Lemat Kroneckera). Pokazuje to trudności przy uogólnianiu MPWL na przypadek pól losowych. Twierdzenie 1 (Uwaga 1) dla pól losowych może być sformułowane następująco:

Twierdzenie 4. *Niech $\{X, X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

$$\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = \mu \tag{5}$$

oraz

$$EX = \mu \quad i \quad E|X|(\log_+ |X|)^{d-1} < \infty, \tag{6}$$

gdzie $\log_+ x = \max\{\log_e x, 0\}$, *co z kolei jest równoważne*

$$EX = \mu \quad i \quad \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} P[|X| > |\underline{n}|] < \infty, \tag{7}$$

gdzie ostatnia równoważność wynika ze specyfiki sumowania po d-wymiarowych kratach (czynnik Dirichleta). Pojawia się pytanie, czy Twierdzenie 1 zachodzi dla różnych obszarów geometrycznych w przestrzeni $\mathbb{N}^d$. Tutaj dla $d = 2$ mamy poniższy wynik:

Twierdzenie 5 (K.-H. Indlekofer and I. O. Klesov, [28])**.** *Dla dowolnych niemalejących funkcji $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takich, że $g(x) \leqslant x \leqslant f(x)$ oznaczmy $A = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 : g(n_1) < n_2 < f(n_1)\}$. Wtedy*

$$\lim_{\substack{\underline{n}\to\infty,\\ \underline{n}\in A}} \frac{\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{n}} X_{\underline{i}}}{|\underline{n}|} = \mu \tag{8}$$

oraz

$$EX = \mu \quad i \quad \sum_{\underline{n}\in A} P[|X| > |\underline{n}|] < \infty. \tag{9}$$

Zwróćmy uwagę na to, że w powyższym twierdzeniu zarówno granica, jak i suma jest zawężona do nieskończonego zbioru $A \subset \mathbb{N}^2$, chociaż suma jest brana po składnikach, które niekoniecznie należą do A. Funkcje f i g wyznaczają ostro brzeg zbioru A. Powstaje zatem pytanie, co dzieje się dla innych obszarów, nawet ograniczonych funkcjami f i g niekoniecznie niemalejącymi. Oczywiście z Twierdzenia 4 wiemy, że dla całego $\mathbb{N}^2$ zachodzi równoważność (8) oraz (9) (z $A = \mathbb{N}^2$). Jak podkreślił anonimowy autor otrzymanej przez nas recenzji *każdy matematyk, który natknie się na jakąś barierę, granicę, powinien się zastanawiać co jest dalej za tą granicą*. Temu zagadnieniu poświęcony jest pierwszy rozdział tej pracy.

Istnieją dwie podstawowe techniki dowodzenia MPWL:

- Pierwsza polega na dowodzeniu pożądanego wyniku dla podciągów i zredukowaniu problemu z całego ciągu do podciągu. W następnym kroku wykorzystujemy maksymalną nierówność dla sum elementów "pomiędzy" podciągami.

- Drugie podejście polega na bezpośrednim zastosowaniu maksymalnej nierówności dla unormowanych sum. Tego typu podejście nazywane jest nierównoś cią typu Hájeka-Rényiego i zostało zapoczątkowane w pracy [21].

W drugim rozdziale, korzystając z drugiej metody dowodzenia Mocnego Prawa Wielkich Liczb, podajemy wyniki dotyczące zbieżności odpowiednio centrowanych i normowanych sum $S(A_n)$ dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach i niezależnego od nich ciągu zbiorów losowych $\{A_n, n \geqslant 1\}$.

Trzeci rozdział pracy poświęcony jest zbieżności $Z(A_{\underline{n}})$, jak również $Z_n(\underline{\boldsymbol{\epsilon}})$ dla d-wymiarowego pola dowolnie zależnych zmiennych losowych, ale o jednakowych rozkładach. Tego typu wyniki, w przypadku jednowymiarowych sum Z_n zostały zapoczątkowane dwoma różnymi twierdzeniami:

* twierdzeniem typu Marcinkiewicz-Zygmunda w pracy Petrova [44],

* twierdzeniem typu Kołmogorowa w pracy Martikainena i Petrova [38],

które uogólnił Stoica i Rosalsky [46]. My w rozdziale trzecim uogólniamy główny wynik tej ostatniej pracy na przypadek sum losowo wybranych zmiennych losowych z pola zmiennych losowych $Z(A_{\underline{n}})$ oraz sum $Z_n(\boldsymbol{\epsilon})$.

PPCTG dotyczy zbieżności sum Z_n specyficznego ciągu $Y_n = \frac{I[S_n < xb_n]}{n}$, ($I[\cdot]$ tutaj i wszędzie w pracy oznacza indykator zdarzenia) normowanych przez $\log_+(n)$, $n \geqslant 1$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą niezależnych zmiennych losowych o różnych rozkładach, zaś $\{b_n, n \geqslant 1\}$ pewnym ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. W rozdziale czwartym, rozważamy zbieżność postaci

$$\frac{1}{D_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} \frac{I[S(A_{\underline{k}}) < xb_{\underline{k}}]}{d_{\underline{k}}} \xrightarrow{p.p.} \mu((-\infty, x]), \quad \underline{n} \to \infty, \tag{10}$$

dla pewnych nieujemnych rzeczywistych pól $\{d_{\underline{n}},\ b_{\underline{n}},\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$, oraz $D_{\underline{n}} \cong \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} d_{\underline{k}}$ i pewnej miary μ.

Szybkość zbieżności w MPWL można badać na kilka sposobów. Przede wszystkim zwróćmy uwagę, że zarówno CTG jak i PIL (Prawo Iterowanego Logarytmu) są ocenami szybkości zbieżności w MPWL. Rzeczywiście, jeżeli $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Y, n \to \infty$, gdzie $Y \sim N(0,1)$ oznacza zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym, to asymptotycznie $\frac{S_n}{n}$ zachowuje się jak $\frac{Y}{\sqrt{n}}$ (chociaż należy tutaj też uwzględnić szybkość zbieżności w CTG). Z drugiej strony, ponieważ zbieżność kompletna jest silniejsza od zbieżności prawie pewnej (leży dość blisko tej zbieżności), wiec można zamiast bezpośrednio badać szybkość zbieżności prawie pewnej (co jest trudne), badać szybkość zbieżności kompletnej (zdecydowanie łatwiejsze). Tak więc, jeżeli zachodzi zbieżność kompletna (zob. str. 10), to znaczy

$$\forall_{\varepsilon>0} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty,$$

to możemy się pytać o to, dla jakich rozbieżnych do nieskończoności ciągów $\{a_n, n \geqslant 1\}$ zachodzi jeszcze zbieżność:

$$\forall_{\varepsilon>0} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n P[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty.$$

Poświęcony jest temu Rozdział 5 pracy. Zwróćmy uwagę tylko, że rozważanym tam ciągiem sum częściowych jest "losowy" proces średniej ruchomej ("moving average"), to znaczy dla tablicy dowolnie zależnych, ale wspólnie ograniczonych zmiennych losowych $\{a_{n,i}, n, i \geqslant 1\}$ oraz ciągu stochastycznie zdominowanych zmiennych losowych $\{X_n, n \geqslant 1\}$ niezależnych od $\{a_{n,i}, n, i \geqslant 1\}$ definiujemy ciąg zależnych zmiennych losowych $Y_n = \sum_{i=1}^{\infty}(a_{n,i} - a_{n-1,i})X_i$ dla $n \geqslant 1$ (dla $n = 0$ kładziemy $a_{n,i} = 0$ dla każdego i) i wtedy badamy MPWL dla sum $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, n \geqslant 1$. Tego typu schemat sumowania był rozważany tylko dla nielosowej tablicy $\{a_{n,i}, n, i \geqslant 1\}$.

Wyniki pierwszego rozdziału są opublikowane w czasopiśmie *Probability and Mathematical Statistics* [13], drugiego rozdziału są przyjęte do druku w czasopiśmie *Lithuanian Mathematical Journal* [16], trzeciego rozdziału znajdują się w recenzji w czasopiśmie *Periodica Mathematica Hungarica* [15] i częściowo zostały przyjęte do druku w [16], wyniki czwarego rozdziału zostały przyjęte do druku w czasopiśmie *Publicationes Mathematicae* [14] natomiast wyniki piątego rozdziału ukazały się w warszawskim czasopiśmie *Demonstratio Mathematica* [12].

Wszędzie w pracy stosować będziemy następujące oznaczenia $x \vee y \overset{def.}{\equiv} \max\{x, y\}$, $x \wedge y \overset{def.}{\equiv} \min\{x, y\}$, $\log_+ x \overset{def.}{\equiv} \max\{\log_e x, 0\}$, zaś $\log x$ oznacza logarytm naturalny oraz rozszerzenia tych oznaczeń na d wymiarowe wektory przez

$\underline{n} \wedge \underline{k} \stackrel{def.}{\equiv} \{n_i \wedge k_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}, \underline{n} \vee \underline{k} \stackrel{def.}{\equiv} \{n_i \vee k_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}, \log \underline{n} \stackrel{def.}{\equiv} \{\log_e(n_i \vee e)), 1 \leqslant i \leqslant d\}$. Jeśli $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots n_d)$, to $|\underline{n}| \stackrel{def.}{\equiv} \prod_{i=1}^d n_i$. Symbolem $N(\mu, \sigma)$ z $\sigma > 0$ oznaczać będziemy zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym σ, przez $\Phi()$ oznaczamy dystrybuantę $N(0,1)$, natomiast dla $\alpha \in (0,2], \beta \in [-1,1], \gamma \in \mathbb{R}$ i $\theta > 0$, $G_{\alpha,\beta,\gamma,\theta}$ oznacza dystrybuantę rozkładu stabilnego o funkcji charakterystycznej

$$\int e^{itx} dG_{\alpha,\beta,\gamma,\theta}(x) = \exp\{it\gamma - \theta|t|^\alpha(1 - i\beta \text{sign}(t)\omega(\alpha, t))\}, \tag{11}$$

gdzie

$$\omega(\alpha, t) = \begin{cases} \text{tg}(\frac{\pi\alpha}{2}), & \text{jeśli } 0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \log |t|, & \text{jeśli } \alpha = 1, \\ 0, & \text{jeśli } \alpha = 2. \end{cases}$$

Odległość Ky-Fan dwóch zmiennych losowych X, Y definiujemy przez

$$\pi(X, Y) \stackrel{def.}{\equiv} \inf_{\varepsilon \geqslant 0} \{P[|X - Y| > \varepsilon] < \varepsilon\}.$$

Symbolem $X \sim Y$ oznaczamy fakt, że zmienne losowe X i Y mają ten sam rozkład, natomiast $x_n \cong y_n$ oznacza, że $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. Literą C lub c oznaczamy stałą generyczną, być może różną w różnych miejscach, gdyby jednak ta stała zależała od czegoś, to fakt ten zaznaczać będziemy w indeksie dolnym.

Rozdział 1

Mocne Prawo Wielkich Liczb dla wskaźników w ograniczonym obszarze

Pierwszym wynikiem typu Twierdzenie 1 dla wielowymiarowych "podciągów" pól losowych były wyniki Allana Guta [17] i [18], w których autor ograniczył obszar przechodzenia do granicy w MPWL do

$$V_\theta = \{(n_1, \dots n_d) : \theta^{-1} n_i \leqslant n_j \leqslant \theta n_i, \text{ dla wszystkich } 1 \leqslant i < j \leqslant d\}$$

z dowolnym $\theta > 1$.

Twierdzenie 1.1 (A. Gut 1978 [17]). *Niech $\{X, X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Wtedy granica*

$$\lim_{\substack{\underline{n}\to\infty, \\ \underline{n}\in V_\theta}} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} \tag{1.1}$$

istnieje i jest skończona p.p. wtedy i tylko wtedy, gdy $E|X|$ istnieje. Jeśli granica (1.1) istnieje, to jest równa EX, p.p.

Zwróćmy uwagę, że chociaż granica w (1.1) jest "wzięta" tylko po "podciągach" należących do sektora V_θ, to jednak w sumach $S_{\underline{n}}$ występują wszystkie składniki $X_{\underline{k}}$ dla $\underline{k} \leqslant \underline{n}$, a nie tylko te należące do V_θ. Problem dowodzenia MPWL "po sektorach" został dobrze opisany w książce Klesova [32], str. 246-247.

Porównując Twierdzenie 1.1 z zaprezentowanym we Wstępie Twierdzeniem 4 widzimy, że ponieważ warunek

$$\sum_{\underline{n}\in V_\theta} P[|X| > |\underline{n}|] < \infty,$$

w przypadku sektora V_θ równoważny jest istnieniu momentu $E|X|$, więc dla obu tych twierdzeń kluczowy jest warunek

$$\sum_{\underline{n}\in V} P[|X| > |\underline{n}|] < \infty, \tag{1.2}$$

gdzie $V = V_\theta$ lub $V = \mathbb{N}^d$. Wyjaśnimy to (co zostało zasygnalizowany we Wstępie) opisując związek pomiędzy warunkiem (1.2) a czynnikiem Dirichleta (ang. Dirichlet's divisor).

Twierdzenie 1.2. *Dla dowolnego podzbioru $V \subset \mathbb{N}^d$ połóżmy:*

$$\begin{aligned} \tau_V(n) &= |\{\underline{k} \in V : |\underline{k}| = n\}|, \quad \textit{(czynnik Dirichleta)} \\ T_V(x) &= \sum_{k\leqslant x} \tau_V(k). \end{aligned}$$

Wtedy

$$\sum_{\underline{n}\in V} P[|X| > |\underline{n}|] = ET_V(|X|). \tag{1.3}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \tau_V(x) &= o(x^\delta), \\ T_{\mathbb{N}^d}(x) &\asymp x\log^{d-1} x, \\ T_{V_\theta}(x) &\asymp x, \\ T_{\{\underline{n}: n_i^{1-\delta}\leqslant n_j\leqslant n_i^{\delta-1}\}}(x) &\asymp x\log^{d-1} x, \\ T_{\{\underline{n}: n_i/\log^\xi n_i\leqslant n_j\leqslant n_i\log^\xi n_i\}}(x) &\asymp x\log^{d-1}\log x, \end{aligned} \tag{1.4}$$

gdzie $0 < \delta < 1, \xi > 0$.

Mamy więc równoważność zbieżności sum "po obszarach" V dla zbiorów $V = V_\theta$ (Twierdzenie 1.1), dla zbiorów $V = \mathbb{N}^d$ (Twierdzenie 4) oraz dla zbiorów $V = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 : g(n_1) < n_2 < f(n_1)\}$ dla niemalejących funkcji f i g opisanych w Twierdzeniu 5. Jednak te przedstawione powyżej obszary nie opisują wszystkich możliwych obszarów w $\mathbb{N}^d$. Powstaje więc pytanie, dla jakich jeszcze obszarów można sformułować równoważności (8) oraz (9).

To jest główny temat tego rozdziału. Zacznijmy jednak od oznaczeń, znacznie upraszczających formułowanie wyników. Podobnie jak w Twierdzeniu 5 ograniczymy się do przypadku $d = 2$, gdyż wyniki dla $d > 2$ są w pełni analogiczne za to zdecydowanie bardziej skomplikowane są wzory i oznaczenia. Rozważać będziemy różne obszary w $\mathbb{N}^2$ zanurzone w $\mathbb{R}^2$ i zawsze ograniczone nieujemnymi funkcjami f i g spełniającymi warunek $g(x) \leqslant x \leqslant f(x), x \in \mathbb{R}$. Dla uproszczenia sformułowań wprowadźmy definicje:

Definicja 1.1. *Niech F i G będą dwiema klasami rzeczywistych funkcji takimi, że $F \subset \{f : f(x) \geqslant x, x \in \mathbb{R}\}, G \subset \{g : 0 \leqslant g(x) \leqslant x, x \in \mathbb{R}\}$. Wtedy definiujemy*

$$V(f,g) = \{\underline{n} = (n_1, n_2) : g(n_1) \leqslant n_2 \leqslant f(n_1)\}, \tag{1.5}$$
$$C(F,G) = \{V(f,g) : f \in F, g \in G\}. \tag{1.6}$$

Definicja 1.2. *Dla dwóch dowolnych klas funkcji F i G takich, że $F \subset \{f : f(x) \geqslant x, x \in \mathbb{R}\}, G \subset \{g : 0 \leqslant g(x) \leqslant x, x \in \mathbb{R}\}$ powiemy, że $C(F,G)$ jest "dobrym zbiorem", jeżeli dla dowolnego pola niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\{X, X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ oraz dowolnego $V \in C(F,G)$ następujące warunki są równoważne:*

$$\lim_{\substack{\underline{n}\to\infty,\\ \underline{n}\in V}} \frac{\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{n}} X_{\underline{i}}}{|\underline{n}|} = \mu \tag{1.7}$$

oraz

$$EX = \mu \quad i \quad \sum_{\underline{n}\in V} P[|X| > |\underline{n}|] < \infty. \tag{1.8}$$

Przy takich oznaczeniach Twierdzenie 5 może być sformułowane zwięźle:

Twierdzenie 1.3 (K.-H. Indlekofer and I. O. Klesov,[28])**.** *Jeśli*

$$F_1 = \{f : f \text{ jest niemalejąca}, \ x \leqslant f(x)\},$$
$$G_1 = \{g : g \text{ jest niemalejąca}, \ g(x) \leqslant x\},$$

to $C(F_1, G_1)$ jest "dobrym zbiorem".

Podobnie główny wynik Klesov O. i Rychlik Z. można sformułować następująco:

Twierdzenie 1.4 (Klesov O., Rychlik Z. [33])**.** *Jeśli*

$$F_2 = \{f : f \nearrow, \ x \leqslant f(x), \ \frac{f(x)}{x} \nearrow\},$$
$$G_2 = \{g : g \nearrow, \ g(x) \leqslant x, \ \frac{g(x)}{x} \searrow\},$$

to $C(F_2, G_2)$ jest "dobrym zbiorem".

Definicja 1.3. *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}_+}$, zdefiniujmy funkcje $\underline{f}(x)$ oraz $\overline{f}(x)$ następująco*

$$\underline{f}(x) = \inf_{u \geqslant x} f(u),$$
$$\overline{f}(x) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant x} f(u).$$

Dla funkcji $f, g \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}_+}$ *niech*

$$\overline{V} = \overline{V}(f,g) = V(\overline{f}, \underline{g}),$$
$$\underline{V} = \underline{V}(f,g) = V(\underline{f}, \overline{g})$$

oraz

$$\overline{C}(F,G) = \{\overline{V}(f,g) : f \in F, g \in G\},$$
$$\underline{C}(F,G) = \{\underline{V}(f,g) : f \in F, g \in G\}.$$

Zwróćmy uwagę, że

(a) $\underline{f}(x)$ oraz $\overline{f}(x)$ są funkcjami niemalejącymi,

(b) $\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x), x \in \mathbb{R}_+$,

(c) jeśli $f(x)$ jest funkcją niemalejącą lub funkcją nierosnącą, to wtedy $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$.

Zatem dla dwóch dowolnych podzbiorów $F \subset \{f : f(x) \geqslant x, x \in \mathbb{R}\}$, $G \subset \{g : 0 \leqslant g(x) \leqslant x, x \in \mathbb{R}\}$ zbiory funkcji $\overline{C}(F,G)$ oraz $\underline{C}(F,G)$ z Twierdzenia 1.3 oraz (a) są zawsze "dobrymi zbiorami". Jeśli więc dla dowolnych dwóch funkcji $f \in F, g \in G$,

$$\sum_{\underline{n} \in \overline{V}(f,g) \setminus \underline{V}(f,g)} P[|X| > |n|] < \infty, \tag{1.9}$$

to i $C(\{f\}, \{g\})$ jest "dobrym zbiorem". Ten kierunek uogólnienia Twierdzeń 1.3 i 1.4 przedstawiamy w Twierdzeniach 1.5 i 1.7. Innym kierunkiem uogólnień tych wyników jest rozważanie "wahnięć" funkcji f i g, które mogą być dowolnie duże, ale których liczba dla każdego przekroju $y = c$ jest stała. Takie uogólnienie przedstawiamy w Twierdzeniu 1.6. Obszar $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underline{f}(x) \leqslant y \leqslant \overline{f}(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underline{g}(x) \leqslant y \leqslant \overline{g}(x)\}$ nazywać dalej będziemy "rozstępem brzegu".

1.1 Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sektorów o małym "rozstępie brzegu"

Na wstępie wprowadźmy definicję brzegu grafu.

Definicja 1.4. *Dla dowolnego grafu* $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in X\}$*, gdzie* $X \subset \mathbb{R}$ *definiujemy* $\mathbb{N}^2$ *- brzeg grafu* Γ *w sposób następujący:*

$$\partial\triangle_f = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \underset{\substack{(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in \\ \{(i,j),(i+1,j),(i,j+1),(i+1,j+1)\}}}{\exists} f(i_1) < j_1, f(i_2) > j_2\}. \tag{1.10}$$

Oczywiście definicja ta jest ważna również wtedy, gdy f *jest funkcją.*

Zdefiniujmy rodziny funkcji $\{F_3, G_3\}$ w następujący sposób:

$$F_3 = \{f : \int_0^\infty \frac{\log(\frac{\overline{f}(x)\vee e}{\underline{f}(x)\vee 1})}{x\vee 1}dx < \infty\}, \quad G_3 = \{g : \int_0^\infty \frac{\log(\frac{\overline{g}(x)\vee e}{\underline{g}(x)\vee 1})}{x\vee 1}dx < \infty\}.$$

Twierdzenie 1.5. *Klasa funkcji $C(F_3, G_3)$ składa się z "dobrych zbiorów".*

Dowód Twierdzenia 1.5. Na mocy Twierdzenia 1 z [28] wnioskujemy, że dla dowolnych rodzin funkcji F i G, warunki mówiące o tym, że obie klasy $\underline{C}(F,G)$ i $\overline{C}(F,G)$ są "dobrymi zbiorami", są spełnione tzn., że zachodzi:

$$\Big(\sum_{\underline{n}\in\underline{V}} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] < \infty \quad i \quad EX = \mu\Big) \iff \lim_{\underline{V}} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = \mu, \tag{1.11}$$

$$\Big(\sum_{\underline{n}\in\overline{V}} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] < \infty \quad i \quad EX = \mu\Big) \iff \lim_{\overline{V}} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = \mu. \tag{1.12}$$

Jeśli dodatkowo wykażemy, że dla dowolnie ustalonego $f \in F_3$ i $g \in G_3$ zachodzi

$$\sum_{\underline{n}\in\overline{V}\setminus\underline{V}} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] < \infty, \tag{1.13}$$

to wtedy tezę Twierdzenia 1.5 otrzymujemy w wyniku łańcucha następujących implikacji:

$$\Big(\sum_{\underline{n}\in V} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] < \infty \text{ i } EX = \mu\Big) \overset{(1.13)}{\Rightarrow} \Big(\sum_{\underline{n}\in\overline{V}} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] < \infty \text{ i } EX = \mu\Big)$$
$$\overset{(1.11)}{\Rightarrow} \Big(\lim_{\overline{V}} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = \mu\Big) \Rightarrow \Big(\lim_{V} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = \mu\Big) \Rightarrow \Big(\lim_{\underline{V}} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = \mu\Big) \overset{(1.12)}{\Rightarrow}$$
$$\Big(\sum_{\underline{n}\in\underline{V}} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] < \infty \text{ i } EX = \mu\Big) \overset{(1.13)}{\Rightarrow} \Big(\sum_{\underline{n}\in V} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] < \infty \text{ i } EX = \mu\Big).$$

Zatem wystarczy udowodnić (1.13). Na podstawie powyższych rozważań możemy założyć, że $EX = \mu$, tj. $E|X| < \infty$. Ponieważ dla każdej nierosnącej funkcji h i niemalejącego t mamy

$$\sum_{n=1}^\infty h(n) \leqslant \int_0^\infty h(x)\wedge h(1)dx, \qquad \sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_t} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] \leqslant E\sqrt{|X|},$$

gdzie $\partial\triangle_t$ jest zdefiniowane w Definicji 1.4, zaś druga nierówność pochodzi z dowodu Twierdzenia 1 [28] oraz z nierówności Markowa

$$\sum_{\underline{n}\in\overline{V}\setminus\underline{V}} P[|X| \geqslant |\underline{n}|] \leqslant \sum_{\underline{n}\in\overline{V}\setminus\underline{V}} \frac{E|X|}{|\underline{n}|},$$

więc otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\sum_{\underline{n}\in\overline{V}\setminus\underline{V}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|] &= \sum_{\{\underline{n}\in\mathbb{N}^d:\underline{f}(n_1)\leqslant n_2\leqslant\overline{f}(n_1)\}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]+\\
&+ \sum_{\{\underline{n}\in\mathbb{N}^d:\underline{g}(n_1)\leqslant n_2\leqslant\overline{g}(n_1)\}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]+\\
&+ \sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\underline{f}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]+\sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\overline{f}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]+\\
&+ \sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\underline{g}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]+\sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\overline{g}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]\leqslant\\
&\leqslant E|X| \iint_{\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\underline{f}(x_1)\leqslant x_2\leqslant\overline{f}(x_1)\}} \frac{1}{(x_1\vee 1)(x_2\vee 1)}dx_1dx_2\\
&+ E|X| \iint_{\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\underline{g}(x_1)\leqslant x_2\leqslant\overline{g}(x_1)\}} \frac{1}{(x_1\vee 1)(x_2\vee 1)}dx_1dx_2\\
&+ \sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\underline{f}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]+\sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\overline{f}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]\\
&+ \sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\underline{g}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]+\sum_{\underline{n}\in\partial\triangle_{\overline{g}}} P[|X|\geqslant|\underline{n}|]\\
&\leqslant E|X|I_1+E|X|I_2+4E\sqrt{|X|},\ \text{powiedzmy.}
\end{aligned}
$$

Tak więc, do skończenia dowodu powinniśmy jeszcze oszacować I_1 oraz I_2. Zauważmy najpierw, że ponieważ dla $0\leqslant a\leqslant b<\infty$,

$$
\int_a^b \frac{1}{x\vee 1}dx = \begin{cases} \log(b/a), & \text{jeśli } 1\leqslant a\leqslant b,\\ \log(b)+(1-a), & \text{jeśli } a<1\leqslant b,\\ (b-a), & \text{jeśli } a\leqslant b\leqslant 1 \end{cases}
$$

oraz że dla $a<1$ mamy, że $\log\frac{b\vee e}{a\vee 1}\geqslant 1$. Zatem w konsekwencji dostajemy

$$
\int_a^b \frac{1}{x\vee 1}dx\leqslant 2\log\frac{b\vee e}{a\vee 1}. \tag{1.14}
$$

Korzystając z (1.14) mamy

$$
I_1\leqslant\int_0^\infty\int_{\underline{f}(x_1)}^{\overline{f}(x_1)}\frac{1}{x_2\vee 1}dx_2\frac{1}{x_1\vee 1}dx_1\leqslant 2\int_0^\infty\frac{\log(\frac{\overline{f}(x)\vee e}{\underline{f}(x)\vee 1})}{x\vee 1}dx<\infty
$$

oraz podobnie

$$
I_2\leqslant\int_0^\infty\int_{\underline{g}(x_1)}^{\overline{g}(x_1)}\frac{1}{x_2\vee 1}dx_2\frac{1}{x_1\vee 1}dx_1\leqslant 2\int_0^\infty\frac{\log(\frac{\overline{g}(x)\vee e}{\underline{g}(x)\vee 1})}{x\vee 1}dx<\infty.
$$

Tym samym wykazaliśmy (1.13), co kończy dowód tego twierdzenia. □

1.2 Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sektorów o brzegu o skończonym wahaniu

Niech $B_f(y)$ oznacza najmniejszą rodzinę podzbiorów zwartych zbioru $\{(x,y) : f(x) < y\}$. "Najmniejszą" oznacza tutaj, że dla dowolnych zbiorów $B_1 \in B_f(y)$ i $B_2 \in B_f(y)$ takich, że $B_1 \neq B_2$ zbiór $B_1 \cup B_2$ nie jest zbiorem zwartym. Zauważmy, że wszystkie zbiory z rodziny $B_f(y)$ są podzbiorami $[0,y] \times \{y\}$. Ponadto, zdefiniujmy $K_f(y) = |B_f(y)|$ oraz

$$F_4 = \{f : \sup_{n\in\mathbb{N}} K_f(n) < \infty\}, \quad G_4 = \{g : \sup_{n\in\mathbb{N}} K_g(n) < \infty\}.$$

Twierdzenie 1.6. *Klasa funkcji $C(F_4, G_4)$ składa się z "dobrych zbiorów".*

Dowód Twierdzenia 1.6. Dla dowodu Twierdzenia 1.6 zauważmy, że funkcje f i g odpowiednio z rodzin funkcji F_4 i G_4, mogą być nieciągłe. Jeśli na przykład $f(x_o - 0) = y_0 < y_1 = f(x_o + 0)$, to "uzupełniamy" definicję kładąc $f(x_o) = [y_0, y_1]$ (cały przedział $[y_0, y_1]$). Oczywiście od tej chwili $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ nie jest funkcją, ale ciągłym grafem, a f jest relacją. Jednakże, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, dalej będziemy pisać nieformalnie "funkcja f". Powiemy, że kawałkami ciągły graf $\{(x, f(x)), x \in X\}$ dla $X \subset \mathbb{R}$, spełnia warunek **G** wtedy i tylko wtedy, gdy

Warunek G: *Jeśli $\{(x, f(x)), x \in (x_o, x_1)\}$ i $\{(x, f(x)), x \in (x_2, x_3)\}$ są dwoma kawałkami, na których graf jest ciągły i jeśli $x_1 \leqslant x_2$, to $f(x_o) \leqslant f(x_3)$.*

Dla takich grafów zachodzi:

Propozycja 1.1. *Niech $\{(x, f(x)), x \in X\}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$ będzie kawałkiem nierosnącym grafu spełniającym warunek **G**. Wtedy*

$$\sum_{(i,j)\in\partial\triangle_f} P[|X| > ij] \leqslant 4E|X|. \tag{1.15}$$

Dowód Propozycji 1.1. Przez $Q(i,j)$ oznaczamy kwadraty $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : i < x \leqslant i+1, j \leqslant y < j+1\}$.

Rozważmy jeden kawałek grafu $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in (x_o, x_1)\}$, na którym graf jest ciągły i nieciągły lub nawet nie istnieje w x_1.

Brzeg tego kawałka grafu może być wyrażony jako podzbiór P_1 (może być pusty) ścieżki $P = [(i,j), ..., (i+k, j-l)]$ dla pewnych dodatnich naturalnych liczb

i, j, k, l, gdzie jeśli (i_1, j_1) i (i_2, j_2) są kolejnymi punktami, to (i_2, j_2) jest równe $(i_1 + 1, j_1)$ lub $(i_1, j_1 - 1)$ lub $(i_1 + 1, j_1 - 1)$ zależnie od tego, którędy graf Γ "wychodzi" z $Q(i_1, j_1)$ a którędy "wchodzi" do $Q(i_2, j_2)$. Jeśli graf Γ nie "wchodzi" do wnętrza $Q(i_2, j_2)$, to $(i_2, j_2) \notin P_1$, ale oczywiście $(i_2, j_2) \in P$.

Dla takich ścieżek P i P_1 konstruujemy funkcję H zdefiniowaną na $\triangle_f$ i przyjmującą wartości w $\{(x, 1) : x \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, y) : y \in \mathbb{N}\}$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} H((i_1, j_1)) &= (i_1, 1), \\ H((i_k, j_k)) &= \begin{cases} (i_k, 1), & \text{jeśli } i_k > i_{k-1}, \\ (1, j_k), & \text{jeśli } i_k = i_{k-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Na kawałku (x_o, x_1) mamy

$$H(\triangle_{f|_{x\in(x_0,x_1)}}) \subset \{(i,1), (i+1,1), \dots (i+k,1), (1,j), (1,j-1), \dots (1,j-l)\},$$

gdzie $f|_{x\in(x_0,x_1)}$ oznacza ograniczenie funkcji f do przedziału (x_o, x_1). Ponadto H jest injekcją (w tym obszarze). Oczywiście, ponieważ dla każdego punktu $(i, j) \in (\mathbb{N}\backslash\{0\})^2$ mamy $ij > \max\{i, j\}$, więc w ten sposób otrzymujemy, że

$$\sum_{(i,j)\in\triangle_{f|_{x\in(x_0,x_1)}}} P[|X| > ij] \leqslant \sum_{(i,j)\in H(\triangle_{f|_{x\in(x_0,x_1)}})} P[|X| > ij]. \tag{1.16}$$

Może zdarzyć się, że jeden ciągły kawałek grafu Γ ma ścieżkę brzegu $[(i, j), \dots$ $\dots, (i+k, j-l)]$, podczas gdy następny ciągły kawałek grafu zawiera punkt $(i+k, j)$ i w tym przypadku odwzorowanie H może przekształcić $(i+k, j)$ w istniejący punkt $(i + k, 1)$ lub $(1, j)$. I stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in\partial_f} P[|X| > ij] &\leqslant 2 \sum_{(i,j)\in H(\partial_f)} P[|X| > ij] \leqslant \\ &\leqslant 4 \sum_{i=1}^{\infty} P[|X| > i] = 4E|X|, \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że $EX = 0$. Ograniczmy tutaj rozważania do sektora $\{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : m \leqslant n\}$ i rodziny funkcji F_4, ponieważ w przypadku G_4 dowód przebiega podobnie. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $f(x) > x$ i każdego $y \in \mathbb{R}$ definiujemy podział przedziału $[0, y] = B_f(y) + A_f(y)$ przez zbiory

$B_f(y) = \{(x,y) : f(x) < y\}, A_f(y) = \{(x,y) : f(x) \geqslant y\}$ tak, że

$$\begin{aligned}
B_f(y) &= \Big([0,x_1) \times \{y\}\Big) \cup \Big((x_2,x_3) \times \{y\}\Big) \cup \ldots \cup \Big((x_{K_f(y)-1}, x_{K_f(y)}) \times \{y\}\Big) \\
&= \bigcup_{k=1}^{K_f(y)} B_k(f,n), \\
A_f(y) &= \Big([x_1,x_2] \times \{y\}\Big) \cup \Big([x_3,x_4] \times \{y\}\Big) \cup \ldots \cup \Big([x_{K_f(y)}, y] \times \{y\}\Big) \\
&= \bigcup_{k=1}^{K_f(y)} A_k(f,y), \quad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{K_f(y)} < y,
\end{aligned}$$

dla pewnej skończonej (por. definicję rodziny F_4) dodatniej liczby naturalnej $K_f(y) \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $K = \sup\{K_f(y) : y \in \mathbb{R}\}$. Dla każdego y uzupełniamy rodziny $\mathcal{B}(f,y) = \{B_k(f,y), 1 \leqslant k \leqslant K_f(y)\}$ kładąc $B_k(f,y) = \emptyset$ dla $k = K_f(y)+1, K_f(y)+2, \ldots K$. Bezpośrednio z definicji tej rodziny zachodzi własność:

$$\forall_{y_1<y_2} \forall_{1\leqslant i\leqslant K} \exists_{1\leqslant j\leqslant k} \qquad B_i(f,y_1) \subset B_j(f,y_2).$$

W ten sposób z rodziny $\mathcal{B}(f,y)$ tworzymy rodzinę

$$\Gamma_k(y) = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{1\leqslant t\leqslant y} \bigcup_{j:B_j(f,t)\subset B_i(f,y),1\leqslant j\leqslant K} B_j(f,t), \quad k = 1,2,3,\ldots,K.$$

Ponadto, dla każdego $k = 1,2,3,\ldots,K$ kładziemy

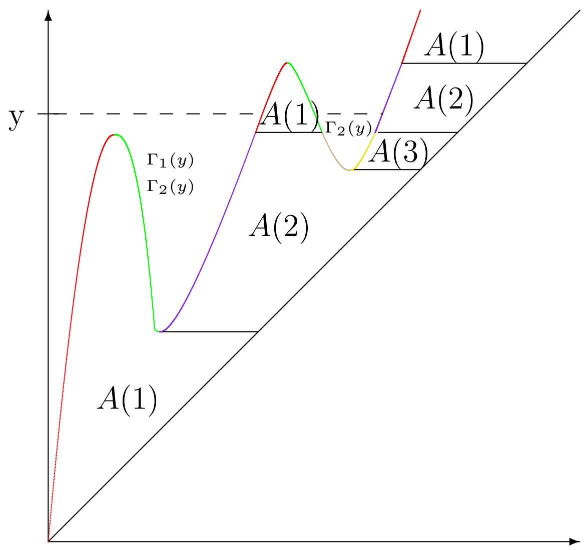
$$A(k) = \bigcup_{y\in\mathbb{R}} A_k(f,y).$$

Zilustrujemy wprowadzone powyżej rodziny zbiorów na Rysunku 1.1.

Łatwo sprawdzić, że Lemat 1 i dowód Twierdzenia 1 [28] zachodzi dla ciągów $\{\underline{n}_k, k \in \mathbb{N}\} \subset A(k)$ i narastających ciągów sum zmiennych losowych

$$Y_{\underline{n}}(k) = \sum_{\underline{m}\in\Gamma_k(n_2)\cap\mathbb{N}^2} X_{\underline{m}} = \sum_{\underline{m}\in[1,n_1]\times[1,n_2]\cap B} X_{\underline{m}}, \underline{n} \in A(k),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $A(k)$ nie jest ograniczony dla $k = 1,2,3,\ldots K$. Pewnego komentarza wymaga zachodzenie Lematu 2 dla brzegów naszych zbiorów $A(k)$. Brzeg takiego zbioru może być podzielony na co najwyżej K grafów $\Xi_i, 1 \leqslant i \leqslant K$, kawałkami ciągłych i rosnących (na Rysunku 1.1 mamy trzy takie grafy zaznaczone odpowiednio kolorami: czerwonym, fioletowym i żółtym) i co najwyżej K grafów $\Upsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant K$, kawałkami ciągłych i malejących (na Rysunku 1.1 mamy dwa takie kawałki zaznaczone kolorami zielonym i beżowym). Dla każdego takiego grafu



Rysunek 1.1: Podział grafu na obszary $A(i), 1 \leqslant i \leqslant K$.

z rodziny $\Xi_i, 1 \leqslant i \leqslant K$, bezpośrednio stosujemy Lemat 2 z [28], podczas gdy dla grafów z rodziny $\Upsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant K$, stosujemy Propozycję 1.1.

Zatem, używając notacji [28] mamy, że

$$\lim_{\underline{n} \in A(k)} \frac{Y_{\underline{n}}(k)}{|[1, n_1] \times [1, n_2] \cap B|} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots K$$

i ponieważ każdy podciąg $\mathcal{N} = \{\underline{n}_i \in A, i \in \mathbb{N}\}$ może być dzielony na K-podciągów $\mathcal{N} \cap A(k)$, więc otrzymujemy tezę. $\square$

1.3 Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sektorów o "rozstępie brzegu" uzależnionym od wartości funkcji

Teraz zdefiniujmy następujące rodziny:

$$\begin{aligned} F_5 &= \Big\{ f : \underset{x\in\mathbb{N}, y\in(\underline{f}(x), f(x)]\cap\mathbb{N}}{\forall} \big\{ \lceil y - \underline{f}(x)\rceil \log_+(x\lceil y - \underline{f}(x)\rceil) \leqslant cy \\ &\qquad \text{lub} \quad \lceil \underline{f^{-1}}(y) - x\rceil \log_+(y\lceil \underline{f^{-1}}(y) - x\rceil) \leqslant cx \big\}\Big\}, \\ G_5 &= \Big\{ g : \underset{x\in\mathbb{N}, y\in[g(x), \overline{g}(x))\cap\mathbb{N}}{\forall} \big\{ \lceil \overline{g}(x) - y\rceil \log_+(x\lceil \overline{g}(x) - y\rceil) \leqslant cy \\ &\qquad \text{lub} \quad \lceil x - \overline{g^{-1}}(y)\rceil \log_+(y\lceil x - \overline{g^{-1}}(y)\rceil) \leqslant cx \big\}\Big\}, \end{aligned}$$

gdzie dla niekoniecznie monotonicznej ciągłej funkcji f definiujemy funkcje odwrotne przez:

$$\begin{aligned} \underline{f^{-1}}(y) &= \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : f(x-0) \leqslant y \leqslant f(x+0)\}, \\ \overline{f^{-1}}(y) &= \sup\{x \in \mathbb{R}_+ : f(x-0) \leqslant y \leqslant f(x+0)\}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 1.7. *Klasa funkcji $C(F_5, G_5)$ składa się z "dobrych zbiorów".*

Dowód Twierdzenia 1.7. Pokażemy, że jeśli

$$\lim_{\underline{V}} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = EX, \tag{1.17}$$

to

$$\lim_{V} \frac{S_{\underline{n}}}{|\underline{n}|} = EX. \tag{1.18}$$

Oczywiście (1.17) wynika z Twierdzenia 1 [28]. Wtedy mamy $E|X| < \infty$. Ponadto, zdefiniujmy cztery następujące funkcje:

$$\begin{aligned} M_1 &: \begin{cases} V \longrightarrow \underline{V}, \\ M_1((k_1,k_2)) = (k_1, \lfloor \underline{f}(k_1)\rfloor), \end{cases} \\ M_2 &: \begin{cases} V \longrightarrow \underline{V}, \\ M_2((k_1,k_2)) = (\lceil \underline{f^{-1}}(k_2)\rceil, k_2), \end{cases} \\ M_3 &: \begin{cases} V \longrightarrow \underline{V}, \\ M_3((k_1,k_2)) = (k_1, \lceil \overline{g}(k_1)\rceil), \end{cases} \\ M_4 &: \begin{cases} V \longrightarrow \underline{V}, \\ M_4((k_1,k_2)) = (\lfloor \overline{g^{-1}}(k_2)\}\rfloor, k_2). \end{cases} \end{aligned}$$

Skoro $M_i(k_1, k_2) \in \underline{V}, i = 1, 2, 3, 4$, więc na mocy (1.17) otrzymujemy

$$\lim_{\substack{|\underline{n}|\to\infty,\\ \underline{n}\in V}} \frac{S_{M_i(\underline{n})}}{|M_i(\underline{n})|} = EX, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1.19}$$

Niech ciąg $\{\underline{n}_k = (n_{1,k}, n_{2,k}), k \in \mathbb{N}\} \subset V\backslash\underline{V}$ będzie taki, że $|\underline{n}_k| \to \infty$ i niech

$$\{\underline{n}_k, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{i=1}^{4} \{\underline{n}_k^{(i)} = (n_{1,k}^{(i)}, n_{2,k}^{(i)}), k \in \mathbb{N}\}$$

będą czterema podciągami takimi, że

$$\begin{aligned}
\lceil f(n_{1,k}^{(1)}) - \underline{f}(n_{1,k}^{(1)})\rceil \log_+(n_{1,k}^{(1)}\lceil f(n_{1,k}^{(1)}) - \underline{f}(n_{1,k}^{(1)})\rceil) &\leqslant Cf(n_{1,k}^{(1)}),\\
\lceil \underline{f}^{\underline{-1}}(n_{2,k}^{(2)}) - f^{\underline{-1}}(n_{2,k}^{(2)})\rceil \log_+(n_{2,k}^{(2)}\lceil \underline{f}^{\underline{-1}}(n_{2,k}^{(2)}) - f^{\underline{-1}}(n_{2,k}^{(2)})\rceil) &\leqslant Cf^{\underline{-1}}(n_{2,k}^{(2)}),\\
\lceil \overline{g}(n_{1,k}^{(3)}) - g(n_{1,k}^{(3)})\rceil \log_+(n_{1,k}^{(3)}\lceil \overline{g}(n_{1,k}^{(3)}) - g(n_{1,k}^{(3)})\rceil) &\leqslant Cg(n_{1,k}^{(3)}),\\
\lceil g^{\overline{-1}}(n_{2,k}^{(4)}) - \overline{g}^{\overline{-1}}(n_{2,k}^{(4)})\rceil \log_+(n_{2,k}^{(4)}\lceil g^{\overline{-1}}(n_{2,k}^{(4)}) - \overline{g}^{\overline{-1}}(n_{2,k}^{(4)})\rceil) &\leqslant Cg^{\overline{-1}}(n_{2,k}^{(4)}).
\end{aligned}$$

Przynajmniej jeden z powyższych podciągów jest nieskończony. Zbiór takich podciągów oznaczamy przez I.

Zauważmy, że dla $x > y > 0$ mamy, że $\lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor \leqslant \lceil x - y\rceil$. Ponadto, jeśli $x - y$ jest wartością całkowitą, to $\lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor = x - y = \lceil x - y\rceil$. Z drugiej strony, ponieważ dla dowolnego $z \in (0, 2)$ mamy, że $\lfloor z\rfloor \leqslant 1$, więc

$$\begin{aligned}
\lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor &= \lfloor x - \lfloor y\rfloor\rfloor = \lfloor x - y + \{y\}\rfloor\\
&= \lfloor\lfloor x - y\rfloor + \{x - y\} + \{y\}\rfloor = \lfloor x - y\rfloor + \lfloor\{x - y\} + \{y\}\rfloor\\
&\leqslant \lfloor x - y\rfloor + 1 = \lceil x - y\rceil
\end{aligned}$$

i dlatego wyżej zdefiniowane podciągi dla $i \in I$ spełniają:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|)\Big(\log_+(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|) \vee 1\Big)}{|\underline{n}_k^{(i)}|} < C < \infty. \tag{1.20}$$

W konsekwencji, ponieważ

$$\lim_{V\backslash\underline{V}} \log_+(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|) = +\infty$$

lub

$$|\underline{n}_k^{(i)}| = |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|, \quad k \in \mathbb{N},$$

więc

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|M_i(\underline{n}_k^{(i)})|}{|\underline{n}_k^{(i)}|} = 1, \quad i \in I. \tag{1.21}$$

Z drugiej strony zauważmy, że

$$S_{\underline{n}} - S_{M_i(\underline{n})} \overset{\mathcal{D}}{\sim} S_{\underline{n}-M_i(\underline{n})},$$

więc z Twierdzenia 1 [34] otrzymujemy, że dla $i \in I$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{\underline{n}_k^{(i)}} - ES_{\underline{n}_k^{(i)}} - S_{M_i(\underline{n}_k^{(i)})} + ES_{M_i(\underline{n}_k^{(i)})}}{(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|)\Big(\log_+(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|) \vee 1\Big)} = 0.$$

Ponadto, ponieważ dla $i \in I$

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{-ES_{\underline{n}_k^{(i)}} + ES_{M_i(\underline{n}_k^{(i)})}}{(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|)\Big(\log_+(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|) \vee 1\Big)} = \\
&\lim_{k\to\infty} \frac{-EX}{\log_+(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|) \vee 1} = 0
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{S_{\underline{n}_k^{(i)}}}{|\underline{n}_k^{(i)}|} &= \frac{S_{M_i(\underline{n}_k^{(i)})}}{|M_i(\underline{n}_k^{(i)})|} \cdot \frac{|M_i(\underline{n}_k^{(i)})|}{|\underline{n}_k^{(i)}|} + \\
&+ \frac{S_{\underline{n}_k^{(i)}} - S_{M_i(\underline{n}_k^{(i)})}}{(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|)\Big(\log_+(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|) \vee 1\Big)} \cdot \\
&\cdot \frac{(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|)\Big(\log_+(|\underline{n}_k^{(i)}| - |M_i(\underline{n}_k^{(i)})|) \vee 1\Big)}{|\underline{n}_k^{(i)}|} = \\
&= EX \cdot 1 + 0 \cdot C = EX,
\end{aligned}$$

więc w konsekwencji przechodzimy do

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{\underline{n}_k}}{|\underline{n}_k|} = EX, \tag{1.22}$$

co kończy dowód tego twierdzenia. □

1.4 Wnioski, uwagi, przykłady

Zdefiniujmy jeszcze cztery rodziny funkcji:

$$\begin{aligned}
F_6 &= \Big\{ f : \underset{x\in\mathbb{N}}{\forall} \lceil f(x) - \underline{f}(x)\rceil \log_+(x\lceil f(x) - \underline{f}(x)\rceil) \leqslant cf(x)\Big\},\\
G_6 &= \Big\{ g : \underset{x\in\mathbb{N}}{\forall} \lceil \overline{g}(x) - g(x)\rceil \log_+(x\lceil \overline{g}(x) - g(x)\rceil) \leqslant cg(x)\Big\},\\
F_7 &= \Big\{ f : \underset{x\in\mathbb{N}, y\in(\underline{f}(x), f(x))\cap\mathbb{N}}{\forall} \lceil \underline{f}^{-1}(y) - \underline{f^{-1}}(y)\rceil \log_+(y\lceil \underline{f}^{-1}(y) - \underline{f^{-1}}(y)\rceil)\\
&\quad \leqslant c\underline{f^{-1}}(y)\Big\},\\
G_7 &= \Big\{ g : \underset{x\in\mathbb{N}, y\in(g(x), \overline{g}(x))\cap\mathbb{N}}{\forall} \lceil \overline{g^{-1}}(y) - \overline{g}^{-1}(y)\rceil \log_+(y\lceil \overline{g^{-1}}(y) - \overline{g}^{-1}(y)\rceil)\\
&\quad \leqslant c\overline{g^{-1}}(y)\Big\}.
\end{aligned}$$

Zwróćmy też uwagę na związki pomiędzy wprowadzonymi rodzinami F_i, G_i, $i = 1, \ldots, 7$.

Uwaga 1.1. *Jeśli $F \subset F'$, $G \subset G'$ oraz jeśli klasa $C(F', G')$ składa się z "dobrych zbiorów", to klasa $C(F, G)$ składa się także z "dobrych zbiorów".*

Uwaga 1.2. *Zachodzi*

$$F_6 \cup F_7 \subset F_5, \quad \textit{oraz} \quad G_6 \cup G_7 \subset G_5.$$

Uwaga 1.3. *Ponieważ dla niemalejącej funkcji f i niemalejącej funkcji g mamy, że $\underline{f} = f = \overline{f}$, $\underline{g} = g = \overline{g}$ oraz, że $K_f(y) = 1$ i $K_g(y) = 1$, to zachodzą inkluzje*

$$F_1 \subset F_2 \subset F_i \quad \textit{oraz} \quad G_1 \subset G_2 \subset G_i \quad \textit{dla} \quad i = 3, 4, 5, 6, 7.$$

Dlatego też wszystkie Twierdzenia 1.5-1.7 są uogólnieniem wyników otrzymanych w [28] i [33].

Następujący przykład pokazuje, że żadne z Twierdzeń 1.5, 1.6 oraz 1.7 nie jest uogólnieniem innego.

Przykład 1.1. *Niech h będzie dowolną funkcją, g niemalejącą funkcją dodatnią, zaś u niemalejącą funkcją dodatnią taką, że $u(x) \geqslant x$. Rozważmy klasę funkcji postaci*

$$f(x) = u(x) + g(x)|cos(h(x)\pi)|.$$

Zauważmy, że zawsze zachodzi, że $\overline{f}(x) = u(x) + g(x)$ oraz $\underline{f}(x) = u(x)$.

(a) *Jeśli* $u(x) = 2^x(\log_+ x)^2$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = 2^x(\log x)^2$, $x \in \mathbb{R}$, *to założenia Twierdzenia 1.5 są spełnione, podczas gdy założenia Twierdzeń 1.6 i 1.7 nie są.*

(b) *Jeśli* $u(x) = x$, $g(x) = x$, $h(x) = (x - 2^k)/2^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $k = \lceil \log_2 x \rceil$, *to założenia Twierdzenia 1.6 są spełnione, zaś założenia Twierdzeń 1.5 i 1.7 nie są.*

(c) *Jeśli* $u(x) = x$, $g(x) = x/\log x$, $h(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, *to założenia Twierdzenia 1.7 są spełnione, natomiast nie są spełnione założenia Twierdzeń 1.5 i 1.6.*

Dowód Przykładu 1.1. We wszystkich trzech przypadkach mamy

$$\int_0^\infty \frac{\log(\frac{\overline{f}(x)\vee e}{\underline{f}(x)\vee 1})}{x \vee 1}\, dx = \int_0^\infty \frac{\log(\frac{(u(x)+g(x))\vee e}{u(x)\vee 1})}{x \vee 1}\, dx,$$

$$\begin{aligned} &\lceil f(x) - \underline{f}(x) \rceil \log_+(x \lceil f(x) - \underline{f}(x) \rceil) = \\ &= \lceil g(x) |\cos(h(x)\pi)| \rceil \log_+\Big(x \lceil g(x) |\cos(h(x)\pi)| \rceil\Big). \end{aligned}$$

W przypadku **(a)**, ponieważ $\log(1 + x) \leqslant x$ dla dowolnego $x > 0$, więc stąd otrzymujemy

$$\int_1^\infty \frac{\log(1 + 1/(\log x)^2)}{x}\, dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx < \infty.$$

Zdefiniujmy teraz ciąg $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ rozbieżny do $+\infty$ oraz taki, że $2^{x_i}(\log x_i)^2 \in \mathbb{N}$. Jest to możliwe, ponieważ funkcja $2^x(\log x)^2$ jest ciągła i rośnie do nieskończoności dla $x > 1$. Wtedy dla dowolnej stałej C istnieje i_0 takie, że dla każdego $i > i_0$ zachodzi

$$\begin{aligned} &\lceil 2^{x_i} |\cos(2^{x_i}(\log x_i)^2)\pi)| \rceil \log_+(x_i \lceil 2^{x_i} |\cos(2^{x_i}(\log x_i)^2)\pi)| \rceil) = \\ &\qquad = 2^{x_i} \log x_i + x_i 2^{x_i} \log 2 \geqslant C(2^{x_i}(\log x_i)^2 + 2^{x_i}). \end{aligned}$$

Zatem założenia Twierdzenia 1.5 są spenione, podczas gdy założenia Twierdzenia 1.7 już nie.
Zauważmy ponadto, że dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$ w przedziale (x, y) funkcja f ma przynajmniej $2^y(\log y)^2 - 2^x(\log x)^2 - 2$ oscylacji, gdzie $2^y(\log y)^2 = 2^x[(\log x)^2 + 1]$ i dlatego dla $y > e$ mamy

$$K_f(y) \geqslant 2^y(\log y)^2 - 2^x(\log x)^2 - 2 \geqslant 2^x - 2$$

oraz $K_f(y) \to \infty$, gdy $y \to \infty$. Tak więc założenia Twierdzenia 1.6 nie są spełnione.

W przypadku **(b)** mamy

$$\int_1^\infty \frac{\log 2}{x} dx = \infty.$$

Ponadto zauważmy, że $|\cos(h(x)\pi)|$ przyjmuje wartość 1 tylko wtedy, gdy $x = 2^k$ lub $x = 3 \cdot 2^{k-1}$ oraz przyjmuje wartość 0 tylko dla $x = 5 \cdot 2^{k-2}$ lub $x = 7 \cdot 2^{k-2}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Tak więc w przedziale $x \in [2^k, 2^{k+1})$ funkcja f ma dwa lokalne minima w punktach $x = 5 \cdot 2^{k-2}$ i $x = 7 \cdot 2^{k-2}$ równe $5 \cdot 2^{k-2}$ i $7 \cdot 2^{k-2}$, odpowiednio, oraz dwa lokalne maxima w punktach $x = 2^k$ i $x = 3 \cdot 2^{k-1}$ równe odpowiednio $x = 2^{k+1}$ i $x = 3 \cdot 2^k$. Dlatego dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ otrzymujemy, że $K_f(x) \leqslant 4$, a więc założenia Twierdzenia 1.6 zostały spełnione. Kładąc $x = k \in \mathbb{N}$ widzimy, że dla dowolnej stałej C istnieje dowolnie duża liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\lceil k|\cos(k\pi)|\rceil \log_+(k\lceil k|\cos(k\pi)|\rceil) = 2k\log k > Ck$$

i stąd założenia Twierdzenia 1.7 nie są spełnione.

W przypadku **(c)** zachodzi

$$\int_1^\infty \frac{\log 2(1 + 1/\log x)}{x}\, dx = \infty,$$

więc założenia Twierdzenia 1.5 nie są spełnione. Ponadto, podobne rozważania do tych przeprowadzonych w dowodzie **(a)**, prowadzą do wykazania, że Twierdzenie 1.6 również nie jest spełnione dla **(c)**. Z kolei wykorzystując fakt, że

$$\begin{aligned}\frac{x}{\log x}|\cos(2^x\pi)|\log\left(\frac{x^2}{\log x}|\cos(2^x\pi)|\right) &\leqslant \frac{x}{\log x}\log x^2 = \\ &= 2x \leqslant 2\left(x + \frac{x}{\log x}|\cos(2^x\pi)|\right)\end{aligned}$$

widzimy, że założenia Twierdzenia 1.7 są spełniona dla $C = 2$. □

Rozdział 2

Mocne Prawo Wielkich Liczb dla sum losowo wybranych zmiennych losowych

Niech $\{X_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $\{A_n, n \geqslant 1\}$ ciągiem zbiorów losowych wzajemnie dowolnie zależnych, lecz niezależnych od $\{X_n, n \geqslant 1\}$ takich, że

$$A_n \subset A_{n+1}, \text{ p.p. }, n \geqslant 1, \tag{2.1}$$
$$P[\sup\{k : k \in A_n\} \leqslant \overline{\alpha}_n] = 1, \tag{2.2}$$

dla pewnego, być może rozbieżnego do nieskończoności, ciągu dodatnich liczb rzeczywistych $\{\overline{\alpha}_n, n \geqslant 1\}$. W tym rozdziale, w odróżnieniu od Wstępu, przez $S(A_n)$ oznaczać będziemy zcentrowane sumy

$$S(A_n) = \sum_{i \in A_n} X_i - E \sum_{i \in A_n} X_i, \quad n \geqslant 1,$$

a interesować nas będą zbieżności

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n)}{b_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{V(A_n)}{b_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{Z(A_n)}{b_n}, \tag{2.3}$$

dla pewnego normującego ciągu dodatnich liczb rzeczywistych $\{b_n, n \geqslant 1\}$, gdzie

$$\begin{aligned}
V(A_n) &= \sum_{i \in A_n} X_i - \sum_{i \in A_n} EX_i = \sum_{i \in A_n} (X_i - EX_i), \\
Z(A_n) &= \sum_{i \in A_n} EX_i - E \sum_{i \in A_n} EX_i = \sum_{i=1}^{\infty} (I[i \in A_n] - P[i \in A_n]) EX_i, \\
S(A_n) &= \sum_{i \in A_n} X_i - E \sum_{i \in A_n} X_i. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Wszystkie te trzy typy sum będą występować w wynikach tego rozdziału.

Jeśli ciąg $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ jest niezależny od $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, to wtedy

$$S(A_n) = V(A_n) + Z(A_n), \tag{2.5}$$

ponieważ z niezależności mamy

$$E \sum_{i \in A_n} X_i = E \sum_{i \in A_n} EX_i, \ n \geqslant 1.$$

Wyniki typu (2.3) oparte będą na nierówności Hájeka-Rényiego, a ich dowody polegać będą na rozwinięciu metod opisanych w pracy Fazekasa i Klesova [9]. Zaznaczmy, że prezentowany tutaj wynik uogólnia zarówno MPWL typu Kołmogorowa (Twierdzenie 4), jak i MPWL typu Marcinkiewicza-Zygmunda (Twierdzenie 5).

Ze względu na to, że, jak napisaliśmy we Wstępie, sumy (2.4) mogą być rozważane jako sumy zależnych zmiennych losowych

$$S(A_n) = Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j \in A_n \setminus A_{n-1}} X_j - E \sum_{j \in A_n \setminus A_{n-1}} X_j \Big), \ n \geqslant 1,$$

zacznijmy od najnowszego wyniku MPWL dla sum zależnych składników Hu i Webera [27] (zobacz także [26] i [25]) przeformułowanego dla naszego konkretnego przypadku:

Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie 1.1 i Wniosek 1.2 [27]). *Niech $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych i niech $\{A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ będzie ciągiem losowych podzbiorów $\mathbb{N}$ takim, że $A_n \subset A_{n+1}$, p.p. dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem rosnącym liczb dodatnich rzeczywistych. Załóżmy, że istnieje stała K taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi, że*

$$\frac{n}{b_n} \leqslant K. \tag{2.6}$$

Załóżmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(\sum_{i \in A_n \setminus A_{n-1}} X_i)(\log(n))^2}{b_n^2} \ < \ \infty, \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big| Cov\Big(\sum_{i \in A_{n+1} \setminus A_n} X_i, \sum_{i \in A_{n+k+1} \setminus A_{n+k}} X_i \Big) \Big| \frac{\log^2(k)}{k} \ < \ \infty. \tag{2.8}$$

Wtedy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S(A_n)}{b_n} = 0, \qquad p.p. \tag{2.9}$$

Jak już wspomnieliśmy, podstawowym naszym celem w tym rozdziale jest udowodnienie MPWL dla $\{S(A_n), V(A_n), Z(A_n), n \in \mathbb{N}\}$. W porównaniu z Twierdzeniem 2.1:

- usuniemy założenie (2.6),
- osłabimy założenie (2.7),
- nie zakładamy nic o strukturze typu mieszania (ang. mixing), tzn. nie zakładamy (2.8). W Przykładzie 2.1 i Uwadze 2.1 w podrozdziale 2.2 skonstruujemy ciągi $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ i $\{S_{[n]}, n \in \mathbb{N}\}$, które są zależne między sobą i nie spełniają (2.8), ale zachodzi dla nich nasze Twierdzenie 2.2.
- rozważamy MPWL zarówno typu Marcinkiewicza-Zygmunda, jak i typu Kołmogorova.
- technika dowodów naszych wyników znacząco różni się od technik przedstawionych w [26], [27] i [25]. My rozwijamy techniki opisane w [9],

ale oczywiście rozważamy bardzo specyficzne sumy zależnych ciągów $\{S(A_n), V(A_n), Z(A_n), n \geqslant 1\}$ zdefiniowane w (2.4).

2.1 Mocne Prawo Wielkich Liczb dla losowych podciągów

Twierdzenie 2.2. *Niech $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że $E|X_n| < \infty, n \in \mathbb{N}$ i niech $\{A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ będzie ciągiem losowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ ($A_o = \emptyset$) niezależnym od $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ oraz spełniającym warunek (2.6). Niech $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie niemalejącym, nieograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Załóżmy, że:*

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \sum_{j \in A_n \setminus A_{n-1}} E|X_j - EX_j|^{2q} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A_k|^{q-1} - |A_{k-1}|^{q-1}}{b_k^{2q}} < \infty \quad \text{dla } q > 1, \tag{2.10}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \sum_{j \in A_n \setminus A_{n-1}} E|X_j - EX_j|^{2q} \frac{|A_n|^{q-1}}{b_n^{2q}} < \infty \quad \text{dla } q \geqslant 1, \tag{2.11}$$

(c)

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad p.p. \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

(d) dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-b_n\varepsilon+E\sum_{i\in A_n}X_i}E\prod_{i\in A_n}e^{-EX_i}\right) < \infty, \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-b_n\varepsilon-E\sum_{i\in A_n}X_i}E\prod_{i\in A_n}e^{EX_i}\right) < \infty. \tag{2.14}$$

Jeśli $E|X_n|^{2q} < \infty$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dla pewnego $q \geqslant 1$ oraz jeśli zachodzą warunki (a), (b), (c), to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{2.15}$$

Jeśli (d) zachodzi, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{2.16}$$

Jeśli $E|X_n|^{2q} < \infty$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dla pewnego $q \geqslant 1$ oraz (a), (b), (c), (d) zachodzą, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{2.17}$$

Zwróćmy uwagę, że założenie o monotoniczności zbiorów (2.12) nie jest potrzebne do dowodu (2.16).
W przypadku ciągu $\{X_n,\, n \geqslant 1\}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie założenia tego twierdzenia znacznie się upraszczają i sprowadzają do oszacowań liczebności zbiorów $\{A_n, n \geqslant 1\}$.

Wniosek 2.1. *Niech $\{X, X_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach takim, że $E|X| < \infty$. Ponadto, niech $\{A_n, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ będzie ciągiem losowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ ($A_o = \emptyset$) niezależnym od $\{X, X_n, n \in \mathbb{N}\}$ i spełniającym warunki (2.2). Niech $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie niemalejącym rozbieżnym do nieskończoności ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Załóżmy, że*

(a)

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad p.p. \quad dla\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.18}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\left((|A_n|-|A_{n-1}|)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|A_k|^{q-1}-|A_{k-1}|^{q-1}}{b_k^{2q}}\right) < \infty \quad dla\ q > 1, \tag{2.19}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\frac{(|A_n|-|A_{n-1}|)|A_n|^{q-1}}{b_n^{2q}} < \infty \quad dla\ q \geqslant 1, \tag{2.20}$$

(d) dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n\varepsilon} E\Big(e^{\big||A_n|-E|A_n|\big|}\Big)^{EX} < \infty. \tag{2.21}$$

Jeśli $E|X|^{2q} < \infty$ dla pewnego $q \geqslant 1$ oraz jeśli zachodzą warunki (a), (b), (c), to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{2.22}$$

Jeśli (d) zachodzi, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{2.23}$$

Jeśli $E|X|^{2q} < \infty$ dla dowolnego $q \geqslant 1$ oraz (a), (b), (c), (d) zachodzą, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{2.24}$$

Aby udowodnić Twierdzenie 2.2 i Wniosek 2.1, udowodnijmy najpierw kluczową dla naszych rozważań nierówność maksymalną Hájeka-Rényiego dla $\{V(A_n), n \geqslant 1\}$ postępując analogicznie do udowodnionej nierówności dla zwykłych sum i Twierdzenia 2.1 w [9].

Lemat 2.1. *Załóżmy, że $\{A_n,\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ jest prawie pewnie rosnącym w sensie zawierania ciągiem losowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ spełniającym (2.2) i niezależnym od ciągu zmiennych losowych $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ oraz połóżmy $A_0 = \emptyset$. Ponadto, niech $\beta_1, \beta_2, \ldots$ będzie ciągiem niemalejących liczb rzeczywistych dodatnich, natomiast $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ niech będzie ciągiem liczb nieujemnych. Niech r będzie ustaloną liczbą dodatnią. Załóżmy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ takiego, że $1 \leqslant m \leqslant n$ zachodzi:*

$$E[\max_{1\leqslant l\leqslant m} |V(A_l)|]^r \leqslant \sum_{l=1}^{m} \alpha_l. \tag{2.25}$$

Wtedy

$$E\Big[\max_{1\leqslant l\leqslant n}\Big|\frac{V(A_l)}{\beta_l}\Big|\Big]^r < 4\sum_{l=1}^{n} \frac{\alpha_l}{\beta_l^r}. \tag{2.26}$$

Dowód Lematu 2.1. Ponieważ zmienne losowe w nierówności Hájeka-Rényiego (Twierdzenie 1.1 [9]) mogą być dowolnie zależne, więc rozważając $Y_l = \sum_{i\in A_l\setminus A_{l-1}}(X_i - EX_i)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, tezę otrzymujemy natychmiast. $\square$

Dalej pokażemy, jak z nierówności Hájeka-Rényiego wynika MPWL.

Lemat 2.2. *Niech $\{A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ będzie prawie pewnie rosnącym ciągiem losowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ spełniającym (2.1):*

$$\begin{aligned} A_n &: \Omega \to 2^{\mathbb{N}}, \\ A_n &\subset A_{n+1}, \quad p.p., \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Niech $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie niemalejącym, nieograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich oraz niech $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem nieujemnych liczb. Niech r będzie ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$E[\max_{1\leqslant l\leqslant n} |V(A_l)|]^r \leqslant \sum_{l=1}^{n} \alpha_l. \tag{2.27}$$

Jeśli

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l}{b_l^r} < \infty, \tag{2.28}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{2.29}$$

Dowód Lematu 2.2. Podobnie jak w dowodzie Lematu 2.1 zauważmy, że Twierdzenie 2.1 [9] zachodzi dla dowolnie zależnych zmiennych losowych, a więc możemy zastosować je również do sum $Y_l = \sum_{i\in A_l \setminus A_{l-1}} (X_i - EX_i)$, $1 \leqslant l \leqslant m$. □

Dowód Twierdzenia 2.2. W pierwszym etapie dowodu wykażemy, że zachodzi (2.15). Dowód tej części przebiega podobnie jak dowód Wniosku 3.1 [9]. Zatem, aby otrzymać tezę (2.15) musimy wykazać, że warunki Lematu 2.2 są spełnione. W celu wykazania warunku (2.27) użyjemy nierówności Burkolder'a, która dla zmiennej losowej $V(A_n)$ przyjmuje postać

$$E[|V(A_n)|]^{2q} \leqslant c_q E\Big(\sum_{j\in A_n} \big(X_j - EX_j\big)^2\Big)^q$$

oraz nierówności Doob'a w postaci

$$\begin{aligned} & E[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |V(A_k)|]^{2q} = \\ &= \sum{}' E[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |V(B_k)|]^{2q} P[A_k = B_k, 1 \leqslant k \leqslant n, k \in \mathbb{N}] \\ &\leqslant \Big(\frac{2q}{2q-1}\Big)^{2q} \sum{}' E[|V(B_n)|]^{2q} P[A_k = B_k, 1 \leqslant k \leqslant n, k \in \mathbb{N}] \\ &\leqslant \Big(\frac{2q}{2q-1}\Big)^{2q} E|V(A_n)|^{2q}, \end{aligned}$$

gdzie przez $\sum'$ oznaczamy sumowanie po wszystkich możliwych zbiorach $\{B_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ takich, że $B_i \subset B_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$ oraz $B_n \subset [1, 2, \ldots \overline{\alpha}_n]$ dla $i, k, n \in \mathbb{N}$. Wykorzystując kolejno nierówność Doob'a i Burkholder'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} E[\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |V(A_k)|]^{2q} &\leqslant \Big(\frac{2q}{2q-1}\Big)^{2q} E|V(A_n)|^{2q} \\ &\leqslant c(q) E\Big(\sum_{j \in A_n} \Big(X_j - EX_j\Big)^2\Big)^q, \end{aligned}$$

gdzie $c(q) = \Big(\frac{2q}{2q-1}\Big)^{2q} c_q$. Następnie, korzystając z nierówności Hölder'a dostajemy

$$\begin{aligned} E\Big(\sum_{j \in A_n} \Big(X_j - EX_j\Big)^2\Big)^q &\leqslant E\Big[\Big(\sum_{j \in A_n} \Big(X_j - EX_j\Big)^{2q}\Big)^{1/q} \cdot \Big(\sum_{j \in A_n} 1\Big)^{1/p}\Big]^q \\ &= E\Big[\sum_{j \in A_n} \Big(X_j - EX_j\Big)^{2q} \cdot |A_n|^{q-1}\Big]. \end{aligned}$$

Podsumowując, otrzymaliśmy

$$E[\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |V(A_k)|]^{2q} \leqslant c(q) E\Big[\sum_{j \in A_n} \Big(X_j - EX_j\Big)^{2q} \cdot |A_n|^{q-1}\Big], \tag{2.30}$$

gdzie $c(q) = \Big(\frac{2q}{2q-1}\Big)^{2q} c_q$. Dla $n \in \mathbb{N}$ kładąc

$$\alpha_n = \begin{cases} c(q)\Big(E\Big(\sum\limits_{j \in A_n \setminus A_{n-1}} E|X_j - EX_j|^{2q} |A_n|^{q-1}\Big) & \\ +E\Big(\sum\limits_{j \in A_{n-1}} E|X_j - EX_j|^{2q}(|A_n|^{q-1} - |A_{n-1}|^{q-1})\Big)\Big), & \text{jeśli } q > 1, \\ c(q) E\Big(\sum\limits_{j \in A_n \setminus A_{n-1}} Var(X_j)\Big), & \text{jeśli } q = 1, \end{cases} \tag{2.31}$$

otrzymujemy

$$E[\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |V(A_k)|]^{2q} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tym samym pokazaliśmy, że warunek (2.27) z Lematu 2.2 jest spełniony. Łatwo widać, że warunek (2.28) jest konsekwencją definicji α_n (2.31) i warunków (b) oraz (c) Twierdzenia 2.2.

Przejdźmy teraz do dowodu (2.16). Ponieważ ze zbieżności kompletnej (zob. strona 10) wynika zbieżność prawie na pewno, więc aby udowodnić (2.16) wystarczy wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[\Big|\frac{Z(A_n)}{b_n}\Big| > \varepsilon\Big] < \infty. \tag{2.32}$$

Ponadto zauważmy, że mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[\Big|\frac{Z(A_n)}{b_n}\Big| > \varepsilon\Big] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\Big[Z(A_n) > \varepsilon b_n\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} P\Big[Z(A_n) < -\varepsilon b_n\Big],$$

czyli aby udowodnić, że (2.16) zachodzi, należy wykazać, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\Big[Z(A_n) > \varepsilon b_n\Big] < \infty \tag{2.33}$$

oraz, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\Big[Z(A_n) < -\varepsilon b_n\Big] < \infty. \tag{2.34}$$

Ze zwykłej nierówności Czebyszewa, dla dowolnej zmiennej losowej $P[Y > \varepsilon] \leqslant \frac{E|Y|}{\varepsilon}]$ podstawiając $Y = e^X$ i wykorzystując fakt, że funkcja $f(x) = e^x$ jest rosnąca, otrzymujemy tak zwaną wykładniczą nierówność Czebyszewa $P[X > \varepsilon] = P[e^X > e^\varepsilon] \leqslant \frac{Ee^X}{e^\varepsilon}$. Stosując tą wykładniczą nierówności Czebyszewa otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[Z(A_n) > \varepsilon b_n\Big] &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ee^{Z(A_n)}}{e^{\varepsilon b_n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon b_n} Ee^{\Big[\sum\limits_{i=1}^{\infty}\Big(I[i\in A_n]-P[i\in A_n]\Big)EX_i\Big]} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon b_n - \sum\limits_{i=1}^{\infty} P[i\in A_n]\cdot EX_i} \cdot Ee^{\sum\limits_{i=1}^{\infty} I[i\in A_n]\cdot EX_i}.
\end{aligned}$$

Z niezależności $\{X_n, n \geqslant 1\}$ oraz $\{A_n, n \geqslant 1\}$ mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} P[i \in A_n]\cdot EX_i &= E\Big(\sum_{i\in A_n} X_i\Big), \\
\sum_{i=1}^{\infty} I[i \in A_n]\cdot EX_i &= \sum_{i\in A_n} EX_i,
\end{aligned}$$

a stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ otrzymujemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[Z(A_n) > \varepsilon b_n\Big] < \sum_{n=1}^{\infty}\Big(e^{-b_n\varepsilon + E\sum_{i\in A_n} X_i} E \prod_{i\in A_n} e^{-EX_i}\Big), \tag{2.35}$$

co wraz z (2.13) dowodzi (2.33). Podobnie, zależność (2.34) wynika z (2.14), stąd otrzymujemy (2.32) i tezę $\lim_{n\to\infty} \frac{Z(A_n)}{b_n} = 0$, *p.p.* Ostatnia zbieżność $\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n)}{b_n} = 0$, *p.p.* jest konsekwencją poprzednich punktów i rozkładu (2.5). □

Dowód Wniosku 2.1. Pokażemy, że warunki (2.10)-(2.14), w przypadku zmiennych losowych $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ niezależnych o jednakowym rozkładzie, sprowadzają się odpowiednio do warunków (2.18)-(2.21). Rzeczywiście, warunek (2.10) w tym przypadku można zapisać jako

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\sum_{j\in A_n\setminus A_{n-1}} E|X_j - EX_j|^{2q} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A_k|^{q-1} - |A_{k-1}|^{q-1}}{b_k^{2q}}\Big] \\
&= E|X - EX|^{2q} \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\sum_{j\in A_n\setminus A_{n-1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A_k|^{q-1} - |A_{k-1}|^{q-1}}{b_k^{2q}}\Big] \\
&= E|X - EX|^{2q} \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A_k|^{q-1} - |A_{k-1}|^{q-1}}{b_k^{2q}} \sum_{j\in A_n\setminus A_{n-1}} 1\Big] \\
&= E|X - EX|^{2q} \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A_k|^{q-1} - |A_{k-1}|^{q-1}}{b_k^{2q}} \Big(|A_n| - |A_{n-1}|\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Z kolei warunek (2.11) dla takich samych zmiennych losowych sprowadza się do

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\sum_{j\in A_n\setminus A_{n-1}} E|X_j - EX_j|^{2q} \frac{|A_n|^{q-1}}{b_n^{2q}}\Big] \\
&= E|X - EX|^{2q} \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\sum_{j\in A_n\setminus A_{n-1}} \frac{|A_n|^{q-1}}{b_n^{2q}}\Big] \\
&= E|X - EX|^{2q} \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\frac{|A_n|^{q-1}}{b_n^{2q}} \sum_{j\in A_n\setminus A_{n-1}} 1\Big] \\
&= E|X - EX|^{2q} \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\frac{|A_n|^{q-1}}{b_n^{2q}} \Big(|A_n| - |A_{n-1}|\Big)\Big],
\end{aligned}$$

natomiast warunek (2.13) można wtedy zapisać

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \Big(e^{-b_n\varepsilon + E\sum_{i\in A_n} X_i} E\Big(\prod_{i\in A_n} e^{-EX_i}\Big)\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(e^{-b_n\varepsilon + E(X|A_n|)} Ee^{-(EX)|A_n|}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n\varepsilon} E\Big(e^{(E|A_n| - |A_n|)EX}\Big)
\end{aligned}$$

i zupełnie analogicznie (2.14) sprowadza się do (2.21). □

2.2 Uwagi i zastosowania

Rozważmy teraz przyrosty następujących wyrażeń $V(A_n)$, $Z(A_n)$, $S(A_n)$, tj. rozważmy wyrażenia postaci $V_{[n]} = V(A_{n+1}\backslash A_n)$, $Z_{[n]} = Z(A_{n+1}\backslash A_n)$, $S_{[n]} = S(A_{n+1}\backslash A_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, odpowiednio.

Uwaga 2.1. *Niech $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych i niech $\{A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ będzie prawie pewnie rosnącym ciągiem podzbiorów losowych o wartościach ze zbioru $2^{\mathbb{N}}$ niezależnym od $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy*

(a) przyrosty sum $V(A_n)$ są nieskorelowane,

(b) przyrosty sum $Z(A_n)$ oraz przyrosty sum $S(A_n)$ mogą być skorelowane,

(c) przyrosty sum $V(A_n)$, $Z(A_n)$ oraz $S(A_n)$ mogą być zależne.

Dowód Uwagi 2.1. Dowód przeprowadzimy tylko dla punktu (a), natomiast prawdziwość (b) i (c) wykażemy konstuując odpowiedni przykład (Przykład 2.1). Przypomnijmy, że $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ są zbiorami losowymi takimi, że $A_n \subset A_{n+1}$, p.p. dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i niezależnymi od $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
Cov(V_{[n]}, V_{[n+k]}) &= Cov(V(A_{n+1}\backslash A_n), V(A_{n+k+1}\backslash A_{n+k})) \\
&= Cov(\sum_{j\in A_{n+1}\backslash A_n} (X_j - EX_j), \sum_{j\in A_{n+k+1}\backslash A_{n+k}} (X_j - EX_j)) \\
&= \sum{}' Cov(\sum_{j\in B_2\backslash B_1} (X_j - EX_j), \sum_{k\in B_4\backslash B_3} (X_j - EX_j)) \\
&\quad P[A_n = B_1, A_{n+1} = B_2, A_{n+k} = B_3, A_{n+k+1} = B_4] \\
&= \sum{}' \sum_{j\in B_2\backslash B_1} \sum_{k\in B_4\backslash B_3} E(X_j - EX_j)(X_k - EX_k) \\
&\quad P[A_n = B_1, A_{n+1} = B_2, A_{n+k} = B_3, A_{n+k+1} = B_4] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

gdzie przez sumę $\sum'$ rozumiemy sumowanie po wszystkich możliwych zbiorach $\{B_k, k = 1, \ldots, 4\}$ będących realizacjami zbiorów losowych A_n, A_{n+1}, A_{n+k}, A_{n+k+1}, to znaczy takich zbiorów, że $B_i \subset B_{i+1}$ dla $i = 1, 2, 3$ i $B_4 \subset [1, 2, \ldots, \overline{\alpha}_{n+k+1}]$. □

Przykład 2.1. *Niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę podzbiorów Borelowskich zdefiniowanych na $[0, 1]$, zaś λ niech oznacza miarę Lebesgue'a na zbiorze $[0, 1]$. Niech $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(\mu_n, \sigma_n)$ zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$. Na tej samej przestrzeni probabilistycznej $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ zdefiniujmy ciąg zbiorów losowych $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$*

i rozszerzmy definicję $\{X_n, A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *na przestrzeń produktową* $([0,1]^2, \mathcal{B} \times \mathcal{B}, \lambda \times \lambda)$ *taką, że* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *i* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *będą niezależne* $(X_n(\omega_1, \omega_2) = X_n(\omega_1), A_n(\omega_1, \omega_2) = A_n(\omega_2))$*. Dla pewnego* $0 < p < 1$ *zdefiniujmy*

$$I_n = \begin{cases} [0,p), & \textit{jeśli } n \textit{ jest parzysty,} \\ [p,1], & \textit{jeśli } n \textit{ jest nieparzysty.} \end{cases}$$

Niech ponadto

$$A_n = \begin{cases} \{1,2,\dots,n,n+1\}, & \omega \in [0,1] \times I_n, \\ \{1,2,\dots,n,n+2\}, & \omega \in [0,1] \times ([0,1] \backslash I_n). \end{cases} \tag{2.36}$$

Oczywiście $A_n \subset A_{n+1}$*, p.p. dla* $n \in \mathbb{N}$*. W przypadku, gdy* n *jest parzyste, to* $n+1$ *jest nieparzyste i wtedy* $I_n = [0,p)$*,* $I_{n+1} = [p,1]$*. Dlatego dla* $\omega \in [0,1] \times [0,p]$ *zbiór* $A_{n+1}(\omega)$ *jest zdefiniowany drugą formułą, zaś zbiór* $A_n(\omega)$ *formułą pierwszą w (2.36). Zatem*

$$\begin{aligned} A_{n+1}(\omega) \backslash A_n(\omega) &= \{1,2,\dots,n,n+1,n+3\} \backslash \{1,2,\dots,n,n+1\} \\ &= \{n+3\}. \end{aligned}$$

Natomiast, gdy $\omega \in [0,1] \times [p,1]$*, to zbiór* $A_{n+1}(\omega)$ *jest zdefiniowany przez pierwszą formułę, zaś zbiór* $A_n(\omega)$ *jest zdefiniowany przez drugą formułę w (2.36). Zatem*

$$\begin{aligned} A_{n+1}(\omega) \backslash A_n(\omega) &= \{1,2,\dots,n,n+1,n+2\} \backslash \{1,2,\dots,n,n+2\} \\ &= \{n+1\}. \end{aligned}$$

Postępując podobnie dla n *nieparzystego otrzymujemy*

$$A_{n+1} \backslash A_n = \begin{cases} \{n+1\}, & \omega \in [0,1]^2 \backslash ([0,1] \times I_n), \\ \{n+3\}, & \omega \in [0,1] \times I_n. \end{cases}$$

Dowód (b) i (c) Uwagi 2.1. Najpierw wykażemy, że punkt (b) Uwagi 2.1 zachodzi, tj. wykażemy, że przyrosty $Z(A_n)$ oraz $S(A_n)$ mogą być skorelowane. Zauważmy, że mamy

$$\begin{aligned} Cov(S_{[n]}, S_{[n+k]}) &= Cov\Big(\sum_{j \in A_{n+1} \backslash A_n} X_j, \sum_{j \in A_{n+k+1} \backslash A_{n+k}} X_j\Big) \\ &= E\Big[\sum_{j \in A_{n+1} \backslash A_n} X_j \cdot \sum_{j \in A_{n+k+1} \backslash A_{n+k}} X_j\Big] - \\ &- E\Big[\sum_{j \in A_{n+1} \backslash A_n} X_j\Big] \cdot E\Big[\sum_{j \in A_{n+k+1} \backslash A_{n+k}} X_j\Big]. \end{aligned}$$

Ponieważ $EX_n = \mu_n$, więc dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} E\Big[\sum_{j\in A_{n+1}\setminus A_n} X_j\Big] &= \sum_{j=1}^{\infty} EX_j P[j \in A_{n+1}\setminus A_n] \\ &= \mu_{n+1}\cdot(1-P[I_n]) + \mu_{n+3}\cdot P[I_n], \end{aligned}$$

$$E\Big[\sum_{j\in A_{n+k+1}\setminus A_{n+k}} X_j\Big] = \begin{cases} \mu_{n+k+1}\cdot(1-P[I_n]) + \mu_{n+k+3}\cdot P[I_n], & \text{dla } k \text{ parzystego,} \\ \mu_{n+k+1}\cdot P[I_n] + \mu_{n+k+3}\cdot(1-P[I_n]), & \text{dla } k \text{ nieparzystego,} \end{cases}$$

oraz

$$\begin{aligned} & E\Big[\sum_{j\in A_{n+1}\setminus A_n} X_j \sum_{j\in A_{n+k+1}\setminus A_{n+k}} X_j\Big] = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} E(X_j X_l) P[j \in A_{n+1}\setminus A_n, i \in A_{n+k+1}\setminus A_{n+k}] \\ &= \begin{cases} \mu_{n+1}\mu_{n+k+1}\cdot(1-P[I_n]) + \mu_{n+3}\mu_{n+k+3}\cdot P[I_n], & \text{dla } k \text{ parzystego,} \\ \mu_{n+1}\mu_{n+k+3}\cdot(1-P[I_n]) + \mu_{n+3}\mu_{n+k+1}\cdot P[I_n], & \text{dla } k \text{ nieparzystego.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem ponieważ

$$P[I_n] = \begin{cases} p, & \text{gdy } I_n = [0,p), \\ 1-p, & \text{gdy } I_n = [p,1], \end{cases}$$

to dla dowolnego parzystego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} Cov(S_{[n]}, S_{[n+k]}) &= P[I_n]\Big[\mu_{n+1}\mu_{n+k+1} + \mu_{n+3}\mu_{n+k+3} - \mu_{n+1}\mu_{n+k+1}P[I_n] \\ &- \mu_{n+1}\mu_{n+k+3} + \mu_{n+1}\mu_{n+k+3}P[I_n] - \mu_{n+3}\mu_{n+k+1} \\ &+ \mu_{n+3}\mu_{n+k+1}P[I_n] - \mu_{n+3}\mu_{n+k+3}P[I_n]\Big] \\ &= P[I_n](1-P[I_n])(\mu_{n+k+1} - \mu_{n+k+3})(\mu_{n+1} - \mu_{n+3}) \\ &= p(1-p)(\mu_{n+k+1} - \mu_{n+k+3})(\mu_{n+1} - \mu_{n+3}) \end{aligned}$$

oraz dla dowolnego nieparzystego $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Cov(S_{[n]}, S_{[n+k]}) &= P[I_n]\Big[\mu_{n+1}\mu_{n+k+3} + \mu_{n+3}\mu_{n+k+1} - \mu_{n+3}\mu_{n+k+1}P[I_n] \\ &- \mu_{n+1}\mu_{n+k+1} + \mu_{n+1}\mu_{n+k+1}P[I_n] - \mu_{n+1}\mu_{n+k+3}P[I_n] \\ &- \mu_{n+3}\mu_{n+k+3} + \mu_{n+3}\mu_{n+k+3}P[I_n]\Big] \\ &= P[I_n](1-P[I_n])(\mu_{n+1} - \mu_{n+3})(\mu_{n+k+3} - \mu_{n+k+1}) \\ &= p(1-p)(\mu_{n+1} - \mu_{n+3})(\mu_{n+k+3} - \mu_{n+k+1}). \end{aligned}$$

Łącząc oba wzory dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} Cov(S_{[n]}, S_{[n+k]}) &= (-1)^{I[k \text{ jest nieparzyste}]} p(1-p) \cdot \\ &\cdot \; (\mu_{n+3} - \mu_{n+1})(\mu_{n+k+3} - \mu_{n+k+1}). \end{aligned}$$

Kładąc na przykład $\mu = n\delta$ dla pewnego $\delta > 0$ dostajemy

$$Cov(S_{[n]}, S_{[n+k]}) = (-1)^{I[k \text{ jest nieparzyste}]} p(1-p) \cdot 4\delta^2 \neq 0, \tag{2.37}$$

czyli przyrosty $S(A_n)$ mogą być skorelowane.
Analogicznie zastępując w oszacowaniu $Cov(S_{[n]}, S_{[n+k]})$ wszędzie X_j przez $\mu_j, j \geqslant 1$, mamy

$$\begin{aligned} &Cov(Z_{[n]}, Z_{[n+k]}) = Cov(\sum_{j \in A_{n+1} \setminus A_n} \mu_j, \sum_{j \in A_{n+k+1} \setminus A_{n+k}} \mu_j) \\ &= (-1)^{I[k \text{ jest nieparzyste}]} p(1-p) \cdot (\mu_{n+3} - \mu_{n+1})(\mu_{n+k+3} - \mu_{n+k+1}). \end{aligned}$$

Zatem przyrosty $Z_{[n]}$ również mogą być skorelowane. Kończy to dowód punktu (b).

Z kolei, w celu udowodnienia punktu (c) załóżmy, że k jest parzyste, $\mu_n = 0$ oraz rozważmy funkcje charakterystyczne dla $(V_{[n]}, V_{[n+k]}), V_{[n]}, V_{[n+k]}$ oznaczone odpowiednio przez $\phi_{(V_{[n]}, V_{[n+k]})}, \phi_{V_{[n]}}, \phi_{V_{[n+k]}}$. Wykażemy, że istnieją liczby rzeczywiste t, s oraz ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $\{\sigma_n, n \geqslant 1\}$ takie, że jeśli $X_n \sim N(0, \sigma_n)$, to

$$J(n) = \phi_{(V_{[n]}, V_{[n+k]})}(t, s) - \phi_{V_{[n]}}(t) \cdot \phi_{V_{[n+k]}}(s) \neq 0. \tag{2.38}$$

Wtedy z (2.38) otrzymamy zależność przyrostów $V(A_n)$.
Zauważmy więc, że dla parzystego k mamy

$$\begin{aligned} \phi_{V_{[n]}}(t) &= Ee^{\sum_{j \in A_{n+1} \setminus A_n} itX_j} \\ &= (1 - P[I_n])e^{-\frac{\sigma_{n+1}^2 t^2}{2}} + P[I_n]e^{-\frac{\sigma_{n+3}^2 t^2}{2}}, \\ \phi_{V_{[n+k]}}(s) &= Ee^{\sum_{j \in A_{n+k+1} \setminus A_{n+k}} isX_j} \\ &= (1 - P[I_n])e^{-\frac{\sigma_{n+k+1}^2 s^2}{2}} + P[I_n]e^{-\frac{\sigma_{n+k+3}^2 s^2}{2}}, \\ \phi_{(V_{[n]}, V_{[n+k]})}(t, s) &= (1 - P[I_n])Ee^{itX_{n+1}}Ee^{isX_{n+k+1}} + Ee^{itX_{n+3}}Ee^{isX_{n+k+3}}P[I_n] \\ &= (1 - P[I_n])e^{-\frac{\sigma_{n+1}^2 t^2}{2}}e^{-\frac{\sigma_{n+k+1}^2 s^2}{2}} + P[I_n]e^{-\frac{\sigma_{n+3}^2 t^2}{2}}e^{-\frac{\sigma_{n+k+3}^2 s^2}{2}}. \end{aligned}$$

Kładąc $\sigma_n^2 = \log\left(\frac{en}{n+1}\right)$, $t = \sqrt{2}$, $s = \sqrt{2}$, $p = 0.5$, dostajemy

$$\begin{aligned}
J(n) &= \frac{1}{2e^2}\Big(\frac{(n+4)(n+k+4)}{(n+3)(n+k+3)} + \frac{(n+2)(n+k+2)}{(n+1)(n+k+1)}\Big) \\
&- \frac{1}{4e^2}\Big(\frac{n+4}{n+3} + \frac{n+2}{n+1}\Big)\Big(\frac{n+k+4}{n+k+3} + \frac{n+k+2}{n+k+1}\Big) \\
&= \frac{1}{4e^2}\Big[\Big(\frac{1}{n+k+1} - \frac{1}{n+k+3}\Big)\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{e^2(n+k+1)(n+k+3)(n+1)(n+3)} \neq 0,
\end{aligned}$$

czyli przyrosty $V(A_n)$ mogą być zależne. Ponadto, jak wykazano powyżej, przyrosty $S(A_n)$ i $Z(A_n)$ mogą być skorelowane. Wobec tego mogą być one także zależne, ponieważ wiadomym jest, że skorelowane zmienne losowe są zależne. To kończy dowód punktu (c) i tym samym dowód Uwagi 2.1. □

Uwaga 2.2. *Definiując $\{X_n, A_n, n \in \mathbb{N}\}$ jak w Przykładzie 2.1 z $\mu_n = n\delta$ dla pewnego $\delta > 0$ i $\sigma_n = 1, n \in \mathbb{N}$, Twierdzenie 2.1 nie zachodzi dla żadnego ciągu $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$, podczas gdy, jeśli dla pewnego $q \geqslant 1$*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k+1)^{q-1} - k^{q-1}}{b_k^{2q}} < \infty, \tag{2.39}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{q-1}}{b_n^{2q}} < \infty, \tag{2.40}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon b_n} < \infty, \tag{2.41}$$

to dla takich ciągów warunki (2.10)-(2.14) zachodzą. W szczególności $b_n = n$, $n \geqslant 1, q = 2$ spełniają (2.39)-(2.41).

Dowód Uwagi 2.2. Niech $\{X_n, n \geqslant 1\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $X_j \sim N(j\delta, 1)$ dla pewnego $\delta > 0$. Wtedy $X_j - EX_j \sim N(0,1)$. Niech zbiory losowe $\{A_n, n \geqslant 1\}$ będą zdefiniowane tak, jak w Przykładzie 2.1. Wtedy ze wzoru (2.37) mamy, że

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|Cov\Big(\sum_{i\in A_{n+1}\setminus A_n} X_i, \sum_{i\in A_{n+k+1}\setminus A_{n+k}} X_i\Big)\Big|\frac{\log^2(k)}{k} &= 4p(1-p)\delta^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log^2(k)}{k} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

więc warunek (2.8) Twierdzenia 2.1 nie zachodzi niezależnie od wyboru ciągu normującego $\{b_n, n \geqslant 1\}$. Z drugiej strony oznaczając przez κ_q moment centralny rzędu $2q$ zmiennej losowej o rozkładzie $N(0,1)$ mamy w naszym przykładzie $E|X_n - EX_n|^{2q} = \kappa_q$ oraz, ponieważ zawsze w Przykładzie 2.1 zachodzi

$|A_n \backslash A_{n-1}| = 1, n \geqslant 1$, więc

$$\sum_{i \in A_n \backslash A_{n-1}} E|X_j - EX_j|^{2q} = \kappa_q |A_n \backslash A_{n-1}| = \kappa_q$$

a także z faktu, że $|A_n| = n+1$ warunki (2.10) i (2.11) sprowadzają się odpowiednio do (2.39) oraz (2.40).
Ponieważ w naszym Przykładzie 2.1, w przypadku gdy $A_n = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ mamy $\sum_{j \in A_n} X_j \sim N(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\delta, \sqrt{n+1})$, zaś na zdarzeniu $A_n = \{1, 2, \ldots, n, n+2\}$ mamy $\sum_{j \in A_n} X_j \sim N((\frac{n(n+1)}{2} + (n+2))\delta, \sqrt{n+1})$, więc

$$\begin{aligned} E \sum_{i \in A_n} X_i &= \Big(\frac{(n+1)(n+2)+2}{2} - P[I_n] \Big) \delta, \\ E \prod_{i \in A_n} e^{\pm EX_i} &= e^{\pm \frac{(n+1)(n+2)}{2}\delta} (P[I_n] + (1 - P[I_n]) e^{\pm\delta}), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} e^{-b_n \varepsilon \pm E \sum_{i \in A_n} X_i} E \prod_{i \in A_n} e^{\mp EX_i} &= e^{-b_n \varepsilon \pm (\frac{(n+1)(n+2)+2}{2}\delta - p\delta) \mp \frac{(n+1)(n+2)}{2}\delta} (p + (1-p) e^{\mp\delta}) \\ &= e^{-b_n \varepsilon \pm (1-p)\delta} (p + (1-p) e^{\mp\delta}) \\ &= C_{p,\delta} e^{-b_n \varepsilon}, \end{aligned}$$

zatem z (2.41) otrzymujemy (2.13) i (2.14). $\square$

Rozdział 3

Mocne Prawo Wielkich Liczb dla pól zależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

W tym rozdziale rozważać będziemy wielowymiarowe sumowanie po zbiorach podzbiorów $\mathbb{N}^d, d \geqslant 1$, $d-$wymiarowego pola zmiennych losowych zależnych o jednakowym rozkładzie. Teraz więc rozważamy pole zbiorów losowych $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ takich, że $A_{\underline{n}} : \Omega \to 2^{\mathbb{N}^d}$. Zakładać też będziemy, że zbiory $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ są prawie pewnie ograniczone przez pole liczb $\{\overline{\alpha}_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ oraz jeśli $\underline{k} \leqslant \underline{n}$, to $A_{\underline{k}} \subset A_{\underline{n}}, \underline{k}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d$, p.p. Nawet jeśli $d = 1$, to technik polegających na zamianie sumy $S(A_n)$ na $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in A_i \setminus A_{i-1}} Y_j$ nie można by było bezpośrednio zastosować, bo ciąg $\{\sum_{j \in A_n \setminus A_{n-1}} Y_j, n \geqslant 1\}$ jest ciągiem zależnych zmiennych losowych, ale już o różnych rozkładach, a rozważane tutaj pola losowe dodatkowo komplikują pojęcie przyrostu. Niemniej odpowiednik tego rozwinięcia będzie w dowodzie w różnych miejscach wykorzystywany.

Zacznijmy jednak od twierdzeń w nielosowym jednowymiarowym przypadku. Główny wynik pracy [46] możemy sformułować następująco:

Twierdzenie 3.1 (Twierdzenie 2.1 [46])**.** *Niech $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem dowolnie zależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z częściowymi sumami $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geqslant 1$. Niech $\{b_n, n \geqslant 1\}$ będzie niemalejącym ciągiem dodatnich liczb spełniających*

$$\frac{b_n}{nL(n)} \longrightarrow \infty \quad \textit{oraz} \quad \frac{b_n}{nL(n)} = O\Big(\inf_{j \geqslant n} \frac{b_j}{jL(j)}\Big) \tag{3.1}$$

dla pewnej $L : [1, \infty) \to (0, \infty)$ niemalejącej wolno zmieniającej się (ang. slowly *varying) funkcji. Jeśli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nL(n)\Big(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{jL(j)}\Big)P[b_{n-1} < |X| \leqslant b_n] < \infty, \tag{3.2}$$

to wtedy MPWL zachodzi, tzn.

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{p.p.} 0, \qquad gdy\ n \to \infty. \tag{3.3}$$

Warto zauważyć, że dla (3.3) żadne założenia o momentach X nie są wymagane i że (zob. Uwaga 2.1 [46]) warunek (3.2) implikuje, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > b_n] < \infty.$$

W ten sposób Twierdzenie 3.1 uogólnia znany wynik Martikainena and Petrova [38].

Zatem prezentowany tutaj wynik będzie uogólniał Twierdzenie 3.1 na przypadek pola zmiennych losowych $\{X, X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ dowolnie zależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Sumowanie rozciągać będziemy po polu $2^{\mathbb{N}^d}$ wartościowych zbiorów losowych niezależnych od $\{X, X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$, zaś $\{b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie normującym rozbieżnym do nieskończoności ciągiem niemalejących (w sensie relacji $\underline{k} \leqslant \underline{n}$ w $\mathbb{N}^d$) dodatnich rzeczywistych liczb. Chociaż główny wynik nie wymaga centrowania, to jednak rozkład typu (2.7) będziemy też rozważać, ale tutaj, w odróżnieniu od poprzedniego rozdziału, przez $S(A)$ rozumiemy niezcentrowane sumy $\sum_{\underline{k}\in A} X_{\underline{k}}$. Zatem

$$\begin{aligned} V(A) &= \sum_{\underline{i}\in A} X_{\underline{i}} - \sum_{\underline{i}\in A} EX_{\underline{i}}, && (3.4)\\ Z(A) &= \sum_{\underline{i}\in A} EX_{\underline{i}} - E\sum_{\underline{i}\in A} EX_{\underline{i}}. && (3.5) \end{aligned}$$

Oczywiście, w przypadku gdy A jest niezależny od $\{X, X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ mamy

$$S(A) - ES(A) = V(A) + Z(A), \tag{3.6}$$

a jeśli dodatkowo zmienne losowe $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ mają jednakowy rozkład, to

$$\begin{aligned} V(A) &= \sum_{\underline{i}\in A} X_{\underline{i}} - |A|EX,\\ Z(A) &= (|A| - E|A|)EX. \end{aligned}$$

Zawsze też, w tym rozdziale, będziemy zakładać, że zbiory $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ są dowolnie zależne, ale niezależne od $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ i istnieje pole dodatnich liczb rzeczywistych $\{\alpha_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ być może, w dowolnym sensie, rozbieżne do nieskończoności, ale takie, że

$$P[\sup\{\underline{k} : \underline{k} \in A_{\underline{n}}\} \leqslant \alpha_{\underline{n}}] = 1 \tag{3.7}$$

oraz

$$A_{\underline{k}} \subset A_{\underline{n}}, \quad \underline{k} \leqslant \underline{n}. \tag{3.8}$$

Zawsze też, podobnie jak w całej pracy doktorskiej, uzupełniamy definicję rodziny $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ o $A_{\underline{k}} = \emptyset$ dla wektorów $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots k_d)$ takich, że $k_j \geqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant d$, dla których istnieje $1 \leqslant i \leqslant d$ takie, że $k_i = 0$.

3.1 Mocne Prawo Wielkich Liczb dla zmiennych losowych zależnych o jednakowym rozkładzie

Twierdzenie 3.2. *Niech $\{X, X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem dowolnie zależnych, ale o jednakowym rozkładzie zmiennych losowych i niech $\{b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem niemalejących dodatnich liczb takim, że $\lim_{\underline{n}\to\infty} b_{\underline{n}} = \infty$. Niech $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem losowych podzbiorów $\mathbb{N}^d$ takich, że dla pewnego rozbieżnego do nieskończoności pola liczb rzeczywistych $\alpha_{\underline{n}}$ mamy, $P[\sup_{x\in A_{\underline{n}}} x > \alpha_{\underline{n}}] = 0$ i $P[A_{\underline{k}} \subset A_{\underline{n}}] = 1$, $\underline{k} \leqslant \underline{n}$. Załóżmy, że pole $\{A_{\underline{n}},\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest niezależne od $\{X, X_{\underline{n}},\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ i skojarzmy z każdym takim polem funkcję*

$$\psi(\underline{n}, \underline{k}) = E|[A_{\underline{n}} \setminus \cup_{j=1}^d A_{\underline{n}-\underline{e}_j}] \cap [\underline{k}, \infty)|, \quad \underline{n},\ \underline{k} \in \mathbb{N}^d,$$

gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A, natomiast $[\underline{k}, \infty)$ oznacza zbiór $\{\underline{l} : \underline{k} \leqslant \underline{l}\}$. Załóżmy, że

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} P[|X| > b_{\underline{n}}] \quad < \quad \infty, \tag{3.9}$$

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d} P[\max_{1\leqslant j\leqslant d} b_{\underline{k}-\underline{e}_j} < |X| \leqslant b_{\underline{k}}] b_{\underline{k}} \psi(\underline{n}, \underline{k}) \quad < \quad \infty. \tag{3.10}$$

Wtedy

$$\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{S(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} = 0, \quad p.p. \tag{3.11}$$

Chociaż, jak wspomniano w [46], dla MPWL tej postaci istnienie pierwszego momentu X nie jest konieczne, ale w następnym wyniku rozważać będziemy wpływ centrowania na MPWL.

Twierdzenie 3.3. *Niech* $\{X, X_{\underline{n}}, A_{\underline{n}}, b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie takie jak w Twierdzeniu 3.2 i niech* $E|X| < \infty$. *Załóżmy, że*

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} P[|X - EX| > b_{\underline{n}}] \ < \ \infty, \tag{3.12}$$

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{b_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d} P[\max_{1\leqslant j\leqslant d} b_{\underline{k}-\underline{e}_j} < |X - EX| \leqslant b_{\underline{k}}] b_{\underline{k}} \psi(\underline{n}, \underline{k}) \ < \ \infty. \tag{3.13}$$

Wtedy

$$\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{V(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} = 0, \quad p.p. \tag{3.14}$$

Jeśli dla pewnej dodatniej liczby ε *prawdziwe są nierówności*

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \left(e^{-b_{\underline{n}}\varepsilon} E e^{(|A_{\underline{n}}| - E|A_{\underline{n}}|)EX)} \right) \ < \ \infty, \tag{3.15}$$

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \left(e^{-b_{\underline{n}}\varepsilon} E e^{-(|A_{\underline{n}}| - E|A_{\underline{n}}|)EX)} \right) \ < \ \infty, \tag{3.16}$$

to wtedy

$$\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{Z(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} = 0, \quad p.p. \tag{3.17}$$

Przy założeniach (3.12),(3.13),(3.15) i (3.16) mamy

$$\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{S(A_{\underline{n}}) - ES(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} = 0, \quad p.p. \tag{3.18}$$

Następujący wynik wyjaśnia sytuację dla $d = 1$.

Wniosek 3.1. *Niech* $\{X, X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *będzie ciągiem dowolnie zależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach, niech* $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ *będzie ciągiem niemalejących rozbieżnych do nieskończoności dodatnich liczb. Niech* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *będzie ciągiem losowych podzbiorów* $\mathbb{N}$ *takich, że dla pewnych rozbieżnych do nieskończoności liczb rzeczywistych* α_n *mamy* $P[\sup_{x\in A_n} x > \alpha_n] = 0$ *i* $P[A_k \subset A_n] = 1, k \leqslant n$. *Będziemy zakładać, że* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *i* $\{X, X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *są niezależne. Ponadto załóżmy, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > b_n] \ < \ \infty, \tag{3.19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k P[b_{k-1} < |X| \leqslant b_k] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|A_n \backslash A_{n-1} \cap [k, \infty)|}{b_n} \ < \ \infty. \tag{3.20}$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{3.21}$$

Jeśli dodatkowo założymy, że

(i) $E|X| < \infty$ *i* $EX \neq 0$,

(ii) (3.19) i (3.20) zachodzi z X *zastąpionym przez* $X - EX$,

(iii) dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej ε *mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n\varepsilon} E e^{(|A_n| - E|A_n|)EX} < \infty, \tag{3.22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n\varepsilon} E e^{-(|A_n| - E|A_n|)EX} < \infty, \tag{3.23}$$

to wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n) - ES(A_n)}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{V(A_n)}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Z(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{3.24}$$

Łatwo sprawdzić, że warunek (3.19) wynika z (3.20) i z warunku

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{b_k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n,k)}{b_n} > 0.$$

Zatem z Wniosku 3.1 wynika Twierdzenie 2.2 [16].

Wniosek 3.2. *Załóżmy, że* $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}, n \geqslant 1$, *p.p. i (3.1) zachodzi. Wtedy (3.2) implikuje (3.19) i (3.20). W ten sposób Twierdzenie 3.2 jest uogólnieniem Twierdzenia 3.1.*

Dla pola zmiennych losowych $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ połóżmy (zobacz sumy zdefiniowane przed Uwagą 2 i ich zależności rozważane w tej Uwadze na stronie 13)

$$S_{\underline{n}}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} \epsilon_{\underline{k}} X_{\underline{k}}.$$

Jeśli $\{\epsilon_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ są zmiennymi losowymi takimi, że $0 < P[\epsilon_{\underline{n}} = 0] = 1 - P[\epsilon_{\underline{n}} = 1] < 1$, $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, to wtedy powyższa suma może być interpretowana jako suma obserwowanych ($\epsilon_{\underline{n}} = 1$) i nieobserwowanych ($\epsilon_{\underline{n}} = 0$) zmiennych losowych.

Twierdzenie 3.4. *Niech* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i niech* $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon, \epsilon_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie polem zależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie* $P[\epsilon = 0] = 1 - P[\epsilon = 1] = q = 1 - p, 0 < q < 1$. *Zakładamy, że pola* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *i* $\{\epsilon, \epsilon_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *są niezależne. Jeśli*

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} P[|X| > b_{\underline{n}}] \;<\; \infty, \tag{3.25}$$

$$\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d} P[\max_{1\leqslant j\leqslant d} b_{\underline{k}-\underline{e}_j} < |X| \leqslant b_{\underline{k}}] b_{\underline{k}} \sum_{\underline{n}\geqslant\underline{k}} \frac{1}{b_{\underline{n}}} \;<\; \infty, \tag{3.26}$$

to wtedy

$$\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{S_{\underline{n}}(\boldsymbol{\epsilon})}{b_{\underline{n}}} = 0, \;\; p.p. \tag{3.27}$$

3.2 Dowody głównych wyników

Z [32] Dodatku A.5 przypomnijmy Definicję A.8 i Propozycję A.5.

Definicja 3.1 (Definicja A.8 [32]). *Pole* $\{\Delta[x(\underline{n})], \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *jest nazywane polem przyrostów pola* $\{x(\underline{n}), \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *jeśli*

$$x(\underline{n}) = \sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}} \Delta[x(\underline{k})] \;\; \textit{dla wszystkich } \underline{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{3.28}$$

Kładąc $x(\underline{n}) = 0$, *gdy* $\min\{n_i, 1 \leqslant i \leqslant d\} = 0$ *pole przyrostów* $\{\Delta[x(\underline{n})], \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *dla dowolnego* $\{x(\underline{n}), \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *jest jednoznacznie zdefiniowane poprzez*

$$\Delta[x(\underline{n})] = \sum_{(\delta_1,\ldots\delta_d)\in\kappa_d} (-1)^{\delta_1+\ldots\delta_d} x(n_1 - \delta_1, \ldots, n_d - \delta_d), \tag{3.29}$$

gdzie κ_d *oznacza zbiór wszystkich d wymiarowych wektorów, których współrzędne są równe* 0 *lub* 1. *Suma po prawej stronie (3.29) jest brana po wszystkich* 2^d *możliwych kombinacjach liczb* $\delta_1, \ldots, \delta_d \in \{0, 1\}$. *Rozważając pola zależne od wielu parametrów, aby wskazać względem którego parametru są brane przyrosty, ten parametr będzie zaznaczony w dolnym indeksie, np.* $\Delta_{\underline{k}} x(\underline{n}, \underline{k}, \underline{l})$.

Lemat 3.1. *Niech* $\{B_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie polem niemalejących, w sensie zawierania, podzbiorów przestrzeni* $\mathbb{N}^d$ *tzn. jeśli* $\underline{k} \leqslant \underline{n}$, *to* $B_{\underline{k}} \subset B_{\underline{n}}$. *Niech* $\{\alpha_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie dowolnym polem liczb rzeczywistych i niech* Y *będzie dowolną zmienną losową.*

Oznaczmy $\underline{e}_i = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1 \text{ razy}}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{d-i \text{ razy}}) \in \mathbb{N}^d$. *Wtedy*

$$\Delta_{\underline{k}}[\sum_{\underline{j}\in B_{\underline{k}}} \alpha_{\underline{j}}] = \sum_{\underline{j}\in B_{\underline{k}} \setminus \cup_{i=1}^d B_{\underline{k}-\underline{e}_i}} \alpha_{\underline{j}}, \tag{3.30}$$

$$\Delta_{\underline{k}}[E|Y|I[|Y| \in B_{\underline{k}}]] = E|Y|I[|Y| \in B_{\underline{k}} \setminus \cup_{i=1}^d B_{\underline{k}-\underline{e}_i}]. \tag{3.31}$$

Dowód Lematu 3.1. Równanie (3.30). Dowód przeprowadzimy indukcyjnie po d. Niech $d = 1$. Ponieważ $B_{k-1} \subset B_k$, więc

$$\Delta_k[\sum_{j\in B_k} \alpha_j] = \alpha_k = \sum_{j\in B_k} \alpha_j - \sum_{j\in B_{k-1}} \alpha_j = \sum_{j\in B_k \setminus B_{k-1}} \alpha_j.$$

Załóżmy, że (3.30) zachodzi dla pewnego d i rozważmy $d+1$ wymiarowe pole. Kładąc $I(B) = \sum_{\underline{j}\in B} \alpha_{\underline{j}}$, bezpośrednio z (3.29) mamy, że

$$\begin{aligned}\Delta_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})} I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})}) &= \Delta_{(k_1,\ldots,k_d)} I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})}) \\ &- \Delta_{(k_1,\ldots,k_d)} I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)})\end{aligned}$$

i z założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned}\Delta_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})} I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})}) &= I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})} \setminus \cup_{i=1}^d B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})-\underline{e}_i}) \\ &- I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)} \setminus \cup_{i=1}^d B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)-\underline{e}_i}) \\ &= I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})}) - I(\cup_{i=1}^d B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})-\underline{e}_i}) \\ &- I(B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)}) + I(\cup_{i=1}^d B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)-\underline{e}_i}).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Teraz, ponieważ $\{B_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem niemalejących podzbiorów, więc dla każdego $1 \leqslant i \leqslant d$ mamy, że

$$B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})-\underline{e}_i} \cap B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)} = B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)-\underline{e}_i},$$

co implikuje, że

$$\left[\cup_{i=1}^d B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1})-\underline{e}_i}\right] \cap B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)} = \cup_{i=1}^d B_{(k_1,\ldots,k_d,k_{d+1}-1)-\underline{e}_i}$$

i ze znanej tożsamości

$$\sum_{i\in A\cup B} \alpha_x = \sum_{i\in A} \alpha_x + \sum_{i\in B} \alpha_x - \sum_{i\in A\cap B} \alpha_x,$$

zatem kładąc $\underline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_{d+1})$

$$I(\cup_{i=1}^{d+1} B_{\underline{k}-\underline{e}_i}) = I(\cup_{i=1}^d B_{\underline{k}-\underline{e}_i}) + I(B_{\underline{k}-\underline{e}_{d+1}}) - I(\cup_{i=1}^d B_{\underline{k}-\underline{e}_{d+1}-\underline{e}_i})$$

i jako konsekwencję (3.32)

$$\Delta_{\underline{k}} I(B_{\underline{k}}) = I(B_{\underline{k}} \setminus \cup_{i=1}^{d+1} B_{\underline{k}-\underline{e}_i}),$$

otrzymujemy (3.29).

Dowód (3.31) przebiega podobnie jak ten powyżej, zastępujemy tylko operacje na zbiorach, po których sumujemy przez operacje na zbiorach po których całkujemy. □

Lemat 3.2. *Niech $\{Y_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem nieujemnych zmiennych losowych. Jeśli*

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} EY_{\underline{n}} < \infty, \tag{3.33}$$

to wtedy

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} Y_{\underline{n}} < \infty, \qquad p.p. \tag{3.34}$$

Dowód Lematu 3.2. Niech $S_{\underline{n}} = \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} Y_{\underline{k}}$, $S = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} Y_{\underline{k}}$ oraz $m_{\underline{k}} = \max\{k_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$P[\sup_{\{\underline{k},\underline{n}: m_{\underline{k}} > M, m_{\underline{n}} > M\}} |S_{\underline{k}} - S_{\underline{n}}| > \varepsilon] \leqslant \frac{\sum_{\underline{n}: m_{\underline{n}} > M} Y_{\underline{n}}}{\varepsilon} \longrightarrow 0, \text{ gdy } M \to \infty,$$

w ten sposób

$$P[\limsup S_{\underline{n}} - \liminf S_{\underline{n}} > \varepsilon] = 0,$$

tak, że

$$\limsup S_{\underline{n}} = \liminf S_{\underline{n}} = S, \qquad \text{p.p.}$$

Ponieważ

$$P[\sup_{\underline{n}} S_{\underline{n}} > M] \leqslant \frac{ES}{M} \longrightarrow 0, \qquad \text{gdy } M \to \infty,$$

więc w konsekwencji $S < \infty$, p.p., co należało pokazać. □

Dowód Twierdzenia 3.2. Ponieważ

$$S(A_{\underline{n}}) = \sum_{\underline{i} \in A_{\underline{n}}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > b_{\underline{i}}] + \sum_{\underline{i} \in A_{\underline{n}}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant b_{\underline{i}}], \tag{3.35}$$

więc aby otrzymać (3.11) wystarczy dowieść

$$\lim_{\underline{n} \to \infty} \frac{\sum_{\underline{i} \in A_{\underline{n}}} |X_{\underline{i}}| I[|X_{\underline{i}}| > b_{\underline{i}}]}{b_{\underline{n}}} = 0, \tag{3.36}$$

$$\lim_{\underline{n} \to \infty} \frac{\sum_{\underline{i} \in A_{\underline{n}}} |X_{\underline{i}}| I[|X_{\underline{i}}| \leqslant b_{\underline{i}}]}{b_{\underline{n}}} = 0. \tag{3.37}$$

Dla dowodu (3.36) zauważmy, że z (3.9) i Lematu Borela-Cantelliego mamy $P[[|X_{\underline{n}}| > b_{\underline{n}}]\ n.w.] = 0$. W ten sposób istnieje $\mathbb{N}^d$ - wartościowy losowy wektor Y taki, że $P[\cup_{\underline{n}>Y}|X_{\underline{n}}| > b_{\underline{n}}] = 0$. Stąd, jako konsekwencję, mamy $\sum_{\underline{n}>Y}|X_{\underline{n}}|I[|X_{\underline{n}}| > b_{\underline{n}}] = 0$, p.p., a więc

$$\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{n}}}|X_{\underline{i}}|I[|X_{\underline{i}}| > b_{\underline{i}}] \leqslant \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}|X_{\underline{n}}|I[|X_{\underline{n}}| > b_{\underline{n}}] < \infty, \qquad \text{p.p.}$$

co, ponieważ $\lim_{\underline{n}\to\infty} b_{\underline{n}} = \infty$, implikuje (3.36).

Z (3.28) i z Lematu 3.1 (zob. (3.31)) wynika, że

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{n}}}|X_{\underline{i}}|I[|X_{\underline{i}}| \leqslant b_{\underline{i}}]}{b_{\underline{n}}} = \\
&= \frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}}\Delta_{\underline{k}}\Big[\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{k}}}|X_{\underline{i}}|I[|X_{\underline{i}}| \leqslant b_{\underline{i}}]\Big] \\
&= \frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{k}\leqslant\underline{n}}\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{k}}\setminus\cup_{j=1}^d A_{\underline{k}-\underline{e}_j}}|X_{\underline{i}}|I[|X_{\underline{i}}| \leqslant b_{\underline{i}}].
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Chociaż, w ogólności, Lemat Kroneckera nie zachodzi dla pól indeksowanych $\mathbb{N}^d$ gdy $d > 1$, ale jeśli składniki są nieujemne i pole $\{b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest niemalejące i nieograniczone takie, że $\lim_{\underline{n}\to\infty} b_{\underline{n}} = \infty$, to możemy zastosować Lemat Kroneckera (zob. [32] Dodatek A.7 str. 421-422). Dlatego z (3.38) równość (3.37) będzie zachodzić po wykazaniu, że

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{n}}\setminus\cup_{j=1}^d A_{\underline{n}-\underline{e}_j}}|X_{\underline{i}}|I[|X_{\underline{i}}| \leqslant b_{\underline{i}}] < \infty, \text{ p.p.} \tag{3.39}$$

Z Lematu 3.2, dowód (3.39) i w konsekwencji Twierdzenia 3.2 jest kompletny przez pokazanie, że

$$I = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{b_{\underline{n}}}E\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{n}}\setminus\cup_{j=1}^d A_{\underline{n}-\underline{e}_j}}|X_{\underline{i}}|I[|X_{\underline{i}}| \leqslant b_{\underline{i}}] < \infty. \tag{3.40}$$

Ponieważ pola $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ i $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ są niezależne, to

$$I = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{b_{\underline{n}}}E\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{n}}\setminus\cup_{j=1}^d A_{\underline{n}-\underline{e}_j}}E|X|I[|X| \leqslant b_{\underline{i}}] < \infty. \tag{3.41}$$

Kładąc $B_{\underline{n}} = [0, b_{\underline{n}}], \underline{n} \in \mathbb{N}^d$ w Lemacie 3.1 i zauważając, że dla tak zdefiniowanych zbiorów mamy $B_{\underline{n}}\setminus\cup_{i=1}^d B_{\underline{n}-\underline{e}_i} = [\max_{1\leqslant i\leqslant d} b_{\underline{n}-\underline{e}_i}, b_{\underline{n}}]$, tak więc z (3.28), 3.1 (3.31) i (3.41), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{b_{\underline{n}}}E\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{n}}\setminus\cup_{j=1}^{d}A_{\underline{n}-\underline{e}_j}}\sum_{\underline{l}\leqslant\underline{i}}E|X|I[\max_{1\leqslant j\leqslant d}b_{\underline{i}-\underline{e}_j}<|X|\leqslant b_{\underline{i}}]\\
&= \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d}E|X|I[\max_{1\leqslant j\leqslant d}b_{\underline{k}-\underline{e}_j}<|X|\leqslant b_{\underline{k}}]E\sum_{\underline{i}\in A_{\underline{n}}\setminus\cup_{j=1}^{d}A_{\underline{n}-\underline{e}_j};\underline{i}\geqslant\underline{k}}1\\
&= \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d}E|X|I[\max_{1\leqslant j\leqslant d}b_{\underline{k}-\underline{e}_j}<|X|\leqslant b_{\underline{k}}]E|[A_{\underline{n}}\setminus\cup_{j=1}^{d}A_{\underline{n}-\underline{e}_j}]\cap[\underline{k},\infty)|\\
&\leqslant \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{b_{\underline{n}}}\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d}P[\max_{1\leqslant j\leqslant d}b_{\underline{k}-\underline{e}_j}<|X|\leqslant b_{\underline{k}}]b_{\underline{k}}E|[A_{\underline{n}}\setminus\cup_{j=1}^{d}A_{\underline{n}-\underline{e}_j}]\cap[\underline{k},\infty)|,
\end{aligned}$$

co z (3.10) kończy dowód. □

Dowód Twierdzenia 3.3. Postępując dokładnie tak jak w dowodzie Twierdzenia 3.2 z X_i i X zastąpionymi odpowiednio przez $X_i - EX_i$ i $X - EX$, mamy

$$\lim_{\underline{n}\to\infty}\frac{V(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}}=0,\quad p.p. \tag{3.42}$$

Aby dowieść (3.17) wystarczy pokazać, że dla dowolnego rzeczywistego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}P\Big[\Big|\frac{Z(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}}\Big|>\varepsilon\Big]<\infty.$$

Z wykładniczej nierówności Czebyszewa wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}P\Big[Z(A_{\underline{n}})>\varepsilon b_{\underline{n}}\Big] &\leqslant \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{Ee^{Z(A_{\underline{n}})}}{e^{\varepsilon b_{\underline{n}}}}\\
&= \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}e^{-\varepsilon b_{\underline{n}}}Ee^{(|A_{\underline{n}}|-E|A_{\underline{n}}|)EX}
\end{aligned}$$

i podobnie

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}P\Big[Z(A_{\underline{n}})<-\varepsilon b_{\underline{n}}\Big]\leqslant\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}e^{-\varepsilon b_{\underline{n}}}Ee^{-(|A_{\underline{n}}|-E|A_{\underline{n}}|)EX}. \tag{3.43}$$

W ten sposób (3.15) i (3.16) kończą dowód (3.17), podczas gdy (3.17),(3.14) i (3.6) kompletują dowód (3.4). □

Dowód Twierdzenia 3.4. Stosujemy Twierdzenie 3.2 dla zbiorów losowych zdefiniowanych przez

$$A_{\underline{n}}(\omega) = \{\underline{i} : \epsilon_{\underline{i}}(\omega) = 1, \underline{i} \leqslant \underline{n}\}, \ \underline{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{3.44}$$

Oczywiście tak zdefiniowane zbiory losowe spełniają warunek $A_{\underline{k}} \subset A_{\underline{n}}$, $\underline{k} \leqslant \underline{n}$ i są ograniczone przez $\overline{\alpha}_{\underline{n}} = |\underline{n}| = \prod_{i=1}^{d} n_i$. Ponadto

$$\psi(\underline{n}, \underline{k}) = pI[\underline{k} \leqslant \underline{n}],$$

tak więc z (3.26) otrzymujemy (3.10). Teraz Twierdzenie 3.2 kończy dowód Twierdzenia 3.3. □

3.3 Uwagi i przykłady

Uwaga 3.1. *Jako konsekwencję dowodów zauważmy, że założenia (3.9),(3.25) i (3.12) mogą być osłabione do odpowiednio:*

$$\sum_{\underline{n} \in |\cup_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} A_{\underline{k}}(\Omega)|} P[|X| > b_{\underline{n}}] < \infty$$

i

$$\sum_{\underline{n} \in |\cup_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} A_{\underline{k}}(\Omega)|} P[|X - EX| > b_{\underline{n}}] < \infty.$$

Przykład 3.1. *Niech $\{A_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem niezależnych losowych zbiorów o rozkładzie*

$$P[A_n = [1, n+k] \cap \mathbb{N}] = \frac{1}{m_n}, \quad k = 0, 1, \ldots, m_n - 1,$$

dla pewnego niemalejącego ciągu $\{m_n, n \geqslant 1\}$ dodatnich liczb całkowitych. Niech $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem dowolnie zależnych, ale o jednakowym rozkładzie zmiennyh losowych niezależnym od $\{A_n, n \geqslant 1\}$. Załóżmy, że dla pewnego rozbieżnego do nieskończoności ciągu $\{b_n, n \geqslant 1\}$ i pewnej niemalejącej wolno zmieniającej się funkcji $L : [1, \infty) \to (0, \infty)$ zachodzi

$$\frac{b_n}{nL(n)} \to \infty \quad \text{oraz} \quad \frac{b_n}{nL(n)} = O\left(\inf_{j: j+m_j > n} \frac{b_j}{jL(j) \min\{m_j - n + j, m_j\}} \right). \tag{3.45}$$

Załóżmy ponadto, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} nL(n) \Big(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{jL(j)} \Big) P[b_{n-1} < |X| \leqslant b_n] < \infty. \tag{3.46}$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{3.47}$$

Załóżmy dodatkowo, że $E|X| < \infty, EX \neq 0, \frac{b_n}{n+m_n} \to \infty$, *gdy* $n \to \infty$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n) - ES(A_n)}{b_n} = 0, \quad p.p. \tag{3.48}$$

Dowód Przykładów 3.1. Ponieważ A_n i A_{n-1} są niezależne, więc

$$\begin{aligned}
\psi(n,k) &= \sum_{l=0}^{m_n-1} \sum_{t=0}^{\min\{l,m_{n-1}\}-1} \frac{1}{m_n m_{n-1}} |[n+t, n+l] \cap [k,\infty) \cap \mathbb{N}| \\
&= \begin{cases} \frac{1}{6m_n m_{n-1}}\Big((m_n+2)_3 - (m_n - m_{n-1}+2)_3\Big), & \text{jeżeli } k \leqslant n, \\ \frac{1}{2m_n}(n+m_n-k+1)_2, & \text{jeżeli } m_{n-1} \leqslant k-n < m_n, \\ \frac{(n+m_n-1+1)_2(k-n+1)}{2m_n m_{n-1}} + \frac{(m_n-k+n+1)_3-(m_n-m_{n-1})_3}{6m_n m_{n-1}}, & \text{jeżeli } 0 < k-n < m_{n-1}, \\ 0, & \text{poza}, \end{cases} \\
&\leqslant \begin{cases} \frac{2m_n+4}{3}, & \text{jeżeli } k \leqslant n, \\ \frac{m_n-k+n}{2}, & \text{jeżeli } n < k < n+m_n, \\ 0, & \text{jeżeli } n+m_n \leqslant k, \end{cases}
\end{aligned}$$

gdzie $(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$ oznacza n-tą dolną silnię liczby x. Dlatego dla dowodu (3.10) wystarczy dowieść, że

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} b_k P[b_{k-1} < |X| < b_k]\left(\sum_{n:n>k} \frac{m_n}{b_n} + \sum_{n:n+m_n \geqslant k \geqslant n} \frac{m_n-k+n}{b_n}\right) < \infty.$$

Postępując analogicznie do dowodu Uwagi 2.1 [46] z (3.45) i (3.46) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
I \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} kL(k)P[b_{k-1} < |X| < b_k] \sum_{n:n+m_n>k} \frac{1}{nL(n)} &< \infty, \\
\sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > b_n] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P[b_{n-1} < |X| < b_n] &< \infty,
\end{aligned}$$

co razem z Wnioskiem 2.1 kończy dowód (3.47).
Ponieważ

$$\begin{aligned}
Ee^{(|A_n|-E|A_n|)EX} &\leqslant Ce^{(n+m_n)|EX|}, \\
Ee^{(E|A_n|-|A_n|)EX} &\leqslant Ce^{(n+m_n)|EX|}
\end{aligned}$$

oraz $\frac{b_n}{n+m_n} \to \infty$, więc (3.17) zachodzi, zaś (3.48) jest konsekwencją tego, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{C(n+m_n)-b_n\varepsilon} < \infty.$$

□

Kładąc $P[N_n = n+k] = \frac{1}{m_n}, k = 0,1,2,\ldots,m_n-1$, widzimy, że w Przykładzie 3.1 mamy

$$S(A_n) = \sum_{i=1}^{N_n} X_i,\ n \geqslant 1.$$

W ten sposób, w tym przykładzie, sumy po losowych zbiorach sprowadzają się do losowo indeksowanych sum. Tego jednak nie można powiedzieć o następnym przykładzie.

Przykład 3.2. *Niech $\{k_n, m_n, n \geqslant 1\}$ będą dwoma niemalejącymi ciągami dodatnich liczb całkowitych. Niech $\{A_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem zależnych losowych zbiorów takich, że A_1 jest ograniczonym zbiorem o dowolnym rozkładzie oraz*

$$P[A_n = A_{n-1} \cup \{n+k, n+k+1, \ldots, n+k+k_n-1\}] = \frac{1}{m_n}, \tag{3.49}$$

dla $k = 1,2,\ldots,m_n$. Niech $\{X, X_n,\ \ n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem dowolnie zależnych, ale o jednakowym rozkładzie zmiennych losowych niezależnych od $\{A_n, n \geqslant 1\}$. Załóżmy, że dla pewnego rozbieżnego do nieskończoności ciągu $\{b_n, n \geqslant 1\}$ i pewnej niemalejącej wolno zmieniającej się funkcji $L : [1,\infty) \to (0,\infty)$ mamy

$$\frac{b_n}{nL(n)} \to \infty \quad i \quad \frac{b_n}{nL(n)} = O\Big(\inf_{j:j+m_j+k_j>n} \frac{b_j}{jk_jL(j)}\Big). \tag{3.50}$$

Ponadto załóżmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} nL(n)\Big(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{jL(j)}\Big) P[b_{n-1} < |X| \leqslant b_n] < \infty. \tag{3.51}$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n)}{b_n} = 0, \ \ p.p. \tag{3.52}$$

Jeśli dodatkowo zakładamy, że $E|X| < \infty$, $EX \neq 0$ oraz

$$\frac{b_n}{\min\{\sum_{j=1}^{n} k_j : n+k_n+m_n\}} \longrightarrow \infty, \qquad gdy\ n \to \infty,$$

to wtedy zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(A_n) - ES(A_n)}{b_n} = 0, \ \ p.p. \tag{3.53}$$

Dowód Przykładu 3.2. Postępując tak jak w dowodzie Przykładu 3.1 dochodzimy do

$$|A_n \backslash A_{n-1} \cap [k, \infty)| \leqslant \begin{cases} k_n, & k < n + m_n + k_n, \\ 0, & k > n + m_n + k_n \end{cases}$$

i oszacowujemy

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} b_k P[b_{k-1} < |X| < b_k] \sum_{n: n+m_n+k_n > k} \frac{k_n}{b_n}.$$

Ostatnie stwierdzenie Przykładu 3.2 wynika z tego, że

$$\frac{b_n}{\min\{\sum_{j=1}^n k_j : n + k_n + m_n\}} \longrightarrow \infty, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

ponieważ

$$|A_n| \leqslant \min\{\sum_{j=1}^{n} k_j : n + k_n + m_n\}, \quad n \geqslant 1.$$

□

Rozdział 4

Prawie Pewne Centralne Twierdzenie Graniczne dla sum losowych pól

Prawie Pewne Centralne Twierdzenie Graniczne (PPCTG) sformułowano po raz pierwszy dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\{X_n,\, n \geqslant 1\}$ z $EX_1 = 0$ i $EX_1^2 = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left[\frac{S_k}{\sqrt{k}} < x\right] = \Phi(x), \quad p.p. \tag{4.1}$$

dla każdej wartości x, gdzie $I[\cdot]$ jak zwykle oznacza funkcję charakterystyczną lub indykator zdarzenia, Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego, a S_n jest n-tą częściową sumą zmiennych losowych $\{X_n,\, n \geqslant 1\}$. Szczegółową historię PPCTG można znaleźć na przykład w pracy [1] lub monografii [30], podczas gdy główne techniki dowodów sa rozwinięte w [5] i [6]. Ogólne podejście zarówno do MPWL, jak i PPCTG można znaleźć w pracy Ryszarda Jajte [29].

Oczywiście, jeśli powyższe założenia i Centralne Twierdzenie Graniczne jest spełnione dla ciągu $\{X_n,\, n \geqslant 1\}$, tzn. dla każdego x

$$P\left[\frac{S_k}{\sqrt{k}} < x\right] \longrightarrow \Phi(x), \qquad \text{gdy } k \to \infty, \tag{4.2}$$

to implikuje, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P\left[\frac{S_k}{\sqrt{k}} < x\right] = \Phi(x). \tag{4.3}$$

W tym rozdziale, podobnie jak w poprzednim, rozważać będziemy sumowanie po zbiorach podzbiorów $\mathbb{N}^d, d \geqslant 1$, $d-$wymiarowego pola zmiennych losowych niezależnych o, być może, różnych rozkładach. Tak więc, zbiory losowe $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ są takie, że $A_{\underline{n}} : \Omega \to 2^{\mathbb{N}^d}$. Zakładać też będziemy, że zbiory $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ są prawie pewnie ograniczone przez pole liczb $\{\overline{\alpha}_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$, jednak nigdzie w tym rozdziale nie wystąpi założenie o monotoniczności względem operacji zawierania zbiorów $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$.

PPCTG dla wielowymiarowych pól było badane w pracach, na przykład w [10], [11] oraz [43]. Nasze wyniki uogólniają znane dotąd wyniki w następujących kierunkach:

(a) Opuszczamy założenie, że $\{X_n, n \geqslant 1\}$ jest polem zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Zatem, zamiast $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ i $\{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$, rozważamy ogólne pola $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ i $\{b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$, odpowiednio.

(b) Rozważamy losowo wybrane składniki w sumach, to znaczy rozważamy sumy postaci

$$S(A_{\underline{n}}) = \sum_{\underline{k} \in A_{\underline{n}}} X_{\underline{k}} - E \sum_{\underline{k} \in A_{\underline{n}}} X_{\underline{k}} \tag{4.4}$$

i

$$S(A_{\underline{n}}) = \sum_{\underline{k} \in A_{\underline{n}}} (X_{\underline{k}} - EX_{\underline{k}}). \tag{4.5}$$

Twierdzenia typu (4.2) są nieznane dla sum typu (4.4) i (4.5), tak więc nasze Propozycje 4.1 i 4.2 są nowymi wynikami.

Zauważmy, że (4.4) i (4.5) można również zapisać jako odpowiednio:

$$S(A_{\underline{n}}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} (X_{\underline{k}} I[\underline{k} \in A_{\underline{n}}] - EX_{\underline{k}} P[\underline{k} \in A_{\underline{n}}])$$

i

$$S(A_{\underline{n}}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} I[\underline{k} \in A_{\underline{n}}](X_{\underline{k}} - EX_{\underline{k}}),$$

W ten sposób można rozważać nasze wyniki jako rozszerzenie PPCTG do sum zależnych zmiennych losowych pól $\{X_{\underline{k}} I[\underline{k} \in A_{\underline{n}}], \underline{k}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$.

Rozdział 4.1 zawiera sformułowania głównych wyników, Rodział 4.2 dowody, natomiast uwagi i przykłady opisane zostały w Rozdziale 4.3.

4.1 Prawie Pewne Centralne Twierdzenie Graniczne dla losowych sum losowych pól

Pierwsze wyniki dla PPCTG dla pól losowych są zawarte w [11] i [10]. Przepiszemy Twierdzenie 2.1 z [11] z lekko zmienioną notacją i z lekko zmodyfikowanym dowodem.

Definicja 4.1. *Rodzina* $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *liczb rzeczywistych jest nazwana polem typu produktowego, jeśli istnieje macierz* $\{d_{n,i}, n \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, d\}$ *liczb rzeczywistych taka, że dla każdego* $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ *zachodzi* $d_{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{d} d_{n_i,i}$.

Definicja 4.2. *Pole* $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *jest nazywane niemalejącym (nierosnącym), jeśli* $d_{\underline{m}} \leqslant d_{\underline{n}}$ $(d_{\underline{m}} \geqslant d_{\underline{n}})$ *dla każdego* $\underline{m} \leqslant \underline{n}$.

Twierdzenie 4.1. *Niech* $\{Y_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie prawie pewnie ograniczonym polem losowym takim, że* $EY_{\underline{n}} = 0$, $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$. *Załóżmy, że dla pewnego nieujemnego i nierosnącego pola* $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *typu produktowego takiego, że*

$$d_{\underline{1}} > 0, \qquad \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} d_{\underline{n}} = \infty \tag{4.6}$$

i dla pewnego $\beta > 0$ *i* $1 < \gamma < 2$ *oraz dla każdego* $\underline{i} \leqslant \underline{j}$ *zachodzi*

$$|EY_{\underline{i}}Y_{\underline{j}}| \leqslant C\left(\frac{d_{\underline{j}}}{d_{\underline{i}}}\right)^{\beta}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k} \leqslant \underline{j}} \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{l} \leqslant \underline{j}} d_{\underline{k} \vee \underline{l}}^{1+\beta} d_{\underline{k} \wedge \underline{l}}^{1-\beta} \leqslant C\left(\sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k} \leqslant \underline{j}} d_{\underline{k}}\right)^{\gamma}, \tag{4.8}$$

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{d_{\underline{n}}}{D_{\underline{n}}^{3-\gamma}} < \infty, \tag{4.9}$$

gdzie $D_{\underline{n}} = \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{n}} d_{\underline{i}}$. *Wtedy*

$$\frac{1}{D_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} d_{\underline{k}} Y_{\underline{k}} \xrightarrow{p.p.} 0, \qquad \text{gdy } \underline{n} \to \infty. \tag{4.10}$$

Wniosek 4.1. *Niech* $\{Y_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie prawie pewnie ograniczonym polem losowym takim, że* $EY_{\underline{n}} = 0$, $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$. *Jeśli przyjmiemy, że* $d_{\underline{n}} = \frac{1}{|\underline{n}|}$ *oraz* $D_{\underline{n}} = C_{\underline{n}} |\log \underline{n}|$, *gdzie* $C_{\underline{n}} = \frac{\sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} \frac{1}{|\underline{k}|}}{|\log \underline{n}|}$ *oraz jeśli dla pewnego* $\beta > 0$ *i dla każdego* $\underline{k}, \underline{l} \in \mathbb{N}^d$ *zachodzi*

$$|EY_{\underline{k}}Y_{\underline{l}}| \leqslant C\left|\frac{\underline{k} \wedge \underline{l}}{\underline{k} \vee \underline{l}}\right|^{\beta},$$

to

$$\frac{1}{|\log \underline{n}|} \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} \frac{1}{|\underline{k}|} Y_{\underline{k}} \xrightarrow{p.p.} 0, \qquad \text{gdy } \underline{n} \to \infty.$$

Niech $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem losowych lub nielosowych podzbiorów $\mathbb{N}^d$. Dla dowolnego pola losowego $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ niezależnego od $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ definiujemy $\{S(A_{\underline{n}}), \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ poprzez (4.4) lub (4.5) (Główny wynik zachodzi dla obu przypadków).

Definicja 4.3. *Przez* $Lip(\mathbb{R})$ *oznaczać będziemy zbiór ograniczonych funkcji Lipschitzowskich określonych na* $\mathbb{R}$ *z normą* $||g||_{BL} = ||g||_\infty + ||g||_L < \infty$, *gdzie* $||g||_\infty$ *jest normą supremum oraz* $||g||_L$ *jest zdefiniowana następująco*

$$||g||_L = \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}.$$

Twierdzenie 4.2. *Niech* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie polem niezależnych zmiennych losowych,* $\{b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *polem nielosowym liczb rzeczywistych, zaś pole* $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *niech będzie polem losowych podzbiorów* $\mathbb{N}^d$ *niezależnym od* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$. *Niech* $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie nieujemnym, nierosnącym, typu produktowego polem takim, że* $d_{\underline{1}} > 0$, *zaś* $D_{\underline{n}} := \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} d_{\underline{n}}$ *jest polem nieograniczonym. Niech*

$$\alpha_{\underline{k},\underline{l}} := \sup_{A \in \sigma(A_{\underline{k}}), B \in \sigma(A_{\underline{l}})} |P[A \cap B] - P[A]P[B]| \tag{4.11}$$

będzie α*-mixing współczynnikiem pomiędzy* σ*-ciałami generowanymi przez* $A_{\underline{k}}$ *i* $A_{\underline{l}}$. *Załóżmy, że dla pewnej miary probabilistycznej* μ *i dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *takiego, że* $\mu(\{x\}) = 0$ *mamy, że*

$$P\Big[\frac{S(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} < x\Big] \xrightarrow{D} \mu((-\infty, x)), \qquad gdy\ \ \underline{n} \to \infty. \tag{4.12}$$

Niech ponadto nierówności

$$\pi\Big(\frac{S(A_{\underline{i}} \cap A_{\underline{j}})}{b_{\underline{i}} \vee b_{\underline{j}}}, 0\Big) \leqslant C\Big(\frac{d_{\underline{j}}}{d_{\underline{i}}}\Big)^\beta, \tag{4.13}$$

$$\sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k} \leqslant \underline{j}} \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{l} \leqslant \underline{j}} d_{\underline{k} \vee \underline{l}}^{1+\beta} d_{\underline{k} \wedge \underline{l}}^{1-\beta} \leqslant C\Big(\sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k} \leqslant \underline{j}} d_{\underline{k}}\Big)^\gamma, \tag{4.14}$$

$$\sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k} \leqslant \underline{j}} \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{l} \leqslant \underline{j}} d_{\underline{k}} d_{\underline{l}} \alpha_{\underline{k},\underline{l}} \leqslant C\Big(\sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k} \leqslant \underline{j}} d_{\underline{k}}\Big)^\gamma, \tag{4.15}$$

$$\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{d_{\underline{n}}}{D_{\underline{n}}^{3-\gamma}} < \infty, \tag{4.16}$$

będą spełnione dla pewnego $\beta > 0$, $1 < \gamma < 2$ *i dla każdego* $\underline{i} \leqslant \underline{j}$. *Wtedy*

$$\frac{1}{D_{\underline{n}}} \sum_{\underline{k} \leqslant \underline{n}} d_{\underline{k}} I\Big[\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}} < x\Big] \xrightarrow{p.p.} \mu((-\infty, x)), \qquad n \to \infty. \tag{4.17}$$

Uwaga 4.1. *Oczywiście, twierdzenie to ma zastosowanie w szczególnym przypadku, gdy zbiory losowe* $A_{\underline{n}}$ *są postaci* $A_{\underline{n}} = \{\underline{k} \in \mathbb{N}^d : \underline{k} \leqslant N_{\underline{n}}\}$ *dla pewnego pola* $\{N_{\underline{n}},\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *z losowymi indeksami mającymi wartości w zbiorze* $\mathbb{N}^d$.

4.2 Pomocnicze lematy i dowody

Definicja 4.4. *Funkcja $g : \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ jest superaddytywna, jeśli*

$$g(\underline{n},(m_1,\ldots,m_{l-1},k,m_{l+1}\ldots,m_d)) + g((n_1,\ldots,n_{l-1},k+1,n_{l+1},\ldots,n_d),\underline{m}) \leqslant g(\underline{n},\underline{m}), \tag{4.18}$$

dla dowolnych $\underline{n}$, $\underline{m} \in \mathbb{N}^d$, dowolnego $l = 1,2,\ldots,d$ i dla dowolnego $n_l \leqslant k < m_l$. Powiemy, że funkcja g jest addytywna, jeśli w (4.18) zachodzi równość.

Przypomnijmy też definicję pola przyrostów (Definicja 3.1) dla pola $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$:

$$\triangle[d_{\underline{n}}] := \sum_{\substack{\underline{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_d)\in\kappa_d:\\ n_i-\delta_i\geqslant 1, i=1,2,\ldots,d}} (-1)^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_d} d_{\underline{n}-\underline{\delta}}, \tag{4.19}$$

gdzie κ_d jest zbiorem wszystkich d-wymiarowych wektorów których współrzędne są równe 0 lub 1. Sumowanie po prawej stronie wyrażenia (4.19) następuje po wszystkich 2^d kombinacjach liczb $\delta_1,\ldots,\delta_d \in \{0,1\}$ takich, że $n_i - \delta_i \geqslant 1, i = 1,2,\ldots,d$. Pewne własności pól przyrostów można znaleźć w Dodatku A.5 w [32] (str. 415-418). Przytoczymy je w poniższych lematach.

Lemat 4.1.

(i) Niech $\{d_{\underline{n}} = \prod_{j=1}^d d_{n_j,j}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ będzie polem typu produktowego. Wtedy $D_{\underline{n}} = \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{n}} d_{\underline{i}} = \prod_{j=1}^d (\sum_{i=1}^{n_j} d_{i,j})$ jest także polem typu produktowego.

(ii) Jeśli $\{d_{\underline{n}} = \prod_{j=1}^d d_{n_j,j}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem typu produktowego, to dla dowolnej liczby rzeczywistej α pole $\{d^\alpha_{\underline{n}} = \prod_{j=1}^d d^\alpha_{n_j,j}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest także polem typu produktowego.

(iii) Jeśli $\{d_{\underline{n}} = \prod_{j=1}^d d_{n_j,j}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem typu produktowego, to

$$\triangle[d_{\underline{n}}] = \prod_{j=1}^d (d_{n_j,j} - d'_{n_j-1,j}),$$

gdzie

$$d'_{n_j,j} = \begin{cases} d_{n_j,j}, & \text{jeśli } n_j \geqslant 1, \\ 0, & \text{jeśli } n_j = 0. \end{cases}$$

(iv) Mając daną rodzinę $\{f_j, 1 \leqslant j \leqslant d\}$ funkcji $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, 1 \leqslant j \leqslant d$, zdefiniujmy odwzorowanie $f : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$ w sposób następujący $f(\underline{n}) \stackrel{def.}{\equiv} (f_1(n_1), f_2(n_2), \ldots, f_d(n_d))$, $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$. Jeśli $d_{\underline{n}} = |f(\underline{n})|, \underline{n} \in \mathbb{N}^d$, to $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem typu produktowego. W szczególności, dla $\alpha \in \mathbb{R}$ pole$\{|\underline{n}^\alpha|, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest polem typu produktowego.

(v) *Jeśli* $\{d_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *jest nieujemnym polem typu produktowego, to pośród reprezentacji*

$$d_{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{d} d_{n_i,i}$$

istnieje jedyna taka, że $d_{n_i,i} \geqslant 0$*, gdzie* $i = 1, 2, \ldots, d$*,* $n_i \in \mathbb{N}$*.*

Dowód pomijamy. Zauważmy jedynie, że jeśli $d_{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{d} d_{n_i,i}$ jest dowolnym polem typu produktowego postaci (v), to wtedy $d_{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{d} |d_{n_i,i}|$ dla dowolnego nieujemnego pola.

Lemat 4.2. *Załóżmy, że dla pewnego nieujemnego pola typu produktowego* $\{d_{\underline{n}} = \prod_{j=1}^{d} d_{n_j,j}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *takiego, że* $d_{\underline{1}} > 0$ *mamy*

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} d_{\underline{n}} = \infty, \quad D_{\underline{n}} = \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{n}} d_{\underline{i}}, \ \underline{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{4.20}$$

Niech $1 < \gamma < 2$*. Wtedy*

(i) $\{D_{\underline{n}}^{\gamma} = \prod_{j=1}^{d}(\sum_{i=1}^{n_j} |d_{i,j}|)^{\gamma}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *jest dodatnim, niemalejącym, nieograniczonym polem typu produktowego.*

(ii) $\triangle[D_{\underline{n}}^{\gamma}] \leqslant d_{\underline{n}} D_{(\underline{n}-\underline{1})\vee\underline{1}}^{\gamma-1} \leqslant d_{\underline{n}} D_{\underline{n}}^{\gamma-1}$.

Dowód Lematu 4.2. Na podstawie naszych założeń wnioskujemy, że $\{D_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest dodatnim, niemalejącym, nieograniczonym polem i w konsek-wencji również $\{D_{\underline{n}}^{\gamma}, \ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$. Ponadto, z Lematu 4.1 (v), (i) i (ii) widzimy, że $D_{\underline{n}}^{\gamma} = \prod_{j=1}^{d}(\sum_{i=1}^{n_j} |d_{i,j}|)^{\gamma}$, $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$. Teraz, stosując Lemat 4.1 (iii) i Twierdzenie Lagrange'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\triangle[D_{\underline{n}}^{\gamma}] &= \prod_{j=1}^{d}((\sum_{k=1}^{n_j} |d_{k,j}|)^{\gamma} - (\sum_{k=1}^{(n_j-1)\vee 1} |d_{k,j}|)^{\gamma}) \\
&\leqslant \prod_{j=1}^{d} |d_{n_j,j}| D_{(n_j-1)\vee 1,j}^{\gamma-1} \\
&= d_{\underline{n}} D_{(\underline{n}-\underline{1})\vee\underline{1}}^{\gamma-1} \\
&\leqslant d_{\underline{n}} D_{\underline{n}}^{\gamma-1},
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Dowód Twierdzenia 4.1. Ponieważ pole $\{d_{\underline{n}}, \ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jest nierosnące, to możemy założyć, że $0 < \beta < 1$. Używając (4.7), mamy

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{j}} d_{\underline{k}} Y_{\underline{k}}\Big)^2 &\leqslant 2 \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{j}} \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{l}\leqslant\underline{j}} d_{\underline{k}} d_{\underline{l}} |EY_{\underline{k}} Y_{\underline{l}}| \\
&\leqslant C \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{j}} \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{l}\leqslant\underline{k}} d_{\underline{k}\vee\underline{l}}^{1+\beta} d_{\underline{k}\wedge\underline{l}}^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Dla $1 < \gamma < 2$, na mocy (4.8) ostatecznie otrzymujemy, że

$$E\Big|\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{j}} d_{\underline{k}}Y_{\underline{k}}\Big|^2 \leqslant C\Big(\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{j}} d_{\underline{k}}\Big)^\gamma = C(g(\underline{i},\underline{j}))^\gamma. \tag{4.21}$$

Teraz pokażemy, że funkcja $g(\underline{i},\underline{j}) = \sum_{\underline{i}\leqslant\underline{k}\leqslant\underline{j}} d_{\underline{k}}$ jest addytywna, a więc i w szczególności superaddytywna. Dodatkowo, dla dowolnych $\underline{n} \leqslant \underline{m}$, $1 \leqslant l \leqslant d$ oraz $n_l \leqslant k \leqslant m_l$, mamy

$$\begin{aligned} g(\underline{n},(m_1,\ldots,m_{l-1},k,m_{l+1},\ldots,m_d)) &+ g((n_1,\ldots,n_{l-1},k+1,n_{l+1},\ldots,n_d),\underline{m}) \\ &= \sum_{\underline{n}\leqslant\underline{i}\leqslant\underline{m}}{}' \sum_{i_l=n_l}^{k} d_{\underline{i}} + \sum_{\underline{n}\leqslant\underline{i}\leqslant\underline{m}}{}' \sum_{i_l=k+1}^{m_l} d_{\underline{i}} \\ &= \sum_{\underline{n}\leqslant\underline{i}\leqslant\underline{m}} d_{\underline{i}} = g(\underline{n},\underline{m}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\sum_{\underline{n}\leqslant\underline{i}\leqslant\underline{m}}{}' := \sum_{(n_1,\ldots,n_{l-1},n_{l+1},\ldots,n_d)\leqslant(i_1,\ldots,i_{l-1},i_{l+1},\ldots,i_d)\leqslant(m_1,\ldots,m_{l-1},m_{l+1},\ldots,m_d)}.$$

Zauważmy, że Uwaga 5 z [43], (4.21) i superaddytywność implikują

$$E\Big[\max_{\underline{i}\leqslant\underline{n}}\Big|\sum_{\underline{k}\leqslant\underline{i}} d_{\underline{k}}Y_{\underline{k}}\Big|\Big]^2 \leqslant CD_{\underline{n}}^\gamma.$$

Tak więc, stosując Lemat 4.2 (ii) i (4.9), otrzymujemy

$$\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\triangle[D_{\underline{n}}^\gamma]}{D_{\underline{n}}^2} \leqslant \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{d_{\underline{n}}}{D_{\underline{n}}^{3-\gamma}} < \infty.$$

Ostatecznie, na mocy Lematu 4.2 (i) oraz Twierdzenia 3 z [43] dla $r = 2$, $a_{\underline{n}} = \triangle[D_{\underline{n}}^\gamma]$, $b_{\underline{n}} = D_{\underline{n}}$, otrzymujemy (4.10). □

Dowód Twierdzenia 4.2. Zauważmy najpierw, że pole $\{A_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nie zależy od pola $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ oraz że dla dowolnych nielosowych zbiorów $B_{\underline{l}}, B_{\underline{k}} \subset \mathbb{N}$, $S(B_{\underline{l}}\backslash B_{\underline{k}})$ i $S(B_{\underline{k}})$, a także $S(B_{\underline{k}}\backslash B_{\underline{l}})$ i $S(B_{\underline{l}})$ są niezależne. Stąd

$$\begin{aligned} &E\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)|A_{\underline{k}}\Big)\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}}\backslash A_{\underline{k}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big) \\ &= \int_{B_{\underline{l}},B_{\underline{k}}\subset\mathbb{N}} E\Big(g\Big(\frac{S(B_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(B_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)\Big)\Big(g\Big(\frac{S(B_{\underline{l}}\backslash B_{\underline{k}})}{b_{\underline{l}}}\Big) \\ &- Eg\Big(\frac{S(B_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big)dP[A_{\underline{l}} = B_{\underline{l}}, A_{\underline{k}} = B_{\underline{k}}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

oraz

$$E\Big(Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)|A_{\underline{k}} - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)\Big)\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big) \leqslant \alpha_{\underline{k},\underline{l}}||g||_{BL},$$

$$E\Big(Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)|A_{\underline{l}} - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big)\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)\Big) \leqslant \alpha_{\underline{k},\underline{l}}||g||_{BL}.$$

Dlatego dla każdego $\lambda > 0$ mamy

$$\begin{aligned}
J_{\underline{k},\underline{l}} &= Cov\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big), g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big) = \\
&= E\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)|A_{\underline{k}}\Big)\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big) \\
&+ E\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)|A_{\underline{k}} - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)\Big)\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big) \\
&= E\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)|A_{\underline{k}}\Big)\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}}\backslash A_{\underline{k}})}{b_{\underline{l}}}\Big) \\
&+ g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}}\backslash A_{\underline{k}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big) + \alpha_{\underline{k},\underline{l}}||g||_{BL} \\
&= E\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big) - Eg\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)|A_{\underline{k}}\Big)\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}}\backslash A_{\underline{k}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big) \\
&+ \alpha_{\underline{k},\underline{l}}||g||_{BL} \\
&\leqslant ||g||_L E\Big|g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big) - g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}}\backslash A_{\underline{k}})}{b_{\underline{l}}}\Big)\Big| + \alpha_{\underline{k},\underline{l}}||g||_{BL} \\
&\leqslant ||g||_L^2 \pi\Big(\frac{S(A_{\underline{l}} \cap A_{\underline{k}})}{b_{\underline{l}}}, 0\Big) + \alpha_{\underline{k},\underline{l}}||g||_{BL}
\end{aligned}$$

i symetrycznie

$$\begin{aligned}
J_{\underline{k},\underline{l}} &= Cov\Big(g\Big(\frac{S(A_{\underline{l}})}{b_{\underline{l}}}\Big), g\Big(\frac{S(A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}\Big)\Big) \\
&\leqslant ||g||_L^2 \pi\Big(\frac{S(A_{\underline{l}} \cap A_{\underline{k}})}{b_{\underline{k}}}, 0\Big) + \alpha_{\underline{k},\underline{l}}||g||_{BL},
\end{aligned}$$

co razem z Twierdzeniem 4.1 kończy dowód Twierdzenia 4.2. □

4.3 Przykłady, zastosowania i wnioski

W następujących dwóch propozycjach rozważamy dla jakich pól $\{X_{\underline{n}}, A_{\underline{n}}, b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ zachodzi warunek (4.12).

Propozycja 4.1. *Niech* $\{X_{\underline{n}}, A_{\underline{n}}, b_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będą takie jak w Twierdzeniu 4.2 i niech* $EX_{\underline{n}} = 0, EX_{\underline{n}}^2 = \sigma_{\underline{n}}^2 < \infty, \underline{n} \in \mathbb{N}^d$. *Dla dowolnego losowego lub nielosowego zbioru* $B \subset \mathbb{N}^d$ *połóżmy*

$$\begin{aligned} h(B) &= E[s^{-2}(B)\sum_{\underline{i}\in B} EX_{\underline{i}}^2 I[|X_{\underline{i}}| > s(B)]|B] \\ &\quad + E[s^{-3}(B)\sum_{\underline{i}\in B} EX_{\underline{i}}^3 I[|X_{\underline{i}}| \leqslant s(B)]|B], \\ s^2(B) &= \sum_{\underline{i}\in B} \sigma_{\underline{i}}^2. \end{aligned}$$

Ponadto, niech $\lambda > \delta_o$ *będzie zmienną losową niezależną od* $\{X_{\underline{n}}, A_{\underline{n}}\}$ *i taką, że*

$$\frac{s(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} \xrightarrow{P} \lambda, \qquad \textit{gdy } \underline{n} \to \infty. \tag{4.22}$$

Jeśli

$$Eh(A_{\underline{n}}) \longrightarrow 0, \qquad \textit{gdy } \underline{n} \to \infty, \tag{4.23}$$

wtedy (4.12) zachodzi z miarą μ *zdefiniowaną przez*

$$\mu((-\infty, x)) = E\Phi(x/\lambda). \tag{4.24}$$

Dowód Propozycji 4.1. Z Twierdzenia 8 (Część V, str.118) z [45], (4.22) i (4.23) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_x\left|P\left[\frac{S(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} < x\right] - E\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| &= \sup_x\left|P\left[\frac{S(A_{\underline{n}})}{s(A_{\underline{n}})} < \frac{xb_{\underline{n}}}{s(A_{\underline{n}})}\right] - \Phi\left(\frac{xb_{\underline{n}}}{s(A_{\underline{n}})}\right)\right| \\ &\quad + \sup_x\left|\Phi\left(\frac{xb_{\underline{n}}}{s(A_{\underline{n}})}\right) - E\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| \\ &\leqslant CEh(A_{\underline{n}}) + \sup_x\left|\Phi\left(\frac{xb_{\underline{n}}}{s(A_{\underline{n}})}\right) - E\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| \\ &\to 0, \end{aligned}$$

gdy $\underline{n} \to \infty$. □

Propozycja 4.2. *Niech* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *będzie polem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie należących do obszaru przyciągania rozkładu stabilnego* $G_{\alpha,\beta,\gamma,\theta}$ *(zobacz (11) na stronie 17). Jeśli*

$$\frac{|A_{\underline{n}}|}{b_{\underline{n}}} \xrightarrow{P} \lambda \tag{4.25}$$

dla pewnej zmiennej losowej $\lambda > \delta_o > 0$, *to*

$$\frac{S(A_{\underline{n}})}{b_{\underline{n}}} \xrightarrow{D} EG_{\alpha,\beta,\gamma,\theta}(x/\lambda^{1/\alpha}). \tag{4.26}$$

Dowód Propozycja 4.2. Niech$\{Y_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $Y_1 \sim X_{\underline{1}}$. Zdefiniujmy w $\mathbb{N}^d$ porządek leksykograficzny $\tau : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$ i połóżmy $N_{\tau(\underline{n})} = |A_{\underline{n}}|$. Wtedy $\{N_n, n \geqslant 1\}$ jest ciągiem losowych indeksów niezależnych od $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ i Propozycja 4.2 jest konskwencją Propozycji 1, str. 181 z pracy [51]. $\square$

Przykład 4.1. *Niech* $1 < \alpha < 2$. *Załóżmy, że* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie*

$$X_n \overset{D}{\sim} \begin{cases} G_{\alpha,0,0,\lambda}, & \textit{jeśli } n \textit{ jest nieparzysta,} \\ N\Big(0, \sqrt{(n/2)^{1/\alpha} - (n/2-1)^{1/\alpha}}\Big), & \textit{jeśli } n \textit{ jest parzysta,} \end{cases}$$

gdzie

$$\int e^{itx} dG_{\alpha,\beta,\gamma,\lambda}(dx) = exp\{it\gamma - \lambda|t|^\alpha(1 - i\beta sign(t) tg(\frac{\pi\alpha}{2}))\},$$

zaś $N(\mu, \sigma)$ *(jak wszędzie w tej pracy, tutaj jednak nieformalnie utożsamiamy zmienną z rozkładem) rozkładem normalnym ze średnią* μ *i odchyleniem standardowym* σ. *Niech* $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ *będzie ciągiem* α*-mieszającym (ang.* α*-mixing) indykatorów takim, że* $0 < P[Y_n = 1] = p = 1 - P[Y_n = 0] < 1$ *oraz*

$$\alpha_k = \sup_n \sup_{A \in \sigma(Y_n), B \in \sigma(Y_{n+k})} |P[A \cap B] - P[A]P[B]|, \quad k \geqslant 1$$

będzie takie, że dla pewnego $1 < \gamma < 2$ *mamy*

$$\sum_{k=i}^{j} \sum_{l=i}^{j} \frac{\alpha_{|k-l|}}{kl} \leqslant \log^\gamma \frac{j}{i} \tag{4.27}$$

i niech

$$A_n = \begin{cases} \{1, 3, 5, \ldots, 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1\}, & \textit{jeżeli } Y_n = 1, \\ \{2, 4, 6, \ldots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, & \textit{jeżeli } Y_n = 0. \end{cases}$$

Wtedy dla ciągu $b_n = (\frac{n}{2})^{1/\alpha}, n \geqslant 1$, *zachodzi*

$$\frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} I\Big[\frac{S(A_i)}{b_i} < x\Big] \xrightarrow{p.p.} p\, G_{\alpha,0,0,\lambda}(x) + (1-p)\Phi(x), \textit{ gdy } n \to \infty. \tag{4.28}$$

Dowód Przykładu 4.1. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} P\Big[\frac{S(A_n)}{b_n} < x\Big] &= p\, G_{\alpha,0,0,\lambda}\Big(x\Big(\frac{\lceil n/2 \rceil}{n/2}\Big)^{1/\alpha}\Big) + (1-p)\,\Phi\Big(x\Big(\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n/2}\Big)^{1/\alpha}\Big) \\ &\xrightarrow{D} p\, G_{\alpha,0,0,\lambda}(x) + (1-p)\,\Phi(x) \\ &= \mu((-\infty, x)), \text{ powiedzmy,} \end{aligned}$$

gdzie $\lfloor x \rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leqslant x\}$, $\lceil x \rceil = \inf\{z \in \mathbb{Z} : z \geqslant x\}$. Ponadto, ponieważ

$$P[|S(A_k \cap A_l)| > \varepsilon b_k] = \begin{cases} 2[1 - \Phi(\frac{\varepsilon (k/2)^{1/\alpha}}{(k \wedge l/2)^{\frac{1}{2\alpha}}})], & \text{jeśli } k \text{ i } l \text{ są oba parzyste,} \\ 2[1 - G_{\alpha,0,0,\lambda}(\frac{\varepsilon (k/2)^{1/\alpha}}{((k \wedge l+1)/2)^{\frac{1}{\alpha}}})], & \text{jeśli } k \text{ i } l \text{ są oba nieparzyste,} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$
$$\leqslant C \frac{k \wedge l}{k \varepsilon^{\alpha}},$$

więc otrzymujemy

$$\pi\Big(\frac{S(A_k \cap A_l)}{b_k}, 0\Big) \leqslant C\Big(\frac{k \wedge l}{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

i

$$\pi\Big(\frac{S(A_k \cap A_l)}{b_k}, 0\Big) \wedge \pi\Big(\frac{S(A_k \cap A_l)}{b_l}, 0\Big) \leqslant C\Big(\frac{k \wedge l}{k \vee l}\Big)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{4.29}$$

tak, że dla $d_k = \frac{1}{k}$ (4.13) zachodzi z $\beta = \frac{1}{\alpha+1}$. Oczywiście, dla dowolnego $\beta > 0$ z Twierdzenia Cauchy'ego-Maclaurina mamy

$$\sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{l^{1+\beta}} \leqslant \int_k^{\infty} \frac{1}{x^{1+\beta}} dx \leqslant \frac{\beta}{k^{\beta}}$$

i stąd

$$\begin{aligned} \sum_{i \leqslant k \leqslant j} \sum_{i \leqslant l \leqslant j} \frac{1}{(k \vee l)^{1+\beta} (k \wedge l)^{1-\beta}} &\leqslant 2 \sum_{k=i}^{j} \sum_{l=k}^{j} \frac{1}{l^{1+\beta}} \frac{1}{k^{1-\beta}} \\ &\leqslant 2 \sum_{k=i}^{j} \frac{1}{k^{1-\beta}} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{l^{1+\beta}} \\ &\leqslant 2\beta \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Zatem (4.14) zachodzi z $\gamma = 1$, dlatego również zachodzi z dowolnym $1 < \gamma < 2$. Teraz konkluzja Przykładu 4.1 wynika z Twierdzenia 4.2. □

Rozdział 5

Zbieżość kompletna losowo ważonych sum pól losowych

Przypomnijmy ze Wstępu (str. 10), że pojęcie zbieżności kompletnej ciągu $\{X_n, n \geqslant 1\}$, wprowadzone przez Hsu i Robbinsa [24], oznacza

$$\forall_{\varepsilon>0} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty.$$

Ze względu na lemat Borela-Cantelliego ciąg zbieżny kompletne jest też zbieżny prawie pewnie, natomiast implikacja odwrotna jest prawdziwa, jeśli $\{X_n, n \geqslant 1\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Baum i Katz (1965) [2] wykazali, że jeżeli $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, to $E|X|^{p(t+2)} < \infty$, $1 \leqslant p < 2$, $t \geqslant -1$ jest równoważne warunkowi $\sum_{n=1}^{\infty} n^t P[|\sum_{i=1}^{n} X_i|/n^{1/p} > \varepsilon] < \infty$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Dlatego tego typu wyniki nazywa się często "twierdzeniami typu Bauma-Katza" czy nawet "MPWL typu Bauma-Katza". Dokładną granicę wspomnianego wyżej szeregu można znaleźć w pracy Gut i Spătaru [20].

Niech $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V \subseteq \mathbb{N}^d\}$ będzie zbiorem zmiennych losowych indeksowanych przez pewien podzbiór V kraty $\mathbb{N}^d$.

Definicja 5.1. *Powiemy, że pole losowe $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ jest stochastycznie zdominowane przez zmienną losową X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x > 0$ i dla każdego $\underline{n} \in V$ zachodzi, że*

$$P[|X_{\underline{n}}| > x] \leqslant CP[|X| > x]. \tag{5.1}$$

Ponadto, niech $\{a_{\underline{n},\underline{i}},\ \underline{n},\ \underline{i} \in V \subseteq \mathbb{N}^d\}$ będzie $2d$-wymiarowym polem losowym niezależnym od pola $\{X_{\underline{n}},\ \underline{n} \in V\}$ i takim, że $|a_{\underline{n},\underline{i}}| < M$, p.p. dla $\underline{n},\ \underline{i} \in V$

dla pewnej dodatniej stałej M. W tym rozdziale wprowadźmy następujące oznaczenia dla sum: $S_{\underline{n}}(V) = \sum_{\underline{i} \in V, \underline{i} \leqslant \underline{n}} X_{\underline{i}}$, a jeśli nie będzie to prowadziło do żadnych nieporozumień, to będziemy pomijali argument i pisali $S_{\underline{n}}$. Warto jednak zauważyć, że w odróżnieniu od sum rozważanych w Rozdziale 1, tutaj sumujemy tylko i wyłącznie składniki należące do obszaru V. W tym rozdziale będziemy rozważać dwa rodzaje zbiorów V. Będzie to albo cała przestrzeń $V = \mathbb{N}^d$, albo sektor tj. zbiór postaci

$$V_\theta = \{\underline{n} : \frac{1}{\theta} n_i < n_j < \theta n_i, 1 \leqslant i < j \leqslant d, n_i, n_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i, j = 1, 2, \ldots, d\}$$

dla $d \in \mathbb{N}$ i dla pewnego $\theta > 1$ (zobacz definicję zbioru V_θ na stronie 19 i Twierdzenie 1.3). Jeśli rozważane wyniki będą zachodziły zarówno dla $V = V_\theta$, jak i dla $V = \mathbb{N}^d$, to będziemy pisali w skrócie V. Zależnie od wyboru zbioru V definiujemy

$$\tau = \tau(V, d) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } V = V_\theta, \\ d, & \text{jeśli } V = \mathbb{N}^d. \end{cases} \tag{5.2}$$

Dla tak zdefiniowanego τ dla naszych zbiorów V, zawsze z Twierdzenia 1.4 zachodzić będzie:

$$\tau_V(n) = o(x^\delta), \tag{5.3}$$

$$T_V(x) = O(x \log^{\tau(V,d)-1} x) \tag{5.4}$$

dla dowolnego $\delta > 0$, gdy $x \to \infty$.

Soo Hak Sung w [50] przedstawił następujący wynik:

Twierdzenie 5.1. *Niech $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych stochastycznie zdominowanym przez zmienną losową X i takim, że $E|X|^{p(t+\beta+1)} < \infty$, gdzie $p(t + \beta + 1) > 0$, β, $t \in \mathbb{R}$ i $p > 0$. Niech $\{a_{n,i}, n, i \in \mathbb{N}\}$ będzie ograniczoną macierzą liczb rzeczywistych taką, że*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{n,i}|^q = O(n^\beta)$$

dla pewnego $q < p(t + \beta + 1)$. Załóżmy ponadto, że jeden z poniższych warunków zachodzi:

(i) $0 < p(t + \beta + 1) < 1$,

(ii) $1 \leqslant p(t + \beta + 1) < 2$, *$\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że $EX_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$,*

(iii) $2 \leqslant p(t+\beta+1)$, *$\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że $EX_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}^2 = O(n^\alpha)$ dla pewnego $\alpha < \frac{2}{p}$.*

Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\Big[\frac{|\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}X_i|}{n^{1/p}} > \varepsilon\Big] < \infty.$$

W tym rozdziale uogólnimy Twierdzenie 5.1 w następujących kierunkach

(i) Zamiast ciągu zmiennych losowych $\{X_n, n \geqslant 1\}$ rozważamy d - wymiarowe losowe stochastycznie zdominowane pole niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie.

(ii) Rozpatrujemy sumy zmiennych losowych z losowego pola albo po zbiorach V_θ, albo po $\mathbb{N}^d$.

(iii) Stałe $\{a_{n,i}, n, i \geqslant 1\}$ w Twierdzeniu 5.1 stają się u nas wspólnie ograniczonymi przez stałą zmiennymi losowymi dowolnie zależnymi między sobą. Zatem w terminach Wstępu, rozważamy sumy $Z(\boldsymbol{\alpha})$ dla zmiennych losowych zależnych typu średniej ruchomej (ang. "moving average").

5.1 Twierdzenia typu Bauma-Katza dla losowych pól

W tym rozdziale rozważymy zbieżność kompletną dla ważonych średnich pól losowych, tj. będziemy badać zbieżność szeregu:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big[\frac{|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}|}{|\underline{n}|^{1/p}} > \varepsilon\Big] < \infty \tag{5.5}$$

dla pewnego ustalonego $p > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.2. *Niech $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ będzie polem zmiennych losowych, które jest stochastycznie zdominowane przez zmienną losową X oraz takim, że*

$$E|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1} < \infty, \tag{5.6}$$

gdzie $p(t+\beta+1) > 0$, β, $t \in \mathbb{R}$ i $p > 0$. W przypadku, gdy $p(t+\beta+1) \geqslant 1$, zawsze będziemy zakładać, że $EX_{\underline{n}} = 0$, $\underline{n} \in V$ i że $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ jest polem niezależnych zmiennych losowych. Niech $\{a_{\underline{n},\underline{i}}, \underline{i}, \underline{n} \in V\}$ będzie polem zmiennych losowych niezależnym od pola $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ i takim, że

$$|a_{\underline{n},\underline{i}}| = O(1), \quad \underline{i},\, \underline{n} \in V,\ p.p., \tag{5.7}$$

$$\sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}}|^q = O(|\underline{n}|^\beta) \tag{5.8}$$

dla pewnego $q < p(t+\beta+1)$.

(i) *Jeśli* $0 < p(t+\beta+1) < 2$, $p(t+\beta+1) \neq 1$, *to (5.5) zachodzi.*

(ii) *Jeśli* $p(t+\beta+1) = 1$ *i jeśli jeden z poniższych warunków jest spełniony:*

(a) $\sum_{\underline{i}\in V} |a_{\underline{n},\underline{i}}|^q = O(|\underline{n}|^\beta)$, *p.p. dla pewnego* $q < p(t+\beta+1)$,
(b) $\sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}} - Ea_{\underline{n},\underline{i}}| = O(\frac{|\underline{n}|^\beta}{\log_+^{\tau+\gamma}|\underline{n}|})$ *dla pewnego* $\gamma > 0$,
(c) $E|X|(\log_+^{\tau+\gamma}|X|) < \infty$ *dla pewnego* $\gamma > 0$,

to (5.5) zachodzi.

(iii) *Jeśli* $p(t+\beta+1) \geqslant 2$ *i*

$$E\Big(\sum_{\underline{i}\in V} a^2_{\underline{n},\underline{i}}\Big)^J = O(|\underline{n}|^{\alpha J}) \tag{5.9}$$

dla pewnego $J > 2$, $\alpha < 2/p$ *i* $J(2/p - \alpha) - t > 1$, *to (5.5) zachodzi.*

Wniosek 5.1. *Niech pole zmiennych losowych* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *i stałe* p, t, β *będą takie jak w Twierdzeniu 5.2.*

(a) *Niech* $\{N_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *będzie polem losowych indeksów niezależnym od pola* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *i takim, że* $ET_V(N_{\underline{n}}) = O(|\underline{n}|^\beta)$ *(dla definicji* $T_V(x)$ *zobacz Twierdzenie 1.4 strona 21).*

Jeśli (i) $0 < p(t+\beta+1) < 2$, $p(t+\beta+1) \neq 1$,
lub (ii) $p(t+\beta+1) = 1$ *i*
$ET_V(N_{\underline{n}}) = O(\frac{|\underline{n}|^\beta}{\log_+^{\tau+\gamma}|\underline{n}|})$ *dla pewnego* $\gamma > 0$,
lub
$E|X|(\log_+^{\tau+\gamma}|X|) < \infty$ *dla pewnego* $\gamma > 0$,
lub (iii) $p(t+\beta+1) \geqslant 2$ *i* $E(T_V(N_{\underline{n}}))^J = O(|\underline{n}|^{\alpha J})$
dla pewnego $\alpha < 2/p, J > 2$ *i* $J(2/p - \alpha) - t > 1$,

to wtedy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P[|S_{(N_{\underline{n}})}| > \varepsilon |\underline{n}|^{1/p}] < \infty. \tag{5.10}$$

(b) *Niech* $\{\underline{N}_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *będzie d-wymiarowym polem losowym niezależnym od pola* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *i takim, że* $E|\underline{N}_{\underline{n}}| = O(|\underline{n}|^\beta)$. *Jeśli założenia punktu* **(a)** *zachodzą z* $T_V(N_{\underline{n}})$ *zamienione przez* $|\underline{N}_{\underline{n}}|$, *to*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P[|S_{\underline{N}_{\underline{n}}}| > \epsilon |\underline{n}|^{1/p}] < \infty. \tag{5.11}$$

Wniosek 5.2. *Niech pole zmiennych losowych* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *i stałe* p, t, β *będą takie jak w Twierdzeniu 5.2.*

(a) *Niech* $\{\epsilon_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *będzie polem zmiennych losowych niezależnym od pola* $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ *i mającym rozkład* $P[\epsilon_{\underline{n}} = 1] = 1 - P[\epsilon_{\underline{n}} = 0] = \hat{p}$ *dla dowolnego* $\underline{n} \in V$ *i* $\hat{p} \in [0, 1]$*. Załóżmy, że* $\beta > 1$*. Wtedy*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \qquad \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V, \underline{i}\leqslant\underline{n}} \epsilon_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big] < \infty. \tag{5.12}$$

(b) *Niech* $\{\epsilon_{\underline{n},\underline{i}}, \underline{n}, \underline{i} \in V\}$ *będzie* 2d*-wymiarowym polem zmiennych losowych takim, że* $P[\epsilon_{\underline{n},\underline{i}} = 1] = 1 - P[\epsilon_{\underline{n},\underline{i}} = 0] = \hat{p}_{\underline{n},\underline{i}}$*, gdzie* $\{\hat{p}_{\underline{n},\underline{i}}, \underline{n}, \underline{i} \in V\}$ *jest* 2d*-wymiarowym polem liczb oraz*

$$\sum_{\underline{i}\in V} \hat{p}_{\underline{n},\underline{i}} = O(|\underline{n}|^{\beta}). \tag{5.13}$$

Jeśli $p(t + \beta + 1) = 1$*, to zakładamy dodatkowo, że*

$$\sum_{\underline{i}\in V} \hat{p}_{\underline{n},\underline{i}} = O\Big(\frac{|\underline{n}|^{\beta}}{\log_+^{\tau+\gamma} |\underline{n}|}\Big), \tag{5.14}$$

natomiast jeśli $p(t + \beta + 1) \geqslant 2$*, to zakładamy że dla pewnego* $J > 2$ *i* $\alpha < 2/p$ *takich, że* $J(2/p - \alpha) - t > 1$ *zachodzi*

$$(\sum_{\underline{i}\in V} \hat{p}_{\underline{n},\underline{i}})^{J/2} = O(|\underline{n}|^{\alpha J}). \tag{5.15}$$

Wtedy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \qquad \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P[|\sum_{\underline{i}\in V} \epsilon_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}] < \infty. \tag{5.16}$$

Przykład 5.1. *Niech* $\{Y_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ *będzie polem zmiennych losowych niezależnych i o jednakowych rozkładach stabilnych* $G_{\alpha',\beta',\gamma',c}$*, (zobacz (11) strona 17). Ponadto, niech* $\{\underline{N}_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ *i* $\{\underline{U}_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ *będą polami losowymi 2-wymiarowych wektorów o rozkładach*

$$P[\underline{N}_{\underline{n}} = \underline{k}] = e^{-\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2}} \frac{\lambda_{n_1}^{k_1} \lambda_{n_2}^{k_2}}{k_1! k_2!}, \quad \underline{k} \in \mathbb{N}^2$$

oraz

$$P[\underline{U}_{\underline{n}} = \underline{k}] = \begin{cases} \frac{1}{|\underline{k}|}, & \textit{jeśli } \underline{k} \leqslant \underline{n}, \\ 0, & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

odpowiednio. Załóżmy, że $\{\underline{U}_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$ *jest niezależny od* $\{Y_{\underline{n}}, \underline{n} \in \mathbb{N}^2\}$. *Co więcej, niech* $\{X_{\underline{n}} = Y_{\underline{U}_{\underline{n}}}, \underline{n} \in V\}$, *wtedy dla każdego* $x > 0$ *mamy*

$$P[|X_{\underline{n}}| > x] = P[|Y_{\underline{1}}| > x] = 1 - G_{\alpha',\beta',\gamma',c}(x)$$

i dla każdego $s < \alpha'$ *mamy* $E|X_{\underline{n}}|^s = E|Y_{\underline{n}}|^s < \infty$, $\underline{n} \in V$. *Niech* $0 < \beta < \frac{\alpha'}{p} - t - 1$ *oraz*

$$\lambda_n = \begin{cases} O(n^\beta), & \text{jeśli } V = V_\theta, p(t+\beta+1) \neq 1, \\ O(\frac{n^\beta}{\log_+^{\tau+\delta} n}), & \text{jeśli } V = V_\theta, p(t+\beta+1) = 1, \\ O(n^{\frac{\beta}{1+\delta}}), & \text{jeśli } V = \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

dla pewnego $\delta > 0$.
Jeśli $0 < p(t+\beta+1) < 1$, *to wtedy*

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big[|\sum_{\underline{k}\leqslant \underline{N}_{\underline{n}}} X_{\underline{k}}| > \varepsilon |\underline{n}|^{1/p}\Big] < \infty,$$

natomiast jeśli $1 \leqslant p(t+\beta+1)$, *to*

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big[|\sum_{\underline{k}\leqslant \underline{N}_{\underline{n}}} Y_{\underline{k}}| > \varepsilon |\underline{n}|^{1/p}\Big] < \infty.$$

5.2 Wyniki pomocnicze i ich dowody

Wprowadźmy w zbiorze V porządek poprzez tzw. metodę diagonalną w następujący sposób.

Definicja 5.2.

$$(\underline{k} \prec \underline{n}) \iff (|\underline{k}| < |\underline{n}|) \vee ((|\underline{k}| = |\underline{n}|) \wedge (k_{i(\underline{k},\underline{n})} < n_{i(\underline{k},\underline{n})})),$$

gdzie przyjmujemy $i(\underline{k}, \underline{n}) = \min\{1 \leqslant i \leqslant d : k_i \neq n_i\}$ *dla* $\underline{k} \neq \underline{n}$ *oraz* $i(\underline{k}, \underline{k}) = d$. *To uporządkowanie jest liniowym porządkiem w przestrzeni d-wymiarowych wektorów. Oznaczmy przez* $ord_V(\underline{n}) = card\{\underline{k} \in V : \underline{k} \prec \underline{n} \vee \underline{k} = \underline{n}\}$ *(np.* $ord_{\mathbb{N}^2}((3,2)) = 13$, $ord_{V_2}((3,2)) = 4$*).*

Lemat 5.1. *Niech* $\{X_{\underline{i}}, \underline{i} \in V\}$ *będzie polem niezależnych zmiennych losowych takim, że* $EX_{\underline{i}} = 0$, $\underline{i} \in V$. *Wtedy dla dowolnego podzbioru* $S \subseteq V$ *istnieje stała dodatnia* C_p *zależna tylko od* $p > 2$ *taka, że:*

$$E|\sum_{\underline{i}\in S} X_{\underline{i}}|^p \leqslant C_p \Big\{\sum_{\underline{i}\in S} E|X_{\underline{i}}|^p + \Big(\sum_{\underline{i}\in S} EX_{\underline{i}}^2\Big)^{p/2}\Big\}.$$

Lemat 5.2. *Niech $\{X_{\underline{i}}, \underline{i} \in V\}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych takim, że $EX_{\underline{i}} = 0$, $\underline{i} \in V$. Wtedy dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ oraz $t > 0$:*

$$P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} X_{\underline{i}}| > 6^j t\Big] \leqslant \tag{5.17}$$
$$C_j P\Big[\sup_{\underline{i}\in V} |X_{\underline{i}}| > t/4^{j-1}\Big] + D_j \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big[P\Big[|\sum_{l=1}^{k} X_{ord_V^{-1}(l)}| > t/4^j\Big]\Big]^{2^j},$$

gdzie $ord_V^{-1}()$ oznacza funkcję odwrotną do $ord_V()$, zaś C_j, D_j są stałymi dodatnimi.

Dowód Lematów 5.1 i 5.2. Stosując opisany powyżej sposób przenumerowania, Lemat 5.1 wynika z nierówności Rosenthal'a [47], zaś Lemat 5.2 z dowodu równości (3.3), str. 164 w [23] i Hoffmanna-Jørgensena Propozycji 6.7 w [36]. Zauważmy tylko, że

$$\sup_{i\geqslant 1} |X_{ord_V^{-1}(i)}| = \sup_{\underline{k}\in V} |X_{\underline{k}}|, \tag{5.18}$$

chociaż w ogólności drugi człon po prawej stronie (5.17) nie może być podobnie zapisany. □

Lemat 5.3. *Niech $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ będzie polem niezależnych zmiennych losowych takim, że $EX_{\underline{n}} = 0$, $EX_{\underline{n}}^2 < \infty$, $\underline{n} \in V$ oraz polem stochastycznie zdominowanym przez zmienną losową X taką, że $EX < \infty$. Niech ponadto $\{\beta_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ będzie polem liczb ograniczonym przez stałą dodatnią M. Wtedy dla dowolnych $J \geqslant 2$, η, ε, $p > 0$ oraz β, $t \in \mathbb{R}$ takich, że $p(t + \beta + 1) > 1 + \eta$ mamy*

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big] &\leqslant C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{t-2J/p}\Big(\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{i}}^2\Big)^J \\ &+ \ C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-\beta-1-\eta/p} \sum_{\underline{i}\in V} E|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)+\eta} \\ &+ \ C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-\beta-1+\eta/p} \sum_{\underline{i}\in V} E|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)-\eta}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Dowód Lematu 5.3. Połóżmy

$$\begin{aligned} X_{\underline{i}}' &= X_{\underline{i}} I\Big(|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| \leqslant \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 36}\Big), \\ X_{\underline{i}}'' &= X_{\underline{i}} I\Big(|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \delta|\underline{n}|^{1/p}\Big), \\ X_{\underline{i}}''' &= X_{\underline{i}} I\Big(\frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 36} < |\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| \leqslant \delta|\underline{n}|^{1/p}\Big), \end{aligned}$$

gdzie j jest liczbą całkowitą taką, że $2^j \geqslant J$, zaś ε (bez zmniejszania ogólności rozważań) jest liczbą taką, że $\varepsilon \leqslant \delta$. Wtedy ponieważ

$$X_{\underline{i}} = (X_{\underline{i}}^{'} - EX_{\underline{i}}^{'}) + (EX_{\underline{i}}^{'} + EX_{\underline{i}}^{'''}) + X_{\underline{i}}^{''} + (X_{\underline{i}}^{'''} - EX_{\underline{i}}^{'''})$$

oraz z faktu, że dla dowolnych zmiennych losowych $\{Y_i, i \geqslant 1\}$ i dla $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$P[|\sum_{i=1}^{m} Y_i| > \varepsilon] \leqslant \sum_{i=1}^{m} P[|Y_i| > \frac{\varepsilon}{m}], \tag{5.20}$$

więc otrzymujemy ($m = 4$)

$$\begin{aligned} P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big] &\leqslant P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{i}}(X_{\underline{i}}' - EX_{\underline{i}}')| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{4}\Big] \\ + \quad P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{i}}(EX_{\underline{i}}' + EX_{\underline{i}}''')| &> \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{4}\Big] + P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}''| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{4}\Big] \\ + \quad P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{i}}(X_{\underline{i}}''' - EX_{\underline{i}}''')| &> \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{4}\Big] =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu oszacujemy kolejno prawdopodobieństwa I_1, I_2, I_3 oraz I_4. Z Lematu 5.2 dla pola losowego postaci $|\underline{n}|^{-1/p}\beta_{\underline{i}}(X_{\underline{i}}^{'} - EX_{\underline{i}}^{'})$ oraz dla $t := \frac{\varepsilon}{4\cdot 6^j}$ mamy

$$\begin{aligned} I_1 \leqslant C_j P\Big[\sup_{\underline{i}\in V} |\beta_{\underline{i}}(X_{\underline{i}}^{'} - EX_{\underline{i}}^{'})| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j}\Big] \\ + D_j \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big[P\Big[|\sum_{l=1}^{k} \beta_{ord_V^{-1}(l)}(X'_{ord_V^{-1}(l)} - EX'_{ord_V^{-1}(l)})| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 4}\Big]\Big]^{2^j}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że bezpośrednio z definicji pola losowego $X_{\underline{i}}^{'}$ zachodzi

$$|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}'| \leqslant \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 36} \quad \text{oraz} \quad |\beta_{\underline{i}} EX_{\underline{i}}'| \leqslant \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 36},$$

zatem z (5.17) oraz (5.20) z $m = 2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant P\Big[\sup_{\underline{i}\in V} |\beta_{\underline{i}}(X_{\underline{i}}' - EX_{\underline{i}}')| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j}\Big] \\ &\leqslant P\Big[\sup_{\underline{i}\in V} |\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}'| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 2}\Big] + P\Big[\sup_{\underline{i}\in V} |\beta_{\underline{i}} EX_{\underline{i}}'| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 2}\Big] = 0. \end{aligned}$$

Dalej, ponieważ $2^j > J$, z nierówności Markowa i nierówności Marcinkiewicza-Zygmunda ($E\Big(|\sum_{i=1}^n X_i|^p\Big) \leqslant E\Big(\sum_{i=1}^\infty |X_i|^2\Big)^{p/2}$ dla $p > 1$) oraz z faktu stochastycznego zdominowania pola $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant D_j\Big(\frac{24^j \cdot 4}{\varepsilon}\Big)^{2J} \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{l=1}^k \beta^2_{ord_V^{-1}(l)} Var(X'_{ord_V^{-1}(l)})\Big]^J |\underline{n}|^{-2J/p} \\
&\leqslant D_j\Big(\frac{24^j \cdot 4}{\varepsilon}\Big)^{2J}\Big[\sum_{\underline{i}\in V}\beta^2_{\underline{i}} EX^2_{\underline{i}}\Big]^J |\underline{n}|^{-2J/p} \\
&\leqslant C|\underline{n}|^{-2J/p}\Big[\sum_{\underline{i}\in V}\beta^2_{\underline{i}}\Big]^J, \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

gdzie $C := D_j\Big(\frac{24^j\cdot 4}{\varepsilon}\Big)^{2J}(EX^2)^J$.

Ponieważ

$$\begin{aligned}
EX_{\underline{i}}I[|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}| \leqslant \delta|\underline{n}|^{1/p}] &= -EX_{\underline{i}}I[|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}| > \delta|\underline{n}|^{1/p}], \\
\Omega &= [|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}] \cup [|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}],
\end{aligned}$$

oraz z (5.20) z $m = 2$ mamy

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant P\Big[\sum_{\underline{i}\in V} E|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}| > \delta|\underline{n}|^{1/p}, |X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]| \geqslant \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{8}\Big] \\
&+ P\Big[\sum_{\underline{i}\in V} E|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}| > \delta|\underline{n}|^{1/p}, |X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}]| \geqslant \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{8}\Big] = J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Kładąc dla dowolnego η, $0 < \eta < p(t+\beta+1) - 1$

$$\begin{aligned}
K_\eta &= \sum_{\underline{i}\in V} |\underline{n}|^{-t-\beta-1+\eta/p} E|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)-\eta} I[|X_{\underline{i}}| > |n|^{1/p}] \\
&+ \sum_{\underline{i}\in V} |\underline{n}|^{-t-\beta-1-\eta/p} E|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)+\eta} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |n|^{1/p}],
\end{aligned}$$

z faktu, że dla dowolnych zmiennych losowych X, Y oraz $\gamma > 0$ zachodzi $I[|X| > |Y|] \leqslant |\frac{X}{Y}|^\gamma$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
J_1 &\leqslant P\Big[\sum_{\underline{i}\in V}\Big(\frac{E|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}| > |n|^{1/p}]|}{\delta|\underline{n}|^{1/p}}\Big)^{p(t+\beta+1)-\eta} \geqslant \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{8}\Big] \\
&\leqslant C\sum_{\underline{i}\in V} |\underline{n}|^{-t-\beta-1+\eta/p} E|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)-\eta} I[|X_{\underline{i}}| > |n|^{1/p}]
\end{aligned}$$

i podobnie

$$J_2 \leqslant C \sum_{\underline{i} \in V} |\underline{n}|^{-t-\beta-1-\eta/p} E|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)+\eta} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |n|^{1/p}],$$

co prowadzi do

$$I_2 \leqslant K_\eta. \tag{5.22}$$

Zwróćmy też uwagę, że powtarzając tok rozumowania przy oszacowaniu J_1 i J_2, dla dowolnej dodatniej stałej c mamy

$$\begin{aligned} &\sum_{\underline{i} \in V} P[|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| \geqslant c|\underline{n}|^{1/p}] \\ &\leqslant \sum_{\underline{i} \in V} P[|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}] \geqslant c|\underline{n}|^{1/p}] \\ &+ \sum_{\underline{i} \in V} P[|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}] \geqslant c|\underline{n}|^{1/p}] \\ &\leqslant CK_\eta \end{aligned}$$

i stosując powyższe oszacowanie z $c = \varepsilon/4$ dostajemy

$$I_3 \leqslant K_\eta. \tag{5.23}$$

Podobnie, z Lematu 5.3, nierówności Markowa, (5.21) i (5.23) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_4 &\leqslant C\left\{\sum_{\underline{i} \in V} P\left[|\beta_{\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \frac{\varepsilon|\underline{n}|^{1/p}}{24^j \cdot 36}\right] + C|\underline{n}|^{-2J/p}\left(\sum_{\underline{i} \in V} \beta_{\underline{i}}^2 E|X_{\underline{i}}|^2\right)^J\right\} \\ &\leqslant K_\eta + C|\underline{n}|^{-2J/p}\left(\sum_{\underline{i} \in V} \beta_{\underline{i}}^2\right)^J, \end{aligned} \tag{5.24}$$

tak więc, z (5.21)-(5.24) otrzymujemy tezę lematu 5.3. □

Lemat 5.4. *Niech $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$ będzie polem zmiennych losowych stochastycznie zdominowanym przez zmienną losową X. Dla dowolnego $\alpha > 0$ i $b > 0$ zachodzi:*

(i) $E|X_{\underline{n}}|^\alpha I[|X_{\underline{n}}| \leqslant b] \leqslant C\{E|X|^\alpha I[|X| \leqslant b] + b^\alpha P[|X| > b]\}$,

(ii) $E|X_{\underline{n}}|^\alpha I[|X_{\underline{n}}| > b] \leqslant CE|X|^\alpha I[|X| > b]$.

Dowód lematu 5.4 jest elementarny, dlatego go pominiemy.

Lemat 5.5. *Dla dowolnego $\delta > 0$ zachodzą poniższe oszacowania:*

$$\sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|\geqslant i}} \frac{1}{|\underline{n}|^\beta} = \sum_{j\geqslant i} \frac{\tau_V(j)}{j^\beta} \leqslant \frac{C\beta}{\beta-1} i^{1-\beta}(\log_+ i)^{\tau-1} \text{ dla } \beta > 1,$$

$$\sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|\geqslant i}} \frac{1}{|\underline{n}|\log_+^{\tau+\delta}|\underline{n}|} = \sum_{j\geqslant i} \frac{\tau_V(j)}{j\log_+^{\tau+\delta} j} \leqslant \frac{C}{\delta}(\log_+ i)^{-\delta},$$

$$\sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|\leqslant i}} \frac{1}{|\underline{n}|^\beta} = \sum_{j\leqslant i} \frac{\tau_V(j)}{j^\beta} \leqslant \begin{cases} \frac{C}{|1-\beta|}(\log_+ i)^{\tau-1}(i^{1-\beta}\vee 1) \text{ dla } \beta \neq 1, \\ C(\log_+ i)^\tau \text{ dla } \beta = 1. \end{cases}$$

Dowód Lematu 5.5. Udowodnimy tylko pierwszą nierówność dla $V = \mathbb{N}^d$, ponieważ dowód dla pozostałych przypadków i pozostałych nierówności przebiega analogicznie. Z twierdzenie Lagrange'a ([53], §5.42, str. 96) dla pewnych $\theta_j \in [0,1]$, $j \geqslant e^{d+\delta-1}$ mamy

$$\begin{aligned}(j+1)\log_+^{d+\delta}(j+1) - j\log_+^{d+\delta} j &= (d+\delta+\log(j+\theta_j))\log^{d+\delta-1}(j+\theta_j) \\ &\leqslant 2\log_+^{d+\delta}(j+1),\end{aligned}$$

a stąd z (5.3), (5.4) oraz z twierdzenia Cauchy'ego-Maclaurina ([53], str. 71) dostajemy

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant i} \frac{\tau_{\mathbb{N}^d}(j)}{j\log_+^{d+\delta} j} &= \sum_{j\geqslant i} \frac{T_{\mathbb{N}^d}(j) - T_{\mathbb{N}^d}(j-1)}{j\log_+^{d+\delta} j} \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant i} T_{\mathbb{N}^d}(j)\Big(\frac{1}{j\log_+^{d+\delta} j} - \frac{1}{(j+1)\log_+^{d+\delta}(j+1)}\Big) - \frac{T_{\mathbb{N}^d}(i-1)}{i\log_+^{d+\delta} i} \\ &\leqslant C\sum_{j\geqslant i} \frac{j\log_+^{d-1} j}{j(j+1)\log_+^{d+\delta} j} \leqslant C\sum_{j\geqslant i} \frac{1}{j\log_+^{d+\delta} j} \leqslant \frac{C}{\log_+^\delta i}.\end{aligned}$$

□

W przypadku wielowymiarowych indeksów Lemat 2 z [50] może być sformułowany następująco:

Lemat 5.6. *Niech X będzie zmienną losową i niech r, δ oraz $p > 0$ będą dowolnymi stałymi. Wtedy zachodzą następujące stwierdzenia*

(a) $\sum_{\underline{n}\in V} \frac{1}{|\underline{n}|^{1+\delta/p}} E|X|^{r+\delta} I[|X| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}] \leqslant C(\frac{p}{\delta}+1)p^{\tau-1} E|X|^r(\log_+|X|)^{\tau-1}$,

(b) $\sum_{\underline{n}\in V} \frac{1}{|\underline{n}|^{1-\delta/p}} E|X|^{r-\delta} I[|X| > |\underline{n}|^{1/p}] \leqslant C\frac{p}{\delta} E|X|^r(\log_+|X|)^{\tau-1}(p^{\tau-1}\vee 2)$,

(c) $\sum_{\underline{n}\in V} \frac{1}{|\underline{n}|^{1-r/p}} P[|X| > |\underline{n}|^{1/p}] \leqslant \frac{Cp}{r}(E|X|^r(\log_+|X|)^{\tau-1}p^{\tau-1}\vee 2P[|X|>1])$.

Dowód Lematu 5.6. Metoda dowodu wszystkich trzech nierówności jest bardzo podobna. Najpierw zamieniamy sumowanie $\sum_{\underline{n}\in V}$ na $\sum_{j=1}^{\infty}\tau_V(j)$, potem indykatory zdarzeń $I[|X|^p \leqslant j]$ oraz $I[|X|^p > j]$ zapisujemy jako $\sum_{i=1}^{j} I[i-1 < |X|^p \leqslant i]$ oraz odpowiednio $\sum_{i=j}^{\infty} I[i < |X|^p \leqslant i+1]$ i zamieniając kolejność sumowania dochodzimy do

$$\sum_{\underline{n}\in V}\frac{1}{|\underline{n}|^{1+\delta/p}}E|X|^{r+\delta}I[|X|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}] = \sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r+\delta}I[i-1<|X|^p\leqslant i]\sum_{j=i}^{\infty}\frac{\tau_V(j)}{j^{1+\delta/p}},$$

$$\sum_{\underline{n}\in V}\frac{1}{|\underline{n}|^{1-\delta/p}}E|X|^{r-\delta}I[|X|>|\underline{n}|^{1/p}] = \sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r-\delta}I[i<|X|^p\leqslant i+1]\sum_{j=1}^{i}\frac{\tau_V(j)}{j^{1-\delta/p}},$$

$$\sum_{\underline{n}\in V}\frac{1}{|\underline{n}|^{1-r/p}}P[|X|>|\underline{n}|^{1/p}] = \sum_{i=1}^{\infty}P[i<|X|^p\leqslant i+1]\sum_{j=1}^{i}\frac{\tau_V(j)}{j^{1-r/p}}.$$

W dalszym ciągu wykorzystujemy oszacowania z Lematu 5.5 i oszacowanie sum typu $\sum_{i=1}^{\infty} I[i-1<|X|^p\leqslant i]f(i)$ przez $f(|X|^p)$. Na przykład

$$\begin{aligned}
&\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{|\underline{n}|^{1+\delta/p}}E|X|^{r+\delta}I[|X|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}]\\
\leqslant\ & C(\frac{p}{\delta}+1)\sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r+\delta}I[i-1<|X|^p\leqslant i]i^{-\delta/p}\log_+^{d-1} i\\
\leqslant\ & C(\frac{p}{\delta}+1)p^{d-1}E|X|^r\log_+^{d-1}|X|.
\end{aligned}$$

□

Lemat 5.7. *Niech $\{X_{\underline{n}}, \underline{n}\in V\}$ będzie polem zmiennych losowych, które jest stochastycznie zdominowane przez zmienną losową X taką, że*

$$E|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1}<\infty, \tag{5.25}$$

gdzie $p(t+\beta+1)>0$, β, $t\in\mathbb{R}$ oraz $p>0$. Niech $\{a_{\underline{n},\underline{i}}, \underline{i},\underline{n}\in V\}$ będzie polem zmiennych losowych niezależnym od pola $\{X_{\underline{n}}, \underline{n}\in V\}$ i takim, że

$$|a_{\underline{n},\underline{i}}| = O(1),\ \underline{i},\underline{n}\in V,\ p.p., \tag{5.26}$$

$$\sum_{\underline{i}\in V}E|a_{\underline{n},\underline{i}}|^q = O(|\underline{n}|^{\beta}) \tag{5.27}$$

dla pewnego $q<p(t+\beta+1)$. Wtedy dla dowolnego $\delta>0$ mamy

$$\sum_{\underline{n}\in V}|\underline{n}|^t\sum_{\underline{i}\in V}E||\underline{n}|^{-1/p}a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)+\delta}\leqslant$$
$$\leqslant CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1}$$

i dla dowolnego $\delta > 0$ takiego, że $p(t+\beta+1)-\delta \geqslant q$ oraz $p(t+\beta+1)-\delta > 0$, zachodzi

$$\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t \sum_{\underline{i}\in V} E||\underline{n}|^{-1/p} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)-\delta} \leqslant$$
$$\leqslant CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1}_{\cdot}$$

Dowód Lematu 5.7. Korzystając z niezależności pola $\{a_{\underline{n},\underline{i}}, \underline{i}, \underline{n} \in V\}$ od pola $\{X_{\underline{n}}, \underline{n} \in V\}$, z Lematu 5.4 oraz z założeń (5.27), (5.26) dla dowolnego $\delta > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t \sum_{\underline{i}\in V} E\Big||\underline{n}|^{-1/p} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}]\Big|^{p(t+\beta+1)+\delta} \\
&\leqslant \ C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-\beta-1-\delta/p} \Big(\sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}}|^q\Big) \\
&\times \ \Big(E|X|^{p(t+\beta+1)+\delta} I[|X|^p \leqslant |\underline{n}|] + |\underline{n}|^{t+\beta+1+\delta/p} P[|X|^p > |\underline{n}|]\Big)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t \sum_{\underline{i}\in V} E\Big||\underline{n}|^{-1/p} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big|^{p(t+\beta+1)-\delta} \\
&\leqslant \ C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-\beta-1+\delta/p} \Big(\sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}}|^q\Big) \Big(E|X|^{p(t+\beta+1)-\delta} I[|X|^p > |\underline{n}|]\Big).
\end{aligned}$$

Zatem Lemat 5.6 kończy dowód tego Lematu. □

Lemat 5.8. *Niech $\mathbb{X} = \{X_{\underline{k}}, \underline{k} \in V\}$ będzie polem losowym niezależnym od pola losowego $\mathbb{Y} = \{Y_{\underline{k}}, \underline{k} \in V\}$. Niech $\mu_{\mathbb{X}}, \mu_{\mathbb{Y}}, \mu_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ będzie miarą probabilistyczną dla pól $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ i $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, odpowiednio. Niech $\{A_{\underline{i}}, \underline{i} \in V\}$ będzie rodziną zbiorów zwartych w $\mathbb{R}$. Niech $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ i $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ będą dwiema mierzalnymi funkcjami Borela takimi, że dla każdego pola liczb $\mathbf{y} \in \{A_{\underline{i}}, \underline{i} \in V\}$:*

$$Eg(\mathbb{X}, \mathbf{y}) \ \leqslant \ Eh(\mathbb{X}, \mathbf{y}) < C, \tag{5.28}$$
$$Y_{\underline{i}} \ \in \ A_{\underline{i}}, \quad p.p., \ \underline{i} \in V. \tag{5.29}$$

Wtedy

$$Eg(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant Eh(\mathbb{X}, \mathbb{Y}). \tag{5.30}$$

Dowód Lematu 5.8. Z niezależności $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$, Twierdzenia Fubini'ego oraz (5.28) i (5.29) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
Eg(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \ &= \ \int g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} = \iint g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbb{X}} d\mu_{\mathbb{Y}} \\
&= \int\limits_{\mathbf{y}\in\{A_{\underline{i}}, \underline{i}\in V\}} Eg(\mathbb{X}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbb{Y}} \leqslant \int\limits_{\mathbf{y}\in\{A_{\underline{i}}, \underline{i}\in V\}} Eh(\mathbb{X}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbb{Y}} \\
&= \ Eh(\mathbb{X}, \mathbb{Y}),
\end{aligned}$$

co oczywiście dowodzi (5.30). □

5.3 Dowód głównego twierdzenia i wniosków

Dowód Twierdzenia 5.2.

(I) Załóżmy, że $0 < p(t+\beta+1) < 1$.
Wykorzystując kolejno nierówność Markowa, c_r-nierówność, Lemat 5.7, dla dowolnego $\delta > 0$ takiego, że $p(t+\beta+1)+\delta \leqslant 1$, mamy

$$\begin{aligned}&\sum_{\underline{n}\in V}|\underline{n}|^t P\Big(\Big|\sum_{\underline{i}\in V}|\underline{n}|^{-1/p}a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}]\Big|>\varepsilon\Big) \qquad (5.31)\\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)+\delta}}\sum_{\underline{n}\in V}|\underline{n}|^t\sum_{\underline{i}\in V}E\Big||\underline{n}|^{-1/p}a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}]\Big|^{p(t+\beta+1)+\delta}\\ &\leqslant CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1}<\infty,\end{aligned}$$

oraz dla dowolnego $\delta > 0$ takiego, że $p(t+\beta+1)-\delta \geqslant q$ i $p(t+\beta+1)-\delta > 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\sum_{\underline{n}\in V}|\underline{n}|^t P\Big(\Big|\sum_{\underline{i}\in V}|\underline{n}|^{-1/p}a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|>|\underline{n}|^{1/p}]\Big|>\varepsilon\Big) \qquad (5.32)\\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)-\delta}}\sum_{\underline{n}\in V}|\underline{n}|^t\sum_{\underline{i}\in V}E\Big||\underline{n}|^{-1/p}a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|>|\underline{n}|^{1/p}]\Big|^{p(t+\beta+1)-\delta}\\ &\leqslant CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1}<\infty,\end{aligned}$$

co dowodzi (5.5) w przypadku, gdy $0 < p(t+\beta+1) < 1$.

(II) Rozważmy teraz przypadek, gdy $p(t+\beta+1) < 2$. Biorąc dowolne $\delta > 0$ takie, że $p(t+\beta+1)+\delta \leqslant 2$ oraz stosując nierówność Markowa, Marcinkiewicza-Zygmund'a, c_r-nierówność i nierówność Jensen'a, dla dowolnej rodziny liczb rzeczywistych $\{\beta_{\underline{n}},\ \underline{n}\in V\}$ takich, że $0 \leqslant \beta_{\underline{n}} \leqslant C$ i dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$ (podobnie jak w [50]) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V}\beta_{\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant m]-EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant m]\Big)\Big|>\varepsilon m\Big]\\ &\leqslant \frac{1}{(m\varepsilon)^{p(t+\beta+1)+\delta}}E\Big|\sum_{\underline{i}\in V}\beta_{\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant m]-EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant m]\Big)\Big|^{p(t+\beta+1)+\delta}\\ &\leqslant C\frac{1}{m^{p(t+\beta+1)+\delta}}\sum_{\underline{i}\in V}E\Big|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant m]\Big|^{p(t+\beta+1)+\delta}. \qquad (5.33)\end{aligned}$$

Przyjmijmy teraz, że

$$g(\{\alpha_{\underline{i}}\},\{\beta_{\underline{i}}\}) = I\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V}\beta_{\underline{i}}\Big(\alpha_{\underline{i}}I[|\alpha_{\underline{i}}|\leqslant m] - EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant m]\Big)\Big| > \varepsilon m\Big],$$

$$h(\{\alpha_{\underline{i}}\},\{\beta_{\underline{i}}\}) = C\frac{1}{m^{p(t+\beta+1)+\delta}}\sum_{\underline{i}\in V}\Big|\beta_{\underline{i}}\alpha_{\underline{i}}I[|\alpha_{\underline{i}}|\leqslant m]\Big|^{p(t+\beta+1)+\delta}.$$

Z (5.33) widzimy, że zachodzi, że $Eg(\{X_{\underline{i}}\},\{\beta_{\underline{i}}\}) \leqslant Eh(\{X_{\underline{i}}\},\{\beta_{\underline{i}}\})$. Ponadto biorąc pod uwagę niezależność $X_{\underline{i}}$ oraz $a_{\underline{n},\underline{i}}$, Lemat 5.8 dla dowolnego $\underline{n}$ implikuje, że

$$\begin{aligned} &P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V}a_{\underline{n},\underline{i}}(X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}] - EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}])\Big| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big] \\ &\leqslant C|\underline{n}|^{-t-\beta-1-\delta/p}\sum_{\underline{i}\in V}E\Big(|a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)+\delta}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}]\Big). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Teraz mnożąc obie strony powyższej nierówności (5.34) przez $|\underline{n}|^t$, następnie sumując je po $\underline{n}\in V$ oraz stosując Lemat 5.7, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\sum_{\underline{n}\in V}|\underline{n}|^tP\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V}a_{\underline{n},\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}] - EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}]\Big)\Big| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big] \\ &\leqslant C\sum_{\underline{n}\in V}|\underline{n}|^{-\beta-1-\delta/p}\sum_{\underline{i}\in V}E|a_{\underline{n},\underline{i}}X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)+\delta}I[|X_{\underline{i}}|\leqslant|\underline{n}|^{1/p}] \\ &\leqslant CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1} < \infty. \end{aligned} \tag{5.35}$$

(III) Rozważmy teraz przypadek, gdy $1 < p(t+\beta+1) \leqslant 2$. Biorąc dowolne $\delta > 0$ takie, że $p(t+\beta+1)-\delta \geqslant \max\{q,1\}$, stosując nierówność Markowa, nierówność Marcinkiewicza-Zygmund'a, c_r-nierówność i nierówność Jensen'a, dla dowolnej rodziny liczb rzeczywistych $\{\beta_{\underline{n}}, \underline{n}\in V\}$ takich, że $0\leqslant\beta_{\underline{n}}\leqslant C$ i dla dowolnego $m\in\mathbb{R}$ (podobnie jak w [50]) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V}\beta_{\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|>m] - EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|>m]\Big)\Big| > \varepsilon m\Big] \\ &\leqslant \frac{1}{(m\varepsilon)^{p(t+\beta+1)-\delta}}E\Big|\sum_{\underline{i}\in V}\beta_{\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|>m] - EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|>m]\Big)\Big|^{p(t+\beta+1)-\delta} \\ &\leqslant C\frac{1}{m^{p(t+\beta+1)-\delta}}\sum_{\underline{i}\in V}E\Big|\beta_{\underline{i}}X_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|>m]\Big|^{p(t+\beta+1)-\delta}. \end{aligned} \tag{5.36}$$

W tym przypadku przyjmijmy, że

$$g(\{\alpha_{\underline{i}}\},\{\beta_{\underline{i}}\}) = I\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V}\beta_{\underline{i}}\Big(\alpha_{\underline{i}}I[|\alpha_{\underline{i}}|> m] - EX_{\underline{i}}I[|X_{\underline{i}}|> m]\Big)\Big| > \varepsilon m\Big],$$

$$h(\{\alpha_{\underline{i}}\},\{\beta_{\underline{i}}\}) = C\frac{1}{m^{p(t+\beta+1)-\delta}}\sum_{\underline{i}\in V}\Big|\beta_{\underline{i}}\alpha_{\underline{i}}I[|\alpha_{\underline{i}}|> m]\Big|^{p(t+\beta+1)-\delta}.$$

i wtedy z Lemat 5.8 otrzymujemy:

$$P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}] - EX_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big)\Big| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big]$$
$$\leqslant C|\underline{n}|^{-t-\beta-1+\delta/p} \sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)-\delta} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}], \tag{5.37}$$

co prowadzi w końcu do

$$\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}] - EX_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big)\Big| \leqslant \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big]$$
$$\leqslant C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-\beta-1+\delta/p} \sum_{\underline{i}\in V} E\Big(|a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}|^{p(t+\beta+1)-\delta} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big)$$
$$\leqslant CE|X|^{p(t+\beta+1)}(log_+|X|)^{\tau-1} < \infty. \tag{5.38}$$

Uwzględniając, że $EX_{\underline{n}} = 0$ otrzymujemy, że (5.5) zachodzi z (5.35) i (5.38), w przypadku gdy $1 < p(t+\beta+1) < 2$.

(IV) Rozważmy teraz przypadek, gdy $p(t+\beta+1) = 1$ i $t \geqslant -1$ (w przeciwnym razie dowód jest trywialny). Zauważmy, że z Lematu 5.4 (ii) wynika

$$E|X_{\underline{n}}|I[|X_{\underline{n}}| > b] \leqslant D_1 E|X|I[|X| > b], \tag{5.39}$$

a z założeń (5.7) i (5.8) mamy

$$\sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}}| \leqslant D_2|\underline{n}|^{\beta} \quad \text{dla } \underline{n} \in V, \tag{5.40}$$

dla dowolnych stałych dodatnich D_1 i D_2. Natomiast z faktu, że $E|X| < \infty$ (dla zarówno $V = V_\theta$ jak i $V = \mathbb{N}^d$) zachodzi

$$E|X|I[|X| > K] \leqslant \frac{\varepsilon}{16 D_1 D_2}, \tag{5.41}$$

dla dostatecznie dużego K.
Wtedy dla dowolnego $\underline{n}$ takiego, że $|\underline{n}| > K^p$

$$\Big|\sum_{\underline{i}\in V} |\underline{n}|^{-1/p} E a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{16}. \tag{5.42}$$

Ponadto, ponieważ dla dowolnego $\underline{n} \in V$ mamy $EX_{\underline{n}} = 0$, więc

$$\begin{aligned}
& P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}\Big| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}\Big] \\
\leqslant\ & P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}}\Big(X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}] - EX_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}]\Big)\Big| > \frac{\varepsilon}{2}|\underline{n}|^{1/p}\Big] \\
+\ & P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big| > \frac{\varepsilon}{4}|\underline{n}|^{1/p}\Big] \\
+\ & P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}} EX_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big| > \frac{\varepsilon}{4}|\underline{n}|^{1/p}\Big] \\
=\ & H_{\underline{n},1} + H_{\underline{n},2} + H_{\underline{n},3}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenie $\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},1}$ zostało już oszacowane w (5.35), natomiast $\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},2}$ może być ograniczone przez

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{i}nV} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},2} &\leqslant C\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t E\Big|\sum_{\underline{i}\in V} |\underline{n}|^{-1/p} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big|^{p(t+\beta+1)-\delta} \\
&\leqslant CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1} < \infty.
\end{aligned}$$

Wyrażenie $\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},3}$ oszacujemy przy użyciu założenia (a), (b) lub (c) z naszego Twierdzenia 5.2.

W przypadku założenia (a) mamy

$$\Big|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}} EX_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big| \leqslant \sum_{\underline{i}\in V} |a_{\underline{n},\underline{i}}| D_1 E|X| I[|X|^p > |\underline{n}|] \leqslant \frac{\varepsilon}{4}|\underline{n}|^{1/p}.$$

Zatem $H_{\underline{n},3} = 0$ dla $|\underline{n}| > K^p$.

W przypadku Twierdzenia 5.2 (ii)(b) rozważmy najpierw sytuację, gdy $|\underline{n}| > K^p$. Ponieważ z (5.42)

$$P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} Ea_{\underline{n},\underline{i}} EX_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]\Big| > \frac{\varepsilon}{16}|\underline{n}|^{1/p}\Big] = 0,$$

zatem

$$H_{\underline{n},3} \leqslant P\Big[\Big|\sum_{\underline{i}\in V} (a_{\underline{n},\underline{i}} - Ea_{\underline{n},\underline{i}}) EX_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}|^p > |\underline{n}|]\Big| > \frac{\varepsilon}{16}|\underline{n}|^{1/p}\Big].$$

Z założenia (ii)(b) Twierdzenia 5.2 istnieje taka stała D_3, że $\sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}} - Ea_{\underline{n},\underline{i}}| \leqslant D_3 \frac{|\underline{n}|^\beta}{\log_+^{\tau+\gamma}|\underline{n}|}$, zatem z (5.39), z nierówności Markowa i Lematu 5.5 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|>K^p}} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},3} &\leqslant \sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|>K^p}} E|a_{\underline{n},\underline{i}} - Ea_{\underline{n},\underline{i}}|E|X|I[|X|^p > |\underline{n}|] \\
&\leqslant \frac{16D_1}{\varepsilon} \sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|>K^p}} |\underline{n}|^{t-1/p} E|X|I[|X| > |\underline{n}|^{1/p}] \sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}} - Ea_{\underline{n},\underline{i}}| \\
&\leqslant \frac{16D_1D_3}{\varepsilon} E|X| \sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|>K^p}} \frac{|\underline{n}|^{t+\beta-1/p}}{\log_+^{\tau+\gamma}|\underline{n}|} \\
&\leqslant \frac{16D_1D_3}{\gamma\varepsilon\log_+^{\gamma} K} E|X| < \infty. \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

Zauważmy jeszcze, że w obu przypadkach (a) i (b) z Lematu 5.5 zachodzi

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\underline{n}\in V,\\ |\underline{n}|\leqslant K^p}} |\underline{n}|^t P[|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon|\underline{n}|^{1/p}] \\
&\leqslant \begin{cases} \frac{C}{|1+t|} K^{(1+t)p} \log_+^{\tau-1} K, & \text{jeśli } t > -1, \\ C\log_+^{\tau} K, & \text{jeśli } t = -1, \end{cases} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

co oczywiście dowodzi, że zarówno w przypadku (a), jak i (b) mamy

$$\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},3} < \infty. \qquad (5.44)$$

Aby otrzymać (5.44) również w przypadku (c) zauważmy, że z faktu $t+\beta-1/p = 1$, dostajemy

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},3} &\leqslant \frac{4D_1}{\varepsilon} \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{t-1/p} \sum_{\underline{i}\in V} E|a_{\underline{n},\underline{i}}|E|X|I[|X| > |\underline{n}|^{1/p}] \\
&\leqslant \frac{4D_1D_2}{\varepsilon} \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-1} E|X|I[|X| > |\underline{n}|^{1/p}], \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

a ponieważ dla $|X| > |\underline{n}|^{1/p}$ prawdziwa jest nierówność

$$(\log_+|X|)^{\tau+\gamma} > (\log_+|\underline{n}|^{1/p})^{\tau+\gamma},$$

więc

$$\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t H_{\underline{n},3} \leqslant \frac{4D_1D_2p^{\tau+\gamma}}{\varepsilon} E|X|\log_+^{\tau+\gamma}|X| \sum_{\underline{n}\in V} \frac{1}{|\underline{n}|\log_+^{\tau+\gamma}|\underline{n}|} < \infty.$$

Kończy to dowód Twierdzenia 5.2, w przypadku gdy $p(t+\beta+1) = 1$.

(V) Teraz będziemy zakładać, że $p(t+\beta+1) \geqslant 2$. Niech $\{\beta_{\underline{n},\underline{i}}, \underline{n}, \underline{i} \in V\}$ będzie polem liczb rzeczywistych ograniczonym przez liczbę rzeczywistą M. Z Lematu 5.3 otrzymujemy

$$\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon |\underline{n}|^{1/p}\Big] \leqslant C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{t-2J/p} \Big(\sum_{\underline{i}\in V} \beta^2_{\underline{n},\underline{i}}\Big)^J$$
$$+ C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-\beta-1-\eta/p} \sum_{\underline{i}\in V} E|\beta_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)+\eta}$$
$$+ C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{-\beta-1+\eta/p} \sum_{\underline{i}\in V} E|\beta_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)-\eta}_{.} \tag{5.46}$$

Połóżmy

$$g(\{X_{\underline{i}}\}, \{\beta_{\underline{n},\underline{i}}\}) = I\Big[|\sum_{\underline{i}\in V} \beta_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon |\underline{n}|^{1/p}\Big],$$

$$h(\{X_{\underline{i}}\}, \{\beta_{\underline{n},\underline{i}}\}) = C|\underline{n}|^{-2J/p}\Big(\sum_{\underline{i}\in V} \beta^2_{\underline{n},\underline{i}}\Big)^J$$
$$+C\frac{1}{|\underline{n}|^{t+1+\beta+\eta/p}} \sum_{\underline{i}\in V} |\beta_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)+\eta}$$
$$+C\frac{1}{|\underline{n}|^{t+1+\beta-\eta/p}} \sum_{\underline{i}\in V} |\beta_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)-\eta}_{,}$$

Z Lematu 5.8 mamy

$$\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big(|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon |\underline{n}|^{1/p}]\Big) \leqslant C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{t-2J/p} E\Big(\sum_{\underline{i}\in V} a^2_{\underline{n},\underline{i}}\Big)^J$$
$$+C\sum_{\underline{n}\in V} \frac{1}{|\underline{n}|^{1+\beta+\eta/p}} E\Big(\sum_{\underline{i}\in V} |a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| \leqslant |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)+\eta}\Big)$$
$$+C\sum_{\underline{n}\in V} \frac{1}{|\underline{n}|^{1+\beta-\eta/p}} E\Big(\sum_{\underline{i}\in V} |a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}} I[|X_{\underline{i}}| > |\underline{n}|^{1/p}]|^{p(t+\beta+1)-\eta}\Big).$$

Ostatecznie, stosując Lemat 5.7 i (5.9) otrzymujemy

$$\sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^t P\Big(|\sum_{\underline{i}\in V} a_{\underline{n},\underline{i}} X_{\underline{i}}| > \varepsilon |\underline{n}|^{1/p}\Big) \leqslant C \sum_{\underline{n}\in V} |\underline{n}|^{t-2J/p} E\Big(\sum_{\underline{i}\in V} a^2_{\underline{n},\underline{i}}\Big)^J$$
$$+CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1} + CE|X|^{p(t+\beta+1)}(\log_+|X|)^{\tau-1} < \infty.$$

Kończy to dowód Twierdzenia 5.2, w przypadku gdy $p(t+\beta+1) \geqslant 2$.

Podsumowując, Twierdzenie 5.2(i) wynika z **(I)**, **(II)** i **(III)**, Twierdzenie 5.2(ii) z **(II)** i **(IV)**, natomiast Twierdzenia 5.2(iii) jest konsekwencją **(V)**.

□

Dowód Wniosków 5.1 i 5.2. Dla dowodów Wniosków 5.1 i 5.2 kładziemy odpowiednio w Twierdzeniu 5.2 $a_{\underline{n},\underline{i}} = I[N_{\underline{n}} \geqslant |\underline{i}|]$ oraz $a_{\underline{n},\underline{i}} = I[\underline{N}_{\underline{n}} \geqslant \underline{i}]$. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
\sum_{\underline{i}\in V} P[N_{\underline{n}} > |\underline{i}|] &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} P[j \leqslant N_{\underline{n}} < j+1]\tau_V(i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P[j \leqslant N_{\underline{n}} < j+1]T_V(j), \\
E(\sum_{\underline{i}\in V} P[N_{\underline{n}} > |\underline{i}|])^J &= E(\sum_{j=1}^{\infty} I[j \leqslant N_{\underline{n}} < j+1]T_V(j))^J, \\
\sum_{\underline{i}\in V} P[\underline{N}_{\underline{n}} > \underline{i}] &= \sum_{\underline{i}\in V}\sum_{\underline{j}\geqslant\underline{i}} P[\underline{j} \leqslant \underline{N}_{\underline{n}} < \underline{j}+\underline{1}] \\
&\leqslant \sum_{\underline{j}\in\mathbb{N}^d} P[\underline{j} \leqslant \underline{N}_{\underline{n}} < \underline{j}+\underline{1}]|\underline{i} : \underline{i} \leqslant \underline{j}, \underline{i} \in V|, \\
E(\sum_{\underline{i}\in V} I[\underline{N}_{\underline{n}} > \underline{i}])^J &\leqslant E(\sum_{\underline{j}\in\mathbb{N}^d} I[\underline{j} \leqslant \underline{N}_{\underline{n}} < \underline{j}+\underline{1}]|\underline{i} : \underline{i} \leqslant \underline{j}, \underline{i} \in V|)^J.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
ET_V(N_{\underline{n}}) \leqslant \quad & \textstyle\sum_{\underline{i}\in V} P[N_{\underline{n}} > |\underline{i}|] && \leqslant ET_V(N_{\underline{n}}+1), \\
E(T_V(N_{\underline{n}}))^J \leqslant \quad & E(\textstyle\sum_{\underline{i}\in V} I[N_{\underline{n}} > |\underline{i}|])^J && \leqslant E(T_V(N_{\underline{n}})+1)^J, \\
& \textstyle\sum_{\underline{i}\in V} P[\underline{N}_{\underline{n}} > \underline{i}] && \leqslant E|\underline{N}_{\underline{n}}+\underline{1}|, \\
& E(\textstyle\sum_{\underline{i}\in V} I[\underline{N}_{\underline{n}} > \underline{i}])^J && \leqslant E|\underline{N}_{\underline{n}}+\underline{1}|^J.
\end{aligned}
$$

W dowodzie Wniosku 5.2 połóżmy odpowiednio w punktach (a) i (b)

$$
a_{\underline{n},\underline{i}} = \begin{cases} \epsilon_{\underline{i}}, & \text{jeśli } \underline{1} \leqslant \underline{i} \leqslant \underline{n}, \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}
$$

oraz $a_{\underline{n},\underline{i}} = \epsilon_{\underline{n},\underline{i}}$. Ponadto z Lematu 5.1 oraz Twierdzenia 1.4:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\underline{i}\in V, \underline{i}\leqslant\underline{n}} P[\epsilon_{\underline{i}} = 1] &= \hat{p}T_V(|\underline{n}|) = O(|\underline{n}| \log_+^{\tau-1}|\underline{n}|), \\
E(\sum_{\underline{i}\in V, \underline{i}\leqslant\underline{n}} \epsilon_{\underline{i}}^2)^J &= O(|\underline{n}|^{J/2} \log_+^{J(\tau-1)/2}|\underline{n}|), \\
E(\sum_{\underline{i}\in V} \epsilon_{\underline{n},\underline{i}}^2)^J &\leqslant 2C(\sum_{\underline{i}\in V} \hat{p}_{\underline{n},\underline{i}})^{J/2}.
\end{aligned}
$$

□

Bibliografia

[1] M. Atlagh and M. Weber. Le théoreme central limite presque sûr. *Expositiones Mathematicae*, 18(2):097–126, 2000.

[2] L. E. Baum and M. Katz. Convergence rates in the law of large numbers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 120(1):108–123, 1965.

[3] L. E. Baum, M. Katz, and H. Stratton. Strong laws for ruled sums. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(2):625–629, 1971.

[4] L. E. Baum and H. Stratton. Visitations of ruled sums. *Transactions of the American Mathematical Society*, 182:403–430, 1973.

[5] I. Berkes. Results and problems related to the pointwise central limit theorem. In *Asymptotic Methods in Probability and Statistics*, pages 59–96. Elsevier, 1998.

[6] I. Berkes and E. Csáki. A universal result in almost sure central limit theory. *Stochastic Processes and Their Applications*, 94(1):105–134, 2001.

[7] J. Bernoulli. *Ars conjectandi.* Impensis Thurnisiorum, fratrum, 1713.

[8] H. Brunk et al. The strong law of large numbers. *Duke Mathematical Journal*, 15(1):181–195, 1948.

[9] I. Fazekas and O. Klesov. A general approach to the strong law of large numbers. *Theory of Probability & Its Applications*, 45(3):436–449, 2001.

[10] I. Fazekas and Z. Rychlik. Almost sure functional limit theorems. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, 56(1):1–18, 2002.

[11] I. Fazekas and Z. Rychlik. Almost sure central limit theorems for random fields. *Mathematische Nachrichten*, 259(1):12–18, 2003.

[12] A. M. Gdula and A. Krajka. On the complete convergence of randomly weighted sums of random fields. *Demonstratio Mathematica*, Vol. 47, nr 1:232–252, 2014.

[13] A. M. Gdula and A. Krajka. Strong law of large numbers for random variables with multidimensional indices. *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 37, Fasc. 1:185–199, 2017.

[14] A. M. Gdula and A. Krajka. Almost sure central limit theorems for sums of a randomly chosen multiindex field. (in print in *Publicationes Mathematicae Debrecen*), 2021.

[15] A. M. Gdula and A. Krajka. The strong law of large numbers for sums of randomly chosen identically distributed random variables. (submitted to *Periodica Mathematica Hungarica*), 2021.

[16] A. M. Gdula and A. Krajka. The strong law of large numbers for sums of randomly chosen random variables. (in print in *Lithuanian Mathematical Journal*), 2021.

[17] A. Gut. Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices. *The Annals of Probability*, 6(3):469–482, 1978.

[18] A. Gut. Strong laws for independent identically distributed random variables indexed by a sector. *The Annals of Probability*, 11(3):569–577, 1983.

[19] A. Gut. *Stopped random walks*. Springer, 2009.

[20] A. Gut and A. Spătaru. Precise asymptotics in the Baum–Katz and Davis laws of large numbers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 248(1):233–246, 2000.

[21] J. Hájek and A. Rényi. Generalization of an inequality of Kolmogorov. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 6(3-4):281–283, 1955.

[22] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic press, 2014.

[23] J. Hoffmann-Jørgensen. Sums of independent banach space valued random variables. *Studia Mathematica*, 52(2):159–186, 1974.

[24] P.-L. Hsu and H. Robbins. Complete convergence and the law of large numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 33(2):25, 1947.

[25] T.-C. Hu, A. Rosalsky, and A. Volodin. On convergence properties of sums of dependent random variables under second moment and covariance restrictions. *Statistics & Probability Letters*, 78(14):1999–2005, 2008.

[26] T.-C. Hu and R. Taylor. On the strong law for arrays and for the bootstrap mean and variance. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 20(2):375–382, 1997.

[27] T.-C. Hu and N. C. Weber. A note on strong convergence of sums of dependent random variables. *Journal of Probability and Statistics*, 2009, 2009.

[28] K.-H. Indlekofer and O. Klesov. Strong law of large numbers for multiple sums whose indices belong to a sector with function boundaries. *Theory of Probability & Its Applications*, 52(4):711–719, 2008.

[29] R. Jajte. On the strong law of large numbers. *Annals of probability*, pages 409–412, 2003.

[30] F. Jonsson. Almost sure central limit theory. `http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:304483/FULLTEXT01.pdf`, 2007.

[31] A. Khinchine. Sur la loi des grands nombres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 189:477–479, 1929.

[32] O. Klesov. *Limit theorems for multi-indexed sums of random variables*, volume 71. Springer, 2014.

[33] O. Klesov and Z. Rychlik. Strong law of large numbers on partially ordered sets. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 58:35–42, 1999. [english translation of Teor. Imovirnost. ta Mat. Statyst. 58, 31-37 (1998)].

[34] O. I. Klesov. Strong law of large numbers for multiple sums of independent, identically distributed random variables. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 38(6):1006–1014, 1985.

[35] A. N. Kolmogorov. Sur la loi forte des grands nombres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 191:910–912, 1930.

[36] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach Spaces: isoperimetry and processes*. Springer Science & Business Media, 2013.

[37] M. Loeve. Elementary probability theory. In *Probability theory I*, pages 1–52. Springer, 1977.

[38] A. I. Martikainen and V. V. Petrov. On a theorem of Feller. *Theory of Probability & Its Applications*, 25(1):191–193, 1980.

[39] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. J.Wiley, New York, 1975.

[40] P. Matuła. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables. *Statistics & Probability Letters*, 15(3):209–213, 1992.

[41] I. Molchanov and I. S. Molchanov. *Theory of random sets*, volume 19 (2). Springer, 2005.

[42] H. T. Nguyen. *An introduction to random sets*. CRC press, 2006.

[43] C. Noszály and T. Tómács. A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables. In *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math*, volume 43, pages 61–78, 2000.

[44] V. V. Petrov. On the order of growth and sums of dependent variables. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 18(2):358–361, 1973.

[45] V. V. Petrov. *Sums of independent random variables*, volume 82 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Academie Verlag, Berlin, Heidelberg, 1975. Tłumaczenie: *Петров В.В., Суммы Независимых Случайных Величин, Москва, 1972, Наука.*

[46] A. Rosalsky and G. Stoica. On the strong law of large numbers for identically distributed random variables irrespective of their joint distributions. *Statistics & Probability Letters*, 80(17-18):1265–1270, 2010.

[47] H. P. Rosenthal. On the subspaces of $L^p(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables. *Israel Journal of Mathematics*, 8(3):273–303, 1970.

[48] R. J. Serfling. Moment inequalities for the maximum cumulative sum. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1227–1234, 1970.

[49] A. N. Shiryayev. *Selected works of AN Kolmogorov: Volume II probability theory and mathematical statistics*, volume 26. Springer Science & Business Media, 1992.

[50] S. H. Sung. Complete convergence for weighted sums of random variables. *Statistics & probability letters*, 77(3):303–311, 2007.

[51] D. Szasz and B. Freyer. On the sums of a random number of random variables. *Lithuanian Mathematical Journal*, 11(1):181–187, 1971.

[52] H. Teicher. Strong laws for martingale differences and independent random variables. *Journal of Theoretical Probability*, 11(4):979–995, 1998.

[53] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis: an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions.* University Press, 1915.