



**UMCS**

UNIwersytet Marii Curie-Skłodowskiej  
w Lublinie

UNIwersytet Marii Curie-Skłodowskiej  
w Lublinie

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki  
Instytut Fizyki

**Teoretyczny opis parzysto-parzystych  
superciężkich jąder atomowych z wykorzystaniem  
metody Hartree’ego-Focka-Bogolubowa  
z jądrowym funkcjonałem gęstości Skyrme’a**

Amelia Kosior-Romanowska

Rozprawa doktorska  
wykonana w Katedrze Fizyki Teoretycznej  
pod kierunkiem dr. hab. Andrzeja Staszczaka, prof. UMCS



Lublin, 2021 r.



Niniejszą rozprawę dedykuję Najukochańszym Rodzicom,  
którzy umożliwili mi kształcenie się i zdobywanie cennej wiedzy,  
rozumieli mnie oraz wspierali w trudnych momentach.

Serdecznie dziękuję mojemu Promotorowi  
dr. hab. Andrzejowi Staszczakowi  
za poświęcony mi czas, cenne uwagi, pomoc  
i ogromne wsparcie merytoryczne podczas pisania pracy.





# Spis treści

Wykaz skrótów	vii
Spis tabel	ix
Spis rysunków	xi
Streszczenie	xv
Abstract	xvii
<b>1 Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1 Superciężkie jądra atomowe . . . . .	1
1.1.1 Historia odkryć . . . . .	1
1.1.2 Modele teoretyczne . . . . .	6
1.2 Metodyka oraz plan pracy . . . . .	9
<b>2 Model HFB z funkcjonalem gęstości Skyrme'a</b>	<b>13</b>
2.1 Efektywne oddziaływanie Skyrme'a . . . . .	13
2.2 Funkcjonał gęstości Skyrme'a . . . . .	16
2.3 Metoda średniego pola . . . . .	18
2.4 Model HFB z więzami . . . . .	20
2.5 Oddziaływanie pairing . . . . .	22
2.6 Symetrie punktowe w programie numerycznym HFODD . . . . .	23
<b>3 Wyniki</b>	<b>27</b>
3.1 Koncepcja i plan badań . . . . .	27
3.2 Podwójnie magiczne jądro $^{304}_{120}184$ . . . . .	28
3.3 Parzyste izotopy $Z = 114$ oraz $Z = 120$ . . . . .	35
3.3.1 Powierzchnie potencjału - deformacja <i>prolate</i> . . . . .	35
3.3.2 Kwantowe przemiany fazowe jądrowych deformacji równowagi . . . . .	47
3.3.3 Rozpady alfa . . . . .	53

3.3.4	Powierzchnie potencjału - deformacja <i>oblate</i> . . . . .	55
3.4	Parzyste izotony $N=184$ . . . . .	64
3.4.1	Powierzchnie potencjału - deformacja <i>prolate</i> . . . . .	64
3.4.2	Rozpady alfa . . . . .	68
3.4.3	Powierzchnie potencjału - deformacja <i>oblate</i> . . . . .	70
3.5	Neutronowo-deficytowe izotopy $Z = 118-124$ . . . . .	74
3.5.1	Powierzchnie potencjału . . . . .	74
3.5.2	Rozpady alfa . . . . .	77
3.6	Toroidalne wysoko-spinowe izomery . . . . .	82
3.6.1	Toroidalne rozwiązania w $^{304}120_{184}$ . . . . .	82
3.6.2	Toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne $^{304}120_{184}$ . . . . .	82
3.6.3	Toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne izotopów $Z = 120$ . . . . .	93
3.6.4	Toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne izotonów $N = 184$ . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>
	<b>Publikacje własne</b>	<b>123</b>

# Wykaz skrótów

<b>aEF</b>	<i>asymmetric elongated fission</i> - ścieżka asymetryczna prowadząca do jądrowego rozszczepienia
<b>ALM</b>	<i>augmented Lagrangian method</i> - metoda rozszerzonych mnożników Lagrange'a
<b>BCS</b>	<i>Bardeen-Cooper-Schrieffer theory</i> - teoria Bardeena-Coopera-Schrieffera
<b>CHFB</b>	<i>constrained Hartree-Fock-Bogoliubov model</i> - model HFB z więzami
<b>DFT</b>	<i>density functional theory</i> - teoria funkcjonału gęstości
<b>ECP</b>	<i>equality-constrained problem</i> - optymalizacja z ograniczeniami równościowymi
<b>EDF</b>	<i>energy density functional</i> - funkcjonał gęstości energii
<b>HF</b>	<i>Hartree-Fock method</i> - metoda Hartee'ego-Focka
<b>HFB</b>	<i>Hartree-Fock-Bogoliubov theory</i> - teoria Hartee'ego-Focka-Bogolubowa
<b>IBM</b>	<i>Interacting Boson Model</i> - model oddziałujących bozonów
<b>LDA</b>	<i>Local Density Approximation</i> - przybliżenie lokalnych gęstości
<b>RHB</b>	<i>relativistic Hartree-Bogoliubov</i> - relatywistyczne przybliżenie Hartree'ego-Bogolubowa
<b>RMF</b>	<i>relativistic mean field</i> - relatywistyczne przybliżenie średniego pola
<b>sEF</b>	<i>symmetric elongated fission</i> - ścieżka symetryczna prowadząca do jądrowego rozszczepienia
<b>SDO</b>	<i>superdeformed oblate</i> - ekstremalnie duże deformacje oblate
<b>TDDFT</b>	<i>time-dependent density functional theory</i> - zależna od czasu teoria funkcjonału gęstości
<b>TDHF</b>	<i>time-dependent Hartree-Fock</i> - zależny od czasu model HF
<b>THSI</b>	<i>toroidal high-spin isomeric states</i> - toroidalne wysokospinowe stany izomeryczne



# Spis tabel

1.1	Lista znanych transaktynowców. . . . .	5
1.2	Kody komputerowe rozwiązujące jądrowe zagadnienie HFB i TDHFB. . . . .	8
2.1	Porównanie parametryzacji SkM* oraz SLy4 oddziaływania Skyrme'a . . . . .	14
3.1	Parametry charakteryzujące konfiguracje stanu podstawowego parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154 - 196$ . . . . .	56
3.2	Parametry charakteryzujące konfiguracje stanu podstawowego parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 160 - 196$ . . . . .	57
3.3	Wartości $Q_{20}$ oraz $E^{tot}$ dla rozwiązań w punkcie <b>A</b> oraz w punkcie <b>B</b> otrzymane dla łańcucha izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154-196$ . . . . .	65
3.4	Wartości $Q_{20}$ oraz $E^{tot}$ dla rozwiązań w punkcie <b>A</b> oraz w punkcie <b>B</b> otrzymane dla łańcucha izotopów $Z = 120$ z $N = 160-196$ . . . . .	66
3.5	Parametry charakteryzujące konfiguracje stanu podstawowego parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 106-126$ . . . . .	71
3.6	Wartości $Q_{20}$ oraz $E^{tot}$ dla rozwiązań w punkcie <b>A</b> oraz w punkcie <b>B</b> otrzymane dla łańcucha izotonów $N = 184$ z $Z = 106-126$ . . . . .	74
3.7	Energie całkowite $E^{tot}$ i deformacje kwadrupolowe $Q_{20}$ neutronowo-deficytowych izotopów $Z = 118, 120, 122$ i $124$ . . . . .	81
3.8	Konfiguracje wzbudzeń cząstka-dziura prowadzące do stanów $I_z = 81\hbar$ i $I_z = 208\hbar$ . . . . .	89
3.9	Właściwości toroidalnych wysoko-spinowych stanów izomerycznych parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 160-196$ . . . . .	97
3.10	Właściwości toroidalnych wysoko-spinowych stanów izomerycznych parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 106-126$ . . . . .	101



# Spis rysunków

1.1	Najcięższe jądra znane eksperymentalnie ( $Z = 96-118$ i $N = 137-177$ ). . . . .	4
1.2	Superciężkie jądra atomowe analizowane w niniejszej pracy. . . . .	11
2.1	Trójelementowe zbiory symetrii $\{\hat{T}, \hat{S}_y, \hat{S}_y^T\}$ , $\{\hat{P}, \hat{S}_y, \hat{R}_y\}$ , $\{\hat{R}_y, \hat{S}_x^T, \hat{S}_z^T\}$ . . . . .	24
2.2	Pełne zestawienie zachowanych lub niezachowanych symetrii, w przypadku zachowanej symetrii odwrócenia czasu. . . . .	24
2.3	Pełne zestawienie zachowanych lub niezachowanych symetrii, w przypadku niezachowanej symetrii odwrócenia czasu. . . . .	24
2.4	Ilustracja rachunków z niezłamanymi oraz złamanymi symetrami stosowanymi w programie numerycznym HFODD. . . . .	25
3.1	Powierzchnia energii HFB dla $^{304}120_{184}$ jako funkcja momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ i oktopolowego $Q_{30}$ . . . . .	29
3.2	Powierzchnia energii deformacji HFB w płaszczyźnie $\beta$ - $\gamma$ obliczona dla superciężkiego jądra $^{304}120_{184}$ . . . . .	30
3.3	Przebieg całkowitej energii HFB dla $^{304}120_{184}$ w funkcji momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ . . . . .	31
3.4	Toroidalna powierzchnia jądrowa z zaznaczonymi promieniami (dużym i małym). . . . .	32
3.5	Powiększony fragment Rys. 3.3 oraz rozkłady gęstości materii jądrowej. . . . .	32
3.6	Energia kulombowska odpowiadająca przedstawionym na Rys. 3.5 (a) rozwiązaniom z jednospójnymi powierzchniami jądrowymi oraz rozwiązaniom z toroidalnym rozkładem materii jądrowej. . . . .	33
3.7	Protonowe poziomy jednocząstkowe $^{304}120_{184}$ w funkcji momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ . . . . .	34
3.8	Neutronowe poziomy jednocząstkowe $^{304}120_{184}$ w funkcji momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ . . . . .	34
3.9	Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154 - 168$ . . . . .	36

3.10	Kontynuacja Rys. 3.9 dla izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 170-184$ . . . . .	37
3.11	Kontynuacja Rys. 3.9 i 3.10 dla izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 186-196$ . . . . .	38
3.12	Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie $\beta$ - $\gamma$ parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154-176$ . . . . .	39
3.13	Kontynuacja Rys. 3.12 dla izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 178-196$ . . . . .	40
3.14	Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 160-174$ . . . . .	42
3.15	Kontynuacja Rys. 3.14 dla izotopów $Z = 120$ z $N = 176-190$ . . . . .	43
3.16	Kontynuacja Rys. 3.14 i 3.15 dla izotopów $Z = 120$ z $N = 176-190$ . . . . .	44
3.17	Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie $\beta$ - $\gamma$ parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 160-182$ . . . . .	45
3.18	Kontynuacja Rys. 3.17 dla izotopów $Z = 120$ z $N = 184-196$ . . . . .	46
3.19	Wysokości barier rozszczepieniowych $B_f$ parzystych izotopów $Z = 114$ i $Z = 120$ . . . . .	47
3.20	Rozszerzony trójkąt Castena. . . . .	48
3.21	Osiowosymetryczne energie HFB w funkcji momentu kwadrupolowego parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154-176$ . . . . .	49
3.22	Kontynuacja Rys. 3.21 dla izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 178-196$ . . . . .	50
3.23	Osiowosymetryczne energie HFB w funkcji momentu kwadrupolowego parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 160-182$ . . . . .	51
3.24	Kontynuacja Rys. 3.23 dla izotopów $Z = 120$ z $N = 184-196$ . . . . .	52
3.25	Momenty kwadrupolowe w stanach podstawowych parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) oraz $Z = 120$ . . . . .	52
3.26	Wartości energii uwalnianej w rozpadzie $\alpha$ , $Q_\alpha$ , - panel (a) i $\log T_\alpha$ - panel (b) parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) oraz $Z = 120$ . . . . .	55
3.27	Energia całkowita HFB parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154-168$ w funkcji momentu kwadrupolowego $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . . . . .	58
3.28	Kontynuacja Rys. 3.27 dla izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 170-184$ . . . . .	59
3.29	Kontynuacja Rys. 3.27 i 3.28, dla izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 186-196$ . . . . .	60
3.30	Energia całkowita HFB parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 160-174$ w funkcji momentu kwadrupolowego $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . . . . .	61
3.31	Kontynuacja Rys. 3.30 dla izotopów $Z = 120$ z $N = 176-190$ . . . . .	62
3.32	Kontynuacja Rys. 3.30 i 3.31 dla izotopów $Z = 120$ z $N = 192-196$ . . . . .	63
3.33	Położenie na płaszczyźnie $(E^{tot}, Q_{20})$ ostatniego rozwiązania odpowiadającego konfiguracji z jądrową powierzchnią jednospójną - <b>A</b> oraz pierwszego rozwiązania toroidalnego - <b>B</b> , dla łańcucha parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154 - 196$ (a) oraz $Z = 120$ z $N = 160 - 196$ (b). . . . .	63



3.34	Energie wzbudzenia $E^*(\mathbf{A})$ i $E^*(\mathbf{B})$ odpowiadające odpowiednio ostatniej konfiguracji z jądrową powierzchnią jednospójną - $\mathbf{A}$ oraz pierwszej konfiguracji toroidalnej - $\mathbf{B}$ , dla łańcucha parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z $N = 154-196$ (a) oraz izotopów $Z = 120$ z $N = 160-196$ (b).	64
3.35	Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 106-120$ .	67
3.36	Kontynuacja Rys. 3.35 dla izotonów $N = 184$ z $Z = 122-126$ .	68
3.37	Powierzchnie energii deformacji Skyrme'a-HFB w płaszczyźnie $\beta$ - $\gamma$ parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 106-126$ .	69
3.38	Redukcja barier rozszczepienia spowodowana efektem trójosiowości dla łańcucha parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 106-126$ .	70
3.39	Wartości energii uwalnianej $Q_\alpha$ i $\log T_\alpha$ dla parzystych izotonów $N = 184$ .	70
3.40	Energia całkowita HFB parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 106-120$ w funkcji momentu kwadrupolowego $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ .	72
3.41	Kontynuacja Rys. 3.40 dla izotonów $N = 184$ z $Z = 122-126$ .	73
3.42	Parzyste izotony $N = 184$ z $Z = 106-126$ : (a) położenie na płaszczyźnie $(E^{tot}, Q_{20})$ ostatniego rozwiązania odpowiadającego konfiguracji z jądrową powierzchnią jednospójną oraz pierwszego rozwiązania toroidalnego; (b) energie wzbudzenia $E^*(\mathbf{A})$ i $E^*(\mathbf{B})$ .	73
3.43	Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie $\beta$ - $\gamma$ dla parzystych izotopów $Z = 118$ z $N = 158-166$ , $Z = 120$ z $N = 160-166$ , $Z = 122$ z $N = 162-166$ oraz $Z = 124$ z $N = 164, 166$ .	75
3.44	Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie $\beta$ - $\gamma$ dla parzystych izotopów $Z = 118$ z $N = 168$ , $Z = 120$ z $N = 168, 170$ , $Z = 122$ z $N = 168-172$ oraz $Z = 124$ z $N = 168-174$ .	76
3.45	Powierzchnia energetyczna superciężkiego jądra $^{286}_{120}166$ w płaszczyźnie $\beta$ - $\gamma$ , obliczona przy użyciu modelu Skyrme'a-HFB.	77
3.46	Przekroje $x$ - $y$ (dolne panele) i $x$ - $z$ (górne panele) rozkładów całkowitej gęstości jądrowej w trzech minimach w jądrze $^{286}_{120}166$ .	78
3.47	Osiowosymetryczne wykresy energii deformacji Skyrme'a-HFB dla neutronowodeficytowych parzystych izotopów $Z = 118$ i $120$ oraz $Z = 120$ i $122$ w funkcji momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ .	79
3.48	Kontynuacja Rys. 3.47 dla parzystych izotopów $Z = 122$ i $124$ .	80
3.49	(a) Wartości energii $Q_\alpha$ uwalnianej w rozpadzie $\alpha$ oraz (b) $\log T_\alpha$ dla parzystych izotopów $Z = 120, 122, \text{ i } 124$	80

3.50	Jednocząstkowe Routhiany protonowe (a) i neutronowe (b) w funkcji parametru $\hbar\omega$ , dla jądra $^{304}_{120}184$ , w konfiguracji toroidalnej przy deformacji $Q_{20} = -300$ b. . . . .	84
3.51	Protonowe jednocząstkowe poziomy energetyczne dla $^{304}_{120}184$ w konfiguracji toroidalnej przy $Q_{20} = -300$ b, w funkcji $2\Omega_z$ . . . . .	87
3.52	Neutronowe jednocząstkowe poziomy energetyczne dla $^{304}_{120}184$ w konfiguracji toroidalnej przy $Q_{20} = -300$ b, w funkcji $2\Omega_z$ . . . . .	88
3.53	Panel (a): Uzyskane w modelu wymuszonego obrotu Skyrme'a-HFB wartości całkowitej energii $E^{tot}$ wysoko-spinowych konfiguracji równowagi w funkcji momentu pędu $I_z$ dla początkowej konfiguracji toroidalnej jądra $^{304}_{120}184$ . Panel (b): Wartości przerwy energetycznej pairing dla protonów $\Delta_p$ oraz neutronów $\Delta_n$ w zależności od spinu $I_z$ . . . . .	90
3.54	Panel (a): Zależność całkowitego momentu pędu $I_z^{tot}$ oraz jego składowej protonowej i neutronowej od wartości parametru Lagrange'a $\hbar\omega_z$ w modelu wymuszonego obrotu Skyrme'a-HFB. . . . .	90
3.55	Energie deformacji $^{304}_{120}184$ w konfiguracji toroidalnej w funkcji momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ z zaznaczonymi THSI dla $I_z = 35, 53, 81, 112, 144$ i $208\hbar$ . . . . .	91
3.56	Profile gęstości neutronów, protonów i gęstości całkowitej w stanach THSI ( $I_z = 81\hbar$ i $208\hbar$ ) jądra $^{304}_{120}184$ w funkcji współrzędnej $x$ . . . . .	92
3.57	Kontury całkowitej gęstości w stanie THSI z $I_z = 81\hbar$ w jądrze $^{304}_{120}184$ w przekroju: $x-y$ (a) oraz $x-z$ (b). . . . .	92
3.58	Energie deformacji parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 160-170$ w funkcji momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ dla różnych momentów pędu $I = I_z$ . . . . .	94
3.59	Kontynuacja Rys. 3.58 dla parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 172-182$ . . . . .	95
3.60	Kontynuacja Rys. 3.58 i 3.59 dla parzystych izotopów $Z = 120$ z $N = 186-196$ . . . . .	96
3.61	Energie deformacji parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 106-112$ w funkcji momentu kwadrupolowego $Q_{20}$ dla różnych momentów pędu $I = I_z$ . . . . .	99
3.62	Kontynuacja Rys. 3.61 dla parzystych izotonów $N = 184$ z $Z = 114-126$ . . . . .	100

# Streszczenie

Badania teoretyczne dotyczące właściwości najcięższych jąder, tzn. z liczbą atomową  $Z \geq 104$ , rozwijają się od kilkudziesięciu lat w sposób niezwykle dynamiczny. Odkrycie superciężkich pierwiastków rozszerzyło układ okresowy do najcięższego znanego dzisiaj izotopu oganesonu z liczbą atomową  $Z = 118$  [1]. Jednak granica występowania superciężkich jąder jest wciąż nierozstrzygnięta.

Wraz ze wzrostem liczby protonów, superciężkie jądra stają się niestabilne i z tego względu podatne na spontaniczne rozszczepienie oraz emisję cząstek alfa. Jednak istnieje grupa pierwiastków superciężkich ze zwiększoną stabilnością, tworząca tzw. *wyspę stabilności*. Ta zwiększona trwałość jądrowa spowodowana jest istnieniem efektów powłokowych związanych z dużymi przerwami energetycznymi między powłokami nukleonowymi. Dla ustalonych wartości  $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$  oraz  $N = 2, 8, 20, 28, 82, 126$ , zwanych liczbami magicznymi, protony i neutrony w jądrze wypełniają zamknięte powłoki. Modele mikroskopowo-makroskopowe przewidują, że po podwójnie magicznym izotopie ołowiu  $^{208}\text{Pb}$  ( $Z = 82, N = 126$ ) kolejną parą liczb magicznych jest ( $Z = 114, N = 184$ ) [2–4], zaś mikroskopowe samozgodne modele średniego pola zakładają zamknięte powłoki sferyczne dla  $N = 184$  oraz  $Z = 120, 124$  lub  $126$  [5–7].

W badaniach stabilności jądrowej analizuje się zmianę energii wiązania jądra w funkcji jego deformacji, opisywanej wartością oczekiwaną operatora momentu kwadrupolowego  $Q_{20} = \langle \hat{Q}_{20} \rangle$ . W tym celu, w modelach mikroskopowych stosuje się dodatkowe warunki nakładane na  $Q_{20}$ , który opisuje elipsoidalne kształty jądrowe: typu *prolate* ( $Q_{20} > 0$ ), jądra sferyczne ( $Q_{20} = 0$ ) oraz typu *oblate* ( $Q_{20} < 0$ ). Dla deformacji *prolate*, przy rosnącej wartości  $Q_{20}$ , jądro wydłuża się, przybierając kształt „cygara”. W tym obszarze deformacji istnieją dwie ścieżki prowadzące do rozszczepienia: symetryczna, na której jądro rozszczepia się na dwa jednakowe fragmenty, oraz asymetryczna, prowadząca do rozszczepienia jądra na dwa fragmenty o różnych masach. W przypadku deformacji *oblate*, wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej  $|Q_{20}|$ , jądro przyjmuje kształt spłaszczonej elipsoidy, przechodzącej następnie w dwustronnie wklęsły dysk. Przy wartości krytycznej  $Q_{20} \ll 0$  obserwuje się nagłą zmianę topologii jądra ze *sferycznej* - jednospójnej (genus = 0) na *toroidalną* (genus = 1) [8–11].

Stosując samozgodny model średniego pola Hartree’ego-Focka-Bogolubowa (HFB), z jądrowym funkcjonałem gęstości Skyrme’a stwierdzono, że w przypadku większości superciężkich jąder atomowych ( $Z = 106$  do  $122$ ) [10, 11], ich energia całkowita  $E^{tot}$  dla kształtów toroidalnych wykreślona w funkcji  $Q_{20}$  nie tworzy lokalnych minimum. Oznacza to, że rozwiązania toroidalne nie są stabilne i po uwolnieniu warunku (wiązania) na daną wartość momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ , jądro „powraca” do swojego stanu podstawowego. Jednak, stosując metodę wymuszonego obrotu (*cranking*) w modelu Skyrme’a-HF (z pominięciem oddziaływania pairing), w których nakładane jest dodatkowe wiązanie na niezerowy moment pędu wzdłuż osi symetrii jądra  $Oz$  ( $I_z \neq 0\hbar$ ), zauważono, że toroidalne rozwiązania stabilizują się, to znaczy tworzą się lokalne minima na wykresie  $E^{tot}$  vs.  $Q_{20}$ , co jest warunkiem koniecznym na powstawanie metastabilnych toroidalnych wysokospinowych stanów izomerycznych (*toroidal high-spin isomeric states* - THSI states). Warto wspomnieć, że dla jąder z wyższymi liczbami atomowymi,  $Z \geq 132$ , istnieją toroidalne minima energii, nawet dla zerowej wartości momentu pędu [8, 12–15].

W rozprawie przedstawiono właściwości parzysto-parzystych superciężkich jąder atomowych otrzymane przy zastosowaniu samozgodnego modelu średniego pola z jądrowym funkcjonałem gęstości Skyrme’a SkM\* [16] (w kanale cząstka-dziura) oraz zależnym od gęstości oddziaływaniem *delta-pairing* (w kanale cząstka-cząstka). Porównano parzyste izotopy flerowu ( $Z = 114$ ) i  $Z = 120$ : ich stany podstawowe, bariery na rozszczepienie oraz niestabilność związaną z emisją cząstek  $\alpha$ . Pod tym kątem przebadano również własności parzystych sferycznych izotonów  $N = 184$ . Do szczegółowej analizy ewolucji kształtów jąder w łańcuchach izotopów  $Z = 114$  i  $120$ , w zależności od liczby neutronów  $N$ , wykorzystano algebraiczny model oddziałujących bozonów (*Interacting Boson Model* - IBM). Pozwoliło to zidentyfikować nuklidy odpowiadające punktom krytycznym w kwantowych przemianach fazowych jądrowych deformacji równowagi. Ponadto, dla badanych jąder (izotopów  $Z = 114$  i  $Z = 120$  oraz izotonów  $N = 184$ ) zbadano obszar dużych deformacji *oblate*, w którym obserwowana jest zmiana topologii powierzchni jądrowej ze *sferycznej* (jednospójnej) na *toroidalną*. Istotne jest, że w przypadku łańcucha parzystych izotopów  $Z = 120$  oraz izotonów  $N = 184$  wykazano możliwość występowania szeregu nowych metastabilnych stanów THSI. Przedstawiono także wyniki uzyskane dla neutronowo-deficytowych parzystych izotopów  $Z = 118, 120, 122$  i  $124$ , gdzie ostatnie teoretyczne przewidywania wskazują na występowanie w ich stanach podstawowych ekstremalnie dużych deformacji *oblate* (*superdeformed oblate*, SDO) [17].

# Abstract

Theoretical research on the properties of the heaviest nuclei, i.e., those with atomic number  $Z \geq 104$ , has been developing rapidly for several decades. The discovery of superheavy elements extended the periodic table to oganesson (the atomic number  $Z = 118$ ), the heaviest element known today [1]. However, the limit of the occurrence of superheavy nuclei is still unsolved.

As the number of protons increases, superheavy nuclei become unstable and therefore prone to spontaneous fission and alpha particle emission. However, there is a group of superheavy elements with increased stability, forming so-called *island of stability*. This increased nuclear stability is due to the existence of shell effects, associated with large energy gaps between nucleon shells. For fixed values of  $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$  and  $N = 2, 8, 20, 28, 82, 126$ , called magic numbers, protons and neutrons in the nucleus fill the closed shells. Microscopic-macroscopic models predict that after the double magic lead isotope  $^{208}\text{Pb}$  ( $Z = 82, N = 126$ ) the next pair of magic numbers is ( $Z = 114, N = 184$ ) [2–4], while microscopic self-consistent mean-field models assume closed spherical shells for  $N = 184$  and  $Z = 120, 124$  or  $126$  [5–7].

In nuclear stability studies, the change in the binding energy of a nucleus, as a function of its deformation, described by the expectation value of the quadrupole moment operator  $Q_{20} = \langle \hat{Q}_{20} \rangle$ , is analyzed. For this purpose, microscopic models use additional constraints imposed on  $Q_{20}$ , which describes ellipsoidal nuclear shapes: *prolate* type ( $Q_{20} > 0$ ), *spherical* nuclei ( $Q_{20} = 0$ ) and *oblate* type ( $Q_{20} < 0$ ). For the *prolate* deformations, with increasing quadrupole moment  $Q_{20}$ , the nucleus elongates, taking on a "cigar" shape. In this deformation region, there are two paths leading to fission: a symmetric one, where the nucleus splits into two equal fragments, and an asymmetric one, leading to the nucleus splitting into two fragments with different masses. In the case of *oblate* deformation, as the absolute value of  $|Q_{20}|$  increases, the nucleus assumes the shape of a flattened ellipsoid, passing into a bilaterally concave disk. At the critical value of  $Q_{20} \ll 0$ , a sudden change in the nucleus topology from spherical – simply connected (genus = 0) to toroidal (genus = 1) is observed [8–11].

Using the self-consistent Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) mean-field model, with

the nuclear Skyrme density functional, it was observed that for most superheavy atomic nuclei ( $Z = 106$  to  $122$ ) [10, 11], their total energy  $E^{tot}$  for toroidal shapes plotted as a function of  $Q_{20}$  does not form local minima. This means that the toroidal solutions are not stable and the nucleus "returns" to its ground state when the constraint is released for a given value of the quadrupole moment  $Q_{20}$ . However, using Skyrme-Hartree-Fock *cranking* calculations (neglecting the pairing interaction), in which an additional constraint is imposed on the non-zero angular momentum along the symmetry axis of the nucleus  $Oz$  ( $I_z \neq 0\hbar$ ), it is noted that the toroidal solutions stabilize, i.e., local minima in the  $E^{tot}$  vs.  $Q_{20}$  plot are formed, which is a necessary condition for the formation of metastable toroidal high-spin isomeric (THSI) states. It is worth mentioning that for nuclei with higher atomic numbers,  $Z \geq 132$ , there are toroidal energy minima, even for zero angular momentum [8, 12–15].

This thesis presents the properties of even-even superheavy atomic nuclei obtained using the self-consistent mean-field model with the nuclear Skyrme density functional SkM\* [16] (in the particle-hole channel) and a density-dependent *delta-pairing* interaction (in the particle-particle channel). Even isotopes of flerovium ( $Z = 114$ ) and  $Z = 120$  were compared: their ground states, barriers to fission, and instabilities associated with alpha particle emission. The properties of the even spherical  $N = 184$  isotones were also studied in this respect. An algebraic model of interacting bosons (IBM) was used to analyze in detail the evolution of nuclei shapes in the  $Z = 114$  and  $120$  isotope chains as a function of neutron number  $N$ . This allowed to identify nuclides corresponding to critical points in quantum phase transitions of nuclear equilibrium deformations. Furthermore, for the nuclei studied ( $Z = 114$  and  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones), the region of large oblate deformations was investigated, in which a change of the nuclear surface topology from spherical (simply connected) to toroidal is observed. Significantly, the possibility of a number of new metastable THSI states was demonstrated for a chain of even  $Z = 120$  isotopes and even  $N = 184$  isotones. Results obtained for neutron-deficient even isotopes  $Z = 118, 120, 122$  and  $124$  are also presented, where recent theoretical predictions indicate the occurrence of *superdeformed oblate* (SDO) shapes in their ground states [17].

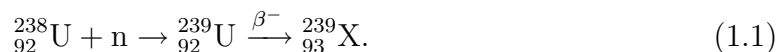
# Rozdział 1

## Wstęp

### 1.1 Superciężkie jądra atomowe

#### 1.1.1 Historia odkryć

Odkrycie neutronu przez Chadwicka w 1932 roku [18] dało początek nowym badaniom związanym z poszukiwaniami pierwiastków cięższych od występującego naturalnie  $^{238}\text{U}$  ( $T_{1/2} = 4.5 \cdot 10^9$  lat). Oczekowaną procedurą ich powstawania było wychwycenie neutronu przez jądro uranu, a następnie rozpad  $\beta^-$ :



Eksperymenty te niespodziewanie doprowadziły do odkrycia nowego zjawiska przez O. Hahna i F. Strassmanna - rozszczepienia jądra atomowego [19].

Doświadczenia z bombardowaniem neutronami atomów uranu ( $Z = 92$ ) przeprowadzone przez O. Hahna i F. Strassmanna w latach 1938-1939 i opublikowane w [19, 20] wykazały, że w reakcji tej powstawały lżejsze pierwiastki z obszaru w pobliżu baru ( $Z = 56$ ). Kilka miesięcy po opublikowaniu wyników O. Hahna i F. Strassmanna, w oparciu o model kroplowy jądra atomowego [21], pierwsza teoria wyjaśniająca mechanizm rozszczepienia jądra atomowego została opublikowana przez N. Bohra i J. A. Wheelera [22]. Mechanizm rozszczepienia opisali jako proces, podczas którego jądro atomowe może się zdeformować aż do punktu rozszczepienia w wyniku konkurencji pomiędzy napięciem powierzchniowym jądra, które preferuje zwarte kuliste kształty, a odpychaniem Coulomba pomiędzy protonami, które preferuje bardzo wydłużone kształty, w celu zmniejszenia energii odpychania. W swojej pracy autorzy omówili również możliwość rozszczepienia jądra ze stanu podstawowego, opisali prawdopodobieństwo spontanicznego rozpadu przez współczynnik przenikania przez ścianę potencjału oraz dla ciężkiego jądra (izotopu uranu) oszacowali czas życia ze względu na spontaniczne rozszczepienie w przybliżeniu na  $10^{22}$  lat ( $\approx 10^{30}$  s). Ponadto, wprowadzili pojęcia takie



jak jądro złożone, punkt siodłowy, rozszczepialność, zależność przekroju rozszczepienia od energii padających cząstek itp. Chociaż od 1939 roku dokonał się ogromny postęp w naszym rozumieniu rozszczepienia jądra atomowego, wiele z koncepcji wprowadzonych przez N. Bohra i J. A. Wheelera pozostaje aktualnych nawet dzisiaj. Spontaniczne rozszczepienie uranu ( $^{238}\text{U}$ ) zostało jednoznacznie udowodnione przez G. N. Flerova i K. A. Petrzhaka w 1940 roku [23], co zapoczątkowało intensywne badania tego procesu.

Począwszy od lat 50-tych, eksperymenty nad syntezą nowych pierwiastków i izotopów ujawniły wiele nieznanymi cech struktury jądrowej. Zasadniczą rolę w tym kontekście odegrał wkład A. Bohra, B. Mottelona i J. Rainwatera, a w szczególności rozwój modelu zunifikowanego [24, 25].

W 1974 r. Yu. Ts. Oganessian zaproponował nowy typ reakcji prowadzących do produkcji jąder złożonych o niskiej energii wzbudzenia, tzw. „zimną fuzję” ciężkich jonów, opartą na bombardowaniach „magicznych” tarcz składających się z jąder ołowiu  $^{208}\text{Pb}$  lub bizmutu  $^{209}\text{Bi}$  masywnymi pociskami o  $A > 50$  [26, 27]. Spowodowało to postęp w produkcji bogatych w protony izotopów superciężkich pierwiastków o  $Z > 106$  [28]. Przy użyciu ciężkich jonów:  $^{54}\text{Cr}$ ,  $^{58}\text{Fe}$ ,  $^{64}\text{Ni}$  i  $^{70}\text{Zn}$  zostało zsyntetyzowanych sześć pierwiastków o  $Z = 107-112$  [29]. Powstające w tych zderzeniach jądra złożone o energii wzbudzenia rzędu 12-15 MeV przechodzą do stanu podstawowego emitując pojedynczy neutron, powodując przy tym ich dużą przeżywalność [30]. Historia badań nad superciężkimi pierwiastkami w Instytucie Badań Ciężkich Jonów w Darmstadt, w Hesji, w Niemczech (GSI) opisana jest w artykule [31].

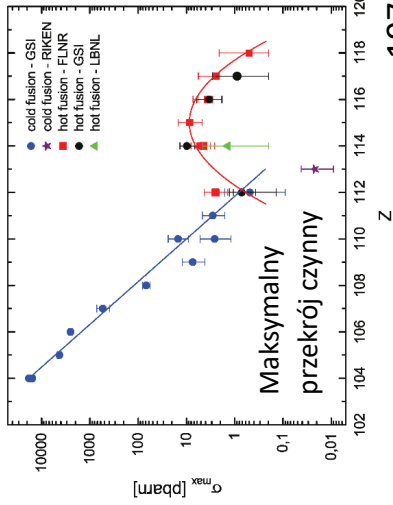
Ekspertymenty nad syntezą pierwiastka o kolejnej liczbie atomowej  $Z = 113$ , w reakcji  $^{209}\text{Bi} + ^{70}\text{Zn}$ , prowadzono przez dziewięć lat, przy użyciu gazowego separatora jonów GARIS, w Instytucie Naukowo-Badawczym RIKEN, w Japonii [32, 33]. Jednak w tym czasie udało się zaobserwować tylko trzy rozpady atomów tego pierwiastka. Wynik ten odpowiadał przekrojowi czynnemu około 0.02 pb [32-34]. Wynika stąd, że aby zsyntetyzować jądra cięższe niż  $Z = 112$ , należy zwiększyć liczbę atomową pocisku. Jednak spowoduje to wzrost sił Coulomba i silny spadek prawdopodobieństwa powstawania jąder złożonych z wyższym  $Z$ . Poza tym, ograniczeniem jest duży deficyt neutronów. Dlatego, jako materiał docelowy wybrano najbogatsze w neutrony izotopy pierwiastków transuranowych (o  $T_{1/2} \geq 1$  rok), produkowane w wysokoprzepływowym reaktorach jądrowych [30]. W nowej reakcji, zwanej „gorącą fuzją”, pociskiem jest rzadki izotop  $^{48}\text{Ca}$ , zaś jądrami tarczy  $^{244}\text{Pu}$ ,  $^{248}\text{Cm}$  i inne [35]. W wyniku syntezy  $^{244}\text{Pu}$  i  $^{48}\text{Ca}$  powstało jądro złożone o  $Z_{CN} = 114$  i  $N_{CN} = 178$ , które ma o osiem neutronów więcej niż izotop powstały w reakcji zimnej fuzji  $^{208}\text{Pb} + ^{76}\text{Ge}$ . Te osiem dodatkowych neutronów odgrywa kluczową rolę w syntezie pierwiastków superciężkich. Ponadto, widoczne jest, że w reakcji „gorącej fuzji”, dla której  $Z_1 \cdot Z_2 = 1880$ , siły Coulomba są o około 40% słabsze niż w reakcji „zimnej fuzji”, gdzie:  $Z_1 \cdot Z_2 = 2624$ . Prawdopodobieństwo



utworzenia jądra złożonego wzrasta więc o 5-6 rzędów wielkości, co jest niewątpliwą zaletą. Co więcej, izotop pierwiastka 112,  $^{285}\text{Cn}$ , obserwowany w łańcuchach rozpadów jąder superciężkich  $^{289}114$  i  $^{293}116$  produkowanych w kanałach parowania  $3n$  w reakcjach „gorących fuzji”:  $^{48}\text{Ca} + ^{244}\text{Pu}$  [36] i  $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$  [37], ujawnia długi czas połowicznego zaniku wynoszący około 30 s. Jest to okres o 5 rzędów wielkości dłuższy niż okres półtrwania bardziej ubogiego w neutrony izotopu  $^{277}\text{Cn}$  produkowanego w reakcji „zimnej fuzji” [28]. Należy zauważyć, że mniej więcej stałe wartości (rzędu kilku pikobarnów:  $1 \text{ pb} = 10^{-12} \text{ b}$ ;  $1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$ ) przewidywanych wcześniej przekrojów czynnych dla produkcji pierwiastków superciężkich o  $Z = 112 - 118$  w reakcjach syntezy jądrowej indukowanej  $^{48}\text{Ca}$  [38, 39] (spowodowanych stopniowym wzrostem barier rozszczepienia jąder złożonych powstających w tych reakcjach) zostały w pełni potwierdzone przez eksperymenty przeprowadzone w Dubnej, a następnie w Berkeley [40] oraz częściowo potwierdzone w laboratoriach GSI - Instytucie Badań Ciężkich Jonów (GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung) w Darmstadt, Niemcy [41–45], Laboratorium Berkeley (Lawrence Berkeley National Laboratory) na terenie Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley, Stany Zjednoczone [46] i Instytucie Badań Fizycznych i Chemicznych (Riken Rikagaku Kenkyūjo - RIKEN) w Wakō w pobliżu Tokio [47]. Dzisiaj najcięższym zidentyfikowanym superciężkim pierwiastkiem jest oganeson  $^{294}\text{Og}$  o  $Z = 118$ , otrzymany po raz pierwszy przez zespół rosyjskich i amerykańskich naukowców w 2002 roku (którego istnienie ostatecznie potwierdzono w 2006 roku) w Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych (Joint Institute for Nuclear Research - JINR) w Dubnej, Rosja [1, 48].

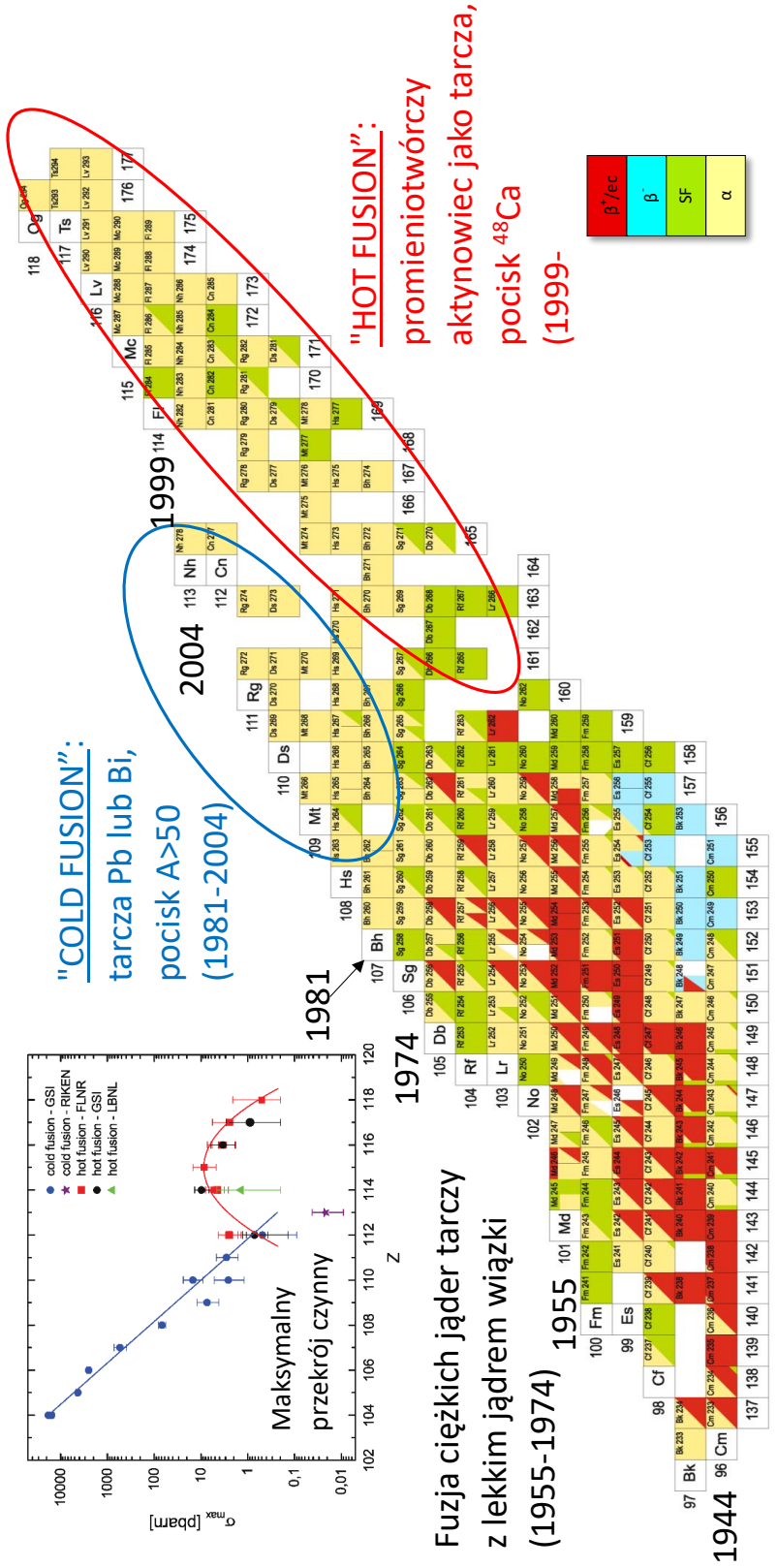
Rys. 1.1 przedstawia najcięższe jądra znane eksperymentalnie, tzn z liczbą protonów  $Z = 96-118$  i liczbą neutronów  $N = 137-177$ . Każdy nuklid oznaczony jest kolorem, odnoszącym się do sposobu jego rozpadu. Żółty kolor charakteryzuje jądra najbardziej podatne na rozpad  $\alpha$ , zielony na spontaniczne rozszczepienie, czerwony na rozpad  $\beta^+$  lub wychwyt elektronu, zaś niebieski na rozpad  $\beta^-$ . Niebieska i czerwona krzywa zakreślająca najcięższe znane eksperymentalnie jądra odnosi się odpowiednio do tych, uzyskanych w reakcji „zimnej” oraz „gorącej” fuzji. Ponadto, w lewym górnym rogu, widoczne są przekroje czynne pierwiastków uzyskanych w omawianych dwóch reakcjach syntezy. W Tab. 1.1 przedstawione są rekomendowane przez Międzynarodową Unię Chemii Czystej i Stosowanej (*International Union of Pure and Applied Chemistry*, IUPAC) dane dotyczące otrzymanych eksperymentalnie pierwiastków z  $Z \geq 104$  [51].

# Historia odkryć ciężkich i superciężkich jąder atomowych



Fuzja ciężkich jąder tarczy z lekkim jądrem wiązki

(1955-1974)



**"HOT FUSION":**  
promieniotwórczy  
aktywnowiec jako tarcza,  
pocisk <sup>48</sup>Ca  
(1999-)

**"COLD FUSION":**  
tarcza Pb lub Bi,  
pocisk A>50  
(1981-2004)

**Rysunek 1.1:** Najcięższe jądra znane eksperymentalnie ( $Z = 96-118$  i  $N = 137-177$ ). Kolory odnoszą się do sposobu rozpadu jąder: żółty - rozpad  $\alpha$ , zielony - spontaniczne rozszczepienie, czerwony - rozpad  $\beta^+$  lub wychwył elektronu, niebieski - rozpad  $\beta^-$ . Podział na obszary różnej wielkości oznacza względne prawdopodobieństwa rozpadu. Wykorzystano rysunki z pracy [49].

Tabela 1.1: Lista znanych transaktywności.

Liczba atomowa	Nazwa pierwiastka	Symbol pierwiastka	Rok odkrycia	Nazwa angielska	Najbardziej stabilny izotop	Czas życia	Rekomendacja IUPAC [51]
104	rutherford	Rf	1964/1968	rutherfordium	<sup>267</sup> Rf	1.3 h (sf)	Pure Appl. Chem. <b>69</b> , 2471 (1997)
105	dubn	Db	1968/1970	dubnium	<sup>268</sup> Db	27 h (sf)	Pure Appl. Chem. <b>69</b> , 2471 (1997)
106	seaborg	Sg	1974	seaborgium	<sup>269</sup> Sg	3.1 m ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>69</b> , 2471 (1997)
107	boh	Bh	(1976)/1981	bohrium	<sup>270</sup> Bh	61 s ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>69</b> , 2471 (1997)
108	has	Hs	1984	hassium	<sup>269</sup> Hs	9.7 s ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>69</b> , 2471 (1997)
109	meitner	Mt	1982	meitnerium	<sup>278</sup> Mt	4.4 s ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>69</b> , 2471 (1997)
110	darmsztadt	Ds	1994	darmstadtium	<sup>281</sup> Ds	11.1 s ( $\alpha$ /sf)	Pure Appl. Chem. <b>75</b> , 1613 (2003)
111	roentgen	Rg	1994	roentgenium	<sup>282</sup> Rg	2.1 m ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>76</b> , 2101 (2004)
112	kopernik	Cn	1996	copernicium	<sup>285</sup> Cn	29 s ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>82</b> , 753 (2010)
113	nihon	Nh	2004/2012	nihonium	<sup>286</sup> Nh	7.9 s ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>88</b> , 1225 (2016)
114	flerow	Fl	1999	flerovium	<sup>289</sup> Fl	1.9 s ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>84</b> , 1669 (2012)
115	moskow	Mc	2003	moscovium	<sup>290</sup> Mc	0.75 s ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>88</b> , 1225 (2016)
116	liwermor	Lv	2000	livermorium	<sup>293</sup> Lv	57 ms ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>84</b> , 1669 (2012)
117	tenes	Ts	2010	tennessine	<sup>294</sup> Ts	51 ms ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>88</b> , 1225 (2016)
118	oganeson	Og	2002/2006	oganeson	<sup>294</sup> Og	0.69 ms ( $\alpha$ )	Pure Appl. Chem. <b>88</b> , 1225 (2016)

W celu otrzymania pierwiastków superciężkich o  $Z > 118$ , w reakcjach syntezy jądrowej należy użyć pocisków cięższych niż  $^{48}\text{Ca}$  [52]. Z [53] wynika, że najbardziej obiecujący dla przyszłej syntezy jąder superciężkich jest  $^{50}\text{Ti}$ . Jednak zastosowanie wiązki tytanowej zamiast  $^{48}\text{Ca}$  zmniejsza wydajność jądrową (średnio 20-krotnie), głównie z powodu mniejszego prawdopodobieństwa fuzji [52]. Oszacowany przekrój czynny dla superciężkich pierwiastków 119 i 120 powstających w reakcjach fuzji jąder  $^{50}\text{Ti}$  jest rzędu 0,05 pb [53]. Jednak wydajność produkcji jąder superciężkich zależy nie tylko od przekroju czynnego, ale także od natężenia wiązki i grubości tarczy. W związku z tym należy również rozważyć inne kombinacje pocisk-tarcza. Na przykład, do powstania tego samego jądra  $^{302}120$ , można użyć trzech reakcji syntezy jądrowej  $^{54}\text{Cr} + ^{248}\text{Cm}$ ,  $^{58}\text{Fe} + ^{244}\text{Pu}$  i  $^{64}\text{Ni} + ^{238}\text{U}$ . Jednak przewidywane przekroje czynne dla bardziej symetrycznych reakcji  $^{58}\text{Fe} + ^{244}\text{Pu}$  oraz  $^{64}\text{Ni} + ^{238}\text{U}$  są niższe niż dla mniej symetrycznej kombinacji  $^{54}\text{Cr} + ^{248}\text{Cm}$ , co jest porównywalne z reakcjami syntezy indukowanej Ti, gdzie przekroje czynne reakcji  $^{50}\text{Ti} + ^{249}\text{Bk}$  i  $^{50}\text{Ti} + ^{249}\text{Cf}$  są większe niż w przypadku syntezy  $^{54}\text{Cr} + ^{248}\text{Cm}$  [52]. Wszystkie te reakcje należy uznać za dość obiecujące, a ostateczny wybór pomiędzy nimi zależy nie tyle od różnicy w przekrojach czynnych, co od innych warunków eksperymentalnych, takich jak dostępność odpowiednich tarcz, intensywność wiązki.

### 1.1.2 Modele teoretyczne

W 1965 roku W. D. Myers i W. J. Świątecki opracowali makroskopowo-mikroskopowy model obliczania energii potencjalnej jądra wykorzystując „model kroplowy, zmodyfikowany poprawką powłokową” [54]. Przy pomocy półempirycznego modelu uwzględniającego deformację jądra byli w stanie wyznaczyć bariery rozszczepieniowe  $B_f$ .

Wprowadzona w 1967 roku przez V. M. Strutinskiego, w oparciu o zdeformowany potencjał jednocząstkowy S. G. Nilssona [55, 56], metoda wyznaczenia poprawki powłokowej [57, 58] nadała ostateczny kształt modelowi makroskopowo-mikroskopowemu. Zaowocowało to szeregiem nowych prac [59–61] (wymieniając przykłady najwcześniejszych).

Jądrowa energia wiązania przypadająca na jeden nukleon  $B(Z, A)/A$  osiąga lokalne maksima w przypadku jąder podwójnie „magicznych” z liczbą protonów 2, 8, 20, 28, 50 lub 82 oraz liczbą neutronów 2, 8, 20, 28, 50, 82 lub 126. Najcięższym stabilnym jądrem podwójnie magicznym jest izotop ołowiu  $^{208}\text{Pb}$ . Jądrowy model powłokowy wiąże protonowe i neutronowe liczby magiczne z całkowicie zapełnionymi powłokami jednonukleonowymi [62, 63] w analogii do powłok elektronowych w atomach. Pierwsze teoretyczne przewidywania, z wykorzystaniem modelu makroskopowo-mikroskopowego, kolejnego jądra podwójnie magicznego poza  $^{208}\text{Pb}$  prowadziły do jądra z liczbą protonów  $Z = 114$

i liczbą neutronów  $N = 184$  [3, 64]. Oczekiwane przy tym czasy połowicznego rozpadu ze względu na spontaniczne rozszczepienie wynosiły  $10^{13}$  lat [65]. Otrzymane wyniki doprowadziły do wysunięcia hipotezy mówiącej, że izotopy superciężkich pierwiastków chemicznych z liczbą protonów i liczbą neutronów zbliżoną do  $Z = 114$  i  $N = 184$  tworzą wyspę stabilności. Ponadto, podczas rozwoju makroskopowo-mikroskopowej teorii jądrowej, przewidywano istnienie innych bardzo ciężkich jąder, znajdujących się daleko od obszaru znanych już nuklidów. W ciągu ostatnich 50 lat przewidywania te były potwierdzane z coraz większą dokładnością przez dalsze badania teoretyczne, wśród których znajdują się również modele mikroskopowe, takie jak samozgodne modele średniego pola.

Samozgodne, wielociałowe funkcje falowe składają się z wyznaczników Slatera orbitali, które są obliczane jako stany własne jednociąłowego potencjału średniego pola. Jeżeli potencjał średniego pola określony jest przez wartość oczekiwaną hamiltonianu w wyznaczniku Slatera, to otrzymuje się przybliżenie Hartree’ego-Focka (HF). Jeśli zaś uwzględnimy pole wynikające z oddziaływania typu pairing, otrzymywane jest przybliżenie Hartree’ego-Focka-Bogolubowa (HFB). Podobnie, jak w teorii funkcjonału gęstości (*Density Functional Theory*, DFT) fizyki materii skondensowanej i atomu, hamiltonian przestrzeni Focka zastępowany jest funkcjonałem gęstości energii (*Energy Density Functional*, EDF) zdefiniowanym przez gęstości jednociąłowe lub macierze gęstości. W literaturze dotyczącej fizyki jądrowej, pojęcia HFB i HF używane są zamiennie do rozróżnienia DFT z uwzględnieniem (dla HFB) i bez uwzględnienia oddziaływania pairing (dla HF).

Rozszerzeniem DFT jest teoria funkcjonału gęstości zależna od czasu (*Time-Dependent Density Functional Theory*, TDDFT). Zależna od czasu wersja HF (*Time-Dependent Hartree-Fock*, TDHF) jest szeroko stosowana do modelowania zderzeń ciężkich jonów. Jednak nie można jej zastosować do przybliżenia HFB, gdyż ze względu na oddziaływanie pairing wymaga większych mocy obliczeniowych.

W mikroskopowym podejściu rozszczepienia, efektywne oddziaływanie między nukleonowe lub EDF jest jedynym składnikiem teorii zawierającym parametry, które można regulować. Na przestrzeni lat zaproponowano kilka rodzajów EDF, z których wiele zostało zastosowanych również do rozszczepienia. Funkcjonały te mogą być nierelatywistyczne, jak również relatywistyczne (kowariantne), a wybór między nimi prowadzi do różnych równań ruchu dla nukleonów. Mogą być to funkcjonały lokalnych lub nielokalnych gęstości, mogą być zdefiniowane jako wartość oczekiwana odpowiadającego im generującego operatora wielu ciał, ponadto sprzężenia (parametry) mogą być stałe lub zawierać zależność od ośrodka (gęstości). Dwa najczęściej używane nierelatywistyczne EDF to:

1. skończonego zasięgu EDF Gogny’ego, który jest skonstruowany z uwzględnieniem

wartości oczekiwanej HFB oddziaływania zależnego od gęstości,

2. EDF Skyrme'a, który zawiera wyrażenia w oddziaływaniu zerowego zasięgu zależne od pędu i gęstości.

Użycie różnych reprezentacji decyduje o możliwości zastosowania danego kodu. Na przykład, wszystkie schematy numeryczne mogą skutecznie radzić sobie z oddziaływaniami efektywnymi o zerowym zasięgu (typu Skyrme'a). Jednakże, poza implementacjami w symetrii sferycznej, schematy dyskretyzacji oparte na siatce nie były do tej pory w stanie wykorzystać sił efektywnych o skończonym zasięgu. Z drugiej strony, metody bazowo-rozbudowane mają długą historię obliczeń z oddziaływaniem Gogny'ego, Coulomba oraz siłami Yukawy. Tab. 1.2 zawiera zestawienie dostępnych kodów modelujących zdeformowane jądra, ich właściwości kolektywne i dynamikę rozszczepienia.

**Tabela 1.2:** Kody komputerowe rozwiązujące jądrowe zagadnienie HFB i TDHFB [66].

Reprezentacja współrzędnych przestrzennych na sieci (space lattice)		
SkyAx	2D osiowy	statyczny CHF + BCS
Sky3D	3D kartezjański	CHF + BCS/TDHF
EV8	3D kartezjański	statyczny CHF + BCS
HFB-AX	2D osiowy, B-splines	statyczny CHF B
MADNESS-HFB	3D wavelets	statyczny HFB
MOCCa	3D kartezjański	statyczny CHF B
LISE	3D kartezjański	HFB/TDHF B
TDHF3D	3D kartezjański	TDHF/TDRPA/TDHF + BCS
3DTDHF	3D kartezjański	TDHF/TDRPA
VU-TDHF3D	3D kartezjański	TDHF (density constraint)
Rozwinięcie w bazie HO		
HFODD	3D HO	statyczny CHF B
HFBTHO	2D osiowy HO	statyczny CHF B
HFBaxial	2D osiowy HO	statyczny CHF B (Gogny EDF)
HFBTri	3D HO	statyczny CHF B (Gogny EDF)
HFB3	2D HO $\times$ 1D mesh	(TD)HFB (Gogny EDF)
DIRHB	3D HO	statyczny C RHB
MDC-RMF	2D osiowy HO	statyczny C RHB

W obliczeniach w modelu Hartree'ego-Focka-Bogolubowa z oddziaływaniami Skyrme'a z zestawami parametrów SKI1 i SKI4 uzyskuje się najwyraźniejsze efekty powłokowe przy  $Z = 120$  i  $N = 184$  [67, 68], natomiast w obliczeniach Hartree'ego-Focka-Bogolubowa z siłami Gogny'ego skończonego zasięgu, jako możliwe zamknięcia powłok



protonowych i neutronowych przewiduje się  $Z = 120, 126$  i  $N = 172, 184$  [67–71]. W relatywistycznych obliczeniach średniej wiązki (*Relativistic Mean Field*, RMF) K. Rutz [72] przewidział  $Z = 120$  i  $N = 172$  jako kolejne magiczne powłoki w sferycznej teorii RMF, podczas gdy S. K. Patra, R. K. Gupta i W. Greiner [73, 74] przewidzieli  $Z = 120$  i  $N = 184$  w osiowo zdeformowanej teorii RMF jako następne możliwe magiczne liczby dla superciężkich pierwiastków [75]. Niedawno S. Tapaa i inni [76] zastosowali nową teorię pola efektywnego do analizy łańcuchów izotopowych i izotonowych superciężkich jąder i poszukiwali kolejnych zamkniętych powłok. Jako możliwe sferyczne podwójnie magiczne superciężkie jądra przewidzieli  $Z = 120$  i  $N = 172$  oraz  $Z = 120$  i  $N = 258$ . Wspomniane powyżej makroskopowo-mikroskopowe obliczenia energii potencjalnej dla superciężkich jąder przewidywały bardzo silny efekt sferycznych powłok jądrowych w obszarze mas bliskich  $A \sim 300$ , a mianowicie magiczną liczbę protonową  $Z = 114$  (oraz magiczną liczbę neutronową  $N = 184$ ) [3, 54, 59, 60, 64, 77–82].

Jak widać, z wyjątkiem  $N = 184$ , dla cięższych jąder nie ma ogólnej zgody co do możliwych liczb magicznych pomiędzy różnymi modelami. Zmierzone czasy życia, rosnące wraz z  $N$  dla najcięższych izotopów  $Z = 112$ ,  $Z = 114$  i  $Z = 116$  oraz wzdłuż sekwencji izotopowych  $Z = 111$ ,  $Z = 113$ ,  $Z = 115$  i  $Z = 117$ , są traktowane jako silna wskazówka, że magiczna liczba neutronów musi być rzeczywiście bliska 184.

## 1.2 Metodyka oraz plan pracy

Metodą umożliwiającą opis właściwości jąder atomowych jest badanie zmiany energii wiązania jądra w zależności od jego deformacji. W samozgodnych modelach mikroskopowych badania takie prowadzi się najczęściej poprzez wprowadzenie dodatkowych warunków (więzów) na wartości masowych momentów multipolowych  $Q_{\lambda\mu}$ . Moment kwadrupolowy  $Q_{20}$ , opisuje elipsoidalne odstępstwa od kształtu sferycznego ( $Q_{20} = 0$  b). W przypadku  $Q_{20} > 0$  b istnieją kształty odpowiadające elipsoidzie wydłużonej (*prolate*), a dla  $Q_{20} < 0$  b elipsoidzie spłaszczonej (*oblate*). Zwiększając wartość momentu kwadrupolowego dla  $Q_{20} > 0$  b elipsoida wydłuża się przybierając kształt „cygara”. W obszarze deformacji *prolate*, w przypadku ciężkich i superciężkich jąder, zwykle za pierwszą barierą potencjału (*inner barrier*) występują dwie ścieżki prowadzące do jądrowego rozszczepienia: ścieżka symetryczna, prowadząca do rozszczepienia jądra na dwa jednakowe fragmenty oraz ścieżka asymetryczna, wzdłuż której jądro rozszczepia się na dwa fragmenty o różnych masach. W przypadku deformacji *oblate* ( $Q_{20} < 0$  b), zwiększając wartość bezwzględna momentu kwadrupolowego obserwuje się stopniowe spłaszczanie elipsoidy opisującej kształt jądra, aż do przyjęcia przez jądro kształtu dwustronnie wklęsłego dysku. Charakterystyczną cechą jądrowych deformacji *oblate* są rozkłady materii jądrowej, dla których nieparzyste masowe mo-

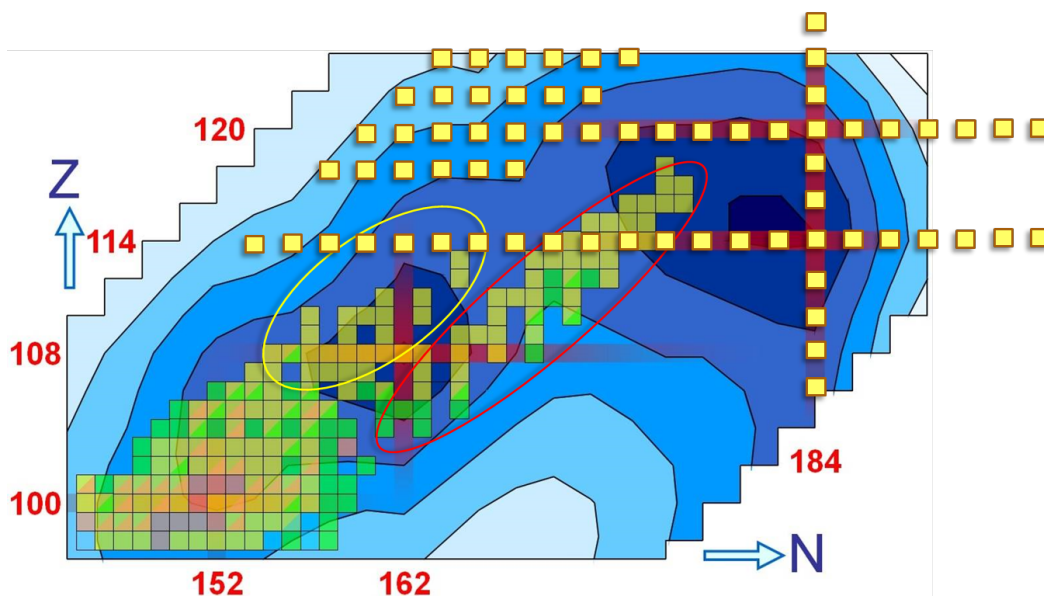
menty multipolowe pozostają równe zero ( $Q_{\lambda\mu} = 0, \lambda = 2n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$ ). Inną szczególną własnością tego typu deformacji jest pojawiająca się zmiana topologii układu jądrowego. Dla krytycznej wartości ( $Q_{20}^{cr} < 0$ ) obserwuje się przejście od kształtu posiadającego genus zero (dwustronnie wklęsły dysk), do kształtu z genus równym jeden (torus) [8–11]. Przejściu temu towarzyszy zmniejszanie energii odpychania kulombowskiego protonów i tym samym zwiększenie energii wiązania układu.

Przy użyciu samozgodnego modelu średniego pola Hartree’ego-Focka-Bogolubowa (HFB), z jądrowym funkcjonałem gęstości Skyrme’a stwierdzono, że dla większości superciężkich jąder atomowych ( $Z = 106$  do  $122$ ) [10, 11], ich energia całkowita ( $E^{tot}$ ) dla kształtów toroidalnych wykreślona w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ , nie tworzy lokalnych minimów. Oznacza to, że rozwiązania toroidalne nie są stabilne i po uwolnieniu ograniczenia na daną wartość  $Q_{20}$  jądro „powraca” do swojego sferycznego stanu podstawowego. Natomiast, stosując metodę wymuszonego obrotu (*cranking*) w modelu Skyrme’a-HF (z pominięciem oddziaływania pairing), w którym nakładane jest dodatkowe wiązanie na niezerowy moment pędu wzdłuż osi symetrii jądra  $Oz$  ( $I_z \neq 0\hbar$ ) stwierdzono, że toroidalne rozwiązania stabilizują się, a mianowicie powstają lokalne minima na wykresie  $E^{tot}$  vs.  $Q_{20}$ , co jest warunkiem koniecznym na powstawanie metastabilnych toroidalnych wysokospinowych stanów izomerycznych (*toroidal high-spin isomeric states*, THSI states).

W zastosowanym modelu wykorzystane zostało przybliżenie HFB, z więzami nakładanymi na jądrowe momenty multipolowe ( $Q_{\lambda\mu}$ ), które pozwalają śledzić energię całkowitą ( $E^{tot}$ ) w zależności od deformacji jądra. Wymuszone wartości  $Q_{20}$ , umożliwiające opis jądrowych kształtów elipsoidalnych: typu *prolate* oraz *oblate*, stosowane są do ustalenia obszaru deformacji ze *sferycznymi* oraz *toroidalnymi* rozkładami gęstości. Otrzymane rozkłady *toroidalne* stanowią konfiguracje wyjściowe dla dalszych obliczeń typu *cranking* Skyrme’a-HF (pomijającego oddziaływanie pairing), w których nakładane jest kolejne wiązanie na moment pędu  $I = I_z$ , wzdłuż osi symetrii  $Oz$ . W przypadku, gdy jądra uzyskają niezerowy moment pędu wzdłuż  $Oz$  ( $I_z \neq 0\hbar$ ), poszukiwane są minima energii w funkcji deformacji  $Q_{20}$ , a następnie zwalniane wiązania nałożone na  $Q_{20}$ , w celu wykonania w tym punkcie obliczeń *cranking* Skyrme’a-HF. W ten sposób poszukiwane są THSIs. W zastosowanej metodzie rozwiązywany jest problem tzw. optymalizacji z ograniczeniami równościowymi (*equality-constrained problem*, ECP), przy użyciu metody rozszerzonych mnożników Lagrange’a (*augmented Lagrangian method*, ALM) [83], przy zastosowaniu programu numerycznego HFODD [84–93].

W niniejszej pracy przedstawione zostaną wyniki badań własności superciężkich parzystych izotopów  $Z = 114$  z liczbą neutronów  $N = 154-196$ , izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160-196$  oraz izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ . Ponadto, przedstawione będą wyniki dotyczące neutronowo-deficytowych izotopów  $Z = 118, 120, 122$





**Rysunek 1.2:** Parzyste izotopy  $Z = 114$ ,  $Z = 120$ , parzyste izotony  $N = 184$  oraz neutronowo-deficytowe izotopy  $Z = 118-124$  analizowane w pracy. Wykorzystano rysunek z pracy [94] przedstawiający znane eksperymentalnie jądra  $Z \geq 98$ .

oraz 124 z liczbą neutronów  $N = 158-174$ . Przedstawione zostaną również toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne znalezione dla łańcucha izotopów  $Z = 120$  oraz izotonów  $N = 184$ . Wszystkie analizowane jądra zostały zaznaczone na Rys. 1.2.



# Rozdział 2

## Model HFB z funkcjonałem gęstości Skyrme'a

### 2.1 Efektywne oddziaływanie Skyrme'a

Standardowa forma dwuciałowego efektywnego oddziaływania jądrowego zerowego zasięgu, wprowadzona przez T. H. R. Skyrme'a [95]

$$\begin{aligned}\hat{V}_{Sk}(\mathbf{r}_{12}) = & t_0(1 + x_0\hat{P}_\sigma)\delta(\mathbf{r}_{12}) \\ & + \frac{1}{2}t_1(1 + x_1\hat{P}_\sigma)(\hat{\mathbf{k}}'^2\delta(\mathbf{r}_{12}) + \delta(\mathbf{r}_{12})\hat{\mathbf{k}}^2) \\ & + t_2(1 + x_2\hat{P}_\sigma)\hat{\mathbf{k}}' \cdot \delta(\mathbf{r}_{12})\hat{\mathbf{k}} \\ & + \frac{1}{6}t_3(1 + x_3\hat{P}_\sigma)\delta(\mathbf{r}_{12})\rho^\alpha\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right) \quad (\text{część centralna}) \\ & + iW_0(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2) \cdot (\hat{\mathbf{k}}' \times \delta(\mathbf{r}_{12})\hat{\mathbf{k}}), \quad (\text{część spin-orbita})\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie

- $\hat{P}_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)$  jest operatorem wymiany spinów w stanie dwunukleonowym  $\phi(1, 2)$ ,
- $\mathbf{r}_{12} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,
- $\hat{\mathbf{k}} = -\frac{i}{2}(\nabla_1 - \nabla_2)$  to odpowiadający względnemu pędowi operator działający w prawo, na ket  $|\phi(1, 2)\rangle$ ,
- $\hat{\mathbf{k}}' = \frac{i}{2}(\nabla_1' - \nabla_2')$  to identyczny operator działający w lewo, na bra  $\langle\phi(1, 2)|$ .

Ponadto w (2.1) występuje dziesięć parametrów:  $\{t_i, x_i\}$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) oraz  $\alpha$ ,  $W_0$  [96], które dopasowuje się do danych dotyczących struktury jądrowej. Człon zawierający parametr  $t_0$  reprezentuje potencjał centralny o zerowym zasięgu. Wyrażenia z  $t_1$  i  $t_2$  są nielokalne, ponieważ zależą od gradientu gęstości. Wyrażenie z  $t_3$  reprezentuje oddziaływanie zależne od gęstości. Ma szczególne znaczenie, ponieważ zapewnia

odpowiednie właściwości wysycenia oddziaływań jądrowych, umożliwiające opis skończonych jąder za pomocą modelu Skyrme'a-Hartree'ego-Fock'a. Wyrażenie zawierające  $W_0$  reprezentuje część spin-orbita oddziaływania nukleon-nukleon. Tabela 2.1 przedstawia wartości parametrów używanych w parametryzacji SkM\* [16] oraz SLy4 [97].

**Tabela 2.1:** Porównanie parametryzacji SkM\* oraz SLy4 oddziaływania Skyrme'a

	SkM*	SLy4	Jednostki
$t_0$	-2645.0	-2488.913	MeV fm <sup>3</sup>
$t_1$	410.0	486.818	MeV fm <sup>5</sup>
$t_2$	-135.0	-546.395	MeV fm <sup>5</sup>
$t_3$	15595.0	13777.0	MeV fm <sup>3+<math>\alpha</math></sup>
$x_0$	0.09	0.834	-
$x_1$	0.0	-0.344	-
$x_2$	0.0	-1.000	-
$x_3$	0.0	1.354	-
$1/\alpha$	6.0	6.0	-
$W_0$	120.0	123.0	MeV fm <sup>5</sup>

Jednak najogólniejszą formę dwuciałowego oddziaływania zerowego zasięgu w przybliżeniu niskich względnych pędów stanowi efektywne oddziaływanie  $\hat{V}_{Sk} + \hat{V}_T$  [95, 98], gdzie

$$\begin{aligned} \hat{V}_T(\mathbf{r}_{12}) = & \frac{1}{2}t_e [(3(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}')(\hat{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}}') - (\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2)\hat{\mathbf{k}}'^2)\delta(\mathbf{r}_{12}) \\ & + \delta(\mathbf{r}_{12})(3(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}})(\hat{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}}) - (\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2)\hat{\mathbf{k}}^2)] \\ & + t_o(3(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}')\delta(\mathbf{r}_{12})(\hat{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}}) - (\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2)\hat{\mathbf{k}}' \cdot \delta(\mathbf{r}_{12})\hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie potencjał tensorowy dla stanów parzystych (S, D) opisywany jest przez człon  $t_e$ , zaś do stanów nieparzystych (P, F) odnosi się człon  $t_o$ .

W metodzie średniego pola wartość oczekiwana operatora energii układu jądrowego wyrażona jest funkcjonalem zawierającym jednocząstkowe macierze gęstości  $\rho_q$  w kanale cząstka-dziura ( $p-h$ ), zaś kanał cząstka-cząstka ( $p-p$ ) zależny od gęstości oddziaływania *delta-pairing*, zawiera jednocząstkowe macierze gęstości  $\tilde{\rho}_q$  [99]

$$\rho_q(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = \langle \hat{a}_{\mathbf{r}'\sigma'q}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}\sigma q} \rangle, \quad (2.3)$$

$$\tilde{\rho}_q(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = -2\sigma' \langle \hat{a}_{\mathbf{r}'-\sigma'q} \hat{a}_{\mathbf{r}\sigma q} \rangle, \quad (2.4)$$

gdzie  $\hat{a}_{\mathbf{r}\sigma q}^\dagger$  oraz  $\hat{a}_{\mathbf{r}\sigma q}$  oznaczają operatory kreacji i anihilacji nukleonów ze spinem  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$  oraz izospinem  $q = \{n, p\}$ .

Korzystając z definicji (2.3) i (2.4), gęstości nielokalne (w kanale  $p$ - $h$  i  $p$ - $p$ ) mogą być przedstawione jako [100]

$$\rho_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\sigma} \rho_q(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{s}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\sigma\sigma'} \rho_q(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma) \langle \sigma' | \hat{\boldsymbol{\sigma}} | \sigma \rangle, \quad (2.6)$$

$$\tilde{\rho}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\sigma} \tilde{\rho}_q(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma). \quad (2.7)$$

W przybliżeniu lokalnych gęstości (*Local Density Approximation*, LDA) ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ) funkcjonal gęstości energii zależy od siedmiu lokalnych gęstości i prądów [101]. W kanale  $p$ - $h$  są to:

- gęstość cząsteczkowa (skalarna)

$$\rho_q(\mathbf{r}) = \rho_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8a)$$

- gęstość energii kinetycznej (skalarna)

$$\tau_q(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla' \rho_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8b)$$

- gęstość spin-prąd (pseudotensorowa)

$$\mathbb{J}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2i} (\nabla - \nabla') \otimes \mathbf{s}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8c)$$

- gęstość prądu (skalarna)

$$\mathbf{j}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2i} (\nabla - \nabla') \rho_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8d)$$

- gęstość spinowa (pseudowektorowa)

$$\mathbf{s}_q(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8e)$$

- gęstość spinowo-kinetyczna (pseudowektorowa)

$$\mathbf{T}_q(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla' \mathbf{s}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8f)$$

- gęstość tensorowa-kinetyczna (pseudowektorowa)

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \nabla' + \nabla' \otimes \nabla) \cdot \mathbf{s}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8g)$$

oraz w kanale  $p$ - $p$ , gęstość par

$$\tilde{\rho}_q(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \quad (2.8h)$$

gdzie  $\otimes$  to iloczyn tensorowy wektorów.

Gęstości protonowe i neutronowe mogą być rozprężone na siedem lokalnych jednocząstkowych gęstości izoskalarnych ( $t = 0$ ), zdefiniowanych jako gęstości całkowite (np.  $q_0 = q_n + q_p$ ) oraz gęstości izowektorowych ( $t = 1$ ), określonych jako różnica gęstości neutronowych i protonowych (np.  $q_0 = q_n - q_p$ ) [96]. Wszystkie lokalne gęstości są rzeczywiste. Ponadto, gęstości  $\rho_q(\mathbf{r})$ ,  $\tau_q(\mathbf{r})$ ,  $\mathbb{J}_q(\mathbf{r})$  oraz  $\tilde{\rho}_q(\mathbf{r})$  to gęstości parzyste ze względu na operację odwrócenia czasu, natomiast  $\mathbf{j}_q(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{s}_q(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{T}_q(\mathbf{r})$  i  $\mathbf{F}_q(\mathbf{r})$  są nieparzyste na operację odwrócenia czasu.

Pseudotensorowa gęstość spin-prąd  $\mathbb{J}_q$  może być rozłożona na:

- ślad (pseudoskalar)

$$\mathcal{J}_q(\mathbf{r}) = \sum_{i=x,y,z} \mathbb{J}_q^{ii}(\mathbf{r}), \quad (2.9a)$$

- część antysymetryczną (wektor)

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{r}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \mathbb{J}_q^{jk} \hat{\mathbf{e}}^i, \quad (2.9b)$$

- część symetryczną (bezśladowy pseudotensor)

$$\mathfrak{J}_q^{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbb{J}_q^{ij}(\mathbf{r}) - \mathbb{J}_q^{ji}(\mathbf{r})] - \frac{1}{3} \mathcal{J}_q(\mathbf{r}) \delta_{ij}, \quad (2.9c)$$

gdzie  $\delta_{ij}$  oznacza macierz jednostkową.

## 2.2 Funkcjonał gęstości Skyrme'a

Funkcjonał gęstości Skyrme'a

$$E_{Sk} = \sum_{t=0,1} \int d^3\mathbf{r} (\mathcal{H}_t^{even}(\mathbf{r}) + \mathcal{H}_t^{odd}(\mathbf{r})), \quad (2.10)$$

składa się z dwóch gęstości, będących funkcjami lokalnych gęstości oraz ich pochodnych, wyrażonych jako

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t^{even}(\mathbf{r}) = & C_t^\rho [\rho_0] \rho_t^2 + C_t^{\Delta\rho} \rho_t \Delta\rho_t + C_t^\tau \rho_t \tau_t + C_t^{J0} \mathcal{J}_t^2 + C_t^{J1} \mathbf{J}_t^2 + C_t^{J2} \mathfrak{J}_t^2 \\ & + C_t^{\nabla J} \rho_t \nabla \cdot \mathbf{J}_t, \end{aligned} \quad (\text{człon spin-orbita}) \quad (2.11)$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_t^{odd}(\mathbf{r}) &= C_t^s[\rho_0]\mathbf{s}_t^2 + C_t^{\Delta s}\mathbf{s}_t \cdot \Delta\mathbf{s}_t + C_t^T\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{T}_t + C_t^j\mathbf{j}_t^2 \\
 &\quad + C_t^{\nabla j}\mathbf{s}_t \cdot (\nabla \times \mathbf{j}_t) \quad (\text{człon spin-orbita}) \\
 &\quad + C_t^{\nabla s}(\nabla \cdot \mathbf{s}_t)^2 + C_t^F\mathbf{s}_t \cdot \mathbf{F}_t. \quad (\text{człony tensorowe}) \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_t^{even}(\mathbf{r})$  jest częścią funkcjonału gęstości Skyrme'a określającą stany podstawowe jąder parzysto-parzystych, składającą się jedynie z lokalnych gęstości symetrycznych względem operacji odwrócenia czasu, zaś  $\mathcal{H}_t^{odd}(\mathbf{r})$  zawiera lokalne gęstości asymetryczne względem operacji odwrócenia czasu. Człony zawierające współczynniki  $C_t^{J0}$ ,  $C_t^{J1}$ ,  $C_t^{J2}$  posiadają wkłady pochodzące zarówno od części centralnej, jak i części tensorowej oddziaływania Skyrme'a, zaś człony proporcjonalne do współczynników  $C_t^{\Delta s}$  i  $C_t^T$  zawierają wkłady pochodzące od części centralnych i tensorowych oddziaływania Skyrme'a, podczas gdy człony ze współczynnikami  $C_t^{\nabla s}$  i  $C_t^F$  pochodzą w całości od części tensorowej [102].

Wykorzystanie niezmienników transformacji gęstości lokalnych (dla kanału  $p$ - $h$  i  $p$ - $p$ ) [101]

$$G_t^\tau(\mathbf{r}) = \rho_t\tau_t - \mathbf{j}_t^2, \quad (2.13a)$$

$$G_t^T(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{T}_t - \mathbb{J}_t^2 = \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{T}_t - \frac{1}{3}\mathcal{J}_t^2 - \frac{1}{2}\mathbf{J}_t^2 - \mathfrak{J}_t^2, \quad (2.13b)$$

$$\begin{aligned}
 G_t^F(\mathbf{r}) &= \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{F}_t - \frac{1}{2}\mathcal{J}_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij}\mathbb{J}_t^{ij}\mathbb{J}_t^{ji} \\
 &= \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{F}_t - \frac{2}{3}\mathcal{J}_t^2 + \frac{1}{4}\mathbf{J}_t^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{J}_t^2, \quad (2.13c)
 \end{aligned}$$

$$G_t^{\nabla J}(\mathbf{r}) = \rho_t\nabla \cdot \mathbf{J}_t + \mathbf{s}_t \cdot (\nabla \times \mathbf{j}_t), \quad (2.13d)$$

daje następujące relacje pomiędzy parami członów zawierających lokalne gęstości symetryczne względem operacji odwrócenia czasu oraz członów, które zawierają lokalne gęstości asymetryczne względem tej operacji [103]

$$C_t^\tau = -C_t^j, \quad (2.14a)$$

$$C_t^{J0} = -\frac{1}{3}C_t^T - \frac{2}{3}C_t^F, \quad (2.14b)$$

$$C_t^{J1} = -\frac{1}{2}C_t^T + \frac{1}{4}C_t^F, \quad (2.14c)$$

$$C_t^{J2} = -C_t^T - \frac{1}{2}C_t^F, \quad (2.14d)$$

$$C_t^{\nabla J} = C_t^{\nabla j}, \quad (2.14e)$$

gdzie ostatnia para współczynników zawarta jest w członach spin-orbita dla standardowej wersji funkcjonału gęstości Skyrme'a, zaś dla uogólnionego oddziaływania spin-orbita [104]

$$\begin{aligned}
 C_0^{\nabla J} &= -b - \frac{1}{2}b', \\
 C_1^{\nabla J} &= -\frac{1}{2}b', \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

z nowymi parametrami  $b$  i  $b'$ .

W ogólności, każdy ze współczynników  $C$  może zależeć od gęstości, jednak zazwyczaj zależność ta jest ograniczona do następujących dwóch

$$\begin{aligned} C_t^\rho[\rho_0] &= C_t^{\rho 0} + C_t^{\rho D} \rho_0^\alpha, \\ C_t^s[\rho_0] &= C_t^{s0} + C_t^{sD} \rho_0^\alpha, \end{aligned} \quad (2.16)$$

gdzie  $\rho_0$  jest gęstością izoskalarną, zaś  $\alpha$  to wykładnik w zależnym od gęstości członie oddziaływania Skyrme'a (2.1).

## 2.3 Metoda średniego pola

Całkowita energia w modelu Skyrme'a-Hartree'ego-Focka (SFH) wynosi

$$\begin{aligned} E^{tot} &\equiv \langle \Phi_{HF} | \hat{H} | \Phi_{HF} \rangle \geq E_{g.s.} \\ &= \int d^3\mathbf{r} [\mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{Sk} + \mathcal{E}_{Coul}^{dir} + \mathcal{E}_{Coul}^{ex} + \mathcal{E}_{pair}] + E_{corr}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

przy czym gęstość

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{\hbar^2}{2m} \tau_0(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

jest gęstością energii kinetycznej protonów i neutronów,

$$\mathcal{E}_{Sk} = \sum_{t=0,1} (\mathcal{H}_t^{even}(\mathbf{r}) + \mathcal{H}_t^{odd}(\mathbf{r})) \quad (2.19)$$

gęstością energii Skyrme'a,

$$\mathcal{E}_{Coul}^{dir} = \frac{1}{2} e^2 \rho_p(\mathbf{r}) \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.20)$$

gęstością energii kulombowskiej - bezpośredniej,

$$\mathcal{E}_{Coul}^{ex} = -\frac{3}{4} e^2 \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \rho_p^{4/3}(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

gęstością energii kulombowskiej - wymiennej, w przybliżeniu Slatera [105] oraz

$$\mathcal{E}_{pair} = \sum_{q=p,n} \frac{V_q^0}{4} \left[ 1 - V^1 \left( \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{\rho_{st}} \right)^\beta \right] \tilde{\rho}_q^2(\mathbf{r}) \quad (2.22)$$

gęstością energii pairing dla oddziaływania typu  $\delta$ , przy czym  $\rho_{st}$  to gęstość materii jądrowej, parametr  $\beta = 1$  (najczęściej), parametr  $V^1 = 0, 1$  lub  $1/2$  określa odpowiednio typ oddziaływania pairing: objętościowy, powierzchniowy lub mieszany, zaś  $\tilde{\rho}_q$  jest gęstością par (2.8h).



Ostatni składnik  $E_{corr}$  odnosi się do poprawek związanych z łamaniem symetrii układu w modelu średniego pola: poprawka na środek masy jądra - związana z łamaniem symetrii translacyjnej, poprawka rotacyjna - związana ze spontanicznym łamaniem symetrii rotacyjnej jądra, poprawka wibracyjna - związana z kwantowymi fluktuacjami energii zerowej jądra oraz poprawki na zachowanie liczby nukleonów w jądrze.

Izoskalarny oraz izowektorowy hamiltonian średniego pola (w kanale  $p-h$ ), [100], [101]

$$h_t^{even}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \left( \frac{\hbar^2}{2m} \delta_{0t} + M_t(\mathbf{r}) \right) \nabla + U_t(\mathbf{r}) - \frac{i}{2} \sum_{ij} [\mathbb{B}_t^{ij}(\mathbf{r}) \nabla_i \sigma_j + \nabla_i \sigma_j \mathbb{B}_t^{ij}(\mathbf{r})], \quad (2.23a)$$

$$h_t^{odd}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}_t(\mathbf{r})) \nabla + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_t(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{D}_t(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - \frac{i}{2} [\mathbf{I}_t(\mathbf{r}) \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathbf{I}_t(\mathbf{r})], \quad (2.23b)$$

przy czym tzw. lokalne potencjały *time-even* określone są jako

$$\frac{\delta \mathcal{E}_{kin}}{\delta \tau_0} = \frac{\hbar^2}{2m}, \quad (2.24a)$$

$$M_t(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_{Sk}}{\delta \tau_t} = C_t^\tau \rho_t(\mathbf{r}), \quad (2.24b)$$

$$U_t(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_{Sk}}{\delta \rho_t} = 2C_t^\rho \rho_t(\mathbf{r}) + 2C_t^{\Delta\rho} \Delta\rho_t(\mathbf{r}) + C_t^\tau \tau_t(\mathbf{r}) + C_t^{\nabla J} \nabla \cdot \mathbf{J}_t(\mathbf{r}), \quad (2.24c)$$

$$\mathbb{B}_t^{ij}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_{Sk}}{\delta \mathbb{J}_t} = 2C_t^{J0} \mathcal{J}_t(\mathbf{r}) \delta_{ij} + 2C_t^{J1} \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{J}_t^k(\mathbf{r}) + 2C_t^{J2} \tilde{\mathcal{J}}_t^{ij}(\mathbf{r}) - C_t^{\nabla J} \sum_k \epsilon_{ijk} \nabla_k \rho_t(\mathbf{r}), \quad (2.24d)$$

zaś tzw. lokalne potencjały *time-odd*, dane jako

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_{Sk}}{\delta \mathbf{T}_t} = C_t^T \mathbf{s}_t(\mathbf{r}), \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{D}_t(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_{Sk}}{\delta \mathbf{F}_t} = C_t^F \mathbf{s}_t(\mathbf{r}), \quad (2.25b)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_{Sk}}{\delta \mathbf{s}_t} = 2C_t^s \mathbf{s}_t(\mathbf{r}) + 2(C_t^{\Delta s} - C_t^{\nabla s}) \Delta \mathbf{s}_t(\mathbf{r}) - 2C_t^{\nabla s} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{s}_t(\mathbf{r})) + C_t^T \mathbf{T}_t(\mathbf{r}) + C_t^F \mathbf{F}_t(\mathbf{r}) + C_t^{\nabla j} \nabla \times \mathbf{j}_t(\mathbf{r}), \quad (2.25c)$$

$$\mathbf{I}_t(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_{Sk}}{\delta \mathbf{j}_t} = 2C_t^j \mathbf{j}_t(\mathbf{r}) + C_t^{\nabla j} \nabla \times \mathbf{s}_t(\mathbf{r}). \quad (2.25d)$$

Średnie pole kulombowskie otrzymuje się obliczając pochodną wyrażen (2.20) oraz (2.21) względem  $\delta\rho_p$

$$V_{Coul}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta(\mathcal{E}_{Coul}^{dir} + \mathcal{E}_{Coul}^{ex})}{\delta\rho_p} = \frac{1}{2}e^2 \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - e^2 \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \rho_p^{1/3}(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

Hamiltonian średniego pola w kanale  $p$ - $h$  jest sumą hamiltonianów izoskalarnych i izowektorowych Skyrme'a oraz średniego pola kulombowskiego

$$\hat{h} = \sum_{t=0,1} (h_t^{even}(\mathbf{r}) + h_t^{odd}(\mathbf{r})) + V_{Coul}(\mathbf{r}), \quad (2.27)$$

zaś średni potencjał pairing, w kanale  $p$ - $p$ , otrzymuje się korzystając z warunku wariacyjnego na minimum wobec gęstości pairing (2.22)

$$\hat{h} = \sum_{q=p,n} \frac{V_q^0}{2} \left[ 1 - V^1 \left( \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{\rho_{st}} \right)^\beta \right] \tilde{\rho}_q(\mathbf{r}). \quad (2.28)$$

## 2.4 Model HFB z więzami

Model Hartree'ego-Focka z ograniczeniami redukuje się do rozwiązania problemu optymalizacji z ograniczeniami równościowymi (*equality-constrained problem*, ECP)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\tilde{\rho}} E^{tot}[\tilde{\rho}] \\ \text{więzy:} \quad \sum_{q=p,n} \langle \Phi(\tilde{\rho}) | \hat{N}_q | \Phi(\tilde{\rho}) \rangle = N_q, \\ \quad \quad \quad \sum_{\lambda\mu} \langle \Phi(\tilde{\rho}) | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \Phi(\tilde{\rho}) \rangle = Q_{\lambda\mu}, \\ \quad \quad \quad \sum_{i=x,y,z} \langle \Phi(\tilde{\rho}) | \hat{J}_i | \Phi(\tilde{\rho}) \rangle = I_i, \end{array} \right. \quad (2.29)$$

gdzie ograniczenia określone są przez wartości oczekiwane  $N_{p,n}$  operatorów liczby cząstek protonów i neutronów  $\hat{N}_{p,n}$ , wartości oczekiwane  $Q_{\lambda\mu}$  operatorów momentów multipolowych  $\hat{Q}_{\lambda\mu}$  oraz składowe wektora momentu pędu  $I_i$ .

Jądrowy funkcjonal gęstości Skyrme'a  $E^{tot}[\tilde{\rho}]$ , będący funkcją kryterialną (*objective function*), zgodnie z równaniem (2.17), można zapisać jako

$$\begin{aligned} E^{tot}[\tilde{\rho}] &\equiv E^{tot}[\rho, \tau, \mathbb{J}; \mathbf{s}, \mathbf{T}, \mathbf{j}, \mathbf{F}; \tilde{\rho}] \\ &= \int d^3\mathbf{r} (\mathcal{E}_{kin}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_{Sk}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_{Coul}^{dir}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_{Coul}^{ex}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_{pair}(\mathbf{r})) \\ &\quad + E_{corr}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Do rozwiązania powyższego problemu ECP zastosowana została metoda rozszerzonych mnożników Lagrange'a (*augmented Lagrangian method*, ALM) [90], w której do energii całkowitej układu dodaje się liniową i kwadratową funkcję kary

$$\begin{aligned}
 E'_c[\bar{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}] &= E^{tot}[\bar{\rho}] - \sum_{q=p,n} \lambda_q \langle \Phi(\bar{\rho}) | \hat{N}_q | \Phi(\bar{\rho}) \rangle \\
 &+ \sum_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu} (\langle \Phi(\bar{\rho}) | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \Phi(\bar{\rho}) \rangle - Q_{\lambda\mu})^2 \\
 &+ \sum_{\lambda\mu} \Lambda_{\lambda\mu} (\langle \Phi(\bar{\rho}) | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \Phi(\bar{\rho}) \rangle - Q_{\lambda\mu}),
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

gdzie  $\lambda_q$  oraz  $\Lambda_{\lambda\mu}$  oznaczają mnożniki Lagrange'a odpowiednio dla liczby cząstek ( $q = p, n$ ) i momentów multipolowych, a  $C_{\lambda\mu} > 0$  to parametry kary nie ulegające zmianie w czasie iteracji, podczas, gdy mnożniki Lagrange'a  $\Lambda_{\lambda\mu}$  zmieniają się zgodnie ze wzorem

$$\Lambda_{\lambda\mu}^{k+1} = \Lambda_{\lambda\mu}^k + 2C_{\lambda\mu}^k (\langle \Phi(\bar{\rho}^k) | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \Phi(\bar{\rho}^k) \rangle - Q_{\lambda\mu}). \tag{2.32}$$

Dla problemu ECP, w którym  $\bar{\rho}^*$  jest lokalnym rozwiązaniem (czyli  $E^{tot}[\bar{\rho}^*] = E_{HF}^{tot}$ ) zawsze znaleźć można takie  $\boldsymbol{\lambda}^*$  oraz  $\boldsymbol{\Lambda}^*$ , dla których  $[\bar{\rho}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\Lambda}^*]$  jest punktem krytycznym rozszerzonej funkcji Lagrange'a

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\rho}} E'_c[\bar{\rho}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\Lambda}^*] = 0 \quad \Rightarrow \quad E^{tot}[\bar{\rho}^*] = E_{HF}^{tot} \tag{2.33}$$

oraz

$$\sum_{q=p,n} \langle \Phi(\bar{\rho}^*) | \hat{N}_q | \Phi(\bar{\rho}^*) \rangle = N_q, \tag{2.34}$$

$$\sum_{\lambda\mu} \langle \Phi(\bar{\rho}^*) | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \Phi(\bar{\rho}^*) \rangle = Q_{\lambda\mu}. \tag{2.35}$$

Przy użyciu *primal function* dla jądrowego zagadnienia ECP

$$E^{tot}(Q_{\lambda\mu}) = \min_{\langle \Phi(\bar{\rho}) | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \Phi(\bar{\rho}) \rangle = Q_{\lambda\mu}} E^{tot}[\bar{\rho}]. \tag{2.36}$$

można scharakteryzować kształty jądrowe dzięki wartościom średnim zewnętrznych pól reprezentowanych przez:

- operator momentu kwadrupolowego

$$\hat{Q}_{20} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_{i=1}^A r_i^2 Y_{20}(\theta_i, \phi_i) = \sum_{i=1}^A (2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2), \tag{2.37}$$

którego wartość odpowiada za osiową deformację jądra,

- operator momentu oktupolowego

$$\hat{Q}_{30} = \sqrt{\frac{4\pi}{7}} \sum_{i=1}^A r_i^3 Y_{30}(\theta_i, \phi_i) = \sum_{i=1}^A [z_i^3 - \frac{3}{2} z_i (x_i^2 + y_i^2)], \quad (2.38)$$

służący do opisu asymetrii odbiciowej jądra oraz

- operator momentu heksadekapolowego

$$\hat{Q}_{40} = \sqrt{\frac{4\pi}{9}} \sum_{i=1}^A r_i^4 Y_{40}(\theta_i, \phi_i), \quad (2.39)$$

opisujący ewolucję „szyjki” jądra, którego kształt zbliżony jest do hantli.

W celu uniknięcia ewentualnych przesunięć jądra (dla złamanej symetrii odbiciowej prowadzącej do asymetrycznego rozszczepienia), należy unieruchomić jego środek masy. Warunkiem tego jest zerowanie się wartości średniej operatora momentu dipolowego

$$\langle \hat{Q}_{10} \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{i=1}^A \langle r_i Y_{10}(\theta_i, \phi_i) \rangle = \sum_{i=1}^A \langle z_i \rangle = 0. \quad (2.40)$$

## 2.5 Oddziaływanie pairing

Oddziaływanie pairing jest niezbędnym składnikiem w modelach średniego pola do opisywania właściwości, które zmieniają się silnie wraz z efektami powłokowymi. Jest ono uwzględnione w strukturze równań Hartree’ego-Focka poprzez uogólnienie koncepcji średniego pola, tak by zawierało pole pairing, obliczone za pomocą równań Hartree’ego-Fock-Bogolubowa. W podwójnie magicznych jądrach sferycznych stany jednocząstkowe można zapisać pod względem ich zapełnienia, jako 1 poniżej poziomu Fermiego lub 0 powyżej (tj. czystego stanu Slatera). Koncepcja stanów quasi-cząstkowych jest bardziej odpowiednia dla wszystkich innych jąder, mających częściowo zapełnione powłoki. W tym przypadku, nukleony mogą zajmować dostępne powłoki mające wysoką gęstość w pobliżu powierzchni Fermiego, o energiach prawie zdegenerowanych. Dlatego oddziaływanie pairing pozwala na mieszanie różnych stanów w celu stworzenia unikalnego stanu podstawowego, gdzie każda nukleonowa orbita jest powiązania z amplitudą prawdopodobieństwa  $v_k^2$ .

Całkowity opis oddziaływania pairing w przybliżeniu Hartree’ego-Focka-Bogolubowa polega na rozwiązaniu szeregu sprzężonych równań, w których Hamiltoniany średniego pola oraz pairing nie komutują ze sobą. Funkcjonał energii dla oddziaływania pairing

(2.22) wynosi:

$$E_{pair} = \sum_{q=p,n} \frac{V_q^0}{4} \int \left[ 1 - V^1 \left( \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{\rho_{st}} \right)^\beta \right] \tilde{\rho}_q^2(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (2.41)$$

gdzie  $\tilde{\rho}_q(\mathbf{r})$  jest gęstością pairing (2.8h), zaś  $V_q^0$ ,  $V^1$ ,  $\beta$  oraz  $\rho_{st}$  są parametrami dostosowywanymi fenomenologicznie.

W ogólności prawdopodobieństwo zajęcia poziomów jednocząstkowych w pobliżu powierzchni Fermiego jest rozmyte, wobec tego główny wkład do oddziaływania pairing pochodzi z powierzchni jądrowej we współrzędnych przestrzennych. Dla objętości jądrowej  $\rho_{st} = \rho_0$ , gdzie  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  oznacza gęstość nasycenia materii jądrowej, która ma zbliżoną wartość do gęstości wewnątrz jądra. W modelu pairing często zakłada się  $\beta = 1$ , jednakże wartość ta może się zmieniać, aby uwzględnić pojawienie się efektu halo.

## 2.6 Symetrie punktowe w programie numerycznym HFODD

Jedną z istotnych cech podejścia średniego pola do układów wielofermionowych jest spontaniczne łamanie symetrii [106, 107]. Symetria stanu układu kwantowego nazywana jest złamaną, jeżeli rozwiązanie samozgodnego układu Hartree’ego-Focka (HF) lub Hartree’ego-Focka-Bogolubowa (HFB) nie odpowiada symetrii oryginalnego hamiltonianu wielu ciał. Dzieje się tak, gdy obliczona energia średniego pola układu jest mniejsza dla stanów łamiących symetrię, niż dla stanów niełamiących symetrii.

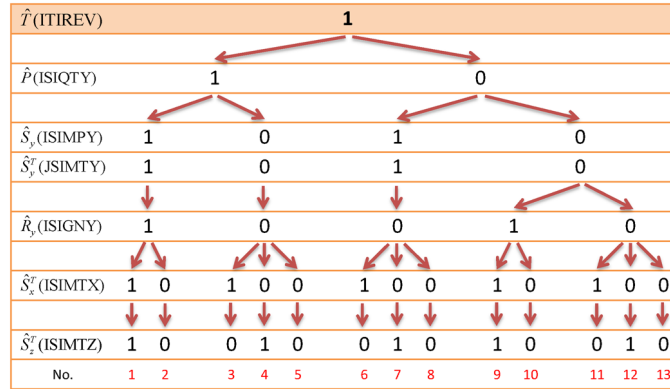
Do rozwiązania jądrowego problemu Skyrme’a-Hartree’ego-Focka-Bogolubowa wykorzystany został program numeryczny HFODD [84–93], w którym istnieje pięć dozwolonych symetrii, reprezentowanych przez operatory. Są to:

- operator odwrócenia czasu  $\hat{T}$ ,
- operator inwersji przestrzennej  $\hat{P}$ ,
- operator obrotu wokół osi  $\mathcal{O}y$  o kąt  $\pi$ :  $\hat{R}_y = \exp(-i\pi \hat{J}_y)$ , (signature)
- operator odbicia względem płaszczyzny  $zx$   $\hat{S}_y \equiv \hat{P} \hat{R}_y$  (simplex) oraz
- operatory ( $x$ -,  $y$ -, i  $z$ -simplex $^T$ )  $\hat{S}_{x,y,z}^T \equiv \hat{T} \hat{S}_{x,y,z}$

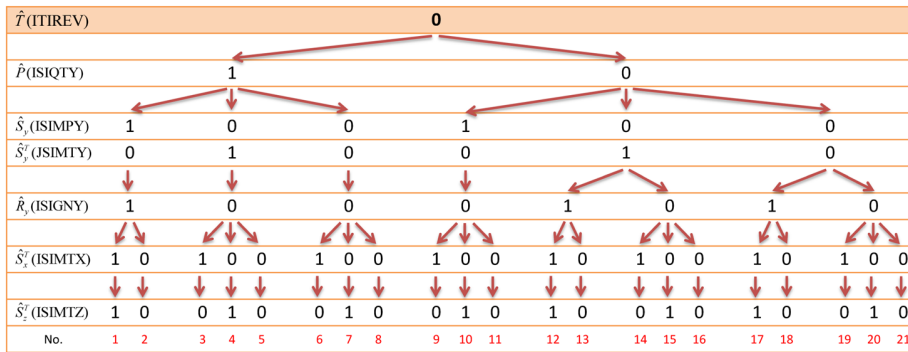
Rys. 2.1 przedstawia trójelementowy zbiór symetrii  $\{\hat{T}, \hat{S}_y, \hat{S}_y^T\}$ ,  $\{\hat{P}, \hat{S}_y, \hat{R}_y\}$ ,  $\{\hat{R}_y, \hat{S}_x^T, \hat{S}_z^T\}$ , gdzie dla każdego ze zbiorów iloczyn dowolnych dwu symetrii jest równy trzeciej symetrii w tym zbiorze.

$\hat{T}$	$\hat{S}_y$	$\hat{S}_z^T$
$\hat{P}$	$\hat{S}_y$	$\hat{R}_y$
$\hat{R}_y$	$\hat{S}_x^T$	$\hat{S}_z^T$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

**Rysunek 2.1:** Trójelementowe zbiory symetrii  $\{\hat{T}, \hat{S}_y, \hat{S}_z^T\}$ ,  $\{\hat{P}, \hat{S}_y, \hat{R}_y\}$ ,  $\{\hat{R}_y, \hat{S}_x^T, \hat{S}_z^T\}$ ; dla każdego zbioru, iloczyn dowolnych dwu symetrii równy jest trzeciej symetrii z danego zbioru.



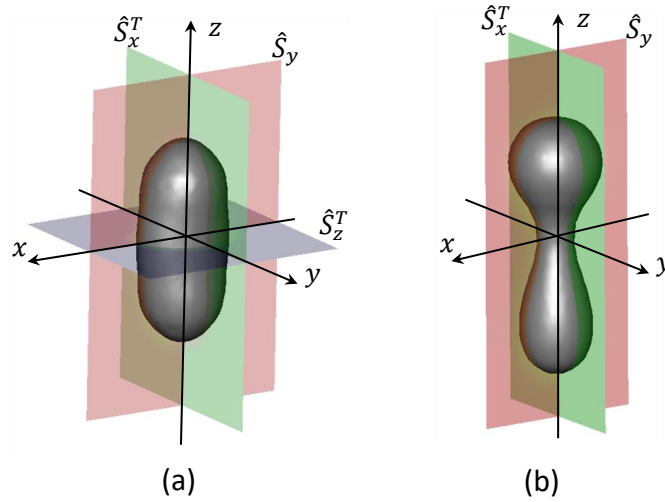
**Rysunek 2.2:** Pełne zestawienie zachowanych (1) lub niezachowanych (0) symetrii, które można stosować w programie numerycznym HFODD, w przypadku zachowanej symetrii odwrócenia czasu ( $\hat{T} = 1$ ).



**Rysunek 2.3:** Pełne zestawienie zachowanych (1) lub niezachowanych (0) symetrii, które można stosować w programie numerycznym HFODD, w przypadku niezachowanej symetrii odwrócenia czasu ( $\hat{T} = 0$ ).

Na rys. 2.2 przedstawione jest pełne zestawienie symetrii, które mogą być stosowane w programie [90] w przypadku zachowanej symetrii odwrócenia czasu, zaś rys. 2.3 odnosi się do przypadku, w którym symetria ta jest złamana.

Panel (a) na Rys. 2.4 ilustruje obliczenia wykonane w celu uzyskania symetrycznej ścieżki prowadzącej do rozszczepienia na dwa jednakowe zdeformowane fragmenty (*symmetric elongated fission* - sEF), co odpowiada wszystkim niezłamanym symetriom stosowanym w programie numerycznym HFODD, zaś panel (b) odnosi się do rachunków zrealizowanych w celu uzyskania ścieżki asymetrycznej prowadzącej do rozszczepienia jądra na dwa fragmenty o różnych masach (*asymmetric elongated fission* - aEF), co odpowiada złamanym symetriom  $\hat{P}$ ,  $\hat{R}_y$  i  $\hat{S}_z^T$ .



**Rysunek 2.4:** Panel (a): Ilustracja obliczeń, dla których wszystkie symetrie w programie numerycznym HFODD pozostają niezłamane. Panel (b): Ilustracja obliczeń, dla których złamane są symetrie  $\hat{P}$ ,  $\hat{R}_y$  i  $\hat{S}_z^T$ .

Kod HFODD wykorzystuje trójwymiarową bazę kartezjańską zdeformowanego oscylatora harmonicznego [85]. W niniejszej pracy, baza ta składa się z  $M = 1140$  stanów odpowiadających najniższym energiom anizotropowego oscylatora harmonicznego

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2}\right), \quad (2.42)$$

$$n_x, n_y, n_z \leq N_0,$$

gdzie  $N_0 = 26$  to przyjęta maksymalna liczba powłok oscylatorowych.





# Rozdział 3

## Wyniki

### 3.1 Koncepcja i plan badań

Przedstawione w pracy wyniki dotyczą obszaru jąder superciężkich, a w szczególności parzystych izotopów flerowu  $Z = 114$  ( $N = 154-196$ ), izotopów  $Z = 120$  ( $N = 160-196$ ), izotonów  $N = 184$  ( $Z = 106-126$ ) oraz grupy neutronowo-deficytowych jąder z liczbą atomową  $Z = 118(\text{Og})-124$  i  $N = 158-174$ .

Zainteresowanie izotopami  $Z = 114$  i  $120$  oraz izotonami  $N = 184$  wynika z faktu, że w jądrowych modelach makroskopowo-mikroskopowych ( $Z = 114$ ,  $N = 184$ ) i mikroskopowych ( $Z = 120$ ,  $N = 184$ ) są to przewidywane liczby magiczne. Ponadto, długie szeregi izotopów  $Z = 114$  i  $120$  pozwalają prześledzić ewolucję: deformacji jądrowych, wysokości i kształtu barier potencjału, charakterystyk ścieżek prowadzących do rozszczepienia, stabilności na rozpad  $\alpha$  tych jąder, w zależności od zmieniającej się liczby neutronów. Wybór obszaru neutronowo-deficytowych jąder  $Z = 118-124$ ,  $N = 158-174$  związany jest z poszukiwaniem „egzotycznych” zdeformowanych stanów podstawowych, w których jądra osiągają ekstremalne deformacje typu *oblate* - rzędu  $Q_{20} \simeq -60$  b (*superdeformed oblate*, SDO minima) [17].

Porównawcze badania wszystkich jąder należących do wspomnianych trzech grup (izotopy  $Z = 114$  i  $120$  oraz izotony  $N = 184$ ) przeprowadzono po raz pierwszy w tak szerokim zakresie w obszarze deformacji typu *oblate* sięgającym aż do  $Q_{20} = -300$  b. Badania te pozwoliły określić krytyczną wartość momentu kwadrupolowego  $Q_{20}^{cr}$  oraz energię jądra  $E^{tot}$ , przy której następuje zmiana topologii powierzchni jądrowej (kształtu jądra) ze *sferycznej-kompaktowej* (genus 0) na *toroidalną* (genus 1) [8].

Wykorzystując średniopolowy model HFB z funkcjonałem gęstości Skyrme’a SkM\* [16], wraz z dodatkowymi więzami na masowe momenty multipolowe (Skyrme-CHFB), została przeprowadzona:

- analiza obszaru deformacji *prolate*, poprzez badanie jednowymiarowego cięcia po-

wierzchni energii całkowitej  $E^{tot}(Q_{20})$ ,  $Q_{20} \leq 200$  b, z krokiem  $\Delta Q_{20} = 5$  b i wyznaczenie statycznych ścieżek prowadzących do jądrowego rozszczepienia,

- badanie ewolucji deformacji jąder w stanie podstawowym w zależności od liczby protonów i neutronów,
- dwuwymiarowa analiza powierzchni energii całkowitej  $E^{tot}(Q_{20}, Q_{22})$ ,  $|Q_{20}| \leq 80$  b, z krokiem  $\Delta Q_{20} = 10$  b,  $\sqrt{2}Q_{22} = Q_{20} \operatorname{tg} \gamma$  ( $0^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ ),  $\Delta\gamma = 10^\circ$  i badanie wpływu efektu trójosiowości kształtu jądra na wysokość barier potencjału  $B_f$ ,
- jednowymiarowa analiza obszaru deformacji *oblate* dla  $Q_{20} \geq -250$  b, z krokiem  $\Delta Q_{20} = 5$  b, dla  $Q_{20} < -250$  b, z krokiem  $\Delta Q_{20} = 10$  b, w celu określenia zakresu deformacji kwadrupolowej, w którym występują rozwiązania z toroidalnymi rozkładami gęstości materii jądrowej,
- obliczenia energii uwalnianej ( $Q_\alpha$ ) oraz czasu połowicznego zaniku ze względu na rozpad  $\alpha$  ( $T_\alpha$ ).

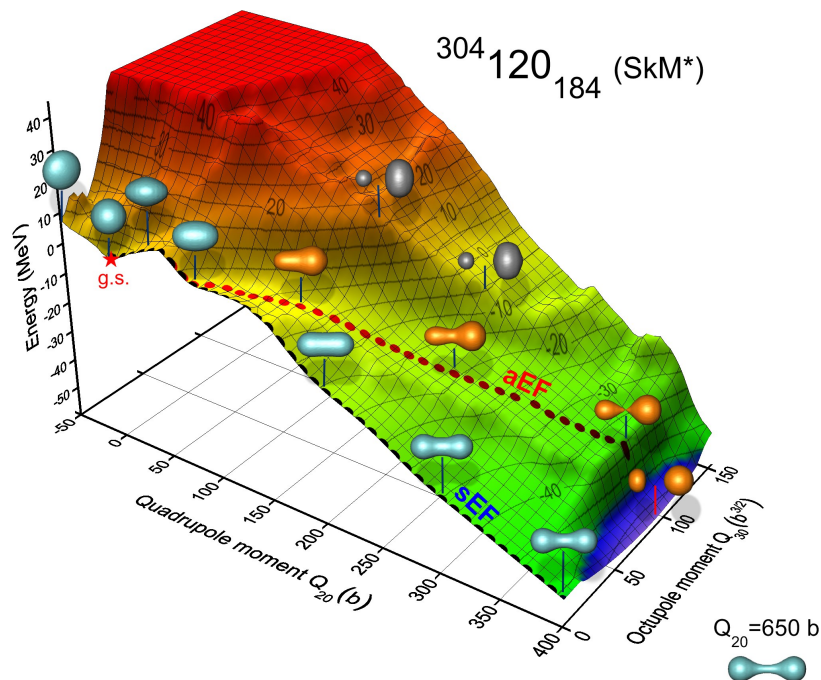
Wykorzystując metodę *cranking* w modelu Skyrme'a-CHF [108, 109] (z więzami) oraz Skyrme'a-HF zostały przeprowadzone poszukiwania toroidalnych wysokospinowych stanów izomerycznych (*toroidal high-spin isomeric states*, THSI states).

Prezentację uzyskanych wyników rozpoczynać będzie omówienie otrzymanych rezultatów dla jądra  $^{304}_{120}_{184}$  w modelu Skyrme'a-CHFB.

## 3.2 Podwójnie magiczne jądro $^{304}_{120}_{184}$

Na Rys. 3.1 przedstawiono powierzchnię energii całkowitej dla podwójnie magicznego jądra  $^{304}_{120}_{184}$  w funkcji kwadrupolowych  $Q_{20} = \langle \hat{Q}_{20} \rangle$  (2.37) i oktopolowych  $Q_{30} = \langle \hat{Q}_{30} \rangle$  (2.38) stopni swobody. Oprócz sferycznego minimum stanu podstawowego widoczna jest dwugarbna bariera potencjału, przy czym bariera wyjściowa (*outer fission barrier*) jest znacznie niższa od bariery wejściowej (*inner fission barrier*). Poza pierwszą (wejściową) barierą ( $Q_{20} \simeq 80$  b) od statycznej symetrycznej ścieżki prowadzącej do rozszczepienia na dwa jednakowe zdeformowane fragmenty (*symmetric elongated fission*, sEF) odchodzi ścieżka asymetryczna, wzdłuż której  $Q_{30} \neq 0$  b (*asymmetric elongated fission*, aEF). Na rysunku widoczne są punkty poprzedzające rozerwania (*pre-scission points*), w przypadku ścieżki symetrycznej punkt ten znajduje się w pobliżu  $Q_{20} \approx 650$  b, a dla asymetrycznej w  $Q_{20} \approx 360$  b. W tych punktach charakterystyczne są kształty powierzchni jądrowych. Dla ścieżki sEF w punkcie poprzedzającym „szyjka” łącząca dwa równe fragmenty ma skończoną szerokość, gdy zaś dla ścieżki aEF promień „szyjki” dąży do zera. Ścieżka asymetryczna „omija” drugą (wyjściową) barierę

(porównanie widoczne na Rys. 3.3). Dlatego przy założeniu, że wartości parametrów masowych są podobne wzdłuż obu ścieżek można przypuszczać, że kanał asymetryczny będzie bardziej preferowany niż symetryczny.



**Rysunek 3.1:** Powierzchnia energii HFB dla  $^{304}_{120}_{184}$  jako funkcja momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$  i oktopolowego  $Q_{30}$ . Energia HFB jest znormalizowana do energii stanu podstawowego (*ground state*, g.s.). Linie przerywane pokazują symetryczne (sEF) i asymetryczne (aEF) ścieżki prowadzące do rozszczepienia.

Rys. 3.2 przedstawia trójosiowe mapy  $\beta$ - $\gamma$  jądra  $^{304}_{120}_{184}$ . Współrzędne Bohra (Hilla-Wheelera)  $\{\beta, \gamma\}$  [25,110] związane są z momentami kwadrupolowymi  $\{Q_{20}, Q_{22}\}$ :

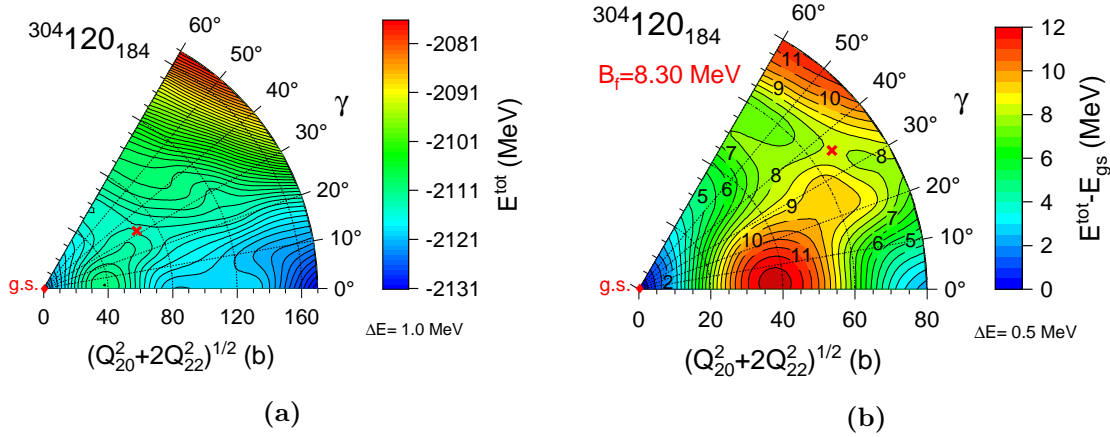
$$\beta = \sqrt{\frac{5}{16\pi} \frac{4\pi}{3AR_0^2} \sqrt{Q_{20}^2 + 2Q_{22}^2}} \quad (3.1)$$

$$= \frac{\sqrt{5\pi}}{3r_0^2 A^{5/3}} \sqrt{Q_{20}^2 + 2Q_{22}^2},$$

$$\gamma = \arctg \frac{\sqrt{2}Q_{22}}{Q_{20}}, \quad (3.2)$$

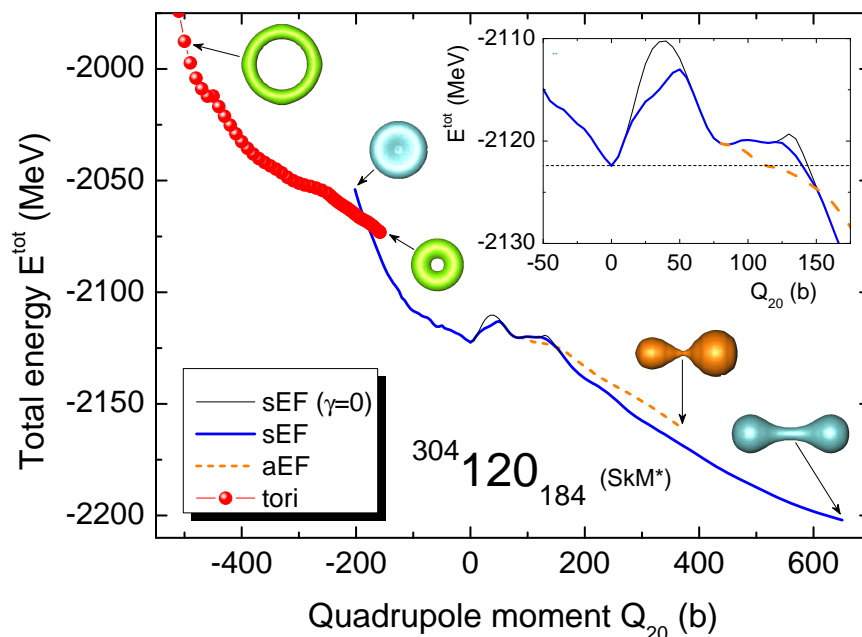
gdzie promień jądra jest sparametryzowany poprzez  $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 = 1.2$  fm.

Na Rys. 3.2 (a) zakres zmienności  $|Q_{20}| \leq 170$  b, co dla liczby masowej  $A = 304$  odpowiada  $\beta = 1.1$ , zaś na Rys. 3.2 (b)  $|Q_{20}| \leq 80$  b, co odpowiada  $\beta = 0.5$ . Na rysunkach zaznaczono położenie minimum odpowiadającego sferycznemu stanowi podstawowemu (czerwony punkt) oraz położenie punktu siodłowego (czerwony krzyżyk). W przypadku podwójnie magicznego jądra  $^{304}_{120}_{184}$  wysokość bariery osiowosymetrycznej  $B_f^{axial} = 12.18$  MeV zredukowana jest do wartości trójosiowej  $B_f = 8.30$  MeV.



**Rysunek 3.2:** Powierzchnia energii deformacji HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  obliczona dla superciężkiego jądra  $^{304}_{120}_{184}$ , w zakresie  $|Q_{20}| \leq 170$  b (panel (a)) oraz  $|Q_{20}| \leq 80$  b (panel (b)), gdzie energia jest znormalizowana w stosunku do minimum stanu podstawowego (czerwony punkt g.s.). Punkt siodłowy zaznaczony jest czerwonym krzyżykiem. Różnica energii pomiędzy sąsiednimi liniami konturu wynosi (a)  $\Delta E = 1$  MeV, (b)  $\Delta E = 0.5$  MeV.

Jednowymiarowy przekrój przez powierzchnię energii całkowitej jądra  $^{304}_{120}_{184}$  przedstawiony został na Rys. 3.3. Na rysunku tym pokazana jest krzywa całkowitej energii HFB jądra w funkcji momentu kwadrupolowego w szerokim zakresie  $-500 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 650 \text{ b}$ . Dla  $Q_{20} > 0$  (deformacje *prolate*) widoczne są dwie ścieżki prowadzące do rozczepienia: symetryczna (sEF) i asymetryczna (aEF). Obie wyznaczone zostały na całych swoich długościach, aż do punktów poprzedzających rozerwanie (*precission points*). W górnej wstawce powiększono obszar związany z samą barierą potencjału. Widoczna jest tam różnica pomiędzy barierą osiowosymetryczną ( $\gamma = 0^\circ$ ) a nieosiową. Przedstawiony na Rys. 3.3 efekt redukcji bariery odpowiadającej jądrowym deformacjom osiowosymetrycznym, poprzez dopuszczenie deformacji nieosiowych, jest mniejszy niż ten przedstawiony na Rys. 3.2. Związane jest to z tym, że na Rys. 3.2 dokonywana jest pełna dwuwymiarowa analiza na płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$ . W przypadku Rys. 3.3 efekt trójosiowości był uwzględniony w ten sposób, że po wyznaczeniu ścieżki osiowosymetrycznej w jednowymiarowym rachunku  $E^{tot}(Q_{20})$ , w obszarze bariery, powtarzany był rachunek z dodatkowym ograniczeniem  $Q_{22} = 25$  b. Następnie, biorąc jako wartości początkowe  $E^{tot}(Q_{20}, Q_{22} = 25 \text{ b})$ , uwalniany był warunek na  $Q_{22}$  i jeszcze raz przeprowadzono jednowymiarowe obliczenia. Przedstawiona powyżej jednowymiarowa metoda pozwala uwzględnić efekt redukcji bariery związany z trójosiowymi deformacjami jądra, nie pozwala jednak na precyzyjne wyznaczenie punktu siodłowego. Dlatego, w pracy przy wyznaczeniu wysokości barier na rozszczepienie, podawane są dwie wartości  $B_f^{axial}$  - dla bariery z  $\gamma = 0^\circ$  (deformacje osiowosymetryczne) oraz  $B_f$  - dla bariery z  $\gamma \neq 0^\circ$ , gdzie punkt siodłowy wyznaczany jest na płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$ .

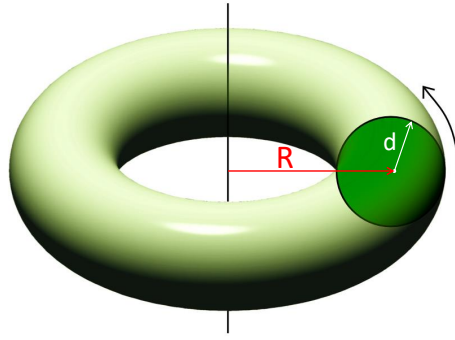


**Rysunek 3.3:** Przebieg całkowitej energii HFB dla  $^{304}_{120}_{184}$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Grube ciągle linie (kolor niebieski) i szare przerywane linie (kolor pomarańczowy) pokazują odpowiednio symetryczne (sEF) i asymetryczne (aEF) ścieżki prowadzące do rozszczepienia odpowiednio wzdłuż różnych dolin. Wpływ efektu trójosiowości na kształt pierwszej i drugiej bariery przedstawiono w prawym górnym rogu, gdzie osiowosymetryczna sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) ścieżka prowadząca do rozszczepienia jest zaznaczona przez ciągłą ciekłą (czarną) linię. Toroidalne rozkłady gęstości materii jądrowej pojawiają się dla dużych deformacji *oblate*  $Q_{20} \leq -158$  b (czerwone kółka), [9].

W przypadku deformacji *oblate*, z ujemnym  $Q_{20}$ , na Rys. 3.3 energia całkowita jądra szybko wzrasta w miarę, jak rośnie  $|Q_{20}|$ , a jądro przyjmuje kształt spłaszczonej elipsoidy obrotowej ( $\gamma = 0^\circ$ ). W pobliżu wartości  $Q_{20} \approx -200$  b powierzchnia jądra przybiera kształt dwustronnie wklęsłego dysku, a energia jądra przewyższa o 72 MeV energię sferycznego stanu podstawowego. Przy dalszym wzroście deformacji *oblate*, gdy moment kwadrupolowy osiąga wartość krytyczną  $Q_{20}^{cr}$  następuje nagle zmiana topologii powierzchni jądra z jednospójnej (genus=0) powierzchni dysku dwustronnie wklęsłego w powierzchnię torusa (genus=1) [111]. Zmianie tej towarzyszy zwiększenie energii wiązania układu o 10.8 MeV.

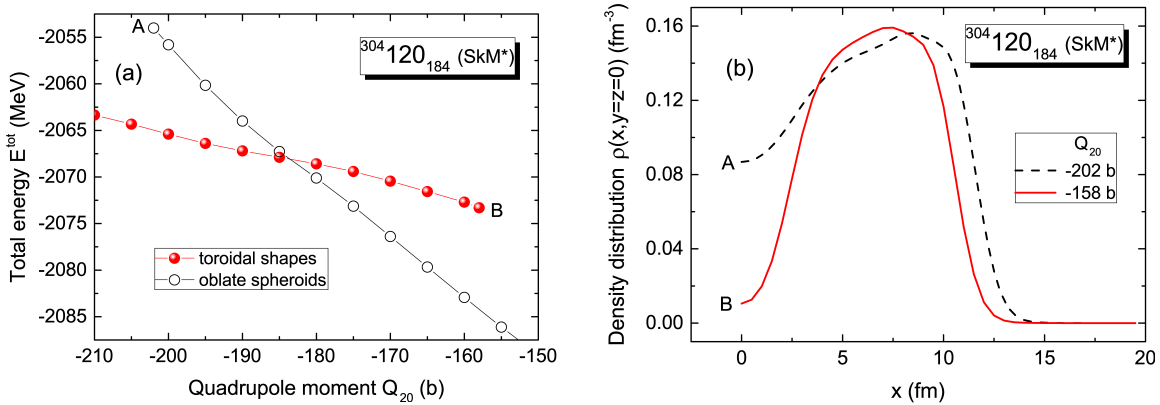
Powierzchnię torusa charakteryzuje współczynnik kształtu  $R/d$  [114], gdzie  $R$  to duży, a  $d$  to mały promień torusa Rys. 3.4. Przedstawione na Rys. 3.3 rozwiązania toroidalne biorą swój początek dla  $Q_{20} \leq -158$  b.

W miarę wzrostu wartości bezwzględnej  $|Q_{20}|$  energia jądrowa rośnie monotonicznie, a wraz z nią współczynnik kształtu  $R/d$ . W przedziale  $-202$  b  $\leq Q_{20} \leq -158$  b istnieją dwa niezależne rozwiązania, jądro związane z kształtami dwustronnie wklęsłego dysku



**Rysunek 3.4:** Toroidalna powierzchnia jądrowa, przedstawiono duży  $R$  i mały  $d$  promień torusa. Wykorzystano grafikę zaczerpniętą z [113].

i drugie z rozwiązaniami toroidalnymi.

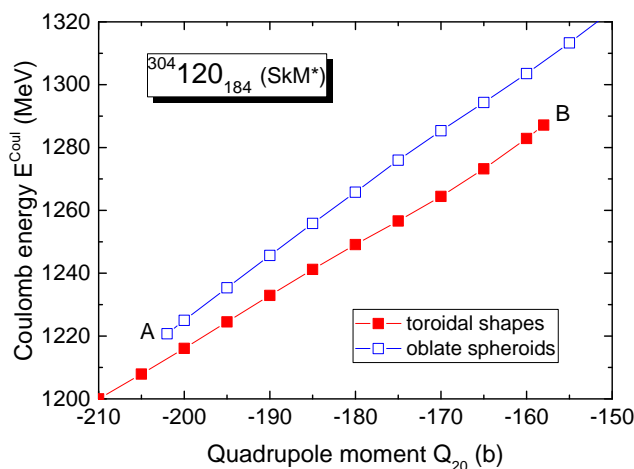


**Rysunek 3.5:** Lewy panel (a): powiększony fragment Rys. 3.3, przedstawiający energię całkowitą HFB jądra  $^{304}_{120}_{184}$  w funkcji momentu kwadrupolowego. Widoczne są dwa rozwiązania odpowiadające jednospójnym powierzchniom jądrowym (puste kółka) oraz rozwiązaniu toroidalnym (czerwone kółka). Duża litera **A** ( $Q_{20} = -202$  b) odpowiada „ostatniemu” rozwiązaniu z jednospójną powierzchnią jądrową, duża litera **B** ( $Q_{20} = -158$  b) to „pierwsze” rozwiązanie odpowiadające toroidalnemu rozkładowi materii jądrowej. Prawy panel (b): rozkłady gęstości materii jądrowej w punkcie **A** i **B** lewego panelu, [10].

Na Rys. 3.5 (a) przedstawiony został powiększony fragment Rys. 3.3, w którym współistnieją dwa rozwiązania. Dużą literą **A** ( $Q_{20} = -202$  b) oznaczono „ostatnie” rozwiązanie odpowiadające jednospójnym powierzchniom jądrowym (dwustronnie wklęsły dysk). Natomiast duża litera **B** ( $Q_{20} = -158$  b) oznacza „pierwsze” rozwiązanie toroidalne. Na Rys. 3.5 (b) przedstawiono rozkłady  $\rho(x)$  gęstości materii jądrowej w funkcji współrzędnej kartezjańskiej  $x$ . Przedstawione rozkłady gęstości odpowiadają punktom **A** i **B** z panelu Rys. 3.5 (a). Porównując oba rozkłady, można stwierdzić, że w punkcie początkowym sekwencji toroidalnej (**B**) gęstość materii jądrowej w centrum geometrycznym jądra jest bliska zeru, zaś w punkcie końcowym sekwencji z jednospójnymi powierzchniami jądrowymi (**A**) pozostaje na poziomie  $0.08 \text{ fm}^{-3}$ . Promień jądra



w konfiguracji **A** jest o około 1 fm większy niż w konfiguracji **B**.

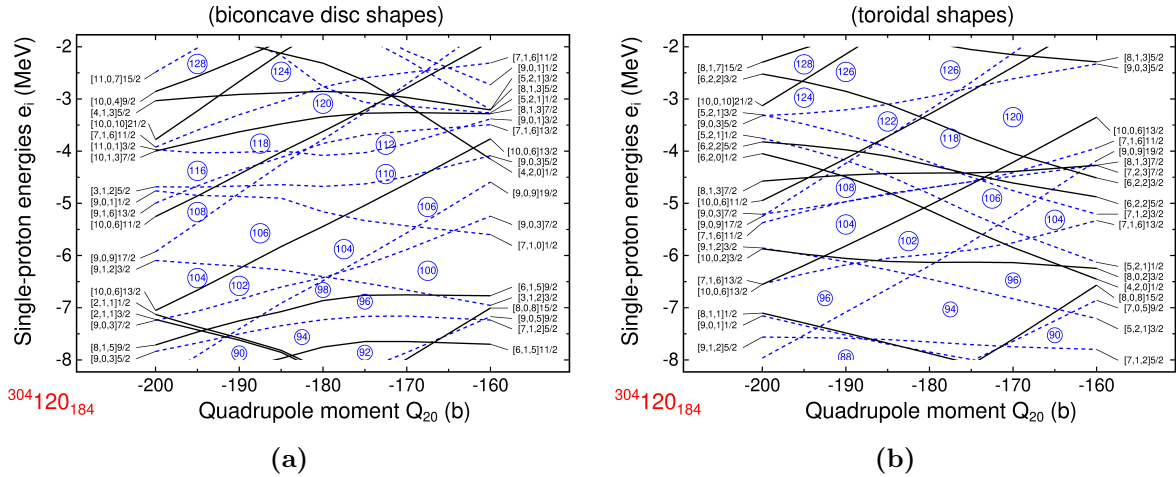


**Rysunek 3.6:** Energia kulombowska odpowiadająca przedstawionym na Rys. 3.5 (a) rozwiązaniom z jednospójnymi powierzchniami jądrowymi (niebieskie puste kwadraty) oraz rozwiązaniom z toroidalnym rozkładem materii jądrowej (czerwone pełne kwadraty).

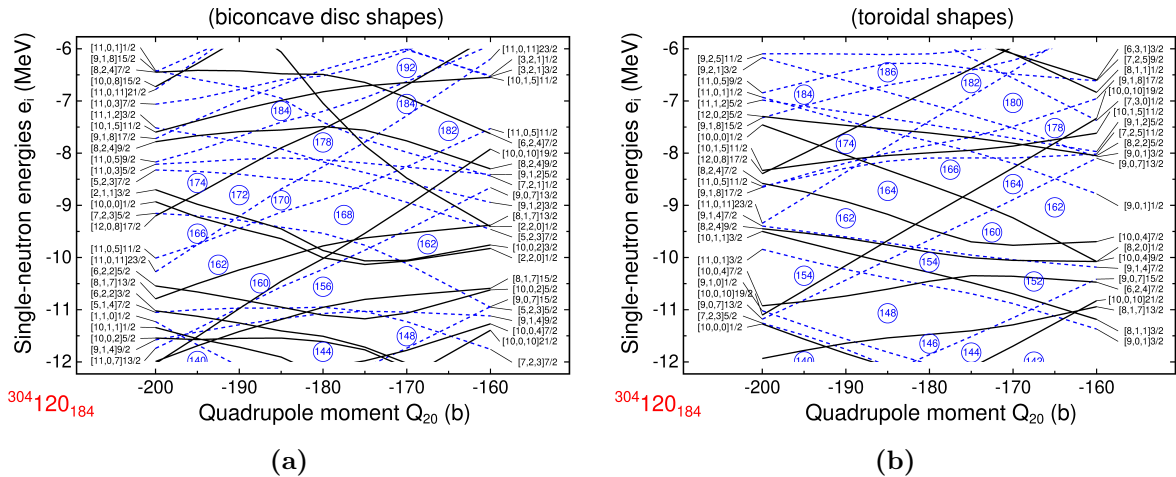
Rys. 3.6 zawiera wartości energii kulombowskiej odpowiadające rozwiązaniom przedstawionym na Rys. 3.5 (a). Widoczne jest, że energia kulombowska odpowiadająca rozwiązaniom toroidalnym (czerwone kwadraty) jest systematycznie mniejsza niż energia kulombowska odpowiadająca rozwiązaniom z jednospójnymi powierzchniami jądrowymi (niebieskie puste kwadraty). Dla deformacji kwadrupolowej odpowiadającej pierwszemu rozwiązaniu toroidalnemu (punkt **B**) różnica w energiach kulombowskich sięga 20 MeV, a dla deformacji kwadrupolowej odpowiadającej ostatniemu rozwiązaniu z jednospójną powierzchnią jądrową dwustronnie wklęsłego dysku (punkt **A**) różnica ta pozostaje na poziomie ok. 8 MeV.

Struktura poziomów jednocząstkowych  $^{304}120_{184}$ , w pobliżu energii Fermiego, przedstawiona została dla protonów i neutronów, odpowiednio na Rys. 3.7 i 3.8. Przyjęty zakres zmienności momentu kwadrupolowego  $-200 \text{ b} \leq Q_{20} \leq -160 \text{ b}$  odpowiada obszarowi deformacji, gdzie współistnieją oba topologiczne typy rozwiązań. W przypadku każdego z dwu rysunków, lewe panele (a) przedstawiają poziomy jednocząstkowe odpowiadające rozwiązaniom CHFB z jednospójnymi powierzchniami jądrowymi (dwustronnie wklęsły dysk), natomiast prawe panele (b) przedstawiają poziomy jednocząstkowe odpowiadające rozwiązaniom z toroidalnym rozkładem materii jądrowej. Poziomy o dodatniej parzystości przedstawione są jako krzywe ciągłe, a poziomy z ujemną parzystością reprezentowane są przez niebieskie linie przerywane. Każdy stan jednocząstkowy oznaczony jest liczbami kwantowymi Nilssona  $[N, n_z, \Lambda]\Omega$  [56].

Gęstości jednocząstkowych stanów protonowych i neutronowych, przedstawione na Rys. 3.7 i 3.8 są dalekie od jednorodności. Istnieją puste obszary, które identyfikowane są z jednocząstkowymi „powłokami”, związane z podwyższoną stabilnością jądrową.



**Rysunek 3.7:** Protonowe poziomy jednocząstkowe  $^{304}_{120}184$  w funkcji momentu kwadru-polowego  $Q_{20}$ . Poziomy o dodatniej parzystości narysowane są liniami ciągłymi, natomiast poziomy o ujemnej parzystości narysowane są niebieskimi liniami przerywanymi. Panel (a) przedstawia rozwiązania dla kształtu dwustronnie wklęsłego dysku, zaś panel (b) rozwiązania dla kształtu toroidalnego, [10].



**Rysunek 3.8:** Neutronowe poziomy jednocząstkowe  $^{304}_{120}184$  w funkcji momentu kwadru-polowego  $Q_{20}$ . Poziomy o dodatniej parzystości narysowane są liniami ciągłymi, natomiast poziomy o ujemnej parzystości narysowane są niebieskimi liniami przerywanymi. Panel (a) przedstawia rozwiązania dla kształtu dwustronnie wklęsłego dysku, zaś panel (b) rozwiązania dla kształtu toroidalnego, [10].

wą [115]. Złożoność diagramów poziomów energetycznych stanów jednocząstkowych wskazuje, że w tym przedziale deformacji położenie powłok protonowych i neutronowych należy badać indywidualnie dla danego jądra. Z drugiej strony, mimo że Rys. 3.7 i 3.8 dotyczą stanów jednocząstkowych konkretnego jądra  $^{304}_{120}184$ , należy spodziewać się, że potencjał średniego pola zależy przede wszystkim od deformacji jądra, a zmienia się tylko nieznacznie w funkcji liczby atomowej i liczby neutronów. Diagramy stanów



jednocząstkowych na Rys. 3.7 i 3.8 mogą być z dobrym przybliżeniem stosowane do rozszerzonego obszaru jąder wokół  $^{304}120_{184}$ .

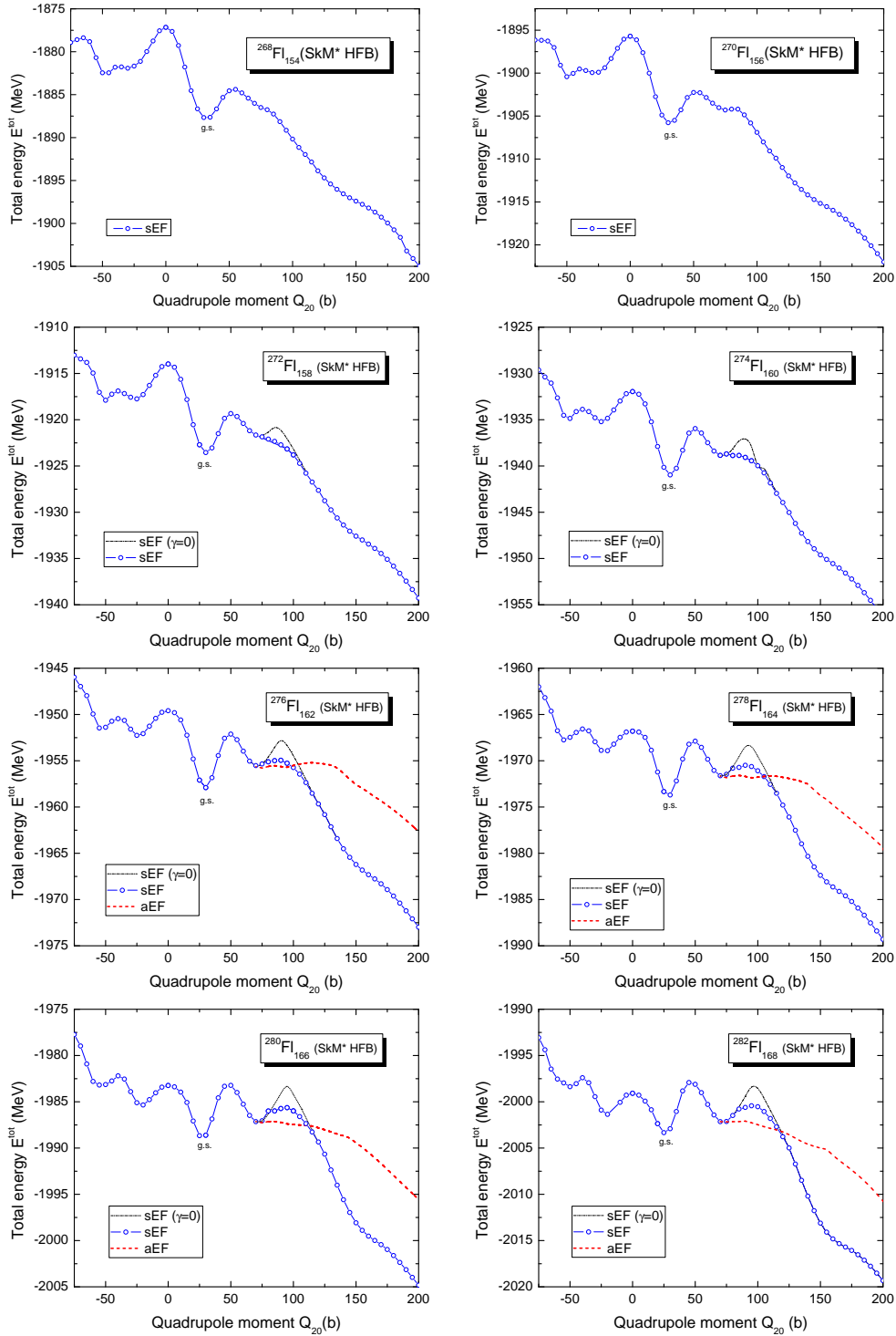
### 3.3 Parzyste izotopy $Z = 114$ oraz $Z = 120$

#### 3.3.1 Powierzchnie potencjału - deformacja *prolate*

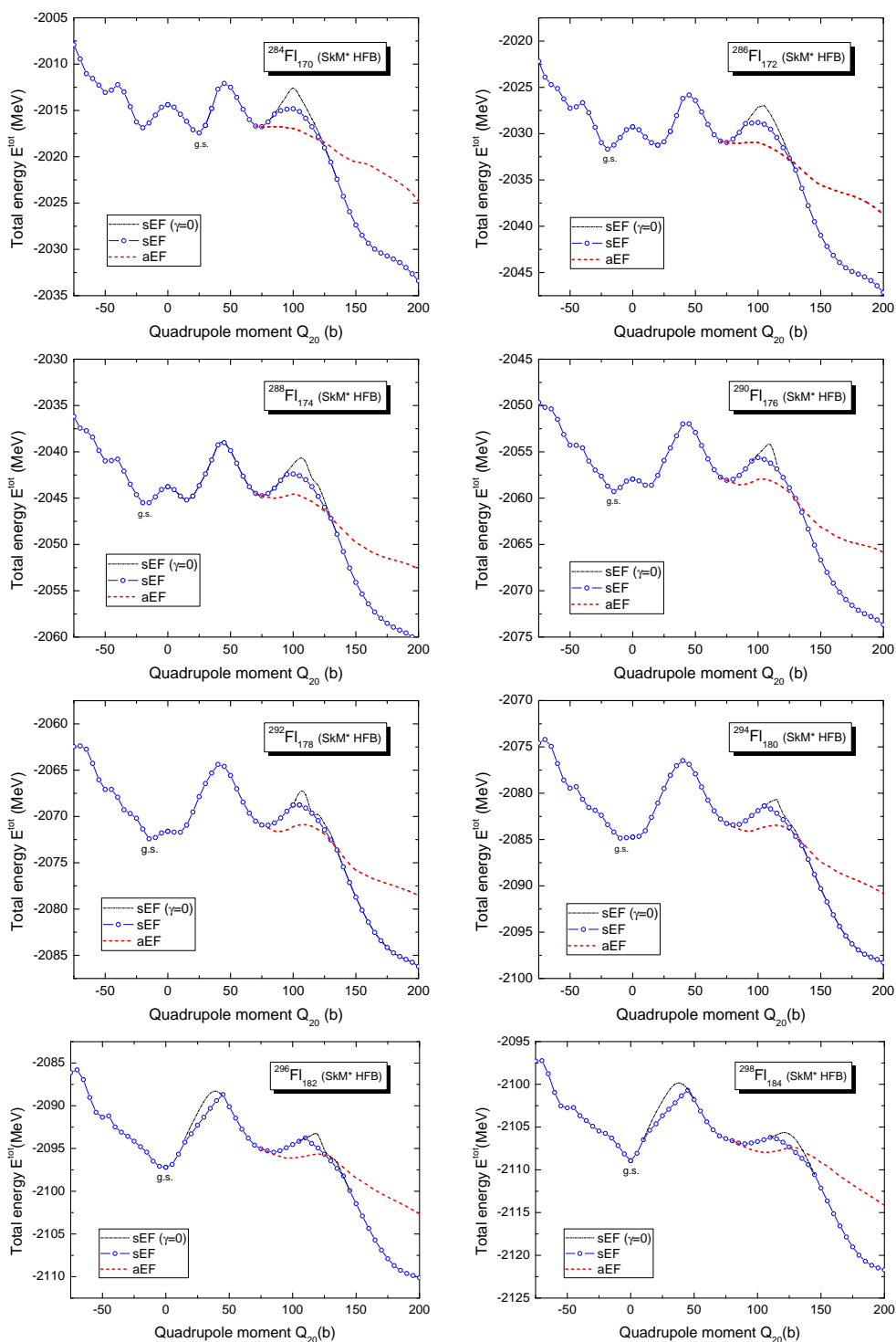
Rysunki 3.9, 3.10 oraz 3.11 przedstawiają energię całkowitą HFB parzystych superciężkich izotopów flerowu ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154-196$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-75 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 200 \text{ b}$ . W przypadku izotopów  $N = 162-192$  istnieją dwie ścieżki prowadzące do jądrowego rozszczepienia: ścieżka symetryczna sEF (otwarte niebieskie kółka) oraz asymetryczna aEF (przerywana czerwona linia). Za wyjątkiem najlżejszych i najcięższych izotopów, ścieżki asymetryczne aEF przebiegają w ten sposób, że zredukowana jest druga bariera osiowosymetryczna sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ), położona w obszarze deformacji kwadrupolowej  $Q_{20} \approx 100 \text{ b}$ .

Opisujące symetryczne rozszczepienie bariery osiowosymetryczne sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) reprezentowane są na wykresach  $E^{tot}(Q_{20})$  przez cienką czarną ciągłą linię. W przypadku większości izotopów (z  $N = 158-184$ ) efekt związany z dopuszczeniem trójosiowych elipsoidalnych deformacji redukuje drugą barierę osiowosymetryczną. W przypadku izotopów z  $N > 186$  druga bariera znika, co prowadzi do redukcji szerokości bariery rozszczepieniowej. Z jednowymiarowej analizy efektu związanego z dopuszczeniem trójosiowych deformacji wynika, że efekt ten redukuje pierwszą barierę dla izotopów  $Z = 114$  z  $N = 182-192$ . Szczegółowa analiza efektu związanego z redukcją pierwszej bariery przez trójosiowe deformacje jądra została przedstawiona na Rys. 3.12 i 3.13 z diagramami  $\beta$ - $\gamma$  dla izotopów  $Z = 114$ .

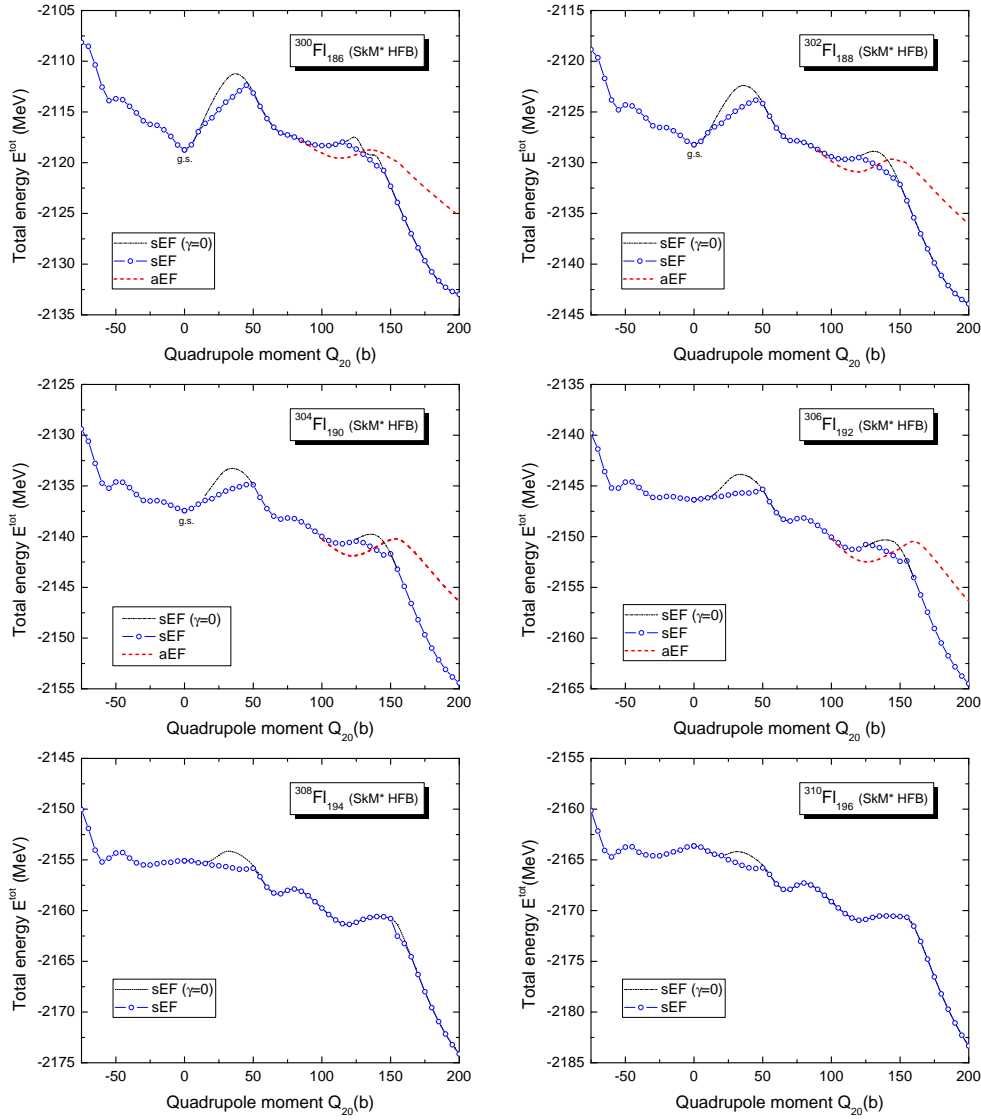
Rys. 3.12 i 3.13 przedstawiają powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  parzystych superciężkich izotopów flerowu z liczbą neutronów  $N = 154-196$ . Zgodnie z wzorami (3.1) i (3.2), zakres zmienności momentu kwadrupolowego przedstawiony na diagramach  $\beta$ - $\gamma$  obejmuje  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$  (odpowiednio dla  $\gamma = 60^\circ$  i  $\gamma = 0^\circ$ ). W zakresie tym mieszczą się pierwsze bariery rozszczepieniowe izotopów  $Z = 114$ , natomiast nie zawiera on drugich barier ( $Q_{20} \approx 100 \text{ b}$ ), które przedstawione były na Rys. 3.9, 3.10 i 3.11. Mapy  $\beta$ - $\gamma$  prezentują powierzchnie energii całkowitej HFB znormalizowanej w stosunku do energii stanu podstawowego  $E^{tot} - E_{gs}$ . Wszystkie diagramy  $\beta$ - $\gamma$  przedstawione zostały w tej samej skali energetycznej, różnica pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5 \text{ MeV}$ . Położenie na mapie minimów stanu podstawowego i punktów siodłowych zaznaczono odpowiednio czerwonymi kropkami i krzyżykami. W przypadku jąder flerowu z  $N = 154-168$  minima stanu podstawowego są dobrze zlokalizowane w przedziale  $Q_{20} = 25-30 \text{ b}$ . Jednocześnie, w miarę jak rośnie liczba neu-



**Rysunek 3.9:** Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154 - 168$ . Niebieskie kółka i czerwone przerywane linie przedstawiają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są cienką czarną linią.

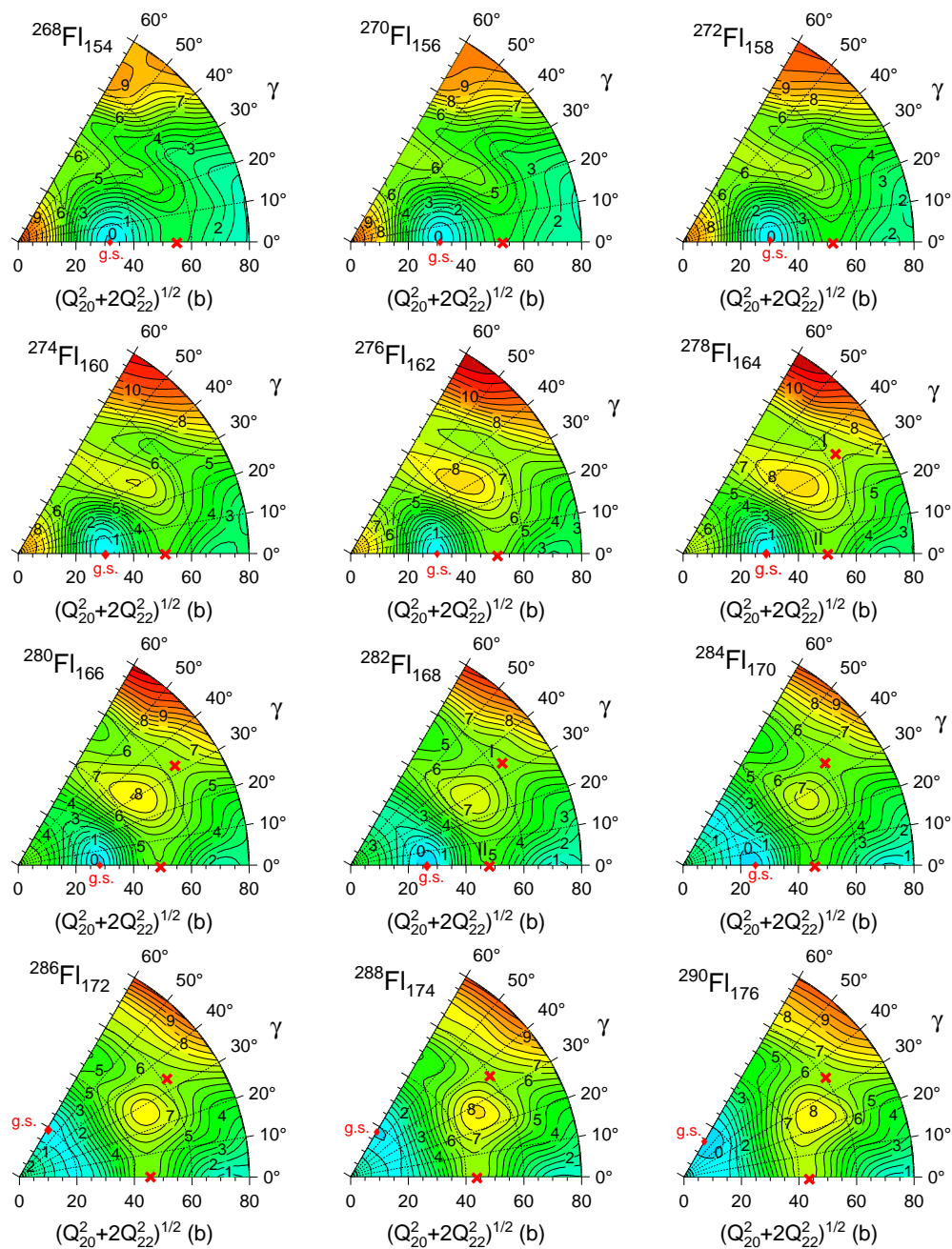


**Rysunek 3.10:** (kontynuacja Rys. 3.9.) Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów F1 ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 170 - 184$ . Niebieskie kółka i czerwone przerywane linie przedstawiają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiowosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są cienką czarną linią.



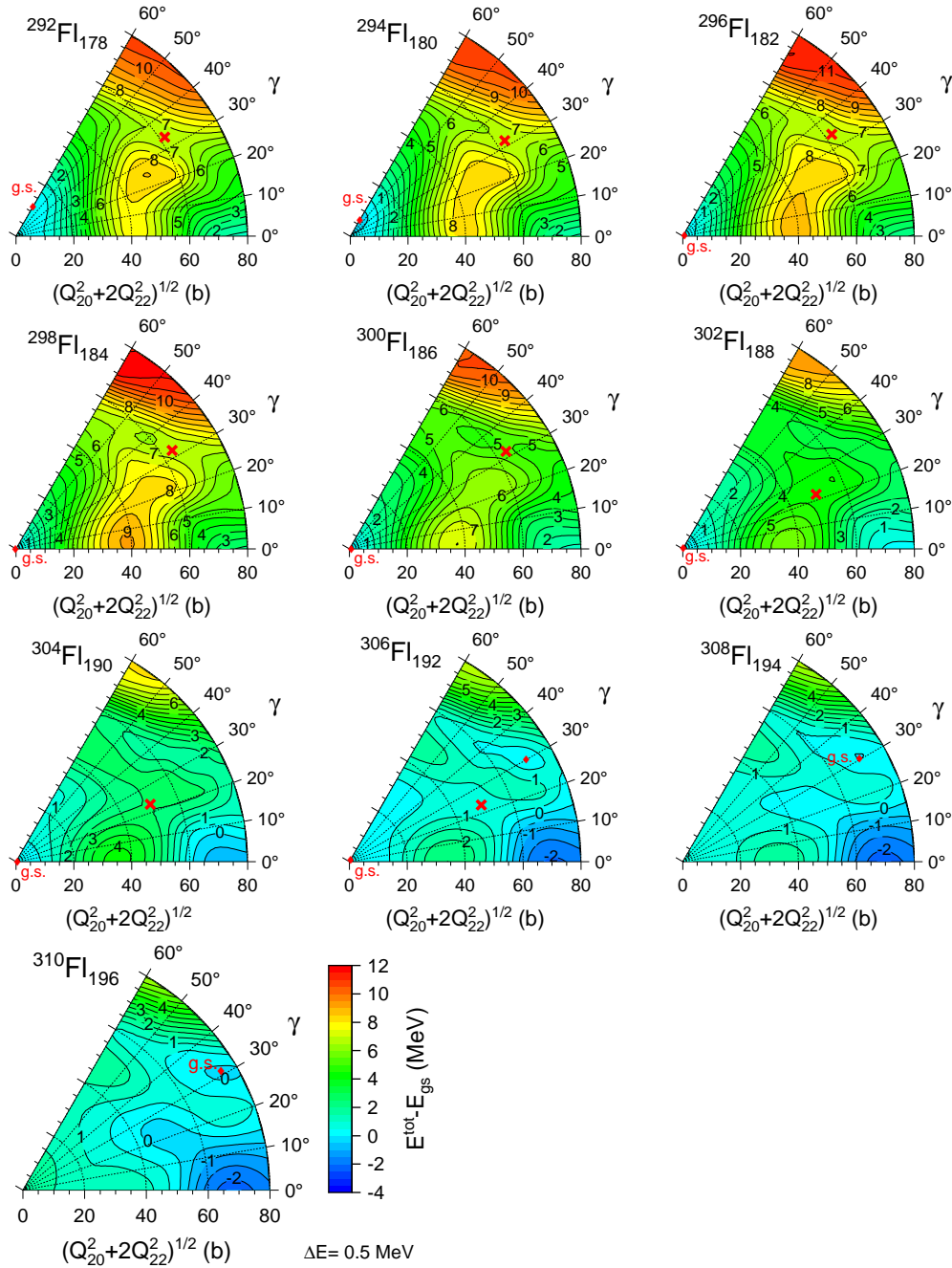
**Rysunek 3.11:** (kontynuacja Rys. 3.9 oraz 3.10.) Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 186 - 196$ . Niebieskie kółka i czerwone przerywane linie przedstawiają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są cienką czarną linią.

tronów lokalne maksimum wokół  $Q_{20} = 0$  b podlega redukcji z  $\sim 10$  MeV ( $N = 154$ ) do  $\sim 4$  MeV ( $N = 168$ ). W jądrze  $^{284}\text{Fl}_{170}$  pojawia się drugie, konkurujące minimum z  $Q_{20} \approx -25$  b. Oba osiosymetryczne minima z  $\gamma = 60^\circ$  i  $\gamma = 0^\circ$  połączone są doliną utworzoną przez deformacje trójosiowe. Powierzchnia energii HFB z trójosiową doliną i lokalnym sferycznym maksimum przypomina kształtem meksykańskie *sombrero*. Podobną powierzchnię energii HFB mają izotopy z  $N = 172-178$ , w których minima stanu podstawowego przesunięte są z  $\gamma = 0^\circ$  do  $\gamma = 60^\circ$ , przy czym mają zbliżone wartości energetyczne. W jądrze  $^{294}\text{Fl}_{180}$  lokalne sferyczne maksimum z  $Q_{20} = 0$  b zni-



**Rysunek 3.12:** Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  parzystych superciężkich izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154$ -176. Energia HFB znormalizowana została w stosunku do minimum stanu podstawowego (zaznaczonego czerwoną kropką). Punkty siłowe zaznaczone są czerwonym krzyżykiem. Różnica energii pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV.

ka i pojawia się szerokie minimum, w którym stany z deformacjami *oblate* ( $\gamma = 60^\circ$ ) i *prolate* ( $\gamma = 0^\circ$ ) są energetycznie nierozróżnialne od stanu sferycznego. Izotopy flerowu z  $N = 182$ -192 to jądra sferyczne, przy czym dla  $^{306}\text{Fl}_{192}$  z minimum sferycznym współistnieje minimum trójosiowe. W izotopach z  $N = 194$  i 196 występują jedynie mi-



**Rysunek 3.13:** (kontynuacja Rys. 3.12). Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  parzystych superciężkich izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 178-196$ . Energia HFB znormalizowana została w stosunku do minimum stanu podstawowego (zaznaczonego czerwoną kropką). Punkty siodłowe zaznaczone są czerwonym krzyżykiem. Różnica energii pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV

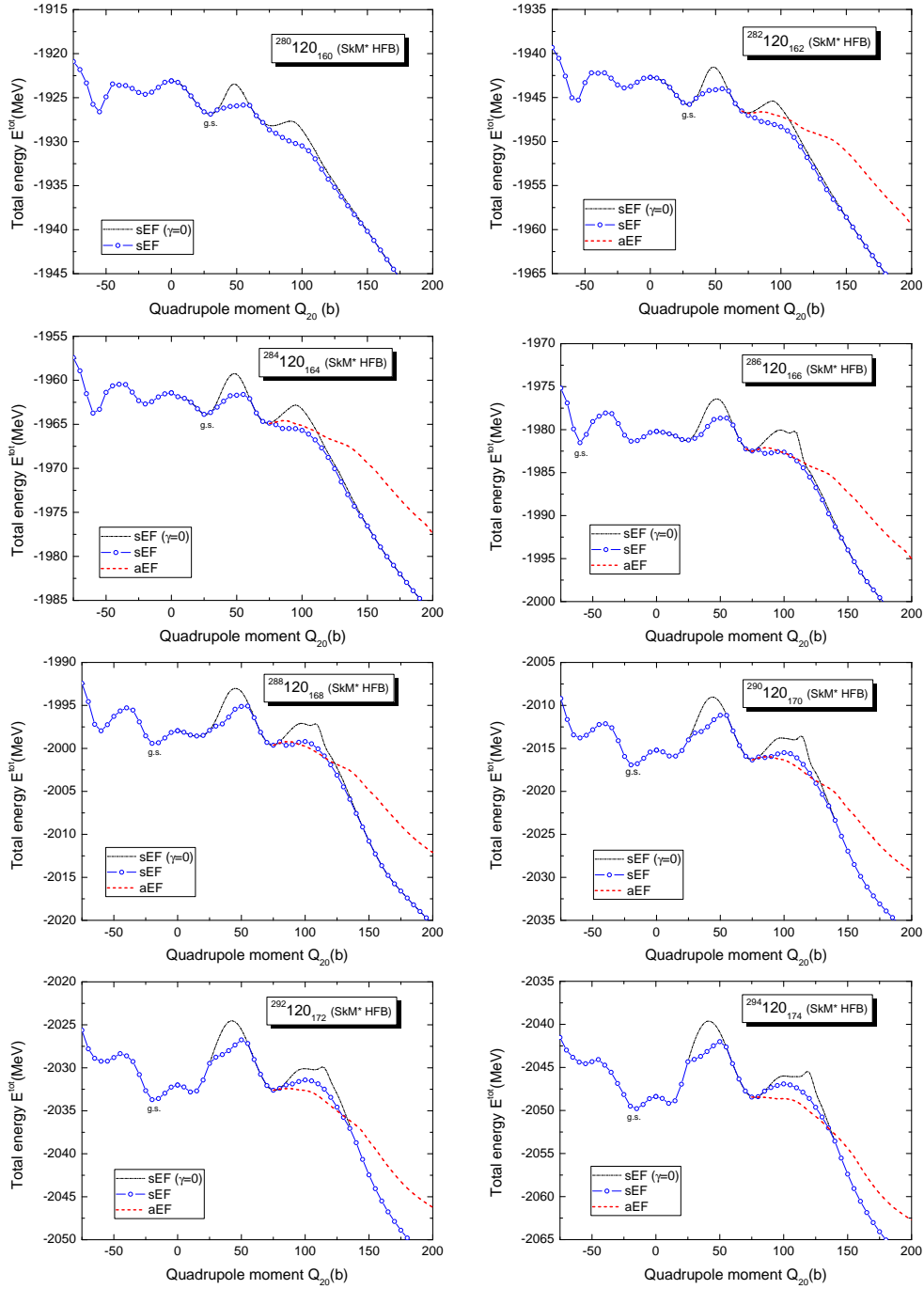
nima trójosiowe. W większości parzystych izotopów flerowu (z  $N = 164-192$ ) widoczne są trójosiowe punkty siodłowe, tym niemniej redukcja pierwszej osiowosymetrycznej bariery  $B_f$  ma miejsce jedynie dla izotopów z  $N = 176-192$ . W przypadku izotopów z  $N = 164-174$  trójosiowe punkty siodłowe mają energie wyższe niż  $B_f^{axial}$ . Na Rys.



3.19 (a) wykreślone zostały wysokości barier rozszczepieniowych  $B_f$  izotopów flerowu z  $N = 154-196$ . Przedstawiono również wielkość redukcji wysokości barier osiowosymetrycznych  $B_f^{axial}$  przez efekt związany z deformacjami trójosiowymi jąder. Największa redukcja barier  $B_f^{axial}$  obserwowana jest w  $^{296}\text{Fl}_{182}$  i  $^{298}\text{Fl}_{184}$ , gdzie sięga wartości 2.4 MeV. Informacje o stanach podstawowych i barierach rozszczepieniowych omawianych izotopów flerowu zostały zebrane w Tabeli 3.1.

Na Rys. 3.14, 3.15 oraz 3.16 przedstawione zostały wykresy całkowitej energii HFB parzystych superciężkich izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-196$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-75 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 200 \text{ b}$ . Na wykresach rozwiązania HFB z *elipsoidalnymi*, odbiciowo-symetrycznymi rozkładami materii jądrowej, z którymi związane są symetryczne ścieżki prowadzące do rozszczepienia (sEF), zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami. Czarne cienkie linie reprezentują osiowosymetryczne ( $\gamma = 0^\circ$ ) rozwiązania sEF w sąsiedztwie barier potencjału. Za wyjątkiem najcięższych izotopów z  $N > 184$  na wykresach  $E^{tot}(Q_{20})$  widoczne są dwugarbne bariery potencjału (sEF), z pierwszą barierą w pobliżu  $Q_{20} \approx 50 \text{ b}$  i drugą, niższą w sąsiedztwie  $Q_{20} \approx 100 \text{ b}$ . W przypadku izotopu  $^{306}120_{186}$  druga bariera podlega znaczącej redukcji, a dla izotopów  $N > 186$  znika.

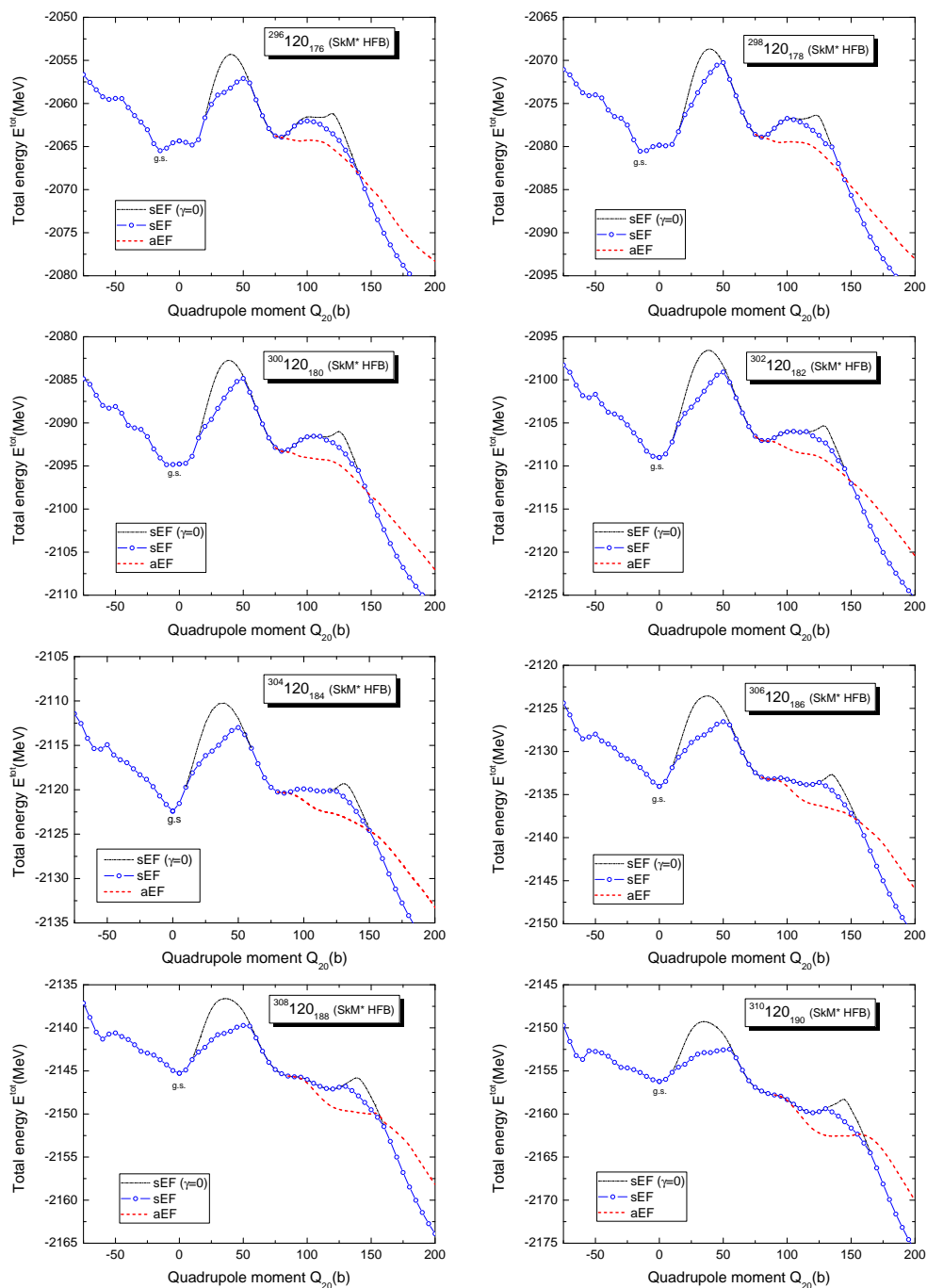
Dla wszystkich izotopów  $Z = 120$  widoczna jest redukcja energii HFB związana z dopuszczeniem trójosiowych deformacji elipsoidalnych jąder. Trójosiowemu efektowi redukcji  $E^{tot}$  podlegają zwłaszcza obszary deformacji  $Q_{20}$  związane z pierwszymi barierami. Pomijając jądro  $^{280}120_{160}$ , na wykresach  $E^{tot}(Q_{20})$  w przypadku pozostałych izotopów  $Z = 120$ , tuż za pierwszą barierą, oprócz symetrycznych ścieżek rozszczepieniowych (sEF) widoczne są ścieżki asymetryczne (aEF), które reprezentowane są przez czerwone przerywane linie. Asymetryczne ścieżki odpowiadają rozwiązaniom HFB ze złamaną parzystością przestrzenną  $\hat{P}$ , co prowadzi do pojawienia się niezerowych, nieparzystych momentów multipolowych ( $Q_{\lambda=2n+1, \mu \neq 0}$ ). Energie  $E^{tot}(Q_{20})$  policzone wzdłuż asymetrycznych (aEF) ścieżek, w przedziale  $80 \text{ b} < Q_{20} < 150 \text{ b}$ , leżą poniżej energii uzyskanych wzdłuż ścieżek symetrycznych (sEF). Oznacza to redukcję drugiej bariery potencjału w przypadku izotopów  $Z = 120$  z  $N = 162-184$ . Na Rys. 3.14, 3.15 i 3.16 zaznaczono również położenie stanu podstawowego (g.s.). W przypadku izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160-164$  stan podstawowy znajduje się w pobliżu  $Q_{20} \approx 30 \text{ b}$ . W przypadku tych neutronowo-deficytowych izotopów, z minimum stanu podstawowego konkuruje drugie minimum odpowiadające  $Q_{20} \approx -60 \text{ b}$  (*superdeformed oblate*, SDO) [17, 116]. W przypadku izotopu  $^{286}120_{166}$  minimum SDO staje się minimum stanu podstawowego. W jądrze tym z minimum SDO współistnieją dwa porównywalne energetycznie minima z  $Q_{20} \approx -20 \text{ b}$  i  $Q_{20} \approx 20 \text{ b}$ . Analizę tego szczególnego jądra przeprowadzono w podrozdziale 3.5.1. Izotopy z  $N = 168-178$  to jądra z deformacją *oblate* w stanie podstawowym  $Q_{20} \approx -20 \text{ b}$ , przy czym z minimum tym współwystępuje



**Rysunek 3.14:** Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów od  $N = 160$ -174. Niebieskie kółka i czerwone przerywane linie przedstawiają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są cienką czarną linią.

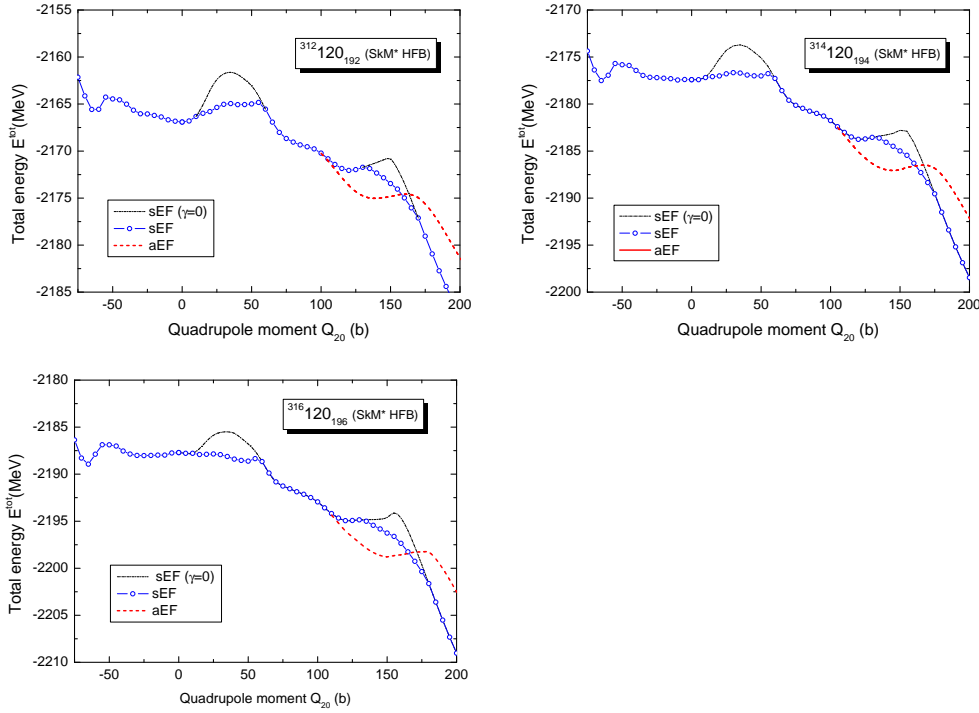
drugie lokalne minimum w sąsiedztwie deformacji *prolate* z  $Q_{20} \approx 20$  b. W izotopie  $^{300}120_{180}$  oba minima, z deformacją *oblate* i deformacją *prolate*, „łączą się”, gdyż rozdzielająca je lokalna bariera przy  $Q_{20} = 0$  b znika. Powstałe „szerokie” minimum





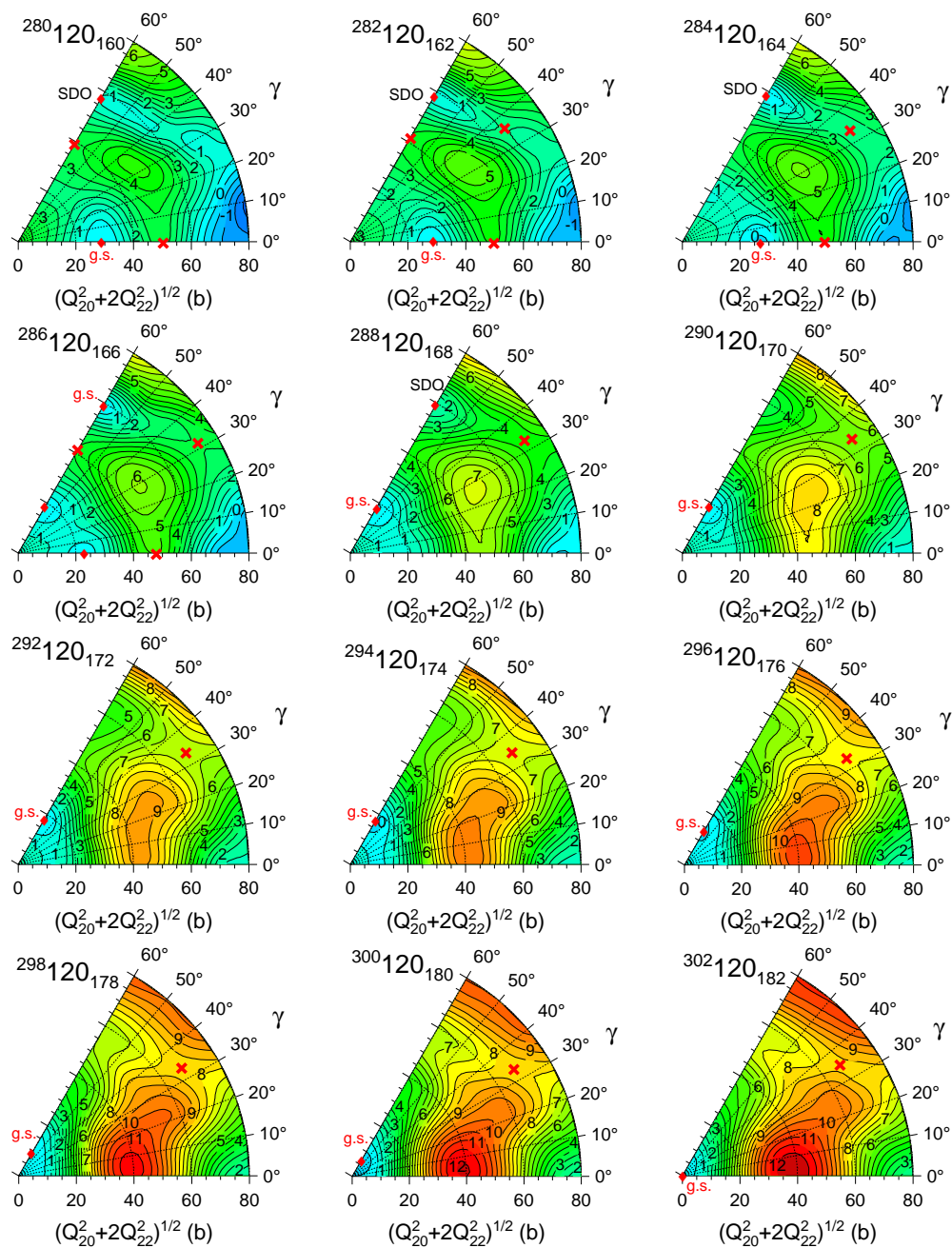
**Rysunek 3.15:** (kontynuacja Rys. 3.14.) Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów od  $N = 176$ -190. Niebieskie kółka i czerwone przerywane linie przedstawiają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są cienką czarną linią.

zawiera nierozróżnialne energetycznie stany z symetrią sferyczną oraz deformacjami *oblate* i *prolate*. Izotopy  $N = 182$ -194 to jądra sferyczne, natomiast izotop  $^{316}_{120}_{196}$  w stanie podstawowym ma deformację trójosiową (Rys. 3.18).



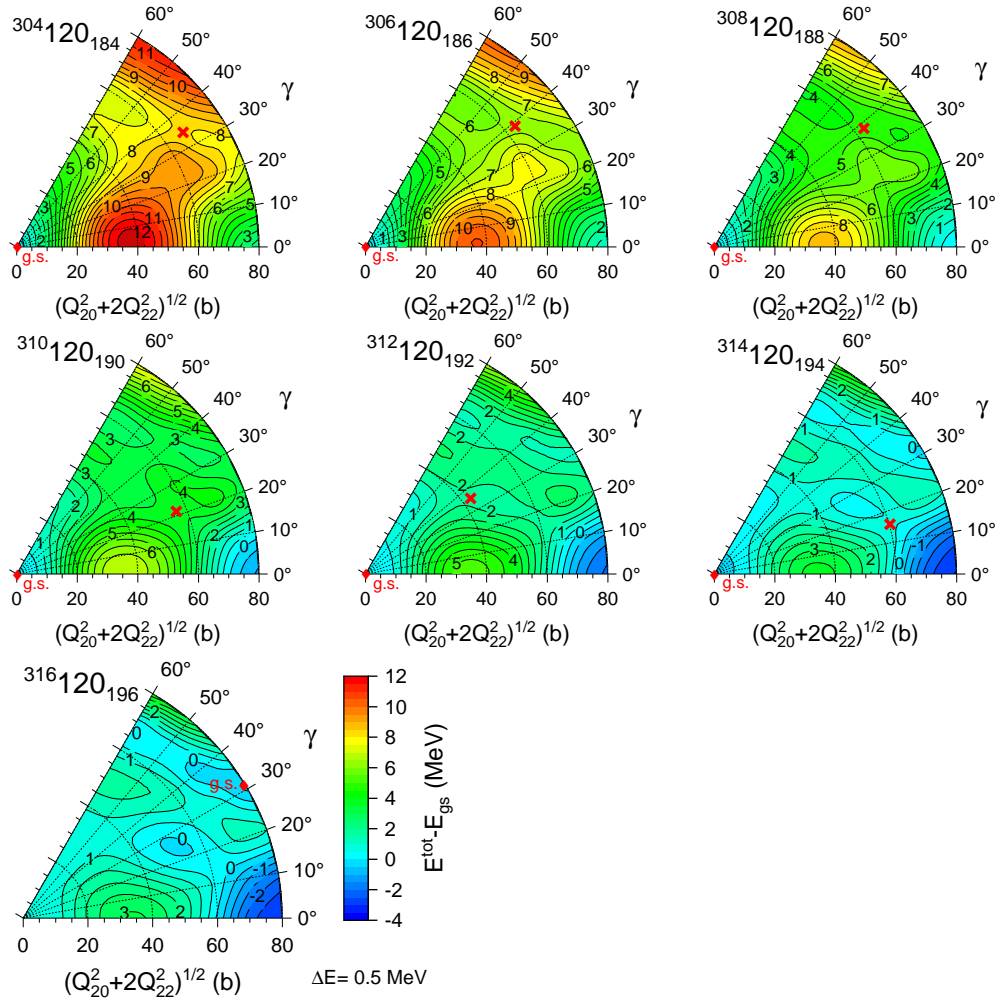
**Rysunek 3.16:** (kontynuacja Rys. 3.14 i 3.15.) Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów od  $N = 192$ -196. Niebieskie kółka i czerwone przerywane linie przedstawiają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są cienką czarną linią.

Na Rys. 3.17 i 3.18 energie HFB parzystych izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160$ -196 przedstawiono na diagramach  $\beta$ - $\gamma$ . Na diagramach energia HFB została unormowana do energii stanu podstawowego, którego położenie na mapie  $\beta$ - $\gamma$  oznaczono czerwoną kropką. Wszystkie diagramy przedstawione zostały w tej samej skali energetycznej, a odległość pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV. Punkty siodłowe oznaczone zostały czerwonymi krzyżykami. W przypadku neutronowo-deficytowych izotopów z  $N = 160$ -164 oprócz osiosymetrycznych minimów stanu podstawowego z deformacjami  $Q_{20} \approx 30$  b, zaznaczono lokalne minima SDO [17, 116] z  $Q_{20} = -60$  b. Minima SDO mają energie różniące się o mniej niż 500 keV od energii stanów podstawowych (Tab. 3.7), a w przypadku  $^{286}_{166}$  minimum SDO leży poniżej minimum *prolate* z  $Q_{20} \approx 20$  b. W tym jądrze widoczne jest trzecie minimum z wartością  $Q_{20} \approx -20$  b. Wszystkie trzy minima mają niemal identyczne wartości energetyczne. W podrozdziale 3.5.1 znajduje się szczegółowa analiza tego przypadku. W Tabeli 3.7 podane zostały energie deformacji w poszczególnych minimach dla izotopów z  $N = 160$ -170. W stanach podstawowych izotopy z  $N = 168$ -178 mają deformacje *oblate*  $Q_{20} \approx -20$  b. Z minimami stanów podstawowych ( $\gamma = 60^\circ$ ) współwystępują lokalne minima *prolate* ( $\gamma = 0^\circ$ ). Oba minima połączone są trójosiową doliną. Powierzchnie  $\beta$ - $\gamma$  energii



**Rysunek 3.17:** Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  parzystych superciężkich izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-182$ . Energia HFB znormalizowana została w stosunku do minimum stanu podstawowego (zaznaczonego czerwoną kropką). Punkty siodłowe zaznaczone są czerwonym krzyżykiem. Różnica energii pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV.

HFB tych izotopów, podobnie jak jądra  $^{286}120_{166}$ , przypominają kształtem meksykańskie *sombrero*. Izotopy z  $N = 166-178$  są podatne na deformacje trójosiowe ( $\gamma$ -soft) i zmianę deformacji *oblate* na *prolate*. W przypadku izotopu  $^{300}120_{180}$  lokalne sferyczne ( $Q_{20} = 0$  b) maksimum energii znika i widoczne jest „szerokie” płaskie minimum, w

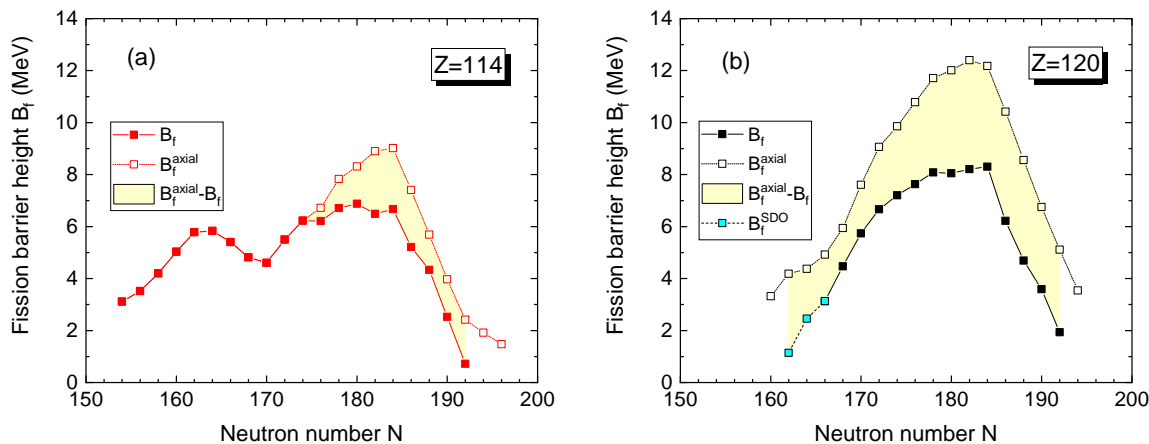


**Rysunek 3.18:** (kontynuacja Rys. 3.17.) Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  parzystych superciężkich izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 184$ -196. Energia HFB znormalizowana została w stosunku do minimum stanu podstawowego (zaznaczonego czerwoną kropką). Punkty siodłowe zaznaczone są czerwonym krzyżykiem. Różnica energii pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV.

którym mieszczą się stany z symetrią sferyczną oraz zdeformowane stany *oblate* i *prolate*. Izotopy  $Z = 120$  z  $N = 182$ -194 w stanie podstawowym mają symetrię sferyczną, przy czym w miarę zwiększania liczby neutronów sferyczne minima ulegają stopniowemu wypłaszczeniu w stronę deformacji *oblate*. W jądrze  $^{316}120_{196}$  minimum sferyczne całkowicie znika i stan podstawowy znajduje się w płaskim trójosiowym minimum.

Mapy  $\beta$ - $\gamma$  na Rys. 3.17 i 3.18 pozwalają przeprowadzić pełną analizę wpływu deformacji trójosiowych na wysokość pierwszych barier rozszczepieniowych  $B_f$ . W przypadku izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160$ -164, gdzie występują dwa osiowosymetryczne minima: stanu podstawowego ( $Q_{20} \approx 25$  b) i SDO ( $Q_{20} \approx -60$  b), zaznaczone są barier osiowosymetryczne  $B_f^{axial}$  i trójosiowe punkty siodłowe definiujące bariery dla superzdeformowanych minimum *oblate* (SDO). W panelu (b) Rys. 3.19 przedstawione zosta-

ły bariery rozszczepieniowe  $B_f$  i bariery osiowosymetryczne  $B_f^{axial}$  izotopów  $Z = 120$ . Redukcja  $B_f^{axial}$  przez efekty trójosiowe przekracza 4 MeV dla izotopów  $^{302}120_{182}$  i  $^{306}120_{186}$ .



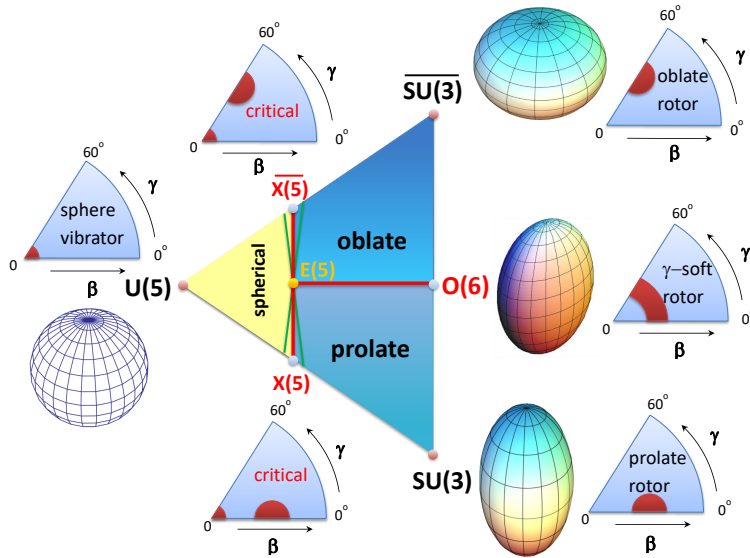
**Rysunek 3.19:** Wysokości barier rozszczepieniowych  $B_f$  parzystych izotopów flerowu ( $Z = 114$ ) z  $N = 154-196$  (panel (a)) oraz parzystych izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160-196$  (panel (b)). Zaznaczono obcięcia barier osiowosymetrycznych  $B_f^{axial}$  przez efekty trójosiowe. Niebieskie punkty w panelu (b) oznaczają wysokość barier dla super zdeformowanych minimów *oblate* (SDO).

Wysokości barier  $B_f$  izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160-184$  rosną wraz ze wzrostem liczby neutronów i osiągają maksymalną wartość 8.30 MeV w podwójnie magicznym izotopie  $^{304}120_{184}$ . Bariery  $B_f$  izotopów z  $N > 184$  szybko maleją ze wzrostem liczby neutronów. Bariery rozszczepieniowe parzystych izotopów  $Z = 120$  są o ponad 2 MeV wyższe od barier parzystych izotopów flerowu ( $Z = 114$ ), przedstawionych w panelu (a) Rys. 3.19. Wyniki dotyczące deformacji w stanach podstawowych oraz wysokości barier rozszczepieniowych  $B_f$  i  $B_f^{axial}$  izotopów flerowu ( $Z = 114$ ) i izotopów  $Z = 120$  zebrane zostały w Tabelach 3.1 i 3.2.

### 3.3.2 Kwantowe przemiany fazowe jądrowych deformacji równowagi

W paragrafie 3.3.1 opisane zostały zmiany deformacji równowagi parzystych izotopów flerowu ( $Z = 114$ ) i  $Z = 120$  w zależności od liczby neutronów w danym izotopie. Zmiany te można przedstawić w języku kwantowych przemian fazowych [117–120]. Kwantowe przemiany fazowe w fizyce jądrowej odnoszą się do przemian w konfiguracji geometrycznej układu jądrowego w zależności od liczby nukleonów wchodzących w skład tego układu. Algebraicznym modelem wykorzystywanym w fizyce jądrowej do opisu kwantowych przemian fazowych jest model oddziałujących bozonów (*Interacting*

*Boson Model, IBM*) [121]. W modelu oddziałujących bozonów sferyczne jądra parzysto-parzyste opisane są przez grupę  $U(5)$ , jądra z deformacją *prolate* przez grupę  $SU(3)$ , z deformacją *oblate* przez  $\overline{SU(3)}$ , a niestabilne osiowo, podatne na deformacje trójosiowe ( $\gamma$ -soft) przez grupę  $O(6)$ . W modelu IBM wymienione cztery grupy reprezentują dynamiczne symetrie układu jądrowego [117, 122].



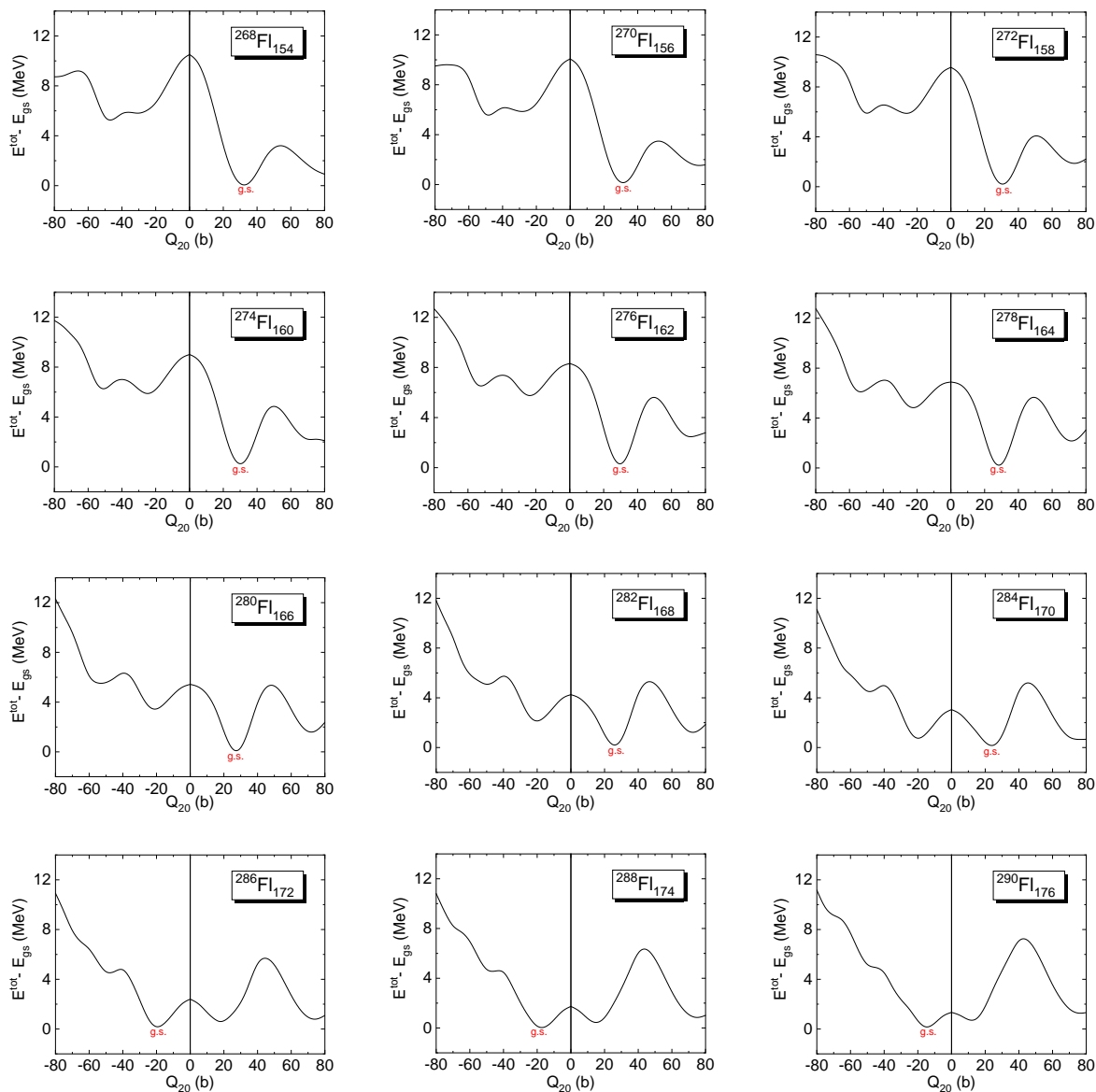
**Rysunek 3.20:** Rozszerzony trójkąt Castena. Każdemu wierzchołkowi trójkąta przyporządkowana jest symetria dynamiczna odpowiadająca symetrii sferycznej ( $U(5)$ ), *prolate* ( $SU(3)$ ) i *oblate* ( $\overline{SU(3)}$ ). Czerwone linie reprezentują przemiany fazowe I rodzaju. Linie te przecinają się w punkcie potrójnym  $E(5)$ , związanym z przemianą fazową II rodzaju. Obszar pomiędzy zielonymi liniami określa strefę współwystępowania fazy sferycznej i zdeformowanej.

Na Rys. 3.20 przedstawiony został tzw. rozszerzony trójkąt Castena [117–119]. Symetrie dynamiczne  $U(5)$ ,  $SU(3)$  i  $\overline{SU(3)}$  odpowiadające odpowiednio za deformacje sferyczne, *prolate* i *oblate* umieszczone zostały w wierzchołkach trójkąta. Boki trójkąta reprezentują nieciągłe przemiany fazowe pierwszego rodzaju:  $U(5) \longleftrightarrow SU(3)$  z punktem krytycznym  $X(5)$  [123],  $U(5) \longleftrightarrow \overline{SU(3)}$  z punktem krytycznym  $\overline{X(5)}$  oraz  $SU(3) \longleftrightarrow \overline{SU(3)}$ , gdzie rolę punktu krytycznego pełni symetria dynamiczna  $O(6)$  [117–119]. Przemiany fazowe deformacji mogą mieć miejsce również wewnątrz trójkąta Castena. Czerwone linie oddzielające deformacje: sferyczne, *prolate* i *oblate* reprezentują przemiany fazowe pierwszego rodzaju. Linie te przecinają się w punkcie potrójnym  $E(5)$  [120, 122], w którym ma miejsce ciągła przemiana fazowa drugiego rodzaju między  $U(5)$  a  $SU(3)$  lub  $\overline{SU(3)}$ . W punkcie potrójnym współwystępują trzy fazy jądrowych deformacji: sferyczna, *prolate* i *oblate*.

Ewolucję kształtów równowagi i związane z nią przemiany fazowe deformacji parzystych izotopów flerowu i  $Z = 120$  ilustrują odpowiednio Rys. 3.21, 3.22 oraz Rys.

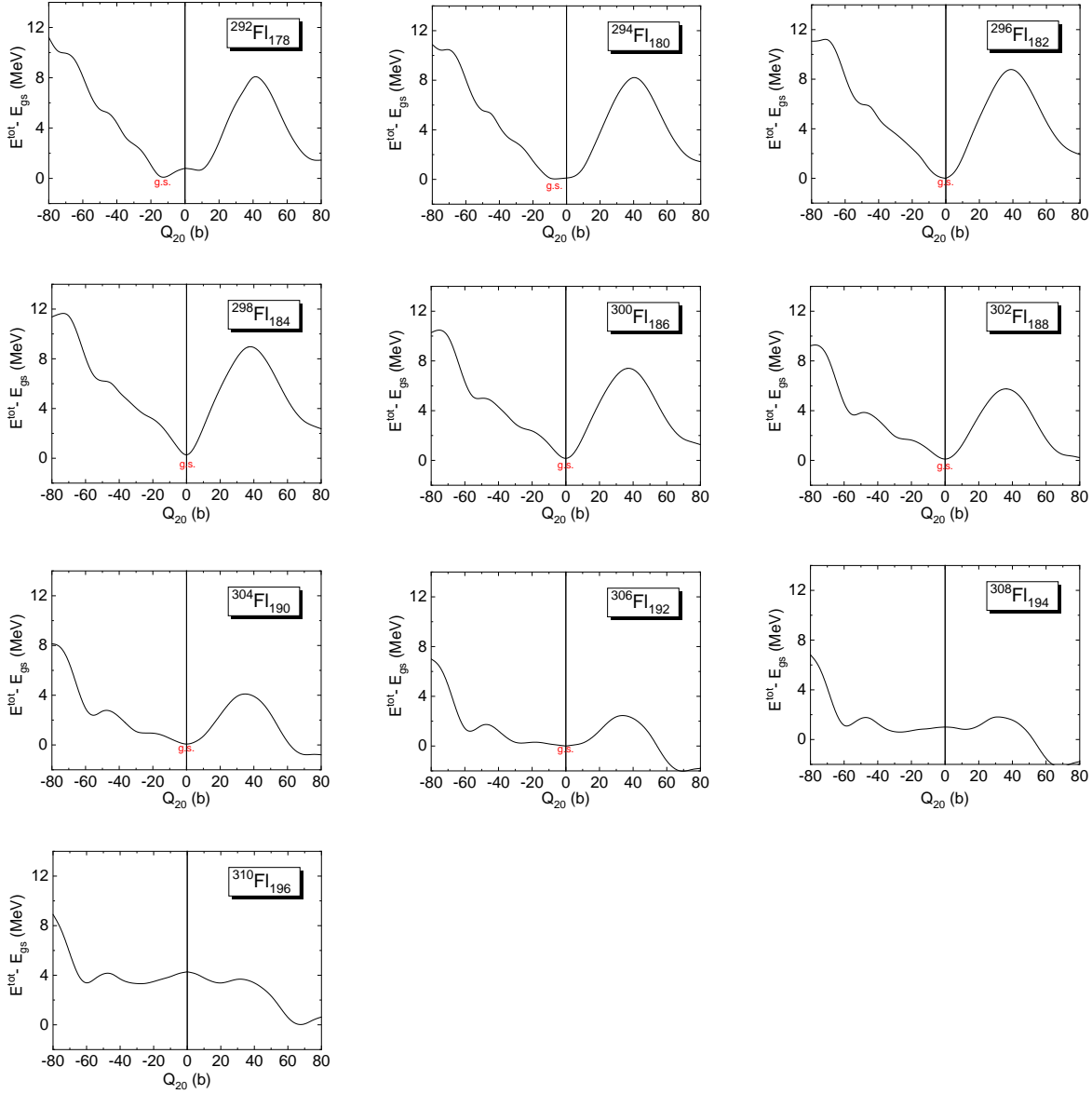


3.23, 3.24. Na rysunkach tych przedstawione zostały osiowosymetryczne energie HFB w funkcji momentu kwadrupolowego, wziętego w przedziale  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$ . Na rysunkach można prześledzić zmiany położenia deformacji równowagi w zależności od liczby neutronów w izotopach Fl i  $Z = 120$ .



**Rysunek 3.21:** Osiowosymetryczne energie HFB, znormalizowane w stosunku do minimum stanu podstawowego, w funkcji momentu kwadrupolowego  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$  parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154-176$ .

Na Rys. 3.25 przedstawiono wartości  $Q_{20}$  w stanach podstawowych izotopów Fl (czerwone kółka) oraz izotopów  $Z = 120$  (czarne małe kółka). Dodatkowo, dla  $^{284}\text{Fl}_{170}$  i  $^{306}\text{Fl}_{192}$ , oprócz wartości  $Q_{20}$  w stanie podstawowym zaznaczono wartości momentów kwadrupolowych z drugiego (konkurującego wobec stanu podstawowego) minimum (czerwone puste kółka). W przypadku izotopu  $^{306}\text{Fl}_{192}$  to drugie minimum odpowiada

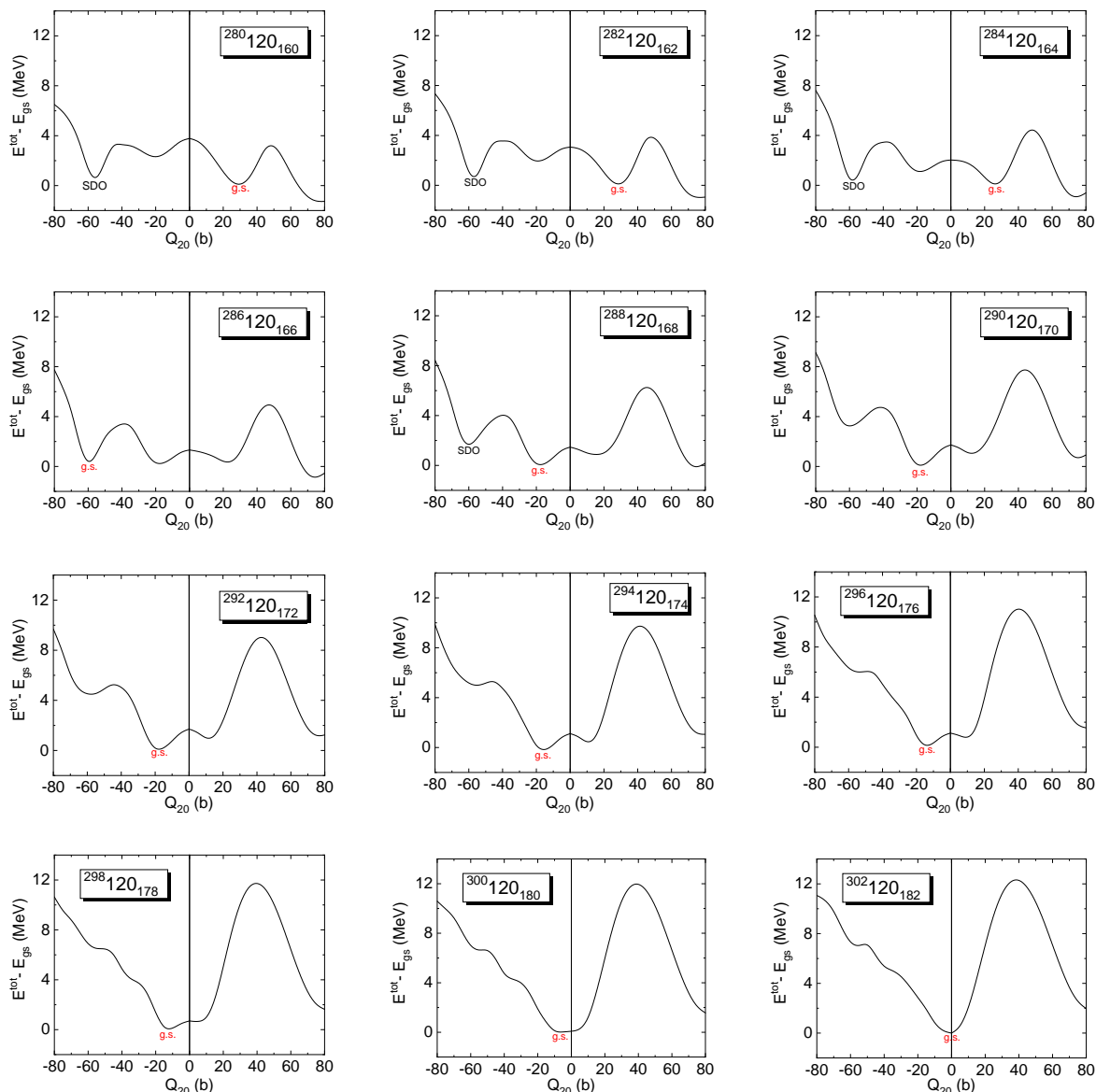


**Rysunek 3.22:** (kontynuacja Rys. 3.21). Osiowosymetryczne energie HFB, znormalizowane w stosunku do minimum stanu podstawowego, w funkcji momentu kwadrupolowego  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$  parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 178-196$ .

deformacji trójosiowej (Rys. 3.13).

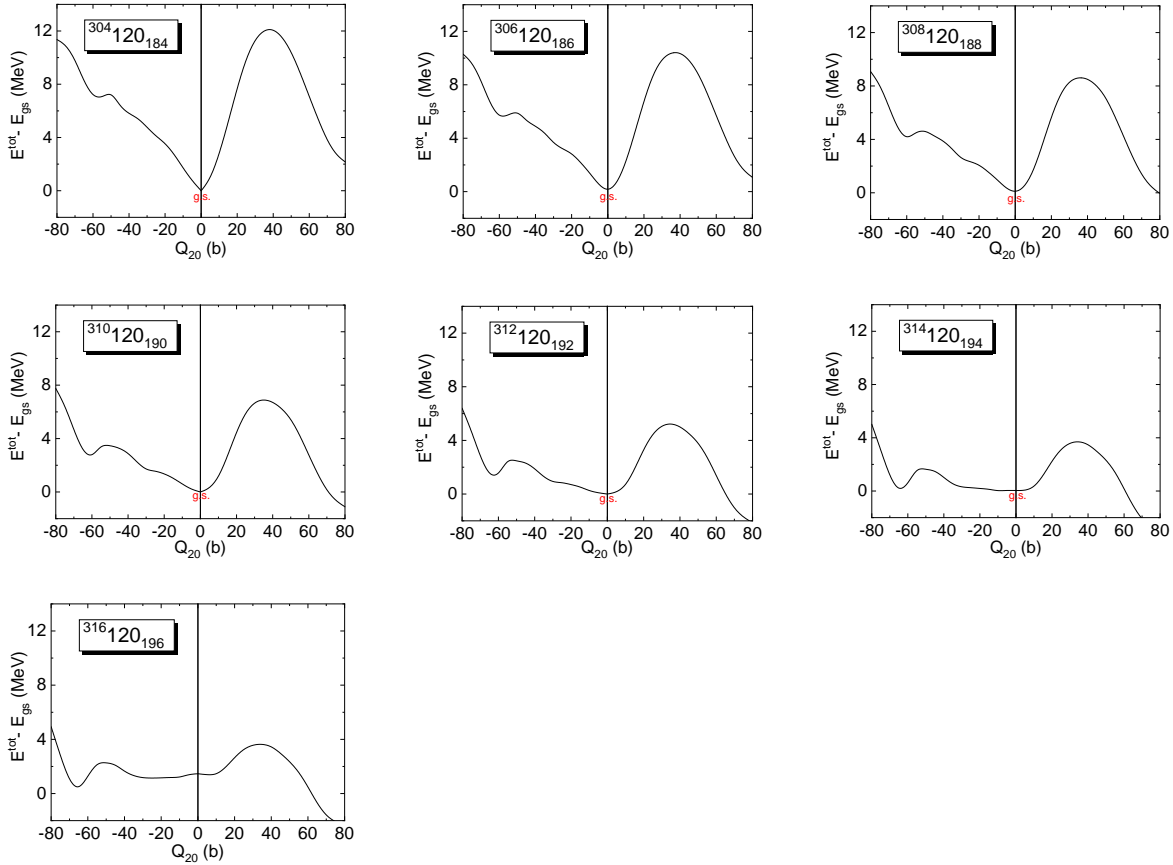
W przypadku izotopu  $^{286}\text{Fl}_{166}$ , oprócz  $Q_{20}$  w minimum stanu podstawowego (*superdeformed oblate*, SDO) [17, 116] zaznaczono wartości  $Q_{20}$  w dwóch, bliskich energetycznie do stanu podstawowego SDO, minimach *prolate* i *oblate* (czarne puste kółka). Niebieskie małe kółka oznaczają wartości  $Q_{20}$  w minimach SDO izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160, 162$  i  $164$ . Parzyste izotopy flerowu ( $Z = 114$ ) z  $154 \leq N \leq 170$  mają deformację *prolate* i odpowiadają symetrii dynamicznej  $SU(3)$  w modelu IBM. Izotopy Fl z  $172 \leq N \leq 178$  to grupa jąder niestabilnych osiowo, które opisuje symetria dynamiczna  $O(6)$ . W izotopie granicznym  $^{284}\text{Fl}_{170}$  zachodzi gwałtowna zmiana momentu kwadru-



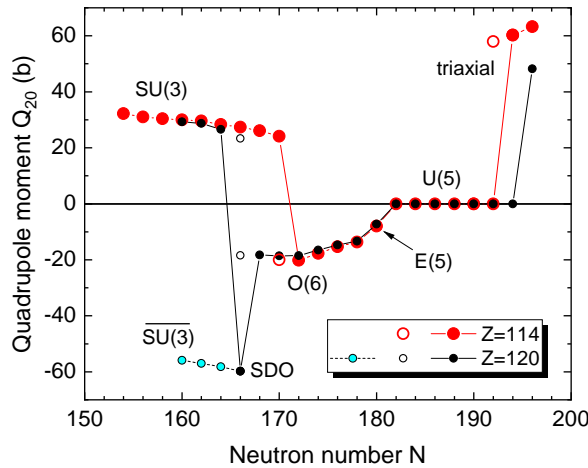


**Rysunek 3.23:** Osiosymetryczne energie HFB, znormalizowane w stosunku do minimum stanu podstawowego, w funkcji momentu kwadrupolowego  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$  parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-182$ .

polowego i współwystępują dwa minima, *prolate* i *oblate*. Reprezentowany przez jądro  $^{284}\text{Fl}_{170}$  punkt krytyczny  $O(6)$  opisuje nieciągłą przemianę fazową pierwszego rodzaju, w której współwystępują obie fazy *prolate* i *oblate*. Izotopy Fl z  $182 \leq N \leq 192$  to jądra sferyczne z symetrią dynamiczną  $U(5)$ , przy czym w izotopie  $^{306}\text{Fl}_{192}$  oprócz sferycznego minimum współwystępuje również minimum trójosiowe. Podobnie, dwa ostatnie izotopy  $^{308}\text{Fl}_{194}$  i  $^{310}\text{Fl}_{196}$  mają płaskie minima trójosiowe, Rys. 3.13. Przejście między grupą izotopów niestabilnych osiowo  $O(6)$  a grupą izotopów sferycznych  $U(5)$  opisuje punkt potrójny  $E(5)$  reprezentowany przez izotop  $^{294}\text{Fl}_{180}$ , którego energia HFB w funkcji  $Q_{20}$  tworzy szerokie minimum w kształcie litery U. W punkcie potrójnym  $E(5)$ ,



**Rysunek 3.24:** (kontynuacja Rys. 3.23). Osiowosymetryczne energie HFB, znormalizowane w stosunku do minimum stanu podstawowego, w funkcji momentu kwadrupolowego  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$  parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 184-196$ .



**Rysunek 3.25:** Momenty kwadrupolowe w stanach podstawowych parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) (czerwone kółka) oraz izotopów  $Z = 120$  (czarne kółka). W przypadku izotopów, w których występują minima konkurencyjne wobec minimum stanu podstawowego,  $^{284}\text{Fl}_{170}$ ,  $^{306}\text{Fl}_{192}$ ,  $^{286}\text{Fl}_{166}$ , zaznaczono dodatkowe  $Q_{20}$  (puste kółka). Momenty kwadrupolowe w minimach SDO neutronowo-deficytowych izotopów  $Z = 120$  zaznaczono niebieskimi kółkami.

gdzie współwystępują trzy fazy: *sferyczna*, *prolate* i *oblate*, zachodzi ciągła przemiana fazowa drugiego rodzaju między  $O(6) \longleftrightarrow U(5)$ .

Wykorzystując Rys. 3.25 można przeprowadzić podobną analizę przemian fazowych dla parzystych izotopów  $Z = 120$ . Jediną istotną różnicą w stosunku do izotopów Fl jest występowanie ekstremalnych minimów *oblate* (SDO) w neutronowo deficytowych izotopach  $Z = 120$  z  $N = 160, 162, 164$  i  $166$ . Minima SDO występują obok minimów *prolate* stanu podstawowego. Jedyne w izotopie  $^{286}120_{166}$  minimum SDO staje się minimum stanu podstawowego, z którym konkurują dwa dodatkowe minima, *oblate*  $Q_{20} \approx -20$  b i *prolate*  $Q_{20} \approx 25$  b. Parzyste izotopy  $Z = 120$  z  $160 \leq N \leq 164$  opisuje symetria dynamiczna  $SU(3)$  (deformacja *prolate*), a biorąc pod uwagę minima SDO, symetria dynamiczna  $\overline{SU(3)}$ . Kolejne izotopy z  $168 \leq N \leq 178$  należą do grupy niestabilnych osiowo jąder z symetrią dynamiczną  $O(6)$ . Izotop przejściowy  $^{286}120_{166}$  reprezentuje punkt krytyczny  $O(6)$ , w którym ma miejsce nieciągła przemiana fazowa pierwszego rodzaju i współwystępują fazy *prolate*, *oblate* i ekstremalna *oblate* (SDO). Podobnie, jak to miało miejsce dla izotopu  $^{294}Fl_{180}$ , izotop  $^{300}120_{180}$  pełni rolę punktu potrójnego  $E(5)$ , w którym zachodzi ciągła przemiana fazowa drugiego rodzaju między symetrią dynamiczną  $O(6)$  a symetrią  $U(5)$  opisującą jądra sferyczne. Izotopy  $Z = 120$  z  $182 \leq N \leq 194$  to jądra sferyczne z symetrią dynamiczną  $U(5)$ , natomiast izotop  $^{316}120_{196}$  ma płytkie minimum trójosiowe, Rys. 3.18.

Kwantowe przemiany fazowe momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$  w superciężkich parzystych izotopach Fl i  $Z = 120$  mają niemal identyczny charakter. Wraz ze wzrostem liczby neutronów następuje przejście od kształtów zdeformowanych *prolate* lub *oblate* (biorąc pod uwagę również minima SDO) do izotopów sferycznych z liczbą neutronów bliską magicznej liczbie  $N = 184$ . Przejściu temu towarzyszą dwie przemiany fazowe:

- nieciągła pierwszego rodzaju, między jądrami zdeformowanymi osiowo  $SU(3)$  lub  $\overline{SU(3)}$  a przejściowymi jądrami osiowo niestabilnymi  $O(6)$ ,
- ciągła drugiego rodzaju, między jądrami przejściowymi  $O(6)$  a jądrami sferycznymi  $U(5)$ , mająca miejsce w punkcie potrójnym  $E(5)$ , przy  $N = 180$ .

Warto zauważyć, że w przypadku superciężkich parzystych izotopów Fl i  $Z = 120$  nie występuje alternatywny scenariusz przejścia od jąder osiowo zdeformowanych bezpośrednio do sferycznych jąder poprzez punkty krytyczne  $X(5)$  lub  $\overline{X(5)}$ , Rys. 3.20, z jedną przemianą fazową pierwszego rodzaju.

### 3.3.3 Rozpady alfa

Całkowita energia wiązania atomu dana jest wzorem

$$E_{bind}(Z, N) = Zm_H + Nm_n - M(Z, N), \quad (3.3)$$

gdzie  $m_H$  - to masa atomu wodoru  $1H$ ,  $m_n$  - masa neutronowa, a  $M(Z, N)$  - masa atomu  $(Z, N)$ . Całkowita energia  $E_{bind}(Z, N)$  wyrażana jest często poprzez niedobór (deficyt) masy atomowej  $\Delta(Z, N)$

$$E_{bind}(Z, N) = Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta(Z, N), \quad (3.4)$$

gdzie  $\Delta_H = m_H - u$ ,  $\Delta_n = m_n - u$ , a  $u$  jest jednostką masy atomowej (1/12 masy atomu  $^{12}C$ ).

Masę jądra (w MeV) można wyznaczyć z niedoboru masy atomowej lub z całkowitej energii wiązania

$$M_{nucl}(Z, N) = (Z + N)u + \Delta(Z, N) - Zm_e + a_{el}Z^{2.39} \quad (3.5)$$

$$= Zm_H + Nm_n - E_{bind}(Z, N) - Zm_e + a_{el}Z^{2.39}, \quad (3.6)$$

gdzie  $m_e$  to masa elektronu, a  $a_{el}Z^{2.39} = 1.433 \times 10^{-5}$  MeV to energia wiązania  $Z$  elektronów wchodzących w skład atomu [124].

Uwolnioną w rozpadzie  $\alpha$  energię  $Q_\alpha$  wyznacza się z jednej z formuł:

$$Q_\alpha(Z, N) = \Delta(Z, N) - \Delta(Z - 2, N - 2) - \Delta(2, 2) \quad (3.7)$$

$$= E_{bind}(Z - 2, N - 2) + E_{bind}(2, 2) - E_{bind}(Z, N), \quad (3.8)$$

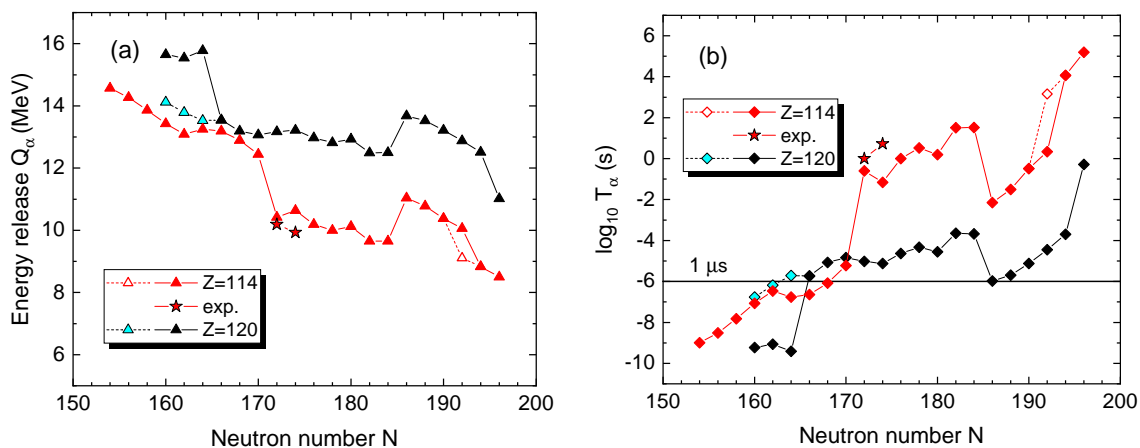
gdzie  $\Delta(2, 2) = 2.42$  MeV to niedobór masy,  $E_{bind}(2, 2) = 28.30$  MeV to energia wiązania atomu  $^4He$ . We wzorze (3.8) energia wiązania równa się wziętej ze znakiem minus całkowitej energii HFB w stanie podstawowym  $E_{bind}(Z, N) = -E^{tot}(Z, N)$ .

Logarytm czasu połowicznego zaniku w procesie rozpadu  $\alpha$  wyznaczony został z 3-parametrowej formuły dla najcięższych jąder parzysto-parzystych

$$\log T_\alpha = Z \cdot a / \sqrt{Q_\alpha} + Z \cdot b + c, \quad (3.9)$$

gdzie  $a = 1.5372$ ,  $b = -0.1607$  i  $c = -36.573$  [125].

Na Rys. 3.26 przedstawione zostały energie  $Q_\alpha$  - panel (a) i odpowiadające im (rów. (3.9))  $\log T_\alpha$  - panel (b) dla parzystych izotopów flerowu ( $Z = 114$ ) (kolor czerwony) oraz izotopów  $Z = 120$  (kolor czarny). Przedstawione wartości  $Q_\alpha$  odpowiadają przejściom między konfiguracjami stanów podstawowych jądra „matki” i jądra „córki”. W przypadku izotopu  $^{306}Fl_{192}$  przedstawiono również wyniki dla konkurującego wobec stanu podstawowego minimum trójosiowego (czerwony pusty symbol). Wśród neutronowo-deficytowych izotopów  $Z = 120$ , występują minima odpowiadające  $Q_{20} \approx -60$  b (*superdeformed oblate*, SDO) [17, 116]. Na Rys. 3.26 wartości  $Q_\alpha$  i  $\log T_\alpha$  odpowiadające przejściom między konfiguracjami SDO-SDO zaznaczono kolorem niebieskim. Czerwone gwiazdki reprezentują dane eksperymentalne ( $^{286}Fl_{172}$ ,  $^{288}Fl_{174}$ ). Uzyskane wartości  $T_\alpha$  rosną wraz ze wzrostem liczby neutronów w obu łańcuchach izotopów. Uwzględniając konfiguracje SDO w neutronowo-deficytowych izotopach  $Z = 120$ , wartości  $T_\alpha$



**Rysunek 3.26:** Wartości energii uwalnianej w rozpadzie  $\alpha$   $Q_\alpha$  - panel (a) i  $\log T_\alpha$  - panel (b) parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) (symbole czerwone) oraz parzystych izotopów  $Z = 120$  (symbole czarne) obliczone dla przejść między konfiguracjami stan podstawowy-stan podstawowy. W przypadku izotopu  $^{306}\text{Fl}_{192}$  przedstawiono również  $Q_\alpha$  i  $\log T_\alpha$  dla konfiguracji z minimum trójosiowego (czerwone puste symbole). W izotopach  $Z = 120$  wartości  $Q_\alpha$  i  $\log T_\alpha$  dla przejść pomiędzy konfiguracjami SDO-SDO oznaczono kolorem niebieskim.

dla  $N \leq 170$  w przypadku obu łańcuchów przyjmują podobne wartości, odpowiadające  $\sim 1 \mu\text{s}$ .

Dla  $N \geq 172$  wartości  $T_\alpha$  izotopów Fl gwałtownie wzrastają do wartości  $\sim 1$  s i dla  $^{298}\text{Fl}_{184}$  osiągają wartość  $T_\alpha = 33.1$  s. Odpowiednio, w przypadku izotopu  $^{304}\text{Fl}_{184}$   $T_\alpha = 0.21$  ms, tj. o ponad 5 rzędów wielkości mniej niż dla  $^{298}\text{Fl}_{184}$ . Przy zmianie liczby neutronów z 184 na 186 w obu łańcuchach izotopów widoczny jest gwałtowny spadek wartości  $T_\alpha$ , charakterystyczny dla zamkniętej powłoki związanej z  $N = 184$ .

Parametry opisujące konfiguracje stanów podstawowych: energie całkowite  $E^{tot}$ , momenty kwadrupolowe  $Q_{20}$ , parametry Bohra  $\beta$ ,  $\gamma$ , a także wartości energii  $Q_\alpha$  i  $\log T_\alpha$  oraz wysokości barier rozszczepieniowych (osiowosymetrycznych  $B_f^{axial}$  i trójosiowych  $B_f$ ) dla parzystych izotopów Fl i  $Z = 120$  zostały odpowiednio zebrane w Tabeli 3.1 i Tabeli 3.2.

### 3.3.4 Powierzchnie potencjału - deformacja *oblate*

W podrozdziale 3.2 (Rys. 3.3 i 3.5) przedstawiona została skokowa zmiana topologii zdeformowanej powierzchni jądrowej w izotopie  $^{304}\text{Fl}_{184}$ . W przypadku, kiedy deformacja *oblate* izotopu osiąga wartość krytyczną  $Q_{20}^{cr}$ , jednospójna (genus=0) powierzchnia dysku dwustronnie wklęsłego zmienia się w powierzchnię toroidalną (genus=1) [111]. Przemianie tej towarzyszy skokowe zwiększenie energii wiązania.

Na Rys. 3.27, 3.28 i 3.29 przedstawione zostały energie HFB parzystych izotopów flerowu ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154-196$  w funkcji momentu kwadrupo-

**Tabela 3.1:** Parametry charakteryzujące konfiguracje stanu podstawowego: energie całkowite  $E^{tot}$ , momenty kwadrupolowe  $Q_{20}$ , parametry Bohra ( $\beta, \gamma$ ); energie uwalniane w rozpadzie  $\alpha$   $Q_\alpha$ , logarytmy czasu połowicznego zaniku  $\log T_\alpha$ ; wysokości barier  $B_f$  i barier osiowosymetrycznych  $B_f^{axial}$  parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154 - 196$ .

$N$	$E^{tot}$ (MeV)	$Q_{20}$ (b)	$\beta$	$\gamma$ ( $^\circ$ )	$Q_\alpha$ (MeV)	$\log T_\alpha$ (s)	$B_f$ (MeV)	$B_f^{axial}$ (MeV)
154	-1887.76	32.18	0.27	0.00	14.57	-8.99	3.11	3.11
156	-1905.80	31.04	0.25	0.00	14.27	-8.51	3.52	3.52
158	-1923.55	30.39	0.24	0.00	13.86	-7.82	4.20	4.20
160	-1940.97	29.98	0.24	0.00	13.43	-7.07	5.03	5.03
162	-1957.91	29.57	0.23	0.00	13.09	-6.47	5.78	5.78
164	-1973.82	28.31	0.22	0.00	13.25	-6.76	5.83	5.83
166	-1988.87	27.35	0.21	0.00	13.19	-6.64	5.40	5.40
168	-2003.37	26.12	0.20	0.00	12.89	-6.08	4.82	4.82
170	-2017.45	24.14	0.18	0.00	12.44	-5.22	4.60	4.60
172	-2031.67	-20.16	0.30	60.00	10.42	-0.60	5.50	5.50
174	-2045.61	-17.67	0.26	60.00	10.64	-1.16	6.23	6.23
176	-2059.28	-15.33	0.22	60.00	10.19	0.00	6.21	6.72
178	-2072.47	-13.66	0.20	60.00	10.00	0.52	6.71	7.83
180	-2084.91	-7.97	0.11	60.00	10.12	0.20	6.88	8.31
182	-2097.19	0.00	0.00	0.00	9.65	1.51	6.49	8.90
184	-2108.94	0.00	0.00	0.00	9.65	1.52	6.67	9.02
186	-2118.74	0.00	0.00	0.00	11.04	-2.15	5.21	7.41
188	-2128.22	0.00	0.00	0.00	10.78	-1.51	4.33	5.69
190	-2137.43	0.00	0.00	0.00	10.38	-0.49	2.53	3.97
192	-2146.37	0.00	0.00	0.00	10.06	0.34	0.72	2.42
194	-2156.31	60.28	0.47	32.09	8.83	4.07	< 1	1.92
196	-2165.99	63.24	0.48	31.27	8.50	5.20	< 1	1.47

lowego branego w przedziale  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . W zakresie  $-250 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$  wartości energii HFB  $E^{tot}(Q_{20})$  wyznaczono z krokiem  $\Delta Q_{20} = 5 \text{ b}$ , a dla  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} < -250 \text{ b}$  przyjęto  $\Delta Q_{20} = 10 \text{ b}$ . Podobnie, na Rys. 3.30, 3.31 i 3.32 zaprezentowano energie HFB w funkcji  $Q_{20}$  parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-196$ .

W przedstawionym na rysunkach zakresie  $Q_{20}$ , izotopy Fl i  $Z = 120$  przyjmują osiowosymetryczne deformacje z niezłamaną inwersją przestrzenną  $\hat{P}$ , z zachowaną symetrią obrotu o kąt  $\pi$  względem osi prostopadłej do osi symetrii ( $\hat{R}_y = \exp(-i\pi\hat{J}_y)$ ) oraz z zachowanymi symetriami odbiciowymi względem trzech płaszczyzn  $yz, xz, i xy$  ( $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ ). Tym samym uzyskane rozwiązania mają symetrie odpowiadające syme-

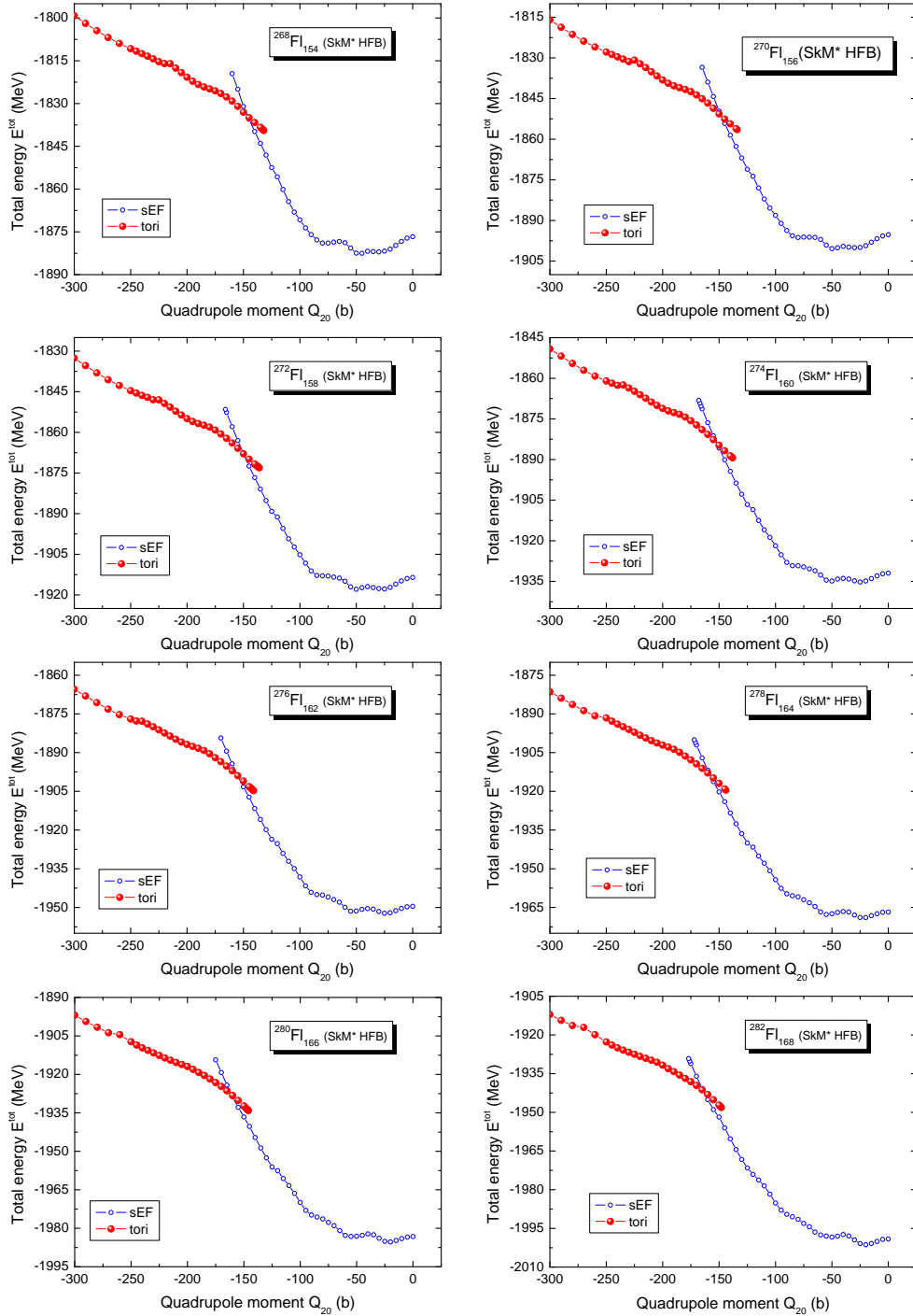
**Tabela 3.2:** Parametry charakteryzujące konfiguracje stanu podstawowego: energie całkowite  $E^{tot}$ , momenty kwadrupolowe  $Q_{20}$ , parametry Bohra ( $\beta, \gamma$ ); energie uwalniane w rozpadzie  $\alpha$   $Q_\alpha$ , logarytmy czasu połowicznego zaniku  $\log T_\alpha$ ; wysokości barier  $B_f$  i barier osiowosymetrycznych  $B_f^{axial}$  parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160 - 196$ .

$N$	$E^{tot}(\text{MeV})$	$Q_{20}(\text{b})$	$\beta$	$\gamma(^{\circ})$	$Q_\alpha(\text{MeV})$	$\log T_\alpha(\text{s})$	$B_f(\text{MeV})$	$B_f^{axial}(\text{MeV})$
160	-1926.88	29.25	0.22	0.00	15.65	-9.23	3.32	3.32
162	-1945.82	28.74	0.22	0.00	15.54	-9.06	4.18	4.18
164	-1963.94	26.61	0.20	0.00	15.78	-9.41	4.37	4.37
166	-1981.53	-59.74	0.88	60.00	13.54	-5.73	3.13	4.92
168	-1999.47	-18.26	0.27	60.00	13.19	-5.07	4.47	5.94
170	-2016.98	-18.54	0.27	60.00	13.07	-4.84	5.74	7.61
172	-2033.76	-18.53	0.27	60.00	13.17	-5.02	6.66	9.06
174	-2049.83	-16.55	0.23	60.00	13.22	-5.12	7.20	9.86
176	-2065.48	-14.69	0.21	60.00	12.97	-4.63	7.63	10.78
178	-2080.60	-13.38	0.19	60.00	12.82	-4.33	8.08	11.71
180	-2094.95	-7.27	0.01	60.00	12.93	-4.55	8.05	12.01
182	-2109.01	0.00	0.00	0.00	12.49	-3.65	8.21	12.40
184	-2122.42	0.00	0.00	0.00	12.50	-3.68	8.30	12.18
186	-2134.05	0.00	0.00	0.00	13.68	-5.98	6.22	10.42
188	-2145.28	0.00	0.00	0.00	13.52	-5.69	5.84	8.56
190	-2156.23	0.00	0.00	0.00	13.22	-5.12	3.59	6.75
192	-2166.92	-0.01	0.00	60.00	12.88	-4.45	1.93	5.11
194	-2177.41	-0.01	0.00	60.00	12.51	-3.70	< 0.5	3.54
196	-2188.77	48.19	0.33	24.97	11.02	-0.28	< 0.5	2.98

trium rozwiązań wyznaczanych wzdłuż ścieżek sEF dla  $Q_{20} > 0$  b, Rys. 2.4 (a).

Zarówno dla izotopów Fl, jak i izotopów  $Z = 120$  zależność energii HFB od momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$  ma charakter podobny jakościowo. Dla  $Q_{20} < -100$  b energia  $E^{tot}$  szybko rośnie, a tym samym energia wiązania jądra  $E_{bind} = -E^{tot}$  maleje. Ta znana zależność energii jądra od deformacji *oblate* prawdopodobnie sprawiła, że obszar dużych deformacji *oblate* uważany był (jest) za mało interesujący. Okazuje się jednak, że w obszarze tym istnieje wspomniana wyżej zmiana topologiczna powierzchni jądra. Rozwiązania toroidalne zostały zaznaczone na rysunkach kolorem czerwonym. Wraz ze wzrostem deformacji *oblate* energia  $E^{tot}$  konfiguracji toroidalnych rośnie, ale wzrost ten jest mniejszy niż w przypadku konfiguracji jednospójnych sEF (kolor niebieski). Rozwiązania jednospójne sEF i toroidalne zrzutowane na jednowymiarowych wykresach  $E^{tot}(Q_{20})$  tylko pozornie się przecinają, w rzeczywistości ich charakterystyki, poza momentem kwadrupolowym  $Q_{20}$ , są zupełnie inne. Jednak na rysunkach występuje

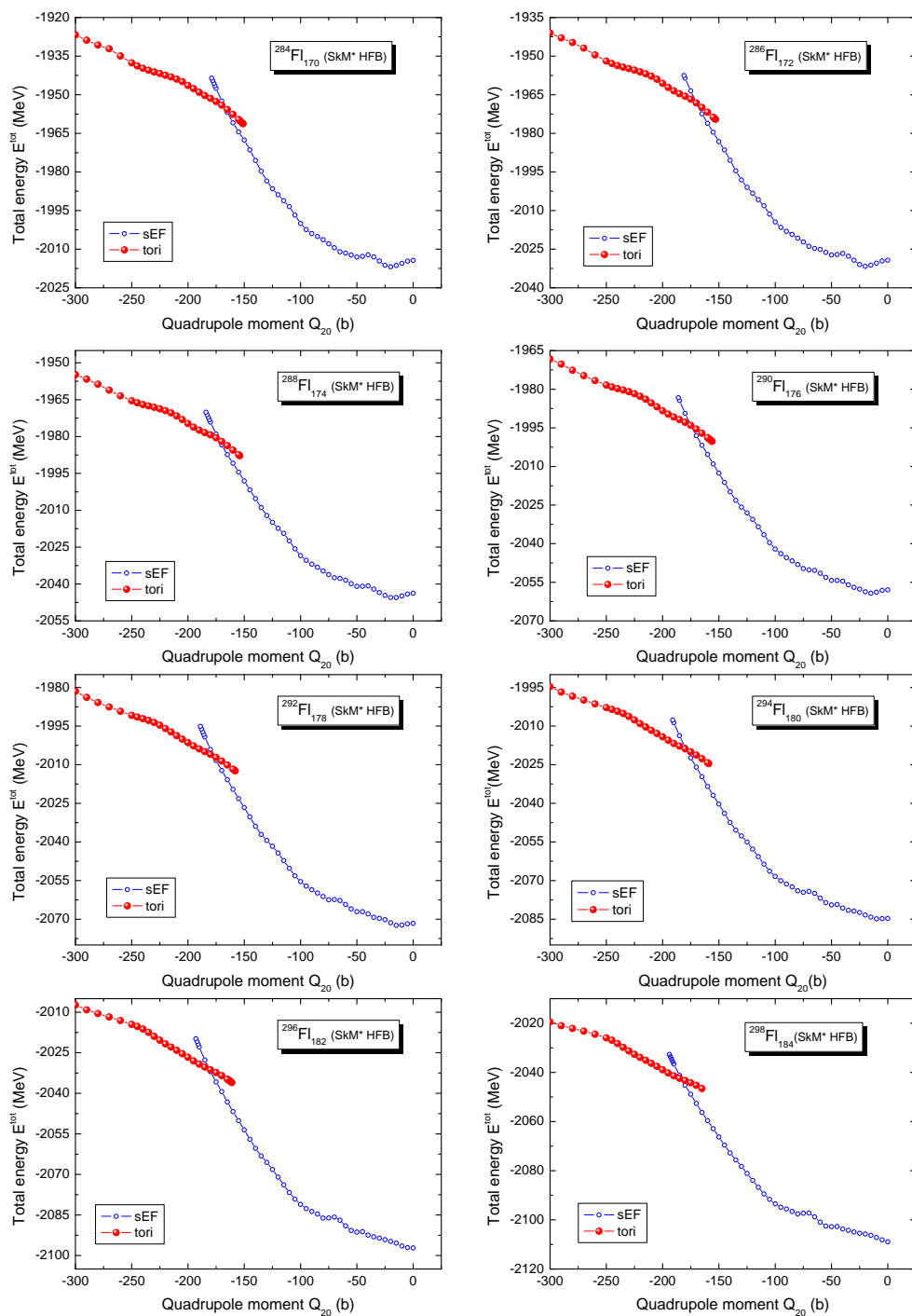




**Rysunek 3.27:** Energia całkowita HFB parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154-168$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednospójną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.

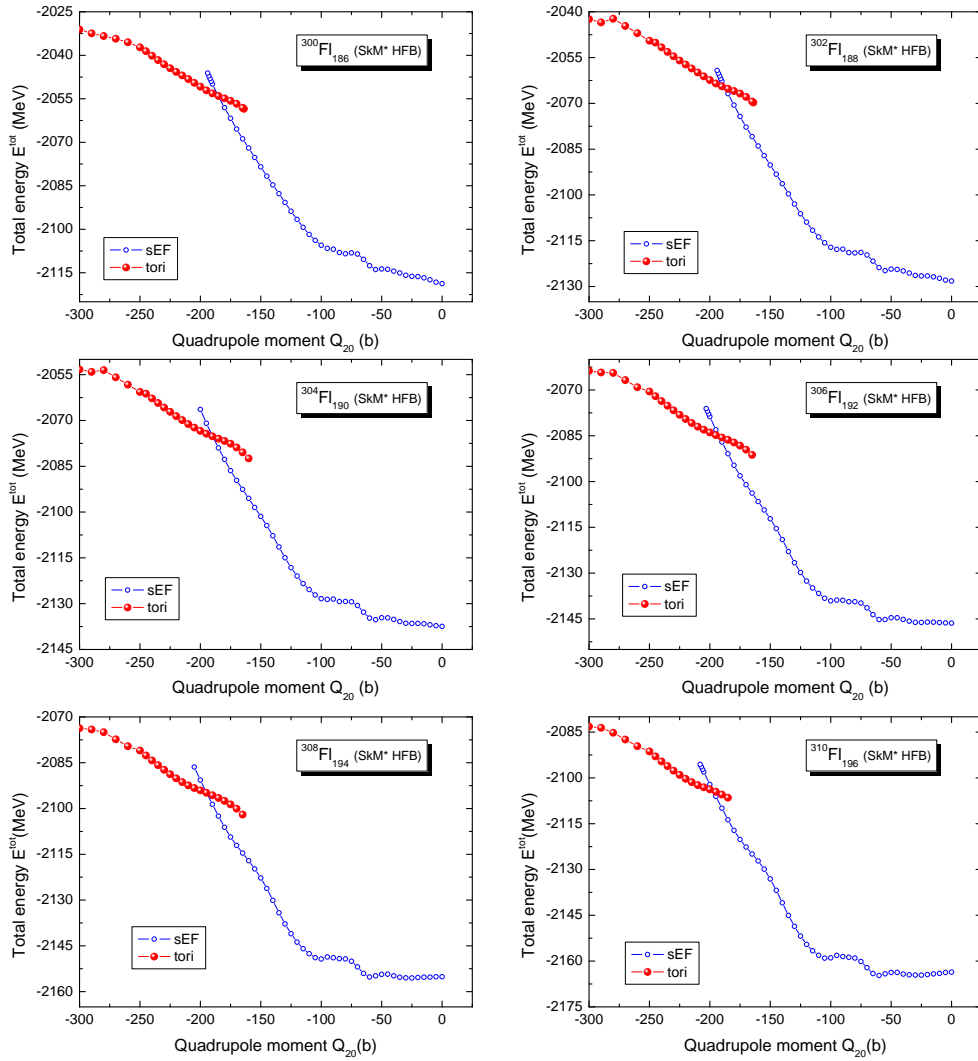
przedział deformacji  $Q_{20}$ , w którym rozwiązania jednospójne sEF i toroidalne współistnieją. Współwystępowanie obu konfiguracji może świadczyć o tym, że zmiana topologii powierzchni jądrowej jest nieciągłą przemianą fazową pierwszego rodzaju [112]. Poło-





**Rysunek 3.28:** (kontynuacja Rys. 3.27). Energia całkowita HFB parzystych izotopów F1 ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 170-184$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednospójną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.

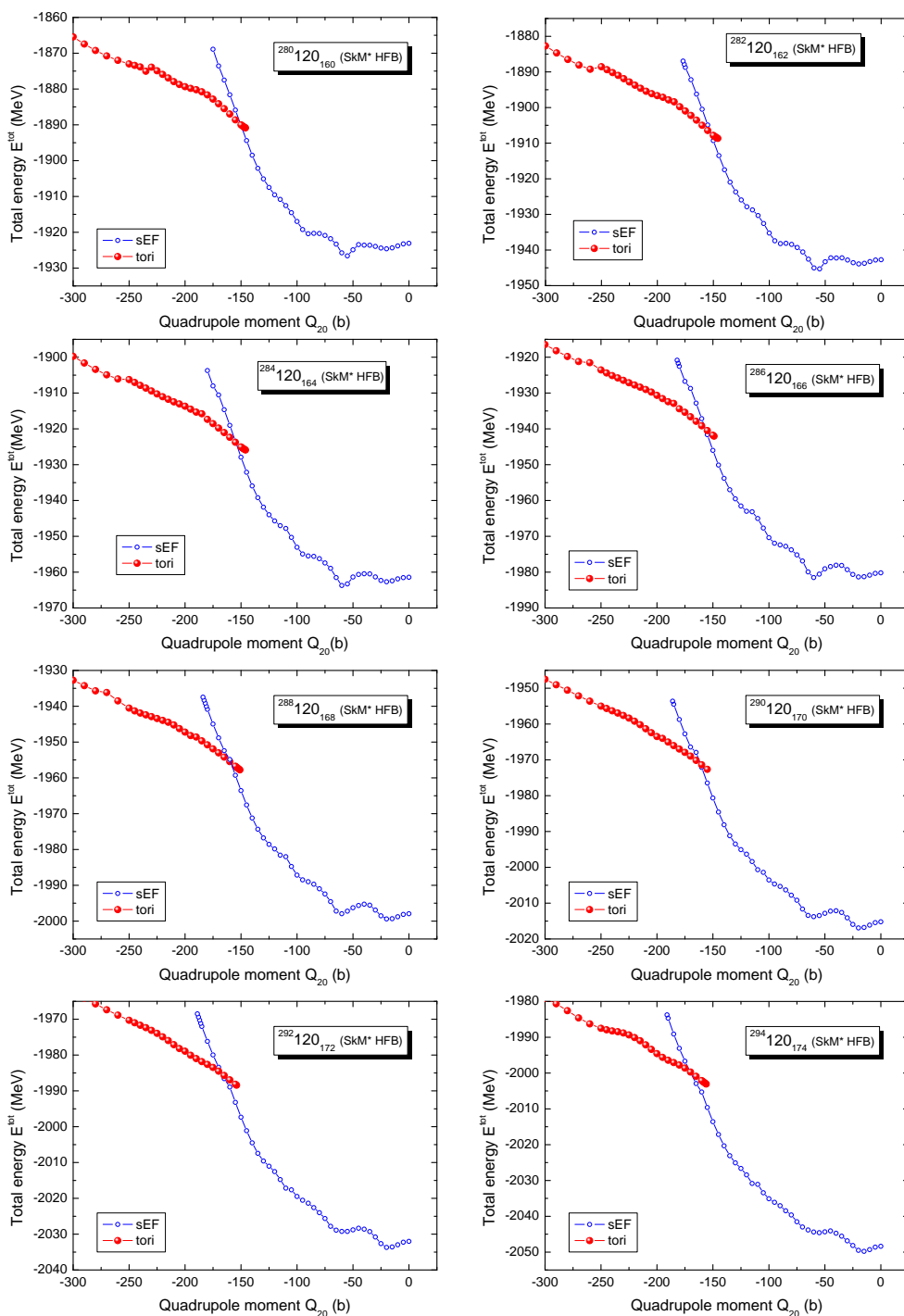
zenie ostatniego rozwiązania jednospójnego sEF (oznaczonego literą **A**) i pierwszego rozwiązania toroidalnego (**B**) dla parzystych izotopów F1 przedstawiono na Rys. 3.33



**Rysunek 3.29:** (kontynuacja Rys. 3.27 i 3.28). Energia całkowita HFB parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 186-196$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednospójną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.

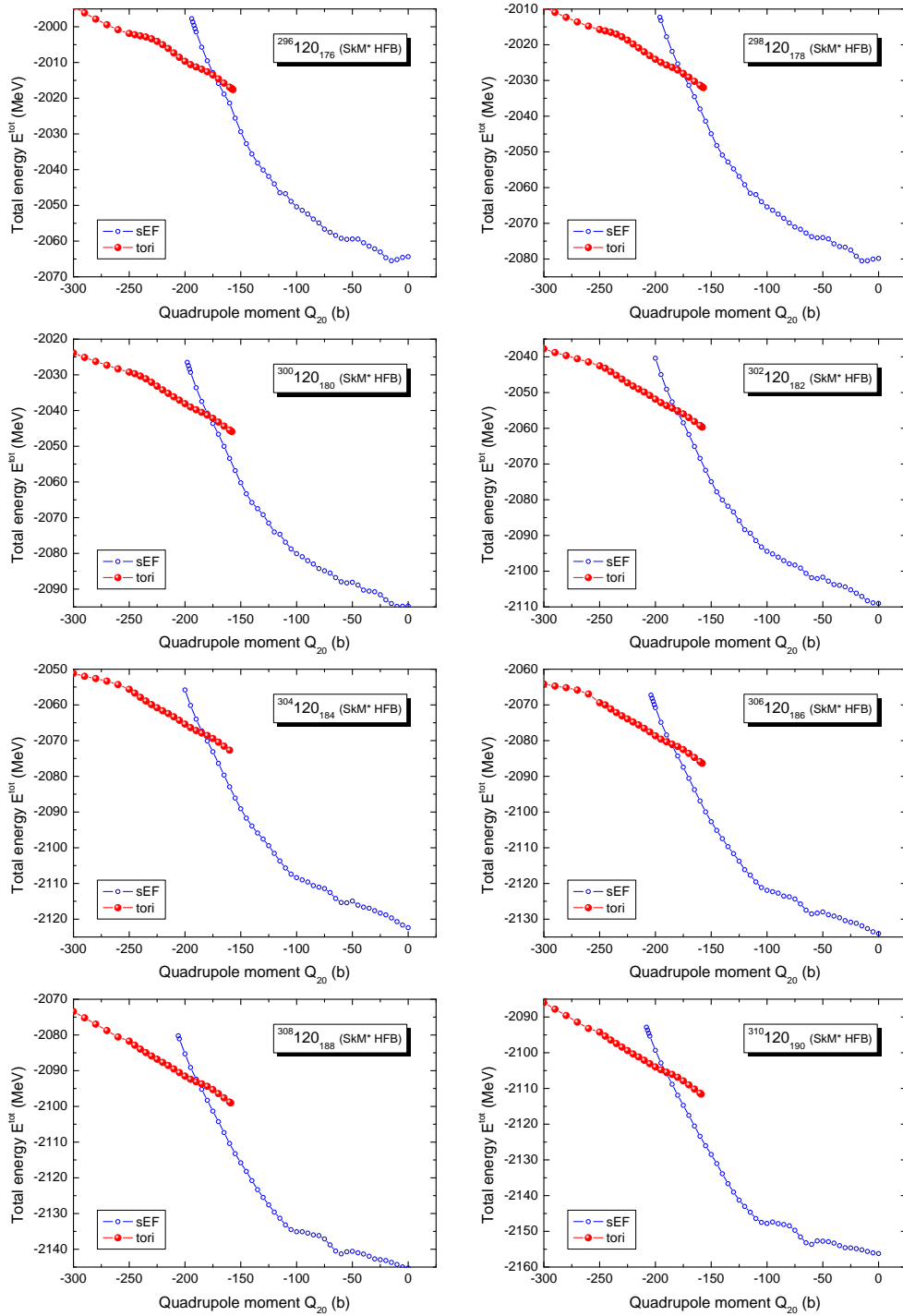
(a) i w Tabeli 3.3, natomiast dla izotopów  $Z = 120$  na Rys. 3.33 (b) i w Tabeli 3.4.

Przy wyznaczaniu położenia punktów **A** i **B** moment kwadrupolowy zmieniany był z krokiem  $\Delta Q_{20} = 1 \text{ b}$ . W przypadku izotopów Fl szerokość przedziału **AB**, w którym współwystępują oba rozwiązania, jest niemal stała (za wyjątkiem izotopu  $^{310}\text{Fl}_{196}$ ) i wynosi  $\mathbf{AB} \approx 30 \text{ b}$ . Dla wszystkich izotopów Fl położenie ostatniego rozwiązania jednospójnego sEF znajduje się w przedziale  $-208 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{A}) \leq -162 \text{ b}$ , a pierwszego rozwiązania toroidalnego w przedziale  $-162 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{B}) \leq -132 \text{ b}$  (Tabela 3.3). Szerokość przedziału **AB** dla izotopów  $Z = 120$  rośnie wraz z wartością liczby neutronów  $N$  i dla  $N = 160$   $\mathbf{AB} \approx 35 \text{ b}$ , a dla  $N = 196$   $\mathbf{AB} \approx 50 \text{ b}$ . Położenie ostatniego roz-



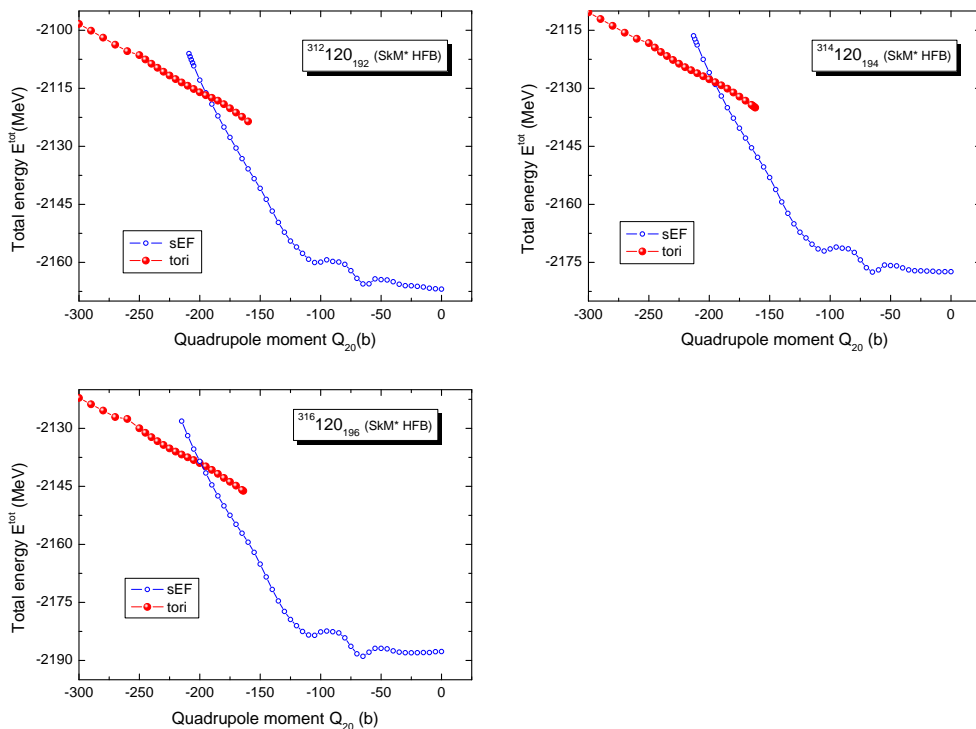
**Rysunek 3.30:** Energia całkowita HFB parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-174$  w funkcji momentu kwadropolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednospójną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.

wiązania jednospójnego sEF znajduje się w przedziale  $-215 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{A}) \leq -175 \text{ b}$ , a pierwszego rozwiązania toroidalnego w przedziale  $-163 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{B}) \leq -139 \text{ b}$  (Tabela 3.4).

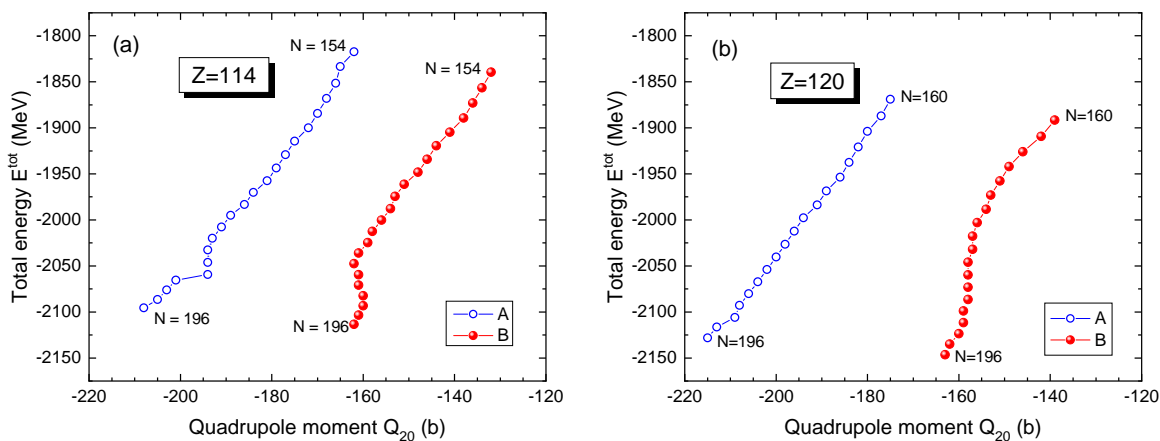


**Rysunek 3.31:** (kontynuacja Rys. 3.30). Energia całkowita HFB parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 176-190$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednopojną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.

Na Rys. 3.34 przedstawione zostały energie wzbudzenia  $E^*(\mathbf{A})$  i  $E^*(\mathbf{B})$  odpowiadające konfiguracji  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  dla izotopów Fl - panel (a) oraz izotopów  $Z = 120$  - panel (b).

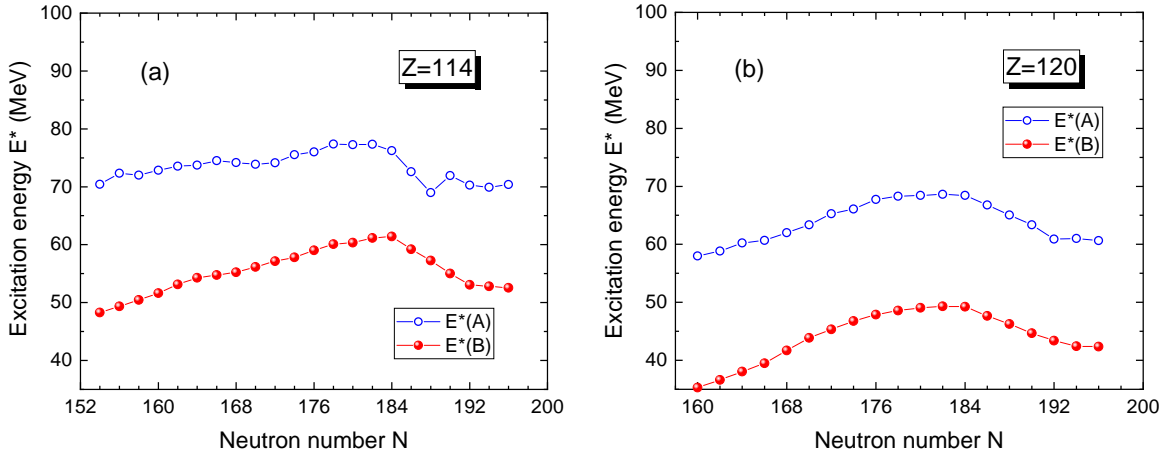


**Rysunek 3.32:** (kontynuacja Rys. 3.30 i 3.31). Energia całkowita HFB parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 192-196$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednospójną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.



**Rysunek 3.33:** Położenie na płaszczyźnie  $(E^{tot}, Q_{20})$  ostatniego rozwiązania odpowiadającego konfiguracji z jądrową powierzchnią jednospójną - **A** oraz pierwszego rozwiązania toroidalnego - **B**, dla łańcucha parzystych izotopów FI ( $Z = 114$ ) z  $N = 154 - 196$  (a) oraz  $Z = 120$  z  $N = 160 - 196$  (b).

W przypadku obu łańcuchów izotopów zależność energii wzbudzenia  $E^*(\mathbf{A})$  i  $E^*(\mathbf{B})$  od liczby neutronów  $N$  jest podobna, jednak energie  $E^*(\mathbf{A})$  i  $E^*(\mathbf{B})$  dla izotopów FI



**Rysunek 3.34:** Energie wzbudzenia  $E^*(\mathbf{A})$  i  $E^*(\mathbf{B})$  odpowiadające odpowiednio ostatniej konfiguracji z jądrową powierzchnią jednospójną -  $\mathbf{A}$  oraz pierwszej konfiguracji toroidalnej -  $\mathbf{B}$ , dla łańcucha parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z  $N = 154-196$  (a) oraz izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160-196$  (b).

przyjmują systematycznie wyższe wartości niż dla izotopów  $Z = 120$ . W przypadku izotopów  $Z = 114$  i  $Z = 120$  rozwiązania  $E^{tot}$  z konfiguracjami toroidalnymi nie tworzą lokalnych minimów. Jednak zbudowane na bazie tych rozwiązań stany wysoko-spinowe pozwalają uzyskać metastabilne toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne [9–11] (podrozdział 3.6).

## 3.4 Parzyste izotony N=184

### 3.4.1 Powierzchnie potencjału - deformacja *prolate*

Rysunki 3.35 oraz 3.36 przedstawiają energię całkowitą HFB parzystych superciężkich izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106(\text{Sg})-126$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-75 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 200 \text{ b}$ .

W przypadku izotonów  $Z = 108(\text{Hs})-126$  istnieją dwie ścieżki prowadzące do jądrowego rozszczepienia: ścieżka symetryczna sEF (otwarte niebieskie kółka) oraz asymetryczna aEF (przerywana czerwona linia). Dla izotonów  $Z \geq 112(\text{Cn})$  ścieżki asymetryczne aEF przebiegają w ten sposób, że zredukowana jest druga bariera osiowo-symetryczna sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ), mająca początek w obszarze deformacji kwadrupolowej  $Q_{20} \approx 100 \text{ b}$ . Opisujące symetryczne rozszczepienie, bariery osiowo-symetryczne sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) na wykresach  $E^{tot}(Q_{20})$  zaznaczone są cienką czarną ciągłą linią. Dla wszystkich analizowanych parzystych izotonów  $N = 184$  efekt związany z dopuszczeniem trójosiowych deformacji elipsoidalnych redukuje pierwszą i drugą barierę osiowo-symetryczną. Szczegółowa analiza efektu związanego z redukcją pierwszej bariery przez

**Tabela 3.3:** Wartości  $Q_{20}(\mathbf{A})$ ,  $E^{tot}(\mathbf{A})$ ,  $E^*(\mathbf{A})$  odpowiadające ostatniemu rozwiązaniu z jednospójną jądrową powierzchnią dwustronnie wklęsłego dysku oraz wartości  $Q_{20}(\mathbf{B})$ ,  $E^{tot}(\mathbf{B})$ ,  $E^*(\mathbf{B})$  odpowiadające pierwszemu rozwiązaniu z toroidalnym rozkładem materii jądrowej dla parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154-196$ .

$N$	$Q_{20}(\mathbf{A})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{A})$ (MeV)	$E^*(\mathbf{A})$ (MeV)	$Q_{20}(\mathbf{B})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{B})$ (MeV)	$E^*(\mathbf{B})$ (MeV)
154	-162	-1817.33	70.43	-132	-1839.47	48.29
156	-165	-1833.48	72.32	-134	-1856.44	49.36
158	-166	-1851.53	72.02	-136	-1873.09	50.46
160	-168	-1868.13	72.84	-138	-1889.34	51.63
162	-170	-1884.35	73.56	-141	-1904.76	53.15
164	-172	-1900.07	73.75	-144	-1919.53	54.29
166	-175	-1914.37	74.50	-146	-1934.10	54.77
168	-177	-1929.18	74.19	-148	-1948.13	55.24
170	-179	-1943.56	73.89	-151	-1961.29	56.16
172	-181	-1957.53	74.14	-153	-1974.53	57.14
174	-184	-1970.09	75.52	-154	-1987.80	57.81
176	-186	-1983.28	76.00	-156	-2000.27	59.01
178	-189	-1995.11	77.36	-158	-2012.40	60.07
180	-191	-2007.64	77.27	-159	-2024.58	60.33
182	-193	-2019.84	77.35	-161	-2036.05	61.14
184	-194	-2032.69	76.25	-162	-2047.54	61.40
186	-194	-2046.15	72.59	-161	-2059.53	59.21
188	-194	-2059.22	69.00	-161	-2070.98	57.24
190	-201	-2065.48	71.95	-160	-2082.42	55.01
192	-203	-2076.10	70.27	-160	-2093.31	53.06
194	-205	-2086.41	69.90	-161	-2103.49	52.82
196	-208	-2095.59	70.40	-162	-2113.44	52.55

deformacje trójosiowe dla izotonów  $N = 184$  została przedstawiona na Rys. 3.37 ilustrującym diagramy  $\beta$ - $\gamma$ .

Rys. 3.37 przedstawia powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  parzystych superciężkich izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ . Zgodnie z wzorami (3.1) i (3.2), zakres zmienności momentu kwadrupolowego przedstawiony na diagramach  $\beta$ - $\gamma$  obejmuje  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$  (odpowiednio dla  $\gamma = 60^\circ$  i  $\gamma = 0^\circ$ ). Zakres ten zawiera jedynie pierwsze bariery rozszczepieniowe izotonów  $N = 184$ , natomiast nie uwzględnia

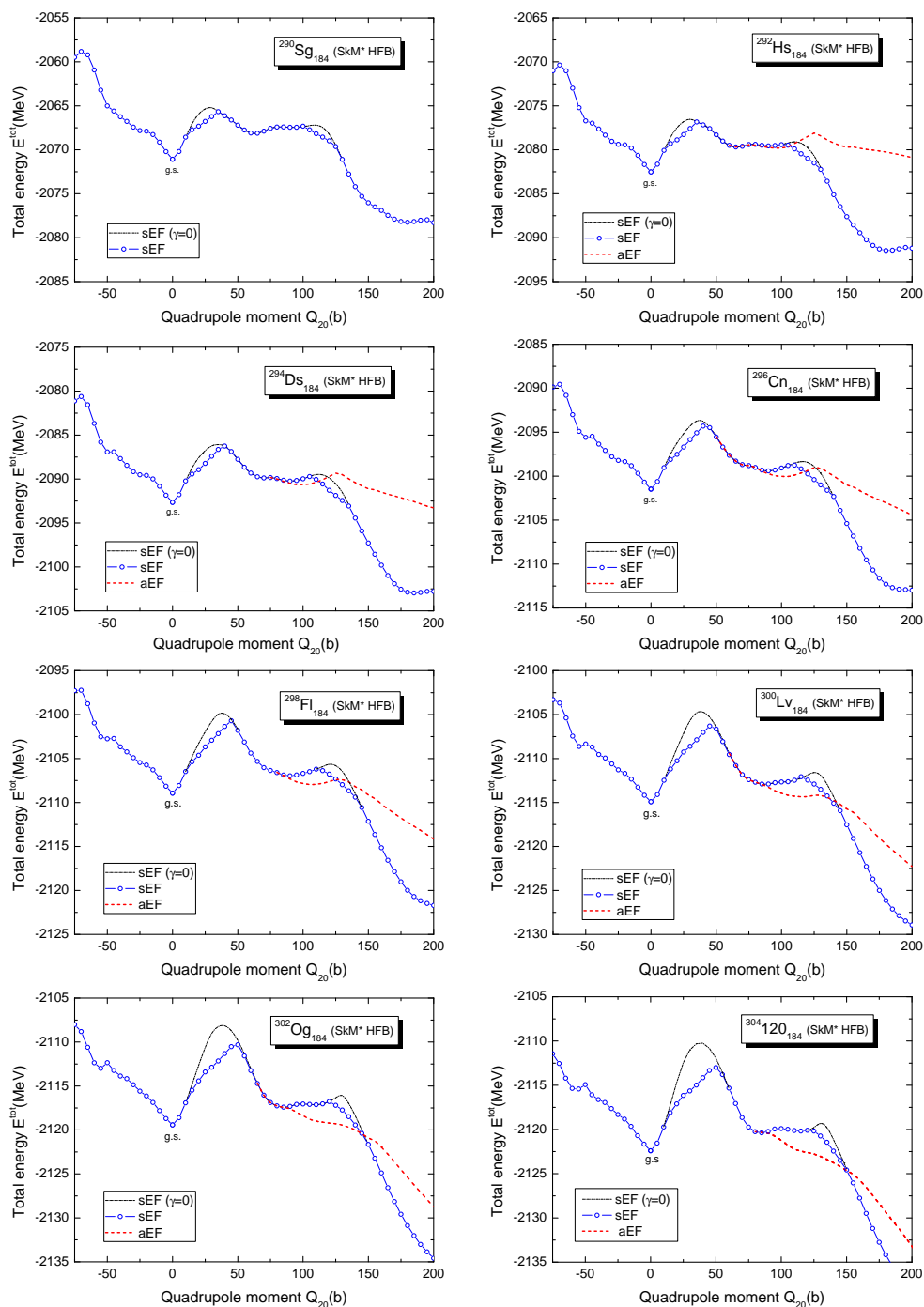
**Tabela 3.4:** Wartości  $Q_{20}(\mathbf{A})$ ,  $E^{tot}(\mathbf{A})$ ,  $E^*(\mathbf{A})$  odpowiadające ostatniemu rozwiązaniu z jednospójną jądrową powierzchnią dwustronnie wklęsłego dysku oraz wartości  $Q_{20}(\mathbf{B})$ ,  $E^{tot}(\mathbf{B})$ ,  $E^*(\mathbf{B})$  odpowiadające pierwszemu rozwiązaniu z toroidalnym rozkładem materii jądrowej dla parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-196$ .

$N$	$Q_{20}(\mathbf{A})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{A})$ (MeV)	$E^*(\mathbf{A})$ (MeV)	$Q_{20}(\mathbf{B})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{B})$ (MeV)	$E^*(\mathbf{B})$ (MeV)
160	-175	-1868.89	57.99	-139	-1891.59	35.29
162	-177	-1886.97	58.85	-142	-1909.19	36.63
164	-180	-1903.71	60.23	-146	-1925.89	38.05
166	-182	-1920.84	60.69	-149	-1942.03	39.50
168	-184	-1937.47	62.00	-151	-1957.77	41.70
170	-186	-1953.62	63.36	-153	-1973.13	43.85
172	-189	-1968.49	65.27	-154	-1988.41	45.35
174	-191	-1983.76	66.07	-156	-2003.06	46.77
176	-194	-1997.74	67.74	-157	-2017.59	47.89
178	-196	-2012.30	68.30	-157	-2032.02	48.58
180	-198	-2026.50	68.45	-158	-2045.90	49.05
182	-200	-2040.39	68.62	-158	-2059.69	49.32
184	-202	-2054.00	68.42	-158	-2073.18	49.24
186	-204	-2067.27	66.78	-158	-2086.38	47.67
188	-206	-2080.23	65.05	-159	-2099.04	46.24
190	-208	-2092.86	63.37	-159	-2111.57	44.66
192	-209	-2106.02	60.90	-160	-2123.55	43.37
194	-213	-2116.42	60.99	-162	-2134.99	42.42
196	-215	-2128.13	60.64	-163	-2146.43	42.34

on drugich barier, mających początek w obszarze deformacji kwadrupolowej  $Q_{20} \approx 100$  b (Rys. 3.35 i 3.36). Na mapach  $\beta$ - $\gamma$  zaprezentowane są powierzchnie energii całkowitej HFB znormalizowanej w stosunku do energii stanu podstawowego  $E^{tot} - E_{gs}$ . Każdy z analizowanych diagramów  $\beta$ - $\gamma$  zawiera tę samą skalę energetyczną, a różnica pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV. Minima stanu podstawowego i punkty siodłowe oznaczone są odpowiednio czerwonymi kropkami i krzyżykami.

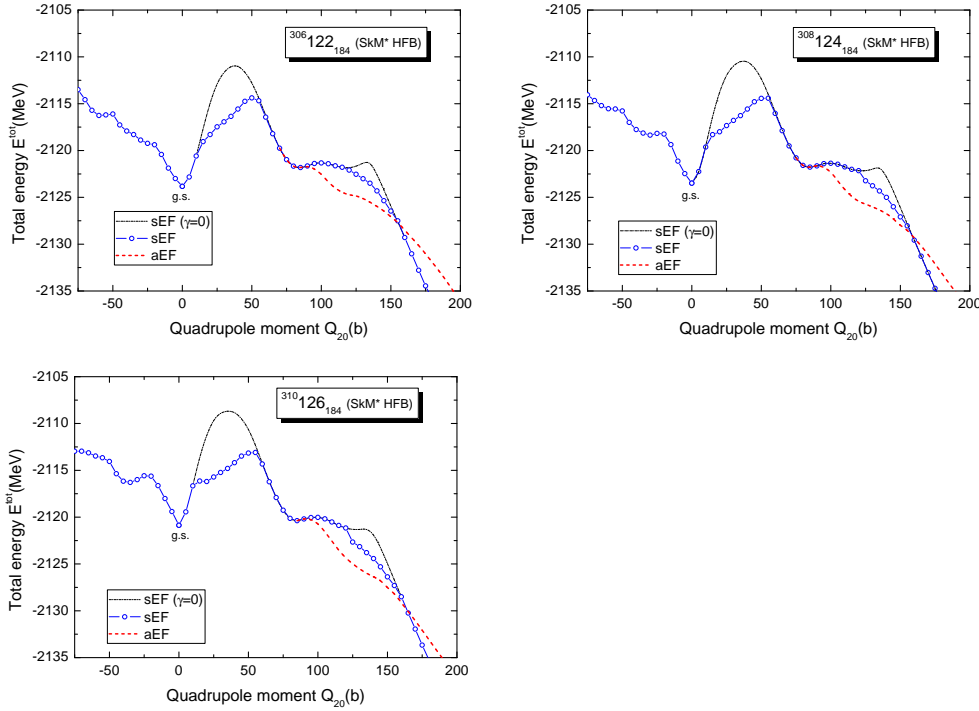
Z Rys. 3.35, 3.36 i 3.37 wynika, że wszystkie analizowane superciężkie izotony  $N = 184$  to jądra sferyczne. Ponadto, na Rys. 3.37 dla każdego z badanych nuklidów widoczne są jedynie trójosiowe punkty siodłowe, co oznacza redukcję pierwszej osiowosymetrycznej bariery  $B_f^{axial}$ .





**Rysunek 3.35:** Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-120$ . Niebieskie otwarte kółka i czerwone przerywane linie oznaczają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są czarną linią.

Na Rys. 3.38 wykreślono wysokości barier rozszczepieniowych  $B_f$  parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106(\text{Sg})-126$ . Przedstawiono również wielkość redukcji wysokości barier osiosymetrycznych  $B_f^{axial}$  przez efekt związany z deforma-



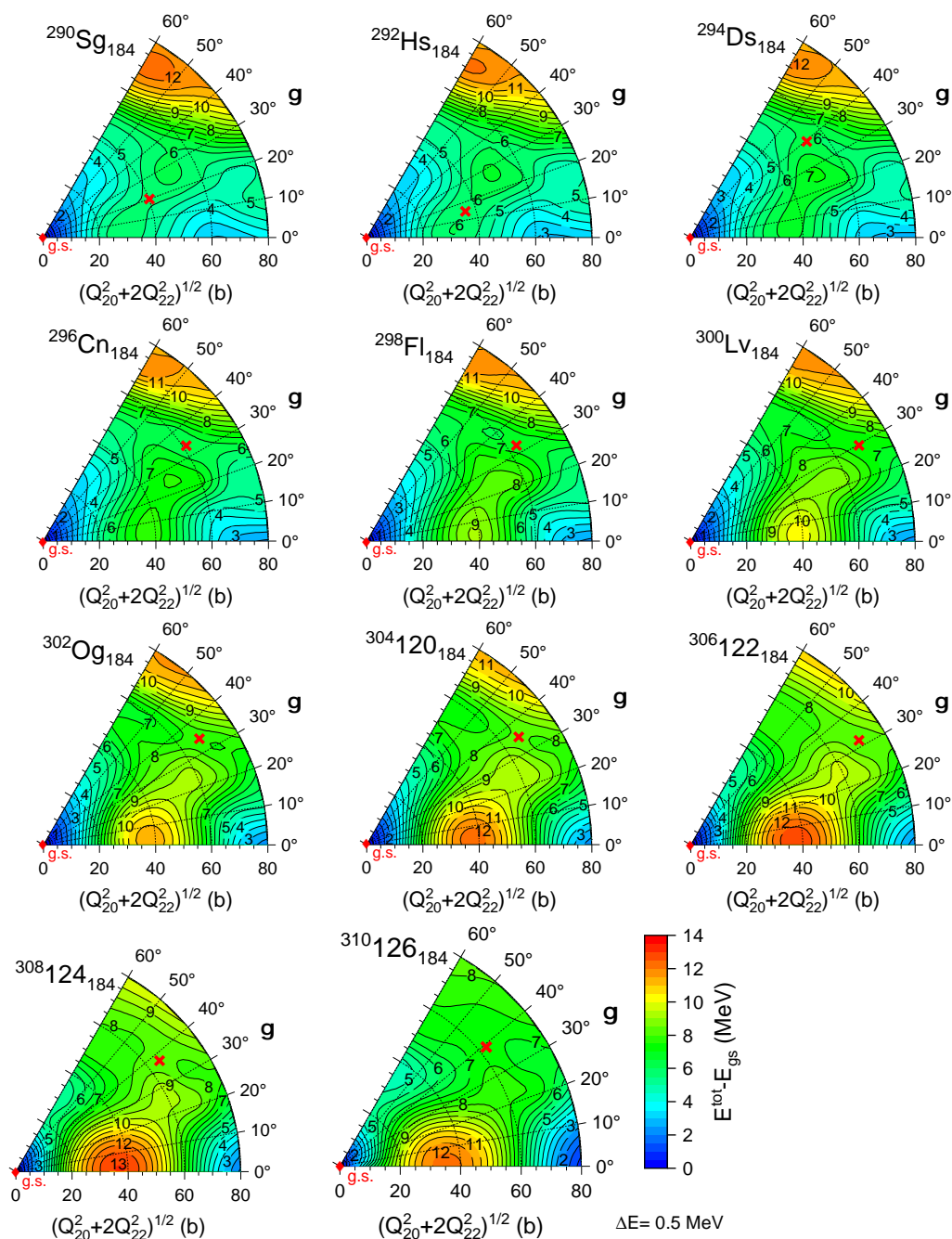
**Rysunek 3.36:** (kontynuacja Rys. 3.35). Całkowita energia HFB w funkcji momentu kwadrupolowego dla parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 122-126$ . Niebieskie otwarte kółka i czerwone przerywane linie oznaczają odpowiednio symetryczną (sEF) i asymetryczną (aEF) ścieżkę prowadzącą do jądrowego rozszczepienia. Osiosymetryczne bariery sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) zaznaczone są czarną linią.

cjami trójosiowymi jąder. W przypadku trzech najbliższych izotonów  $N = 184$  ( $^{290}\text{Sg}$ ,  $^{292}\text{Hs}$  oraz  $^{294}\text{Ds}$ ) redukcja ta nie przekracza 200 keV. Największa (37%) redukcja bariery  $B_f^{axial}$  obserwowana jest w  $^{306}\text{122}_{184}$ , gdzie sięga wartości 4.74 MeV. Informacje o barierach rozszczepieniowych analizowanych izotonów  $N = 184$  zostały zebrane w Tabeli 3.5.

### 3.4.2 Rozpady alfa

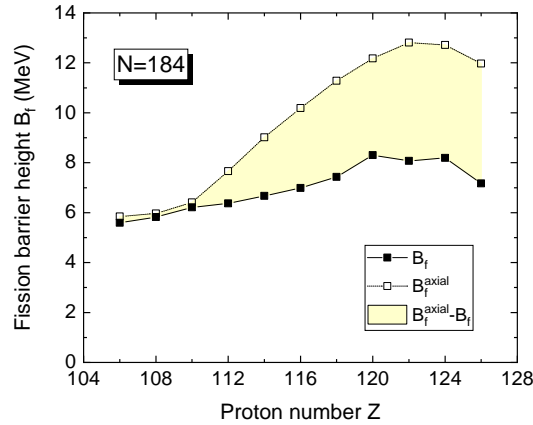
Na Rys. 3.39 przedstawione zostały energie uwalniane podczas rozpadu  $\alpha$   $Q_\alpha$  - lewa skala i odpowiadające im, równanie (3.9),  $\log T_\alpha$  - prawa skala dla parzystych izotonów  $N = 184$ . Przedstawione wartości  $Q_\alpha$  odpowiadają przejściom między konfiguracjami stanów podstawowych jądra „matki” i jądra „córci”. Uzyskane wartości  $Q_\alpha$  rosną niemal liniowo, a tym samym wartości  $T_\alpha$  maleją eksponencjalnie wraz ze zwiększającą się liczbą protonów  $Z$ , a dla  $N \geq 124$   $T_\alpha$  osiąga wartość poniżej 1  $\mu\text{s}$ .

Parametry opisujące konfiguracje stanów podstawowych: energie całkowite  $E^{tot}$ , momenty kwadrupolowe  $Q_{20}$ , wartości energii uwalnianych w rozpadzie  $\alpha$   $Q_\alpha$ , logarytmy czasu połowicznego zaniku  $\log T_\alpha$  oraz wysokości barier  $B_f$  i barier osiosyme-

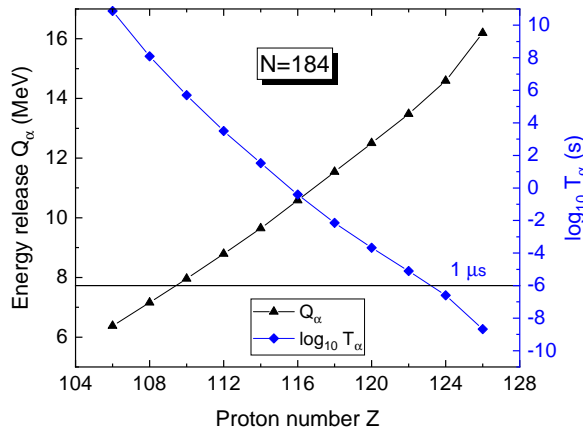


**Rysunek 3.37:** Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  parzystych superciężkich izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ . Energia HFB znormalizowana została w stosunku do minimum stanu podstawowego (zaznaczone czerwoną kropką). Punkty siodłowe zaznaczone są czerwonym krzyżykiem. Różnica energii pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV.

trycznych  $B_f^{\text{axial}}$  dla parzystych izotonów  $N = 184$  zostały zebrane w Tabeli 3.5.



**Rysunek 3.38:** Redukcja barier rozszczepienia spowodowana efektem trójosiowości dla łańcucha parzystych superciężkich izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ .



**Rysunek 3.39:** Wartości energii uwalniającej  $Q_\alpha$  (lewa skala) i  $\log T_\alpha$  (prawa skala) dla parzystych izotonów  $N = 184$ , obliczone dla przejść według konfiguracji stan podstawowy - stan podstawowy.

### 3.4.3 Powierzchnie potencjału - deformacja *oblate*

Na Rys. 3.40 oraz 3.41 przedstawione zostały energie HFB parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106(\text{Sg})-126$  w funkcji momentu kwadrupolowego, branego w przedziale  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . W zakresie  $-250 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$  wartości energii HFB  $E^{\text{tot}}(Q_{20})$  wyznaczono z krokiem  $\Delta Q_{20} = 5 \text{ b}$ , a dla  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} < -250 \text{ b}$  przyjęto  $\Delta Q_{20} = 10 \text{ b}$ .

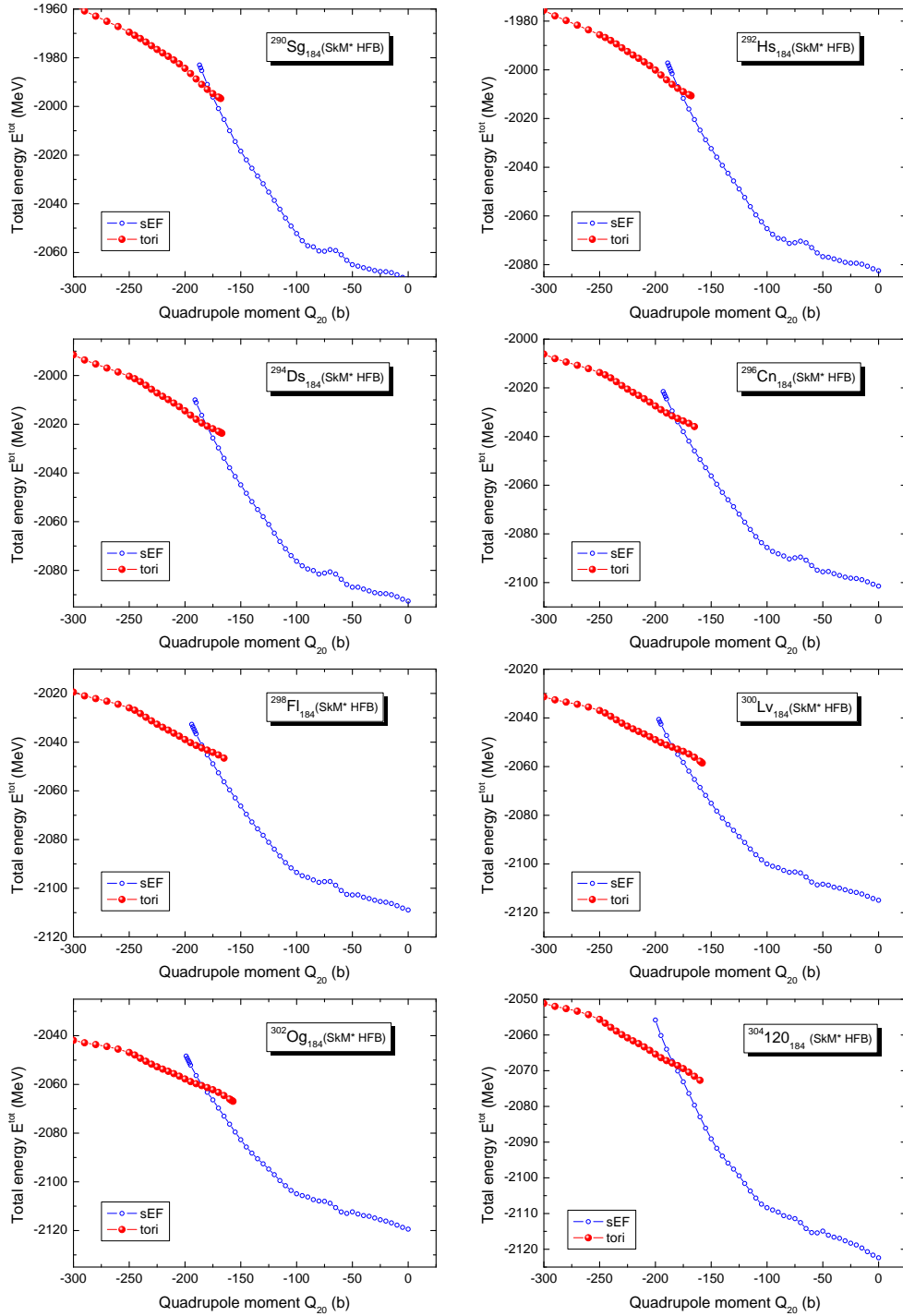
W analizowanym zakresie deformacji kwadrupolowych  $Q_{20}$ , izotony  $N = 184$ , podobnie, jak izotopy Fl i  $Z = 120$  przyjmują osiowosymetryczne deformacje z niezłamaną inwersją przestrzenną  $\hat{P}$ , z zachowaną symetrią obrotu o kąt  $\pi$  względem osi prostopadłej do osi symetrii ( $\hat{R}_y = \exp(-i\pi\hat{J}_y)$ ) oraz z zachowanymi symetriami odbiciowymi względem trzech płaszczyzn  $yz, xz, i xy$  ( $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ ). Tym samym uzyskane rozwiązania mają symetrie odpowiadające symetriom rozwiązań wyznaczanych wzdłuż ścieżek

**Tabela 3.5:** Parametry charakteryzujące konfiguracje stanu podstawowego: energie całkowite  $E^{tot}$ , momenty kwadrupolowe  $Q_{20}$ ; energie uwalniane w rozpadzie  $\alpha$   $Q_\alpha$ , logarytmy czasu połowicznego zaniku  $\log T_\alpha$ ; wysokości barier  $B_f$  i barier osiowosymetrycznych  $B_f^{axial}$  parzystych izotonów  $N = 184$  z  $Z = 106-126$ .

$Z$	$E^{tot}(\text{MeV})$	$Q_{20}(\text{b})$	$Q_\alpha(\text{MeV})$	$\log T_\alpha(\text{s})$	$B_f(\text{MeV})$	$B_f^{axial}(\text{MeV})$
106	-2071.08	0.00	6.38	10.88	5.59	5.85
108	-2082.52	0.00	7.16	8.09	5.82	5.97
110	-2092.65	0.00	7.96	5.70	6.21	6.41
112	-2101.48	0.00	8.79	3.50	6.37	7.66
114	-2108.94	0.00	9.65	1.52	6.67	9.02
116	-2114.91	0.00	10.58	-0.40	6.99	10.19
118	-2119.43	0.00	11.54	-2.14	7.43	11.28
120	-2122.42	0.00	12.50	-3.68	8.30	12.18
122	-2123.83	0.00	13.48	-5.10	8.07	12.81
124	-2123.48	0.00	14.59	-6.60	8.19	12.72
126	-2120.87	0.00	16.19	-8.68	7.17	11.97

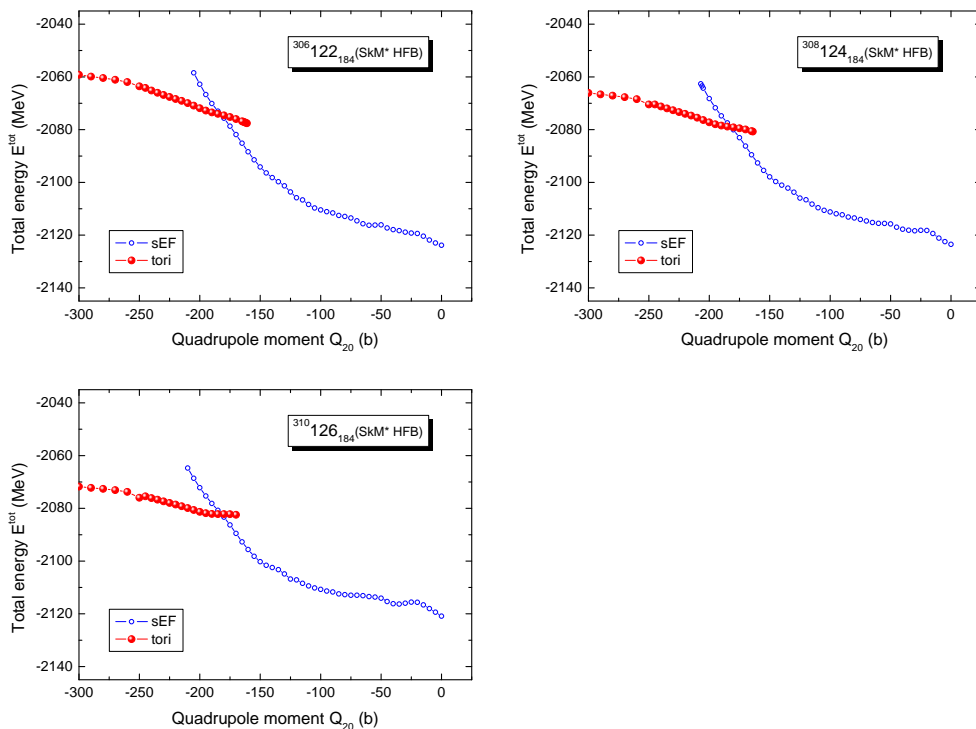
sEF dla  $Q_{20} > 0$  b, Rys. 2.4 (a). Dla analizowanych parzystych izotonów  $N = 184$  zależność energii HFB od momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$  ma charakter podobny jakościowo, jak dla izotopów Fl i  $Z = 120$  (Rys. 3.27 - 3.32). Dla  $Q_{20} < -100$  b energia  $E^{tot}$  szybko rośnie, a tym samym energia wiązania jądra  $E_{bind} = -E^{tot}$  maleje. W obszarze tym istnieje omawiana w podrozdziale 3.2 (Rys. 3.3) zmiana topologiczna powierzchni jądra. Na Rys. 3.40 i 3.41 toroidalne rozwiązania zaznaczone zostały kolorem czerwonym. Wraz ze wzrostem deformacji *oblate* energia  $E^{tot}$  konfiguracji toroidalnych rośnie, jednak wzrost ten jest mniejszy niż w przypadku konfiguracji jednospójnych sEF, zaznaczonych kolorem niebieskim. Podobnie, jak dla izotopów Fl i  $Z = 120$ , na Rys. 3.40 i 3.41 występuje przedział deformacji  $Q_{20}$ , w którym współistnieją rozwiązania jednospójne sEF i toroidalne. Położenie ostatniego rozwiązania jednospójnego sEF (oznaczonego literą **A**) i pierwszego rozwiązania toroidalnego (**B**) dla parzystych izotonów  $N = 184$  przedstawiono na Rys. 3.42 i w Tabeli 3.6.

Podczas wyznaczania położenia punktów **A** i **B** moment kwadrupolowy zmieniano z krokiem  $\Delta Q_{20} = 1$  b. Szerokość przedziału **AB**, w którym współwystępują oba rozwiązania jest najmniejsza dla Sg ( $Z = 106$ ) i wynosi 19 b, zaś największą wartość osiąga dla izotonu z  $Z = 122$  i wynosi 44 b. Ostatnie rozwiązanie jednospójne sEF leży w przedziale  $-210 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{A}) \leq -187 \text{ b}$ , a pierwsze rozwiązanie toroidalne w przedziale  $-168 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{B}) \leq -157 \text{ b}$  (Tabela 3.6).

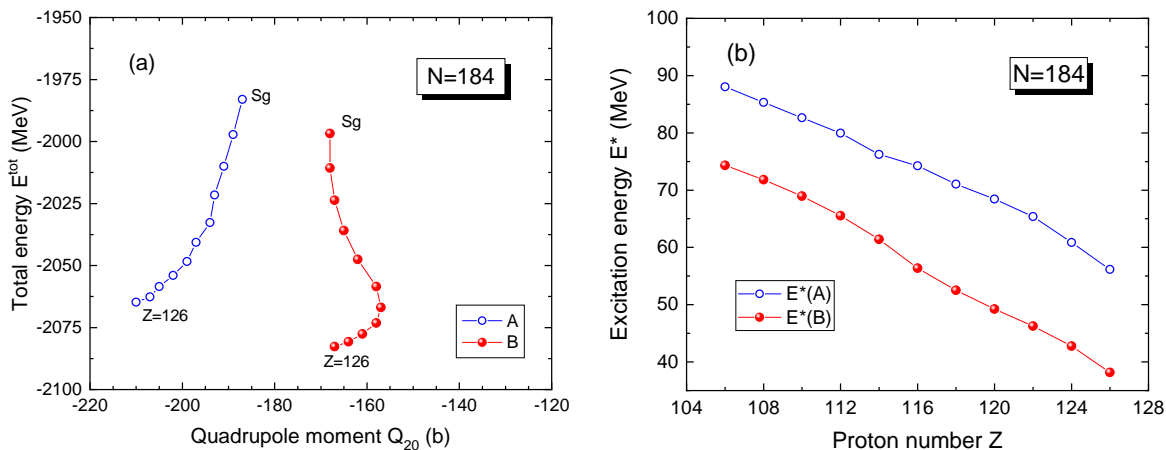


**Rysunek 3.40:** Energia całkowita HFB parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-120$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednospójną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.

Podobnie, jak dla izotopów Fl i  $Z = 120$ , z analizowanych rysunków 3.40 i 3.41 widoczne jest, że dla parzystych izotonów  $N = 184$  rozwiązania  $E^{tot}$  z konfiguracjami toroidalnymi nie tworzą lokalnych minimów. A zbudowane na bazie takich rozwiązań



**Rysunek 3.41:** (kontynuacja Rys. 3.40). Energia całkowita HFB parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 122-126$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $-300 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 0 \text{ b}$ . Rozwiązania odpowiadające konfiguracjom z jednospójną powierzchnią jądrową (sEF) zaznaczono niebieskimi pustymi kółkami, zaś rozwiązania z powierzchnią toroidalną (tori) czerwonymi kółkami.



**Rysunek 3.42:** Parzyste izotony  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ : (a) położenie na płaszczyźnie  $(E^{tot}, Q_{20})$  ostatniego rozwiązania odpowiadającego konfiguracji z jądrową powierzchnią jednospójną - **A** oraz pierwszego rozwiązania toroidalnego - **B**; (b) energie wzbudzenia  $E^*(\mathbf{A})$  i  $E^*(\mathbf{B})$  odpowiadające konfiguracjom **A** i **B**.

stany wysoko-spinowe dla superciężkich parzystych izotopów  $Z = 120$  omawiane będą w podrozdziale 3.6.

**Tabela 3.6:** Wartości  $Q_{20}(\mathbf{A})$ ,  $E^{tot}(\mathbf{A})$ ,  $E^*(\mathbf{A})$  odpowiadające ostatniemu rozwiązaniu z jednospójną jądrową powierzchnią dwustronnie wklęsłego dysku oraz wartości  $Q_{20}(\mathbf{B})$ ,  $E^{tot}(\mathbf{B})$ ,  $E^*(\mathbf{B})$  odpowiadające pierwszemu rozwiązaniu z toroidalnym rozkładem materii jądrowej dla parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ .

$Z$	$Q_{20}(\mathbf{A})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{A})$ (MeV)	$E^*(\mathbf{A})$ (MeV)	$Q_{20}(\mathbf{B})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{B})$ (MeV)	$E^*(\mathbf{B})$ (MeV)
106	-187	-1983.02	88.06	-168	-1996.74	74.34
108	-189	-1997.20	85.32	-168	-2010.68	71.84
110	-191	-2010.02	82.63	-167	-2023.69	68.96
112	-193	-2021.53	79.95	-165	-2035.93	65.55
114	-194	-2032.69	76.25	-162	-2047.54	61.40
116	-197	-2040.66	74.25	-158	-2058.52	56.39
118	-199	-2048.38	71.05	-157	-2066.93	52.50
120	-202	-2054.00	68.42	-158	-2073.18	49.24
122	-205	-2058.46	65.37	-161	-2077.56	46.27
124	-207	-2062.61	60.87	-164	-2080.71	42.77
126	-210	-2064.73	56.14	-167	-2082.70	38.17

Energie wzbudzenia  $E^*(\mathbf{A})$  i  $E^*(\mathbf{B})$  odpowiadające konfiguracjom jednospójnym ( $\mathbf{A}$ ) i toroidalnym ( $\mathbf{B}$ ) dla parzystych izotonów  $N = 184$  przedstawione zostały na Rys. 3.42(b). Wartości energii wzbudzenia  $E^*(\mathbf{A})$  i  $E^*(\mathbf{B})$  w łańcuchu izotonów  $N = 184$  maleją liniowo wraz ze wzrostem liczby protonów: od  $E^*(\mathbf{A}) = 88.06$  MeV,  $E^*(\mathbf{B}) = 74.34$  MeV dla  $^{290}\text{Sg}$  do  $E^*(\mathbf{A}) = 56.14$  MeV,  $E^*(\mathbf{B}) = 38.17$  MeV dla  $^{310}126$  (Tabela 3.6).

## 3.5 Neutronowo-deficytowe izotopy $Z = 118-124$

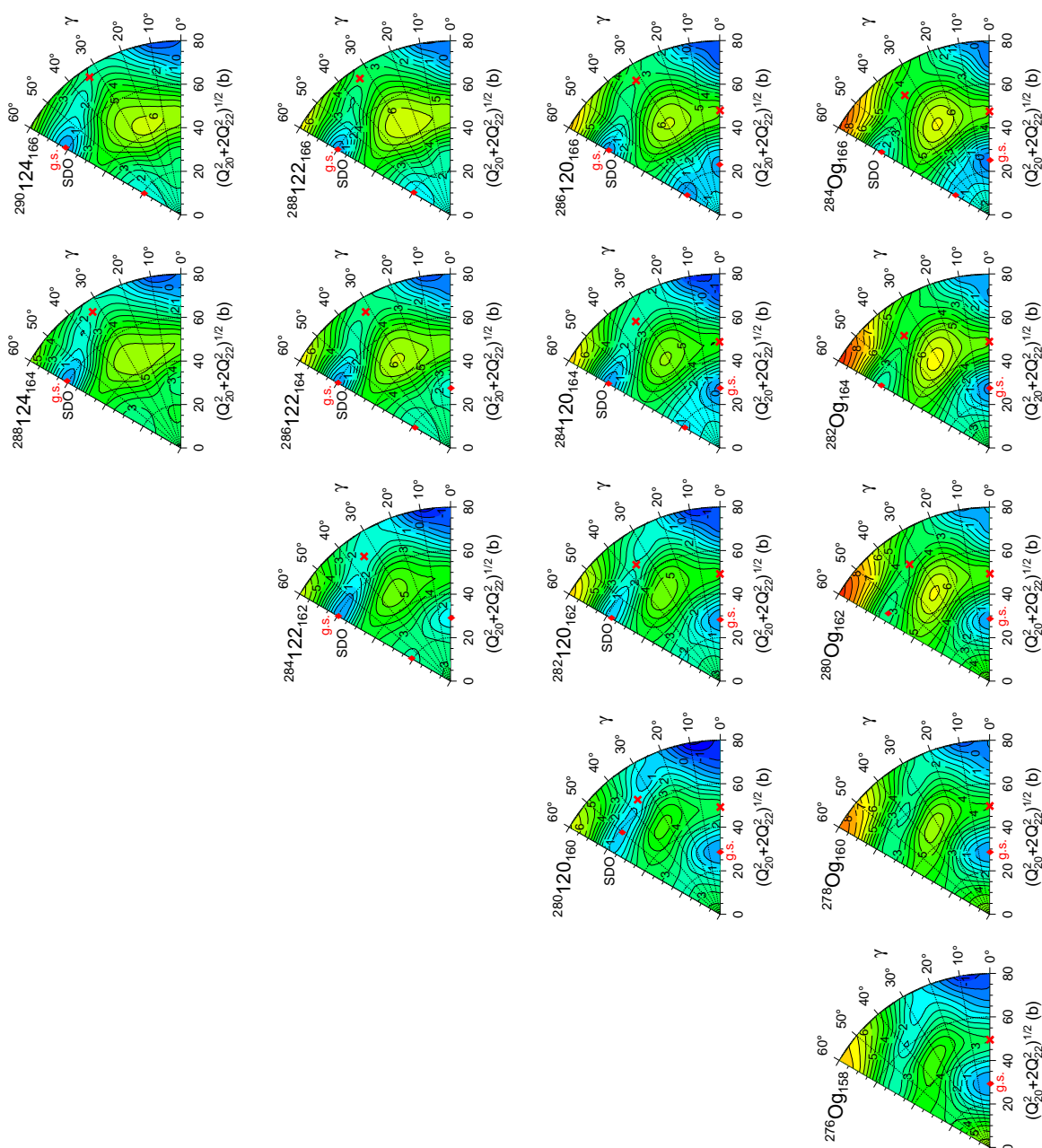
### 3.5.1 Powierzchnie potencjału

Zainteresowanie neutronowo-deficytowymi superciężkimi izotopami ( $Z > 118$ ,  $N < 170$ ) między innymi wynika z faktu, że jądra z tego obszaru mogą w stanie podstawowym przyjmować ekstremalne deformacje *oblate* (*superdeformed oblate*, SDO) [17, 116].

Na Rys. 3.43 oraz 3.44 przedstawiono w formie map  $\beta$ - $\gamma$  unormowane do energii stanu podstawowego energie HFB parzystych izotopów  $Z = 118, 120, 122$  i  $124$  z liczbą neutronów z przedziału  $158 \leq N \leq 174$ . Na przedstawionych mapach  $\beta$ - $\gamma$  odległość pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV, a zakres zmienności momentu kwadrupolowego dla deformacji osiowosymetrycznych ( $\gamma = 0^\circ$  i  $60^\circ$ ) mieści się

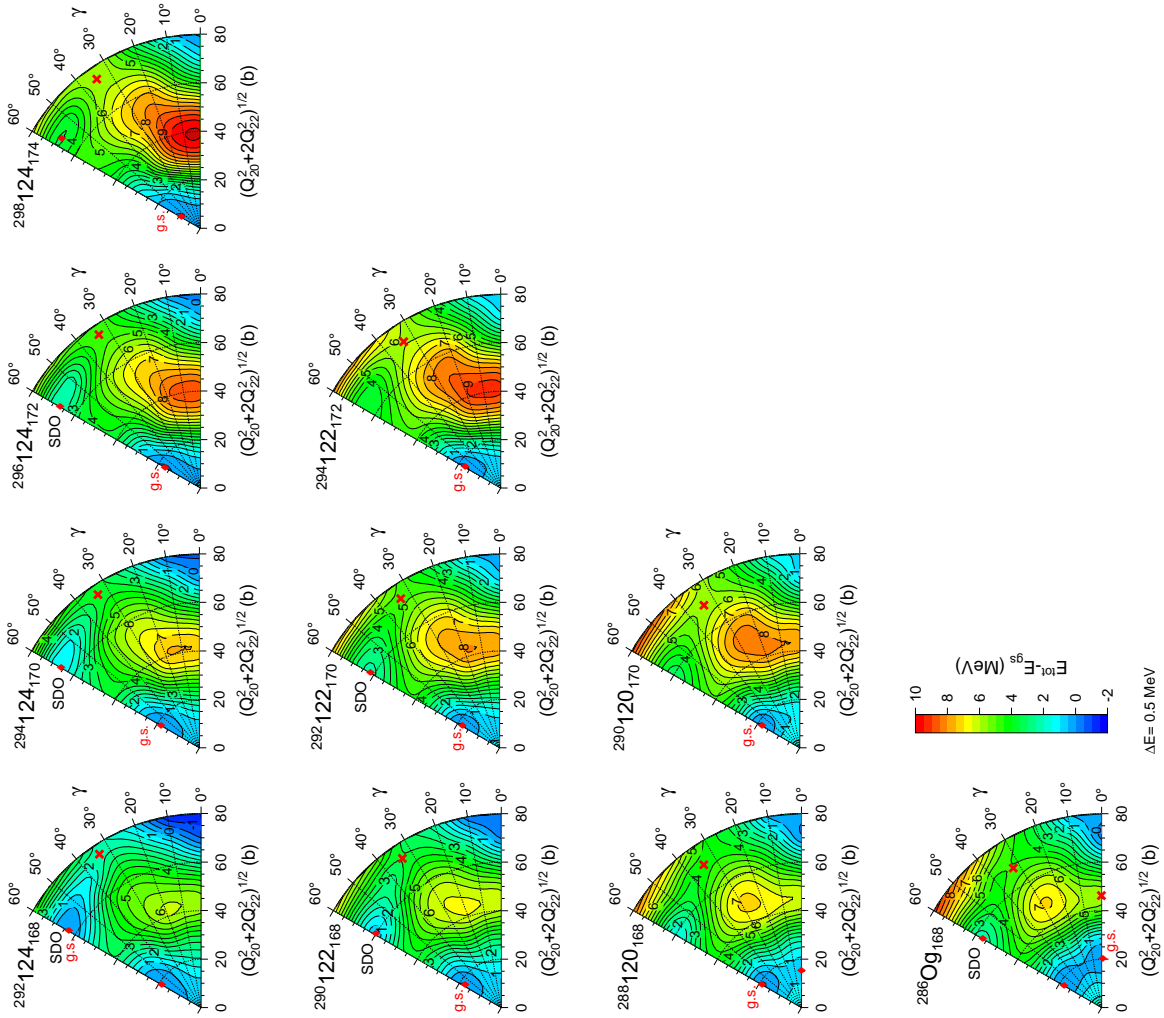


w przedziale  $-80 \text{ b} \leq Q_{20} \leq 80 \text{ b}$ . Relacje między momentami kwadrupolowymi  $Q_{20}$  i  $Q_{22}$ , a parametrem Bohra  $\beta$  określa (3.1). Czerwonymi punktami oznaczono położenie lokalnych minimów, przy czym położenie stanu podstawowego oznaczono dodatkowo napisem "g.s.". Położenie punktów siodłowych przedstawiono przy pomocy czerwonych krzyżyków.



**Rysunek 3.43:** Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  dla parzystych superciężkich izotopów  $Z = 118$  z liczbą neutronów  $N = 158-166$ ,  $Z = 120$  z  $N = 160-166$ ,  $Z = 122$  z  $N = 162-166$  oraz  $Z = 124$  z  $N = 164, 166$ . Wszystkie energie znormalizowane są w stosunku do minimum stanu podstawowego.

Izotopy na Rys. 3.43 i 3.44 posiadają trzy minima osiowosymetryczne. Na Rys. 3.45

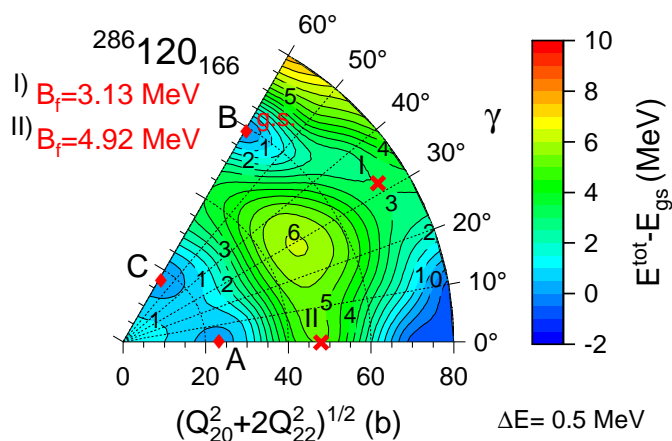


**Rysunek 3.44:** (kontynuacja Rys. 3.43). Powierzchnie energii HFB w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$  dla parzystych superciężkich izotopów  $Z = 118$  z liczbą neutronów  $N = 168$ ,  $Z = 120$  z  $N = 168, 170$ ,  $Z = 122$  z  $N = 168-172$  oraz  $Z = 124$  z  $N = 168-174$ . Wszystkie energie znormalizowane są w stosunku do minimum stanu podstawowego.

przedstawiono mapę  $\beta$ - $\gamma$  izotopu  $^{286}120_{166}$ , na której minimum z deformacją *prolate* ( $Q_{20} \approx 23$  b) oznaczono literą **A**, minimum z SDO literą **B**, a trzecie, minimum *oblate* literą **C**. Przekroje  $x$ - $y$  i  $x$ - $z$  rozkładów gęstości jądrowej w każdym z tych minimów pokazano na Rys. 3.46. Mimo, że konfiguracje w każdym minimum różnią się od siebie, to energie  $E^{tot}$  są niemal identyczne,  $E^{tot}(\mathbf{A}) = -1981.26$  MeV,  $E^{tot}(\mathbf{B}) = -1981.53$  MeV,  $E^{tot}(\mathbf{C}) = -1981.39$  MeV. Energie  $E^{tot}$  i wartości momentu  $Q_{20}$  dla każdego z trzech minimów analizowanych izotopów z Rys. 3.43 i 3.44 zostały zebrane w Tabeli 3.7. Procedura wyznaczania  $E^{tot}$  i  $Q_{20}$  dla każdego z minimów odbywała się bez nakładania więzów i z dopuszczeniem łamania wszystkich symetrii wewnętrznych układu w procedurze iteracyjnej rozwiązującej równanie HFB. Jedynie, jako wartości startowe w procedurze przyjmowano konfiguracje z poszczególnych minimów znalezionych (w

przybliżony sposób) na siatkach  $(Q_{20}, Q_{22})$  użytych do konstrukcji map  $\beta$ - $\gamma$ .

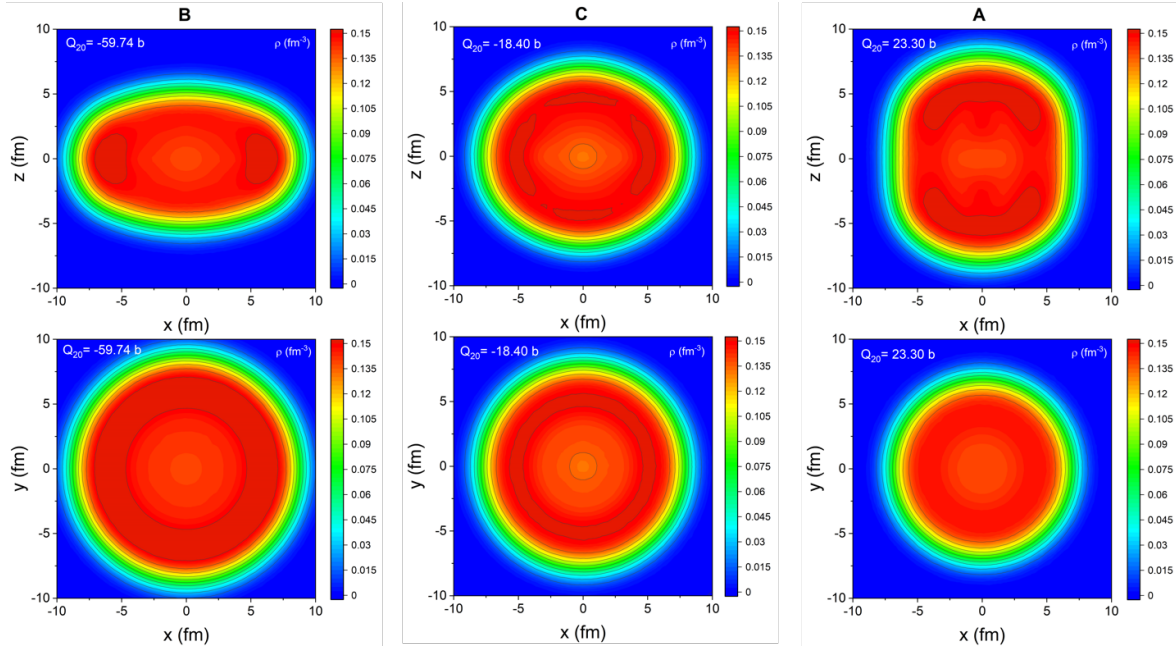
Spośród izotopów przedstawionych na Rys. 3.43 i 3.44 oraz w Tabeli 3.7, izotopy  $^{120}_{166}$ ,  $^{122}_{162,164,166}$ ,  $^{124}_{164,166,168}$  w stanach podstawowych mają deformację SDO. Natomiast w przypadku izotopów  $^{120}_{160,162,164}$  i  $^{122}_{168}$  energia z minimum SDO różni się od energii stanu podstawowego o około 300 keV. W Tabeli 3.7 przedstawiono również wysokości barier  $B_f$  neutronowo-deficytowych izotopów  $Z = 118, 120, 122$  i  $124$ , wyznaczone z map  $\beta$ - $\gamma$  (Rys. 3.43 i 3.44). W przypadku izotopów  $Z = 122$  i  $124$  widoczna jest redukcja wysokości  $B_f$ , w miarę jak maleje liczba neutronów  $N$ .



**Rysunek 3.45:** Powierzchnia energetyczna superciężkiego jądra  $^{286}_{120}_{166}$  w płaszczyźnie  $\beta$ - $\gamma$ , obliczona przy użyciu modelu Skyrme'a-HFB. Wszystkie energie znormalizowane są w stosunku do minimum stanu podstawowego (g.s.). Trzy lokalne minima (czerwone punkty) oznaczono literami: **A** - minimum *prolate*, **B** - SDO i **C** - *oblate*. Punkty siodłowe zaznaczone są czerwonymi krzyżykami. Różnica energii pomiędzy sąsiednimi poziomami wynosi  $\Delta E = 0.5$  MeV.

### 3.5.2 Rozpady alfa

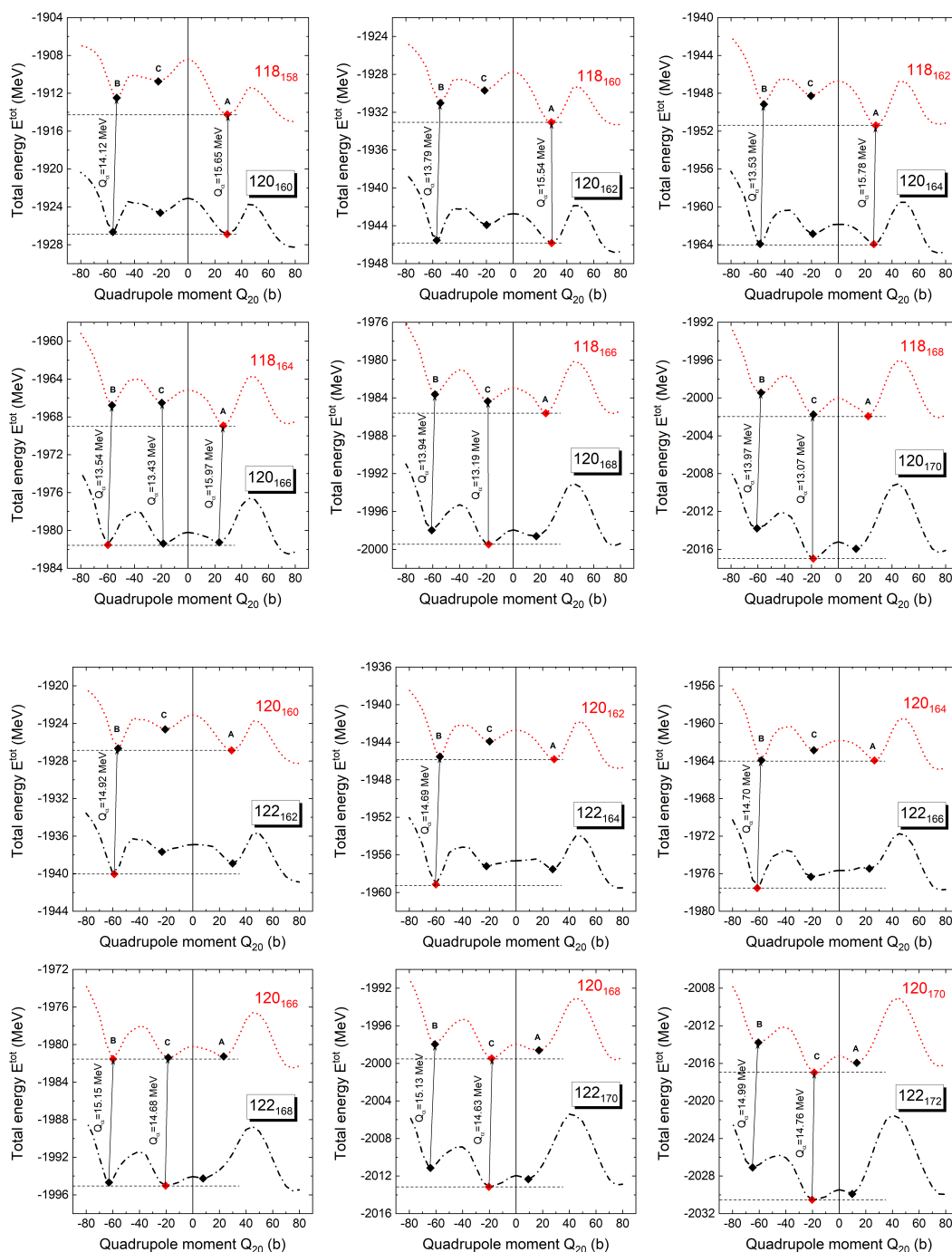
Wykresy osiowosymetrycznych całkowitych energii HFB neutronowo-deficytowych izotopów  $Z = 118, 120, 122$  i  $124$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$  przedstawiono na Rys. 3.47 i 3.48. Na wykresach zaznaczono trzy minima **A** (*prolate*), **B** (SDO) i **C** (*oblate*). Spośród nich kolorem czerwonym oznaczono minimum stanu podstawowego. Wykresy energii  $E^{tot}(Q_{20})$  pogrupowane są w pary odpowiadające nuklidom „matka-córka” biorącym udział w rozpadzie  $\alpha$ . Kolorem czarnym (linia przerywana z kropką) oznaczono energie  $E^{tot}$  jądra macierzystego, a kolorem czerwonym (linia kropkowana) energię jądra pochodnego. Na rysunkach podano wartości uwalnianej energii  $Q_\alpha$  dla przejść ze stanu podstawowego w jądrze macierzystym i odpowiadającej mu konfiguracji w jednym z minimów jądra pochodnego. Dodatkowo, dla każdej pary nuklidów na Rys. 3.47 i 3.48 przedstawiono energię  $Q_\alpha(\mathbf{B})$  dla przejścia  $\alpha$  pomiędzy



**Rysunek 3.46:** Przekroje  $x$ - $y$  (dolne panele) i  $x$ - $z$  (górne panele) rozkładów całkowitej gęstości jądrowej w trzech minimach **A** (*prolate*), **B** (SDO) i **C** (*oblate*) w jądrze  $^{286}_{120}166$ .

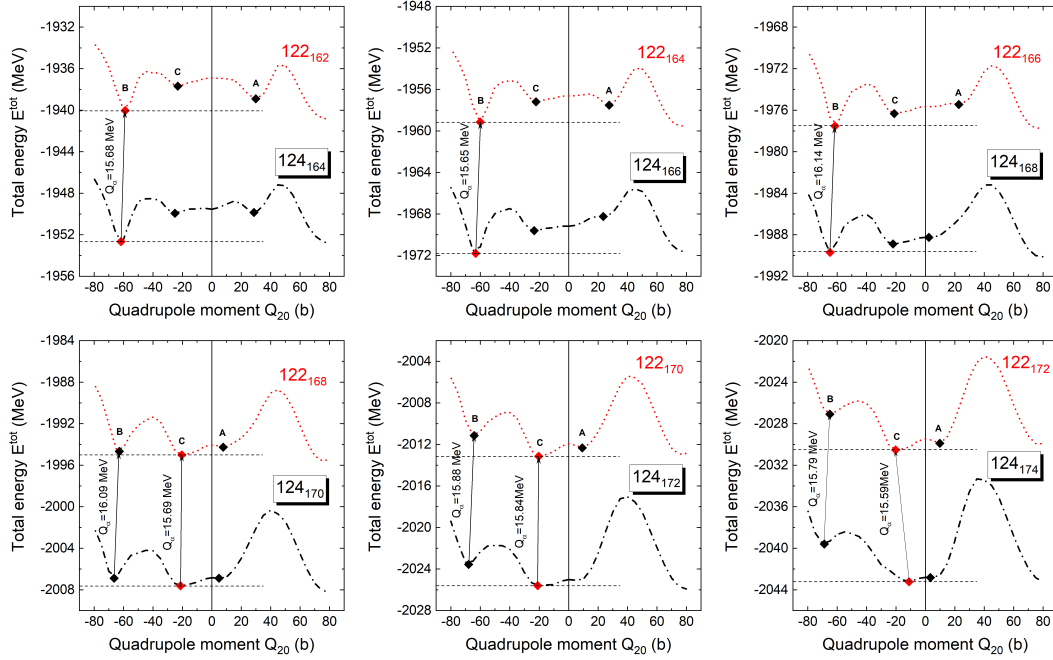
konfiguracjami w minimach odpowiadających deformacjom SDO. Wartości energii  $Q_\alpha$  i  $Q_\alpha(\mathbf{B})$  wykreślono na Rys. 3.49 (a), a małymi pełnymi symbolami oznaczono  $Q_\alpha$ , odpowiednio dla przejść ze stanu podstawowego (g.s.) jądra macierzystego. Energie  $Q_\alpha(\mathbf{B})$  dla przejść pomiędzy konfiguracjami SDO w jądrze macierzystym i pochodnym oznaczono większymi pustymi symbolami. W przypadku, gdy na rysunkach małe pełne symbole pokrywają się z dużymi pustymi symbolami, to oznacza to, że stan podstawowy jądra macierzystego jest stanem SDO. Interesujący jest przypadek izotopów  $^{120}_{160,162,164}$ , dla których widoczna jest redukcja energii  $Q_\alpha(\mathbf{B})$  (przejście SDO-SDO) względem energii  $Q_\alpha$  (przejście g.s.-g.s.). Jest to tym bardziej istotne, że dla izotopów  $^{120}_{160,162,164}$  różnica energii w minimum SDO i w minimum stanu podstawowego jest mniejsza od 300 keV. Energie  $Q_\alpha$  i  $Q_\alpha(\mathbf{B})$  posłużyły do wyznaczenia  $\log T_\alpha$  według reguły 3-parametrowej (3.9) i zostały przedstawione na Rys. 3.49 (b). W przypadku izotopów  $^{120}_{160,162,164}$  widoczny jest zdecydowany wzrost czasów  $T_\alpha(\mathbf{B})$  w stosunku do  $T_\alpha$ . Dla tych trzech jąder logarytm współczynnika wzbronienia (*hideance factor*)  $\log(T_\alpha(\text{SDO}))/T_\alpha(\text{g.s.}) = \log(T_\alpha(\mathbf{B})/T_\alpha)$  wynosi odpowiednio: 2.47, 2.88 i 3.70. Cztery izotopy  $^{120}_{164,166,168,170}$  przekraczają granicę  $T_\alpha = 1 \mu\text{s}$ , spośród nich nuklidy  $^{120}_{164,166}$  mogą przyjmować deformacje SDO w stanie podstawowym.

W Tabeli 3.7 zebrano wartości energii  $Q_\alpha$ ,  $Q_\alpha(\mathbf{B})$ , logarytmów  $T_\alpha$  i  $T_\alpha(\mathbf{B})$  oraz  $\log(T_\alpha(\mathbf{B})/T_\alpha)$  dla neutronowo-deficytowych parzystych izotopów  $Z = 120, 122$  i  $124$ .

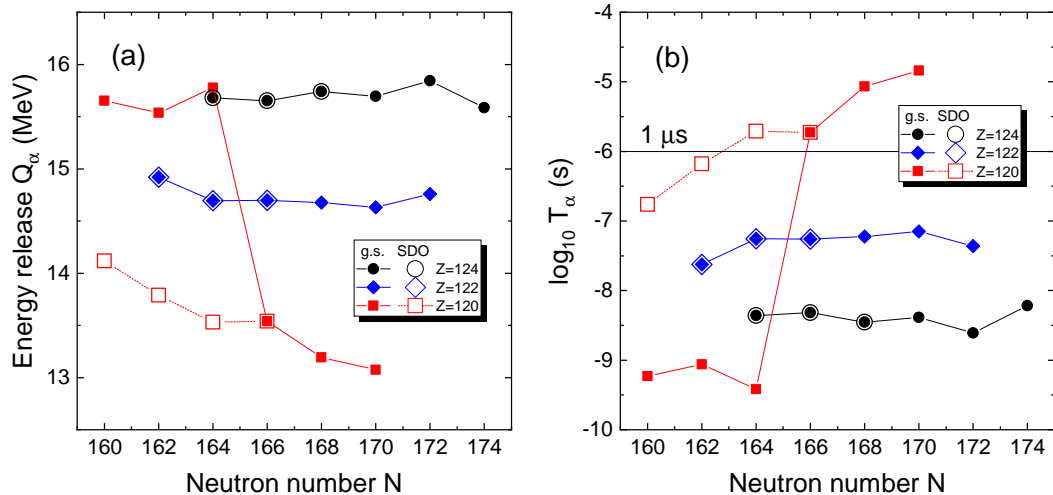


**Rysunek 3.47:** Osiosymetryczne wykresy energii deformacji Skyrme'a-HFB dla neutronowo-deficytowych parzystych superciężkich izotopów  $Z = 118$  i  $120$  oraz  $Z = 120$  i  $122$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Zaznaczono trzy lokalne minima: **A** (*prolate*), **B** (*SDO*) i **C** (*oblate*), kolorem czerwonym oznaczono minimum stanu podstawowego. Wykresy energetyczne pogrupowane są parami według schematu jądro macierzyste-jądro pochodne w rozpadzie  $\alpha$ . Przedstawiono wartości uwalnianej energii  $Q_\alpha$  dla zaznaczonych przejść.





**Rysunek 3.48:** (kontynuacja Rys. 3.47). Osiosymetryczne wykresy energii deformacji Skyrme'a-HFB dla neutronowo-deficytowych parzystych superciężkich izotopów  $Z = 122$  i  $124$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Zaznaczono trzy lokalne minima: **A** (*prolate*), **B** (SDO) i **C** (*oblate*), kolorem czerwonym oznaczono minimum stanu podstawowego. Wykresy energetyczne pogrupowane są parami według schematu jądro macierzyste-jądro pochodne w rozpadzie  $\alpha$ . Przedstawiono wartości uwalnianej energii  $Q_\alpha$  dla zaznaczonych przejść.



**Rysunek 3.49:** (a) Wartości energii  $Q_\alpha$  uwalnianej w rozpadzie  $\alpha$  oraz (b)  $\log T_\alpha$  dla parzystych izotopów  $Z = 120, 122,$  i  $124$  obliczone dla przejść stan podstawowy - stan podstawowy (pełne symbole) oraz dla przejść minimum SDO - minimum SDO (duże puste symbole).

**Tabela 3.7:** Energie całkowite  $E^{tot}$  i deformacje kwadrupolowe  $Q_{20}$  neutronowo-deficytowych izotopów  $Z = 118, 120, 122$  i  $124$  w trzech lokalnych minimach: **A** (*prolate*), **B** (*SDO*) i **C** (*oblate*) oraz wysokości barier rozszczepieniowych ( $B_f$ ). Wartości energii  $Q_\alpha$  i  $\log T_\alpha$  obliczone dla przejść ze stanu podstawowego jądra macierzystego oraz  $Q_\alpha(\mathbf{B})$  i  $\log T_\alpha(\mathbf{B})$  dla przejść z konfiguracji SDO dla jądra macierzystego. Pogrubioną czcionką oznaczono wartości w stanie podstawowym.

$Z$	$N$	$E^{tot}(\mathbf{A})$ (MeV)	$Q_{20}(\mathbf{A})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{B})$ (MeV)	$Q_{20}(\mathbf{B})$ (b)	$E^{tot}(\mathbf{C})$ (MeV)	$Q_{20}(\mathbf{C})$ (b)	$B_f$ (MeV)	$Q_\alpha$ (s)	$\log T_\alpha$ (MeV)	$Q_\alpha(\mathbf{B})$ (s)	$\log T_\alpha(\mathbf{B})$	$\log(T_\alpha(\mathbf{B})/T_\alpha)$ (MeV)
118	158	<b>-1914.23</b>	<b>29.33</b>	-1912.48	-53.05	-1910.75	-22.15	2.80					
	160	<b>-1933.06</b>	<b>28.52</b>	-1931.03	-54.20	-1929.70	-21.21	4.02					
	162	<b>-1951.41</b>	<b>28.08</b>	-1949.16	-55.37	-1948.27	-20.28	4.87					
	164	<b>-1968.94</b>	<b>26.35</b>	-1966.77	-56.68	-1966.52	-19.48	5.05					
	166	<b>-1985.62</b>	<b>24.39</b>	-1983.62	-58.27	-1984.36	-18.86	4.97					
	168	<b>-2001.92</b>	<b>22.33</b>	-1999.45	-57.60	-2001.75	-18.50	5.48					
120	160	<b>-1926.88</b>	<b>29.25</b>	-1926.66	-55.93	-1924.63	-20.60	3.32	15.65	-9.23	14.12	-6.76	2.47
	162	<b>-1945.82</b>	<b>28.74</b>	-1945.54	-57.00	-1943.92	-19.67	4.18	15.54	-9.06	13.79	-6.18	2.88
	164	<b>-1963.94</b>	<b>26.61</b>	-1963.93	-58.20	-1962.85	-18.93	4.37	15.78	-9.41	13.53	-5.71	3.70
	166	-1981.26	23.30	<b>-1981.53</b>	<b>-59.74</b>	-1981.39	-18.40	4.92	13.54	-5.73	13.54	-5.73	0.00
	168	-1998.61	17.30	-1997.97	-60.62	<b>-1999.47</b>	<b>-18.26</b>	4.00	13.19	-5.07	13.94	-6.46	-1.39
	170	-2015.94	13.31	-2013.78	-60.46	<b>-2016.98</b>	<b>-18.54</b>	5.74	13.07	-4.84	13.97	-6.50	-1.66
122	162	-1938.90	30.01	<b>-1940.04</b>	<b>-58.78</b>	-1937.68	-23.00	1.75	14.92	-7.63	14.92	-7.63	0.00
	164	-1957.52	27.56	<b>-1959.15</b>	<b>-59.92</b>	-1957.20	-22.07	2.81	14.69	-7.26	14.69	-7.26	0.00
	166	-1975.46	22.84	<b>-1977.53</b>	<b>-61.38</b>	-1976.33	-21.07	3.03	14.70	-7.26	14.70	-7.26	0.00
	168	-1994.26	7.79	-1994.68	-62.78	<b>-1995.01</b>	<b>-20.34</b>	4.01	14.68	-7.22	15.15	-8.00	-0.77
	170	-2012.33	9.36	-2011.14	-64.06	<b>-2013.14</b>	<b>-20.27</b>	4.74	14.63	-7.15	15.13	-7.97	-0.82
	172	-2029.90	9.86	-2027.09	-64.82	<b>-2030.52</b>	<b>-20.18</b>	5.68	14.76	-7.36	14.99	-7.74	-0.38
124	164	-1949.86	28.78	<b>-1952.66</b>	<b>-61.65</b>	-1949.94	-25.02	1.98	15.68	-8.36	15.68	-8.36	0.00
	166	-1968.25	23.64	<b>-1971.80</b>	<b>-63.04</b>	-1969.61	-23.35	2.18	15.65	-8.32	15.65	-8.32	0.00
	168	-1988.26	2.46	<b>-1989.69</b>	<b>-64.69</b>	-1988.89	-21.88	2.91	16.14	-9.06	16.14	-9.06	0.00
	170	-2006.88	4.96	-2006.89	-66.33	<b>-2007.62</b>	<b>-21.23</b>	3.63	15.69	-8.39	16.09	-8.99	-0.60
	172	-	-	-2023.56	-67.80	<b>-2025.60</b>	<b>-20.92</b>	4.68	15.84	-8.61	15.88	-8.67	-0.06
	174	-2042.82	3.52	-2039.60	-68.63	<b>-2043.23</b>	<b>-11.02</b>	5.84	15.59	-8.22	15.79	-8.53	-0.31

## 3.6 Toroidalne wysoko-spinowe izomery

### 3.6.1 Toroidalne rozwiązania w $^{304}120_{184}$

W podrozdziale 3.2 na Rys. 3.3 przedstawiona została zależność całkowitej energii  $E^{tot}$  podwójnie magicznego jądra  $^{304}120_{184}$  od momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Uzyskane w modelu średniego pola CHFb z funkcjonalem gęstości Skyrme'a SkM\* [16] wyniki wskazują, że dla wartości  $Q_{20} \leq -158$  b pojawiają się rozwiązania, w których powierzchnia jądrowa przyjmuje kształt torusa. Charakteryzując powierzchnię torusa stosunkiem dużego promienia  $R$  do małego promienia  $d$  (Rys. 3.4), zauważyć można, że wraz ze wzrostem deformacji *oblate* współczynnik kształtu torusa  $R/d$  rośnie. Toroidalne rozwiązania w jądrze  $^{304}120_{184}$  przedstawione zostały na Rys. 3.3 w zakresie  $-500 \text{ b} \leq Q_{20} \leq -158 \text{ b}$ .

Ten szeroki zakres deformacji *oblate*, w którym występują rozwiązania toroidalne, świadczy o tym, że rozwiązania toroidalne są stabilne mimo zmiany wartości wiązania (ograniczenia)  $\langle \widehat{Q}_{20} \rangle = Q_{20}$  nakładanego na moment kwadrupolowy. Jednak nie w całym zakresie  $Q_{20}$  przedstawionym na Rys. 3.3 toroidalne rozwiązania zachowują symetrię osiową. Dla pewnych wartości deformacji *oblate*  $Q_{20}$  pojawiają się przewężenia i zgrubienia na powierzchni torusa. Odkształcenia te mogą mieć związek z niestabilnościami *Plateau-Rayleigha* [126–129] obserwowanymi w przypadku płynów. Uzyskane w modelu Skyrme'a-CHFb energie  $E^{tot}$  odpowiadające rozwiązaniom toroidalnym rosną monotonicznie wraz ze wzrostem deformacji *oblate*, na wykresie  $E^{tot}(Q_{20})$  brak jest lokalnych minimów. W pracy [130] zaproponowany został mechanizm, który pozwala stabilizować kwantowy układ z toroidalnym rozkładem materii. Mechanizm ten polega na wprowadzeniu do toroidalnego układu momentu pędu ustawionego wzdłuż osi symetrii  $I = I_z$ . W przypadku, gdy moment pędu  $I = I_z$  osiąga pewną wartość progową, układ osiąga metastabilny toroidalny wysoko-spinowy stan izomeryczny (THSI).

### 3.6.2 Toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne $^{304}120_{184}$

W jądrze atomowym wysokie wartości momentu pędu  $I$  mogą być generowane albo przez kolektywne rotacje wokół osi prostopadłej do osi symetrii jądra, bądź też przez uszeregowanie momentów pędu pojedynczych nukleonów wzdłuż osi symetrii [131–133]. W przeciwieństwie do rotacji kolektywnych, w których biorą udział wszystkie nukleony w jądrze, w „rotacjach” wokół osi symetrii udział biorą tylko pojedyncze nukleony. Ze względu na symetrię odwrócenia czasu lub symetrię odbiciową względem płaszczyzny  $x-y$  w zdeformowanym potencjale osiowosymetrycznym, stany jednocząstkowe są dwukrotnie zdegenerowane ze względu na rzut całkowitego momentu pędu  $j$  na oś symetrii  $\Omega_z = \pm\Omega$ , gdzie  $\Omega = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, j$ . Jądro nie może wykonywać kolektywnych rotacji wokół



swojej osi symetrii. Jednakże składową całkowitego momentu pędu wzdłuż osi symetrii  $I_z$  wyznaczają rzuty momentów pędu na oś symetrii  $\Omega_z$  pojedynczych nukleonów

$$I_z = \langle \hat{J}_z \rangle = \sum_{i=1}^A \langle \hat{j}_z \rangle_i = \sum_{i=1}^A \Omega_z^{(i)}. \quad (3.10)$$

Chcąc zwiększyć składową  $I_z$  momentu pędu należy zmienić konfigurację obsadzeń stanów jednocząstkowych w zdeformowanym potencjale. Usunięcie nukleonu z poziomu leżącego poniżej energii Fermiego powoduje utworzenie stanu dziurowego ( $e_i < e_F$ ), natomiast obsadzony wolny poziom powyżej energii Fermiego ( $e_i > e_F$ ) nazywany jest stanem cząstkowym. To właśnie wzbudzenia cząstka-dziura pozwalają generować składową  $I_z$  momentu pędu jądra. Wykonując kilka takich wzbudzeń, oddzielnie dla protonów i neutronów, można uzyskać konfigurację o bardzo wysokim spinie  $I = I_z$ , w szczególności, gdy stany cząstkowe i dziurowe charakteryzują się dużymi wartościami  $|\Omega_z|$ . Rzut całkowitego momentu pędu na oś symetrii jądra  $I_z$ , w zależności od liczby wzbudzeń cząstka-dziura oraz liczb kwantowych  $\Omega_z$  stanów jednocząstkowych biorących udział w wzbudzeniach, może przyjmować skwantowane i nietrywialne wartości, które określić można tylko po dokładnej analizie diagramów stanów jednocząstkowych badanego jądra.

Poszukiwanie optymalnej (o najniższej energii) konfiguracji stanów jednocząstkowych  $\sum_{i=1}^A e_i = \min$  z dodatkowym warunkiem na moment pędu  $I_z = \sum_{i=1}^A \Omega_z^{(i)}$  rozwiązać można przy użyciu metody mnożników Lagrange'a. Wprowadza się, tak jak w przypadku metody wymuszonego obrotu Inglisa [134, 135], nowy układ poziomów jednocząstkowych (Routhianów) związanych z obracającym się z częstością  $\omega_z$  potencjałem jądrowym

$$e'_i = e_i - \hbar\omega_z\Omega_z^{(i)}, \quad (3.11)$$

gdzie parametr  $\hbar\omega_z$  pełni rolę mnożnika Lagrange'a.

W celu znalezienia optymalnej konfiguracji należy zminimalizować wyrażenie na sumę jednocząstkowych Routhianów

$$E' = \sum_{i=1}^A e'_i = \sum_{i=1}^A (e_i - \hbar\omega_z\Omega_z^{(i)}) = \min. \quad (3.12)$$

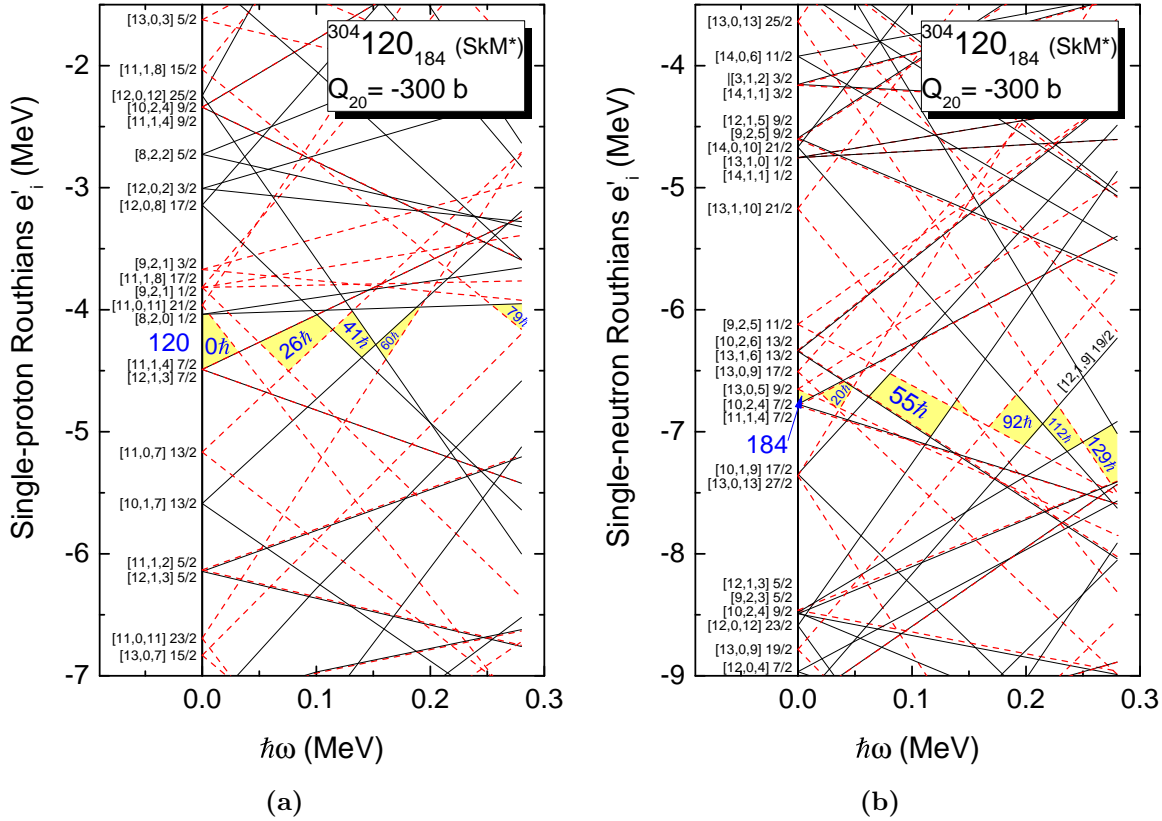
Całkowity hamiltonian związany z „obracającym” się wokół osi symetrii jądrem ma postać

$$\hat{H}' = \hat{H} - \hbar\omega_z\hat{J}_z = \sum_{i=1}^A \hat{h}'_i = \sum_{i=1}^A (\hat{h}_i - \hbar\omega_z\hat{j}_z^{(i)}), \quad (3.13)$$

gdzie  $\hat{H}$  jest hamiltonianem w układzie laboratoryjnym, zaś człon  $-\hbar\omega_z\hat{J}_z$  jest odpowiednikiem klasycznych sił Coriolisa i odśrodkowej w układzie rotującym.

Jednocząstkowe Routhiany  $e'_i$  w funkcji parametru  $\hbar\omega_z$  mają postać linii prostych, których nachylenie dane jest przez

$$\frac{de'_i}{d(\hbar\omega_z)} = -\Omega_z^{(i)}. \quad (3.14)$$



**Rysunek 3.50:** Jednocząstkowe Routhiany protonowe (a) i neutronowe (b) w funkcji parametru  $\hbar\omega$  dla jądra  $^{304}_{120}184$ , w konfiguracji toroidalnej przy deformacji  $Q_{20} = -300$  b. W granicy  $\hbar\omega = 0$  stany oznaczone są liczbami kwantowymi Nilssona  $[N, n_z, \Lambda]\Omega$ . Ciągłe (czarne) i przerywane (czerwone) linie oznaczają odpowiednio stany z parzystą i nieparzystą główną liczbą kwantową  $N$ . Rzuty momentu pędu na oś symetrii jądra  $I_z$  dla protonów  $Z = 120$  - panel (a) oraz dla neutronów  $N = 184$  - panel (b) przedstawione zostały dla różnych wartości parametru  $\hbar\omega$ .

Na Rys. 3.50 przedstawione zostały jednocząstkowe Routhiany protonowe - panel (a) oraz neutronowe - panel (b), w funkcji parametru  $\hbar\omega (\equiv \hbar\omega_z)$  dla jądra  $^{304}_{120}184$ . W granicy  $\hbar\omega = 0$  poziomy jednocząstkowe  $e_i$  znakowane asymptotycznymi liczbami kwantowymi  $[N, n_z, \Lambda]\Omega$  otrzymane zostały w modelu Skyrme'a-CHFB dla deformacji *oblate*  $Q_{20} = -300$  b, odpowiadającej *toroidalnemu* rozkładowi materii jądrowej. Pomimo liniowej zależności  $e'_i(\hbar\omega)$  (3.11) gęstość jednocząstkowych Routhianów jest dalece niejednorodna. Chcąc znaleźć składową  $I_z$  momentu pędu dla ustalonej wartości parametru  $\hbar\omega$  obsadza się najniższe stany  $e'_i(\hbar\omega = \text{const.})$  odpowiednio przez wszystkie

protony/neutrony i sumuje się  $\Omega_z^{(i)}$  po wszystkich zajętych stanach (3.10). Jeżeli ostatni zapełniony jednocząstkowy Routhian, dla ustalonego parametru  $\hbar\omega$ , graniczy z obszarem o niskiej gęstości Routhianów  $e'_i$  układ taki reprezentuje konfigurację o względnie zwiększonej stabilności (ma zapełnioną powłokę) [114, 115].

Na Rys. 3.50(a) odczytać można, że dla liczby protonów  $Z = 120$ , możliwe zapełnione powłoki występują dla  $I_z(\text{proton}) = 0, 26, 41, 60$  i  $79\hbar$  w zależności od rosnących wartości parametru  $\hbar\omega$ . Podobnie, na Rys. 3.50(b) dla liczby neutronów  $N = 184$ , możliwe zapełnione powłoki posiadają  $I_z(\text{neutron}) = 0, 20, 55, 92, 112$  i  $129\hbar$ . Jeżeli stabilne konfiguracje dla protonów i neutronów pojawiają się dla podobnych wartości parametru  $\hbar\omega$ , to taki układ jądrowy może reprezentować izomeryczny stan spinowy z  $I_z = I_z(\text{proton}) + I_z(\text{neutron})$ . Na podstawie Rys. 3.50, w jądrze  $^{304}120_{184}$ , w okolicy deformacji *oblate*  $Q_{20} = -300$  b można oczekiwać dwóch toroidalnych wysokospinowych stanów izomerycznych (THSI):  $I_z = 26\hbar + 55\hbar = 81\hbar$  dla  $\hbar\omega \approx 0.1$  MeV oraz  $I_z = 79\hbar + 129\hbar = 208\hbar$  dla  $\hbar\omega \approx 0.28$  MeV.

Równoważną do przedstawionej na Rys. 3.50 metody wyznaczania konfiguracji optymalnych, spełniających rów. (3.12), jest metoda polegająca na wykreśleniu energii stanów jednocząstkowych  $e_i$  w zależności od jednocząstkowego momentu pędu wzdłuż osi symetrii  $\Omega_z$  [25, 108, 109, 133, 136]. Na wykresie przedstawiającym  $e_i(\Omega_z)$ , dla danej wartości  $\Omega_z$ , stan o minimalnej średniej energii uzyskuje się zapełniając najniższe poziomy aż do energii Fermiego  $e_F(\Omega_z)$  dla ustalonego  $\Omega_z$ . Funkcję  $e_F(\Omega_z)$  należy wyznaczyć poprzez minimalizację sumy energii jednocząstkowych, z uwzględnieniem dwóch warunków: składowa całkowitego momentu pędu wynosi  $I_z = \sum_{i \text{ occ}} \Omega_z^{(i)}$  oraz liczba nukleonów odpowiada liczbie obsadzonych stanów  $A = \sum_{i \text{ occ}} 1$ . Wprowadzając dwa mnożniki Lagrange'a  $\hbar\omega_z$  i  $\lambda$  otrzymuje się pomocniczą wielkość wariacyjną

$$\mathcal{E}' = E - \lambda A - \hbar\omega_z I_z = \sum_{\Omega_z} \int^{e_F(\Omega_z)} g(e, \Omega_z) \cdot (e - \lambda - \hbar\omega_z \Omega_z) de, \quad (3.15)$$

gdzie widmo jednocząstkowe dla danej wartości  $\Omega_z$ , opisane jest gęstością poziomów  $g(e, \Omega_z)$ . Z warunku, by  $\mathcal{E}'$  było stacjonarne względem dowolnej wariacji  $e_F(\Omega_z)$  otrzymuje się

$$e_F(\Omega_z) = \lambda + \hbar\omega_z \Omega_z. \quad (3.16)$$

Mnożniki Lagrange'a  $\lambda$  i  $\hbar\omega_z$  reprezentują pochodne  $\mathcal{E}'$  (3.15) względem  $A$  i  $I_z$ , które to wielkości określone są przez zależności [25] (str. 74)

$$A = \sum_{\Omega_z} \int^{e_F(\Omega_z)} g(e, \Omega_z) de \approx \int^{\lambda} g(e) de, \quad (3.17)$$

$$g_e \equiv \sum_{\Omega_z} g(e, \Omega_z),$$

$$I_z = \sum_{\Omega_z} \int^{e_F(\Omega_z)} g(e, \Omega_z) \Omega_z de \approx \hbar\omega_z \sum_{\Omega_z} \Omega_z^2 g(e = \lambda, \Omega_z) = \hbar\omega_z \langle \Omega_z^2 \rangle g_0, \quad (3.18)$$

$$g_0 \equiv g(e = \lambda)$$

gdzie  $\langle \Omega_z^2 \rangle$  oznacza średnią wartość  $\Omega_z^2$  dla energii  $e = \lambda$ . W tym samym przybliżeniu wyrażenie na energię ma postać

$$\begin{aligned} E(I_z) &= \sum_{\Omega_z} \int^{e_F(\Omega_z)} g(e, \Omega_z) e de \approx E(I_z = 0) + \frac{1}{2} (\hbar\omega_z)^2 \langle \Omega_z^2 \rangle g_0 \\ &= E(I_z = 0) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_z} I_z^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdzie efektywny moment bezwładności dany jest wzorem

$$\mathcal{J}_z = \hbar^2 g_0 \langle \Omega_z^2 \rangle. \quad (3.20)$$

W przybliżeniu gazu Fermiego rów. (3.20) daje moment bezwładności odpowiadający bryle sztywnej [24]

$$\hbar^2 g_0 \langle \Omega_z^2 \rangle = M \int \rho_0(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) d^3\mathbf{r} = \mathcal{J}_{rig}, \quad (3.21)$$

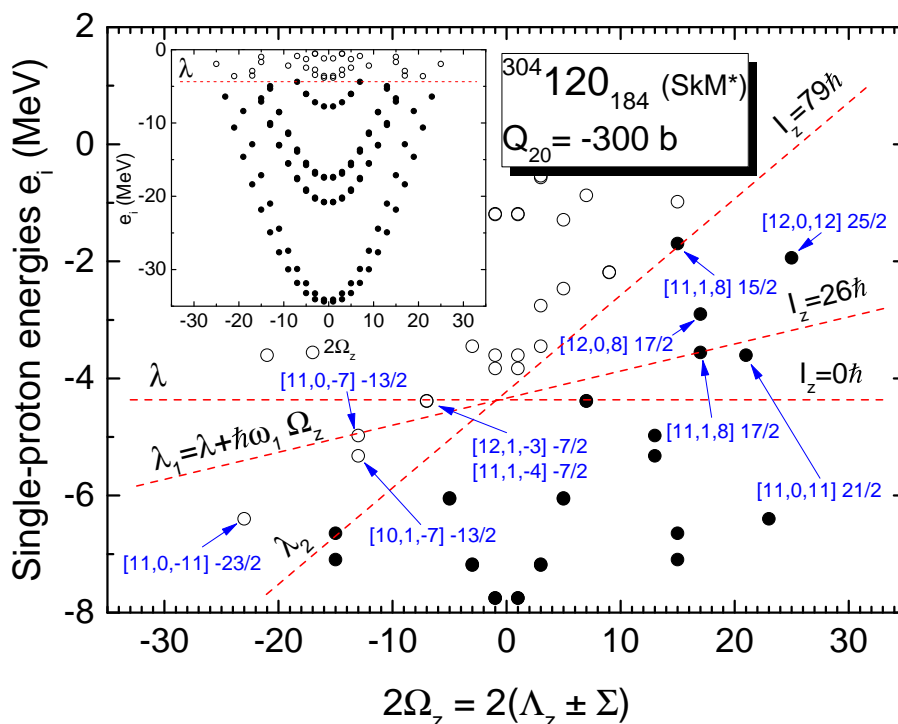
gdzie  $M$  to masa nukleonu.

Na płaszczyźnie  $(\Omega_z, e)$  zależność energii Fermiego od wartości rzutu jednocząstkowego momentu pędu na oś symetrii jądra,  $e_F(\Omega_z)$  przedstawia nachyloną prostą, (3.16), a suma energii  $e_i(\Omega_z)$  wszystkich stanów jednocząstkowych leżących poniżej tej prostej równa się średniej energii konfiguracji optymalnej  $A$  nukleonów z całkowitym momentem pędu  $I = I_z$ .

Energie stanów jednocząstkowych w jądrze  $^{304}120_{184}$ , w zależności od liczby kwantowej  $\Omega_z$ , dla protonów i neutronów przedstawione zostały odpowiednio na Rys. 3.51 i 3.52. Stany te, podobnie, jak przedstawione na Rys. 3.50 (a) i (b) odpowiadają konfiguracji toroidalnej uzyskanej w modelu Skyrme'a-CHFB dla deformacji  $Q_{20} = -300$  b. Konfiguracje stanów bez spinu ( $I_z = 0$ ) reprezentowane są przez pełne czarne punkty leżące poniżej poziomej przerywanej czerwonej linii  $\lambda$  (górną wstawka na Rys. 3.51). Ze względu na dwukrotną degenerację stanów jednocząstkowych  $\Omega_z = \pm\Omega$ , w przypadku jąder parzysto-parzystych  $I_z = \sum_{i \text{ occ}} \Omega_z^{(i)} = 0$ .

Przy pochyleniu powierzchni Fermiego, zgodnie z (3.16), pewne stany  $e_i(\Omega_z)$  konfiguracji bezspinowej leżące teraz powyżej pochylonej powierzchni Fermiego stają się stanami dziurowymi, ze składową momentu pędu  $-|\Omega_z^{hole}|$ . Natomiast stany, które znalazły się poniżej pochylonej powierzchni Fermiego stają się nowymi stanami cząstkowymi z momentem pędu  $\Omega_z^{part}$ . Pochylenie powierzchni Fermiego pozwala określić wzbudzenia cząstka-dziura, a całkowity spin konfiguracji optymalnej ( $E(I_z) = \min$ ) wynosi

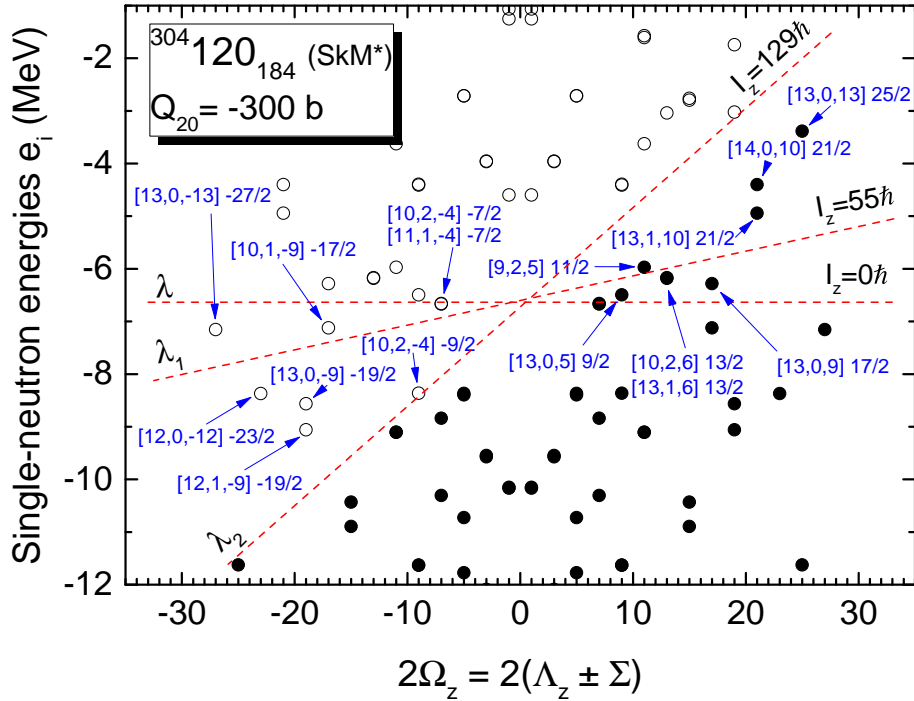
$$I = I_z = \sum_{i \text{ exc}} (\Omega_z^{part} - \Omega_z^{hole})_i \quad (3.22)$$



**Rysunek 3.51:** Protonowe jednocząstkowe poziomy energetyczne dla  $^{304}_{184}\text{120}$  w konfiguracji toroidalnej przy  $Q_{20} = -300$  b, w funkcji  $2\Omega_z$ . Przerywane linie (czerwony kolor) oznaczają pochylone powierzchnie Fermiego, które prowadzą do wartości momentu pędu  $I_z = 26\hbar$  dla  $\hbar\omega_1 \approx 0.1$  MeV, i  $I_z = 79\hbar$  przy  $\hbar\omega_2 \approx 0.28$  MeV. W przypadku  $I_z = 79\hbar$ , stany zajęte są pokazane jako pełne koła, a stany dziurowe, jako puste koła.

W Tabeli 3.8 zebrane zostały konfiguracje wzbudzeń cząstka-dziura w jądrze  $^{304}_{184}\text{120}$ , dla deformacji  $Q_{20} \approx -300$  b, prowadzące do toroidalnych wysoko-spinowych stanów izomerycznych (THSI states) z  $I_z = 81\hbar$  i  $208\hbar$ . Przedstawione wzbudzenia prowadzące do konfiguracji optymalnych dla danego spinu  $I_z$  uzyskane zostały dwoma równoważnymi metodami przedstawionymi na Rys. 3.50 (a) i (b) oraz Rys. 3.51 i 3.52.

Wzrost całkowitego momentu pędu  $I$  prowadzi do osłabienia korelacji pairing w jądrze i przy pewnej wartości krytycznej  $I_{cr}$  dochodzi do przemiany fazowej z fazy nadciekłej do fazy normalnej, który to efekt przewidział Mottelson i Valatin [137]. Oddziaływanie pairing sprzęga nukleony w pary Coopera, w których stany nukleonów powiązane są ze sobą operacją odwrócenia czasu. W rotującym jądrze siły Coriolisa działając w przeciwny sposób na każdy nukleon prowadzą do rozrywania par Coopera. W rotacjach niekolektywnych moment pędu  $I = I_z$  generowany jest przez ustawienie jednocząstkowych momentów pędu wzdłuż osi symetrii jądra w wyniku kolejnych wzbudzeń cząstka-dziura (3.22). W procesie tym rośnie liczba niesparowanych nukleonów (*seniority*) danej konfiguracji, a każdy orbital zajęty przez niesparowany nukleon jest blokowany (*blocking effect*) [133] (str. 237).



**Rysunek 3.52:** Neutronowe jednocząstkowe poziomy energetyczne  $^{304}120_{184}$  w konfiguracji toroidalnej przy  $Q_{20} = -300$  b, w funkcji  $2\Omega_z$ . Cienkie, przerywane linie oznaczają pochylone powierzchnie Fermiego, które prowadzą do wartości momentu pędu  $I_z = 55\hbar$  dla  $\hbar\omega_1 \approx 0.1$  MeV, i  $I_z = 129\hbar$  przy  $\hbar\omega_2 \approx 0.28$  MeV. W przypadku  $I_z = 129\hbar$ , stany zajęte są pokazane jako pełne koła, a stany dziurowe, jako puste koła.

Na Rys. 3.53 w panelu (a) przedstawione zostały wartości energii jądra  $^{304}120_{184}$  uzyskane w modelu wymuszonego obrotu Skyrme'a-HFB, w zależności od momentu pędu  $I = I_z$ . Na dole rysunku, po lewej stronie, widoczna jest toroidalna konfiguracja startowa (bez spinu) policzona w modelu Skyrme'a-CHFB, dla deformacji *oblate*  $Q_{20} = -300$  b. W modelu wymuszonego obrotu został uwolniony warunek na moment kwadrupolowy  $Q_{20}$ , a mnożnik Lagrange'a  $\hbar\omega_z$ , określający częstość „rotacji” wokół osi symetrii, zmieniany był w zakresie  $\hbar\omega_z = 0.10$ - $0.28$  MeV, z krokiem  $0.01$  MeV. W pierwszym wysoko-spinowym stanie równowagi, z momentem pędu  $I_z \approx 77\hbar$ , moment kwadrupolowy osiąga wartość  $Q_{20} = -271.6$  b. Wraz ze wzrostem  $I_z$ , w stanach równowagi rośnie wartość deformacji *oblate*, by dla konfiguracji ze spinem  $I_z = 208\hbar$  osiągnąć wartość  $Q_{20} = -300.8$  b. Zależność wartości przerwy energetycznej pairing dla protonów  $\Delta_p$  i neutronów  $\Delta_n$  od wartości momentu pędu  $I = I_z$  w wysoko-spinowych stanach równowagi przedstawiono na panelu (b) Rys. 3.53. W konfiguracji startowej bez spinu  $\Delta_p = 1.16$  MeV, a  $\Delta_n = 0.80$  MeV. Wraz ze wzrostem wartości  $I_z$  w stanach równowagi protonowa przerwa energetyczna  $\Delta_p$  zmniejsza się i przy wartości momentu pędu  $I_z = 208\hbar$  osiąga wartość zero. Natomiast neutronowa przerwa energetyczna  $\Delta_n = 0$  w każdym ze znalezionych wysoko-spinowych stanów równowagi,  $I_z > 77\hbar$ .

**Tabela 3.8:** Konfiguracje wzbudzeń cząstka-dziura prowadzące do stanów  $I_z = I_z(\text{proton}) + I_z(\text{neutron}) = 26 + 55 = 81\hbar$  i  $I_z = 79 + 129 = 208\hbar$  w toroidalnym jądrze  $^{304}120_{184}$  dla deformacji  $Q_{20} \approx -300$  b.

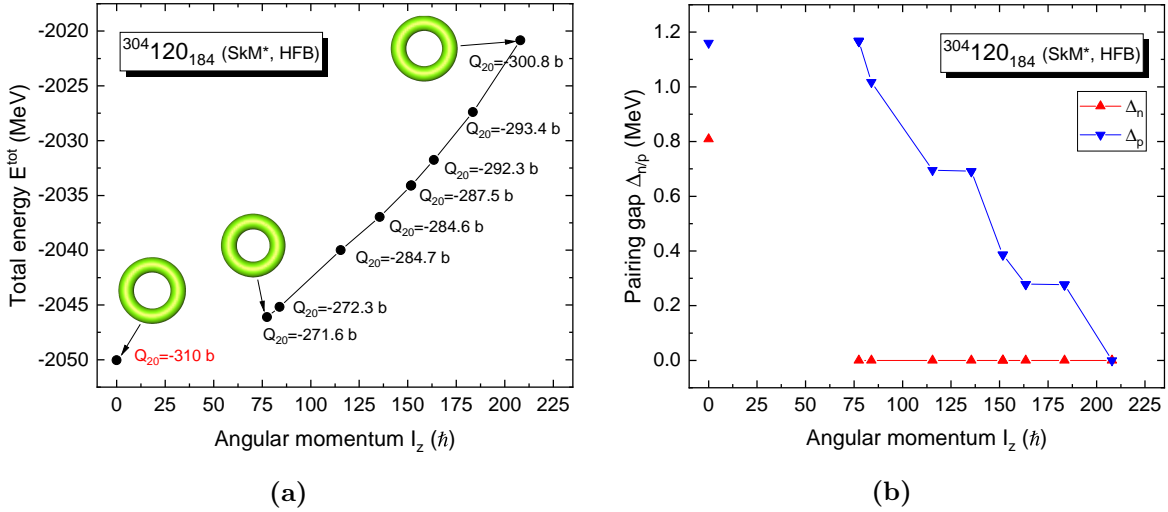
	Stany dziur	Stany cząstek
$I_z(\text{proton}) = 26\hbar$	[11,1,-4] -7/2	[11,0,11] 21/2
	[12,1,-3] -7/2	[11,1,8] 17/2
$I_z(\text{proton}) = 79\hbar$	[11,0,-7] -13/2	[12,0,8] 17/2
	[10,1,-7] -13/2	[12,0,12] 25/2
	[11,0,-11] -23/2	[11,1,8] 15/2
	[10,2,-4] -7/2	[13,0,5] 9/2
$I_z(\text{neutron}) = 55\hbar$	[11,1,-4] -7/2	[13,0,9] 17/2
	[10,1,-9] -17/2	[13,1,6] 13/2
	[13,0,-13] -27/2	[10,2,6] 13/2
	[12,0,-12] -23/2	[9,2,5] 11/2
$I_z(\text{neutron}) = 129\hbar$	[13,0,-9] -19/2	[13,1,10] 21/2
	[12,1,-9] -19/2	[14,0,10] 21/2
	[10,2,-4] -9/2	[13,0,13] 25/2

Zależność wartości całkowitego momentu pędu  $I_z^{\text{tot}} = I_z^p + I_z^n$  oraz protonowych  $I_z^p$  i neutronowych  $I_z^n$  składowych  $I_z$  od wartości parametru  $\hbar\omega_z$  przedstawiono na panelu (a) Rys. 3.54. W miarę wzrostu wartości mnożnika Lagrange'a  $\hbar\omega_z$ , w startowej konfiguracji toroidalnej bez spinu dochodzi do kolejnych wzbudzeń kwazicząstkowych, a nukleony z rozerwanych par ustawiają swoje jednocząstkowe momenty pędu wzdłuż osi symetrii jądra, co prowadzi do stopniowego wzrostu  $I_z$ . Na panelu (b) Rys. 3.54 przedstawiona została zależność przerw energetycznych protonowych  $\Delta_p$  i neutronowych  $\Delta_n$  od wartości mnożnika Lagrange'a  $\hbar\omega_z$  w modelu wymuszonego obrotu. Podobnie, jak na Rys. 3.53 (b), protonowa przerwa energetyczna  $\Delta_p$  stopniowo zanika ze wzrostem parametru  $\hbar\omega_z$  i osiąga wartość zero dla  $\hbar\omega_z = 0.28$  MeV. Zaś neutronowa przerwa energetyczna  $\Delta_n = 0$  dla  $\hbar\omega_z \geq 0.10$  MeV.

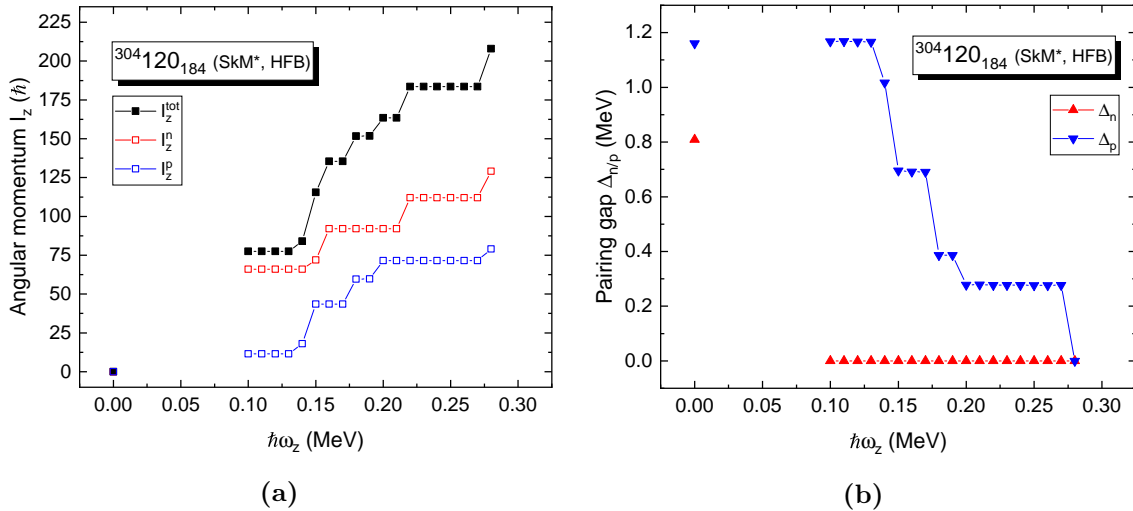
Z przedstawionych na Rys. 3.53 (b) oraz 3.54 (b) zależności przerw energetycznych  $\Delta_p$  i  $\Delta_n$  od momentu pędu  $I_z$  lub wartości mnożnika Lagrange'a  $\hbar\omega_z$  wynika, że korelacje par (pairing) podlegają istotnemu osłabieniu w „rotującym” wokół osi symetrii toroidalnym jądrze  $^{304}120_{184}$ . Ze względu na to, w poszukiwaniach toroidalnych stanów wysoko-spinowych (THSI *states*) zastosowano metodę wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-HF, w której pominięte zostały korelacje par.

Sposób postępowania przy wyznaczaniu stanów THSI przedstawiony został w pracy [9]. Toroidalne konfiguracje startowe (bez spinu) wyznaczone były przy zastosowaniu





**Rysunek 3.53:** Panel (a): Uzyskane w modelu wymuszonego obrotu Skyrme'a-HFB wartości całkowitej energii  $E^{tot}$  wysoko-spinowych konfiguracji równowagi w funkcji momentu pędu  $I_z$  dla początkowej konfiguracji toroidalnej jądra  $^{304}_{120}184$ , z deformacją *oblate*  $Q_{20} = -310$  b. Dla każdej wartości  $E^{tot}$  podany został odpowiedni moment kwadrupolowy  $Q_{20}$ . Panel (b): Wartości przerwy energetycznej pairing dla protonów  $\Delta_p$  (kolor niebieski) oraz neutronów  $\Delta_n$  (kolor czerwony) w zależności od spinu  $I_z$ .

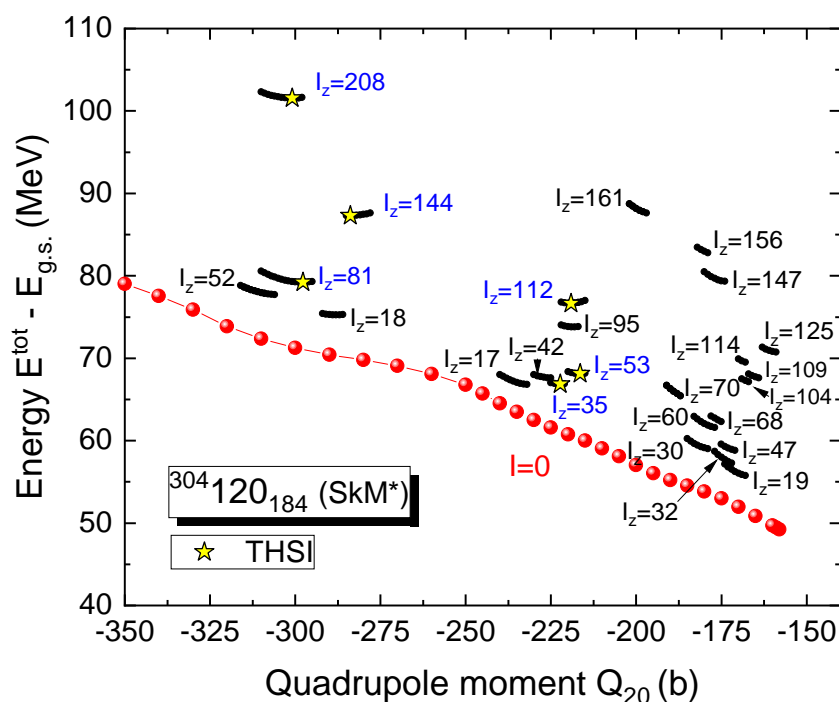


**Rysunek 3.54:** Panel (a): Zależność całkowitego momentu pędu  $I_z^{tot} = I_z^p + I_z^n$  oraz jego składowej protonowej  $I_z^p$  (kolor niebieski) i neutronowej  $I_z^n$  (kolor czerwony) od wartości parametru Lagrange'a  $\hbar\omega_z$  w modelu wymuszonego obrotu Skyrme'a-HFB. Panel (b): Wartości przerwy energetycznej pairing dla protonów  $\Delta_p$  (kolor niebieski) oraz neutronów  $\Delta_n$  (kolor czerwony) w funkcji parametru  $\hbar\omega_z$ . W modelu wymuszonego obrotu Skyrme'a-HFB, jako konfigurację startową ( $\hbar\omega_z = 0$ ) wykorzystano konfigurację toroidalną w jądrze  $^{304}_{120}184$  z  $Q_{20} = -310$  b.

samozgodnej metody Skyrme'a-CHFB z więzami nakładanymi na masowe momenty kwadrupolowe  $Q_{20}$ , dla  $Q_{20} \geq -250$  b z krokiem  $\Delta Q_{20} = 5$  b, a dla  $Q_{20} < -250$  b z



krokiem  $\Delta Q_{20} = 10$  b. Uzyskane rozwiązania toroidalne z  $Q_{20} \geq -350$  b były następnie wykorzystywane jako konfiguracje startowe w metodzie wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-CHF, w której pozostawiając więzy na  $Q_{20}$ , zmieniano mnożnik Lagrange'a  $\hbar\omega_z$  w zakresie od 0.05 MeV, z krokiem 0.05 MeV. W przypadku, gdy metoda wymuszonego obrotu dla danej pary parametrów ( $Q_{20}$ ,  $\hbar\omega_z$ ) prowadziła do uzyskania konfiguracji równowagi, z momentem pędu  $I = I_z$ , zagęszczano rozwiązania wokół deformacji  $Q_{20}$ , zmieniając wartość  $Q_{20}$  co 1 b. Jeśli utworzona w ten sposób seria rozwiązań, ze wspólną wartością momentu pędu  $I_z$  miała lokalne minimum energetyczne, to wybierając to minimalne rozwiązanie jako konfigurację startową powtarzano obliczenia z zastosowaniem metody wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-HF, uwalniając warunek na moment kwadrupolowy  $Q_{20}$ . W przypadku, gdy metoda wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-HF, pomimo włączenia wiązania na  $Q_{20}$ , prowadziła do stabilnej konfiguracji równowagi ze spinem  $I_z$ , to taka konfiguracja uważana była za poszukiwany stan THSI.

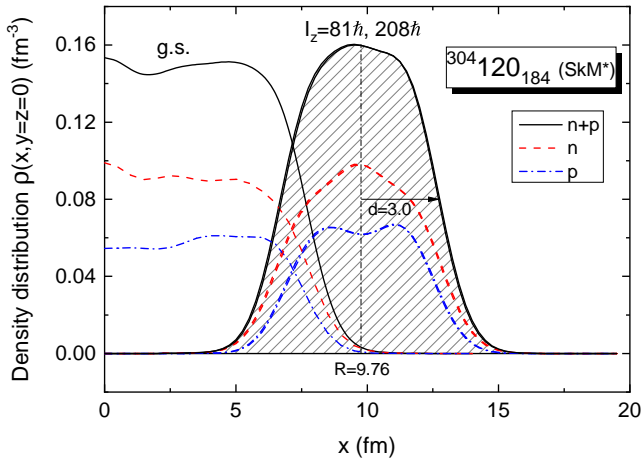


**Rysunek 3.55:** Energie deformacji superciężkiego jądra  $^{304}120_{184}$  w konfiguracji toroidalnej w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Położenie toroidalnych wysoko-spinowych izomerów (THSI) z  $Iz = 35, 53, 81, 112, 144$  i  $208\hbar$  oznaczono żółtą gwiazdką. Skala energii przeskalowana została w stosunku do energii sferycznego stanu podstawowego.

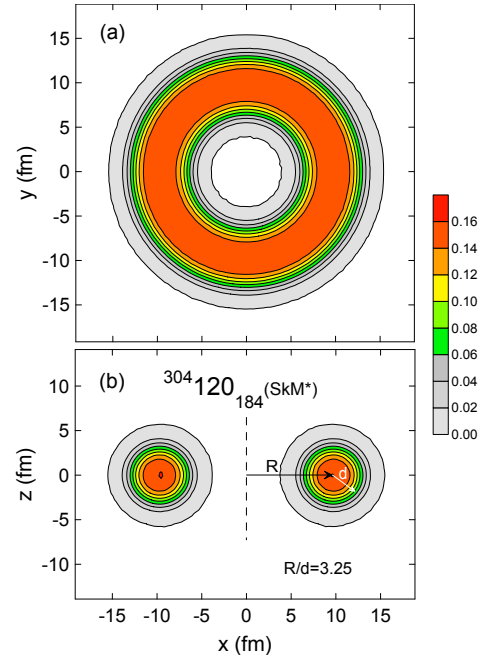
Wyniki poszukiwań stanów THSI w jądrze  $^{304}120_{184}$  przedstawione są na Rys. 3.55, na którym wykreślono przeskalowaną względem sferycznego stanu podstawowego energię deformacji w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Czerwonymi kółkami oznaczono toroidalne konfiguracje bez spinu. Energie konfiguracji równowagi z ustalonym

momentem pędu  $I_z$  uzyskane w metodzie wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-CHF oznaczono czarnymi punktami. Symbole żółtych gwiazdek odpowiadają stanom THSI, które znaleziono stosując metodę wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-HF.

Konfigurację wzbudzeń cząstka-dziura dwóch analizowanych wcześniej stanów THSI:  $I = I_z = 81 \hbar$  (wzbudzenie protonów 2p-2h, neutronów 4p-4h) oraz  $I = I_z = 208 \hbar$  (wzbudzenie protonów 5p-5h, neutronów 8p-8h) dla deformacji odpowiednio  $Q_{20} = -297.7$  b i  $Q_{20} = -300.8$  b z energiami wzbudzeń  $E^* = 79.2$  MeV i  $E^* = 101.6$  MeV przedstawiono w Tabeli 3.8. Oprócz tych stanów w jądrze  $^{304}120_{184}$  znaleziono cztery inne stany THSI z wartością momentu pędu  $I = I_z = 35, 53, 112$  i  $144\hbar$ . Wartości deformacji równowagi  $Q_{20}$ , mnożniki Lagrange'a  $\hbar\omega_z$  i energie wzbudzenia  $E^*$  znalezionych sześciu stanów THSI w  $^{304}120_{184}$  podano w zbiorczej Tabeli 3.9.



**Rysunek 3.56:** Profile gęstości neutronów, protonów i gęstości całkowitej w stanach THSI ( $I_z = 81 \hbar$  i  $208 \hbar$ ) jądra  $^{304}120_{184}$  w funkcji współrzędnej  $x$ .



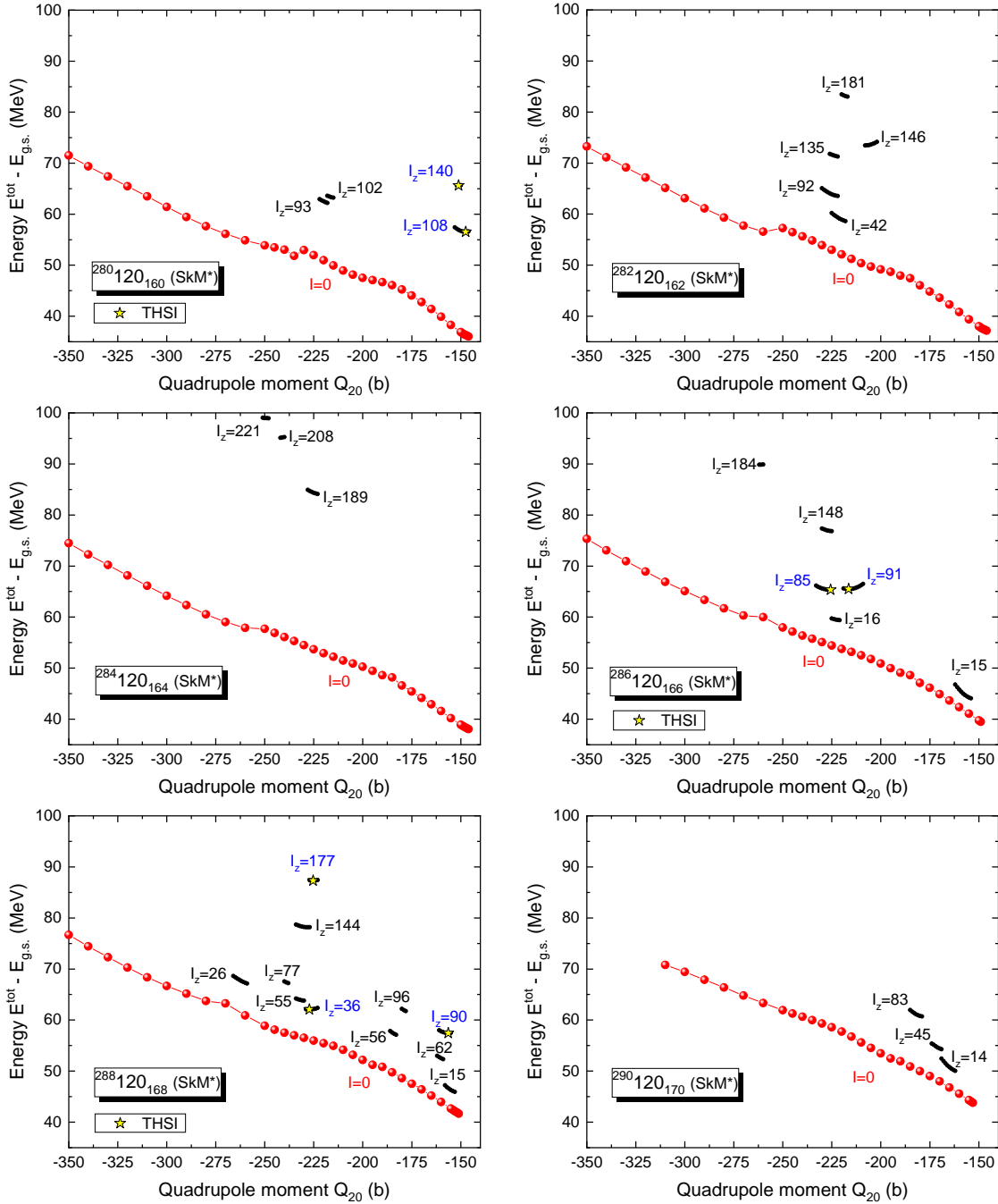
**Rysunek 3.57:** Kontury całkowitej gęstości w stanie THSI z  $I_z = 81\hbar$  w jądrze  $^{304}120_{184}$  w przekroju:  $x$ - $y$  (a) oraz  $x$ - $z$  (b).

Na Rys. 3.56 przedstawiono profile rozkładów gęstości protonów, neutronów i gęstości całkowitej w funkcji zmiennej  $x$  w stanach THSI  $I_z = 81\hbar$  i  $208\hbar$  w porównaniu z rozkładami gęstości w sferycznym stanie podstawowym jądra  $^{304}120_{184}$ . Widoczne jest, że profile gęstości w obu stanach THSI są niemal identyczne. Maksymalna wartość gęstości całkowitej wynosi  $\rho_{max} = 0.161/\text{fm}^{-3}$ , duży promień  $R = 9.76$  fm, zaś mniejszy promień  $d = 3.00$  fm, w konsekwencji współczynnik kształtu torusa  $R/d = 3.25$ . Kontury całkowitej gęstości w stanie THSI z  $I_z = 81\hbar$  przedstawione zostały na Rys. 3.57 w płaszczyźnie przekroju  $x$ - $y$ , panel (a) oraz w płaszczyźnie  $x$ - $z$ , panel (b). Na Rys.

3.56 można zobaczyć, że maksymalne wartości gęstości całkowitej w stanach THSI z  $I_z = 81\hbar$  i  $208\hbar$  w superciężkim jądrze  $^{304}120_{184}$  są mniej więcej takie same, jak wartość  $\rho_{max}$  w stanie podstawowym tego jądra. Jest to w przeciwieństwie do lekkich jąder, w których maksymalna gęstość w stanach THSI sięga połowy gęstości w stanach podstawowych [138]. Wynika to z faktu, że w obszarze lekkich jąder występowanie stanów THSI określają efekty powłokowe, a obsadzone najniższe stany jednocząstkowe wchodzące do konfiguracji toroidalnych, mają liczby kwantowe  $n_\rho = n_z = 0$ . W przypadku jąder superciężkich, na powstawanie toroidalnych konfiguracji główny wpływ ma redukcja odpychania kulombowskiego protonów, Rys. 3.56. W konsekwencji, w widmie jednocząstkowym konfiguracji toroidalnych nie ma ograniczeń na liczby kwantowe stanów jednocząstkowych i średnia gęstość poziomów nukleonowych nie odbiega od średniej gęstości poziomów w konfiguracji sferycznej.

### 3.6.3 Toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne izotopów $Z = 120$

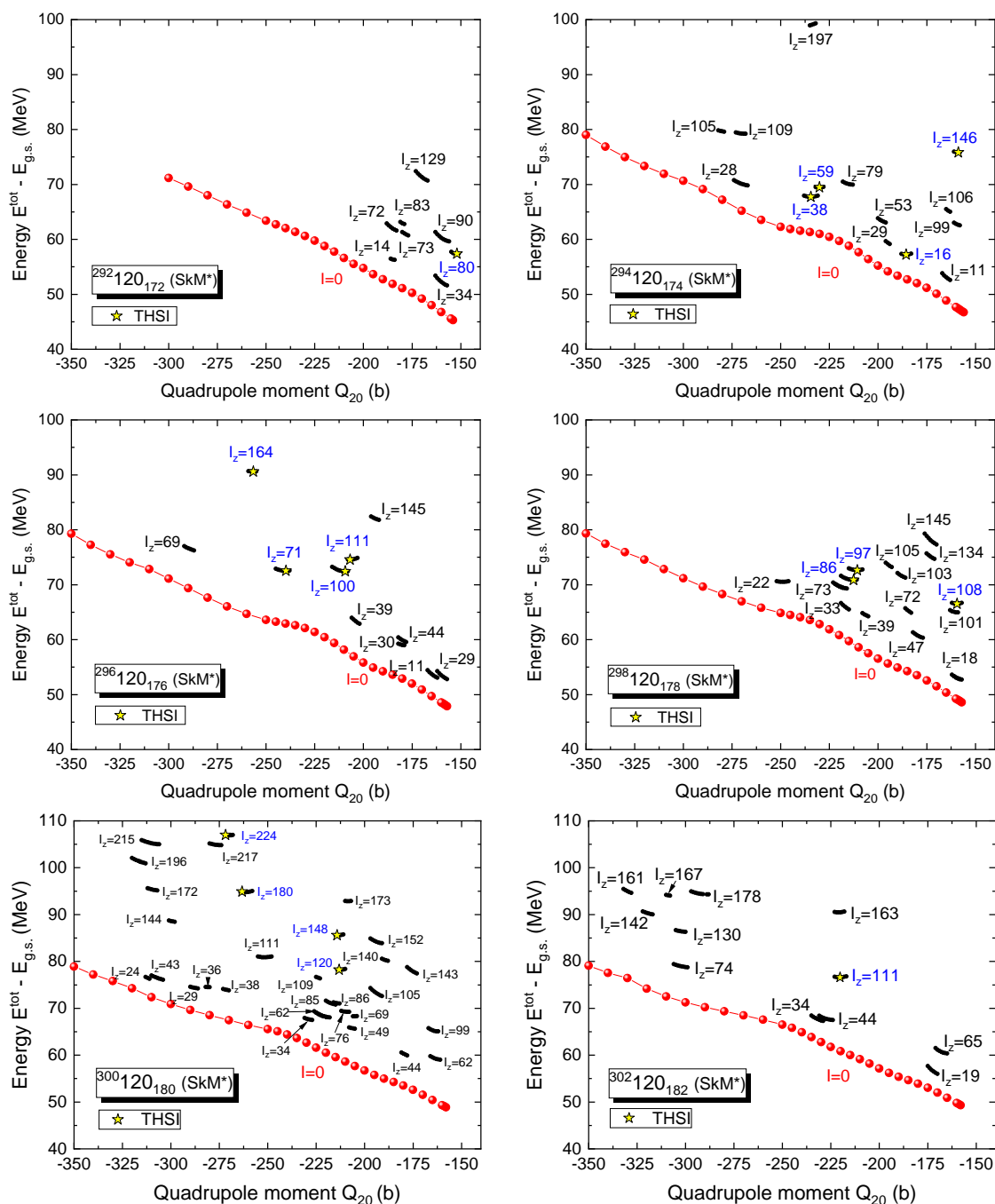
Poszukiwania toroidalnych wysoko-spinowych stanów izomerycznych (stany THSI) w izotopach  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-196$  przeprowadzono wykorzystując metodę przedstawioną w paragrafie 3.6.2. Na Rys. 3.58, 3.59 i 3.60 pokazane zostały energie konfiguracji toroidalnych bez spinu (czerwone kółka) izotopów  $Z = 120$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20} \geq -350$  b. Rozwiązania te były wykorzystane jako konfiguracje startowe w metodzie wymuszonego obrotu (wokół osi symetrii) w modelu Skyrme'a-CHF do wyznaczania stanów z momentem pędu  $I = I_z$  przy zadanej wartości momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$  (czarne punkty). Wykorzystując znaną wartość mnożnika Lagrange'a  $\hbar\omega_z$ , odpowiadającą danej wartości spinu  $I_z$ , powtarzano obliczenia, uwalniając tym razem wiązanie na moment  $Q_{20}$ .



**Rysunek 3.58:** Energie deformacji superciężkich parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-170$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Energie toroidalnych konfiguracji bez spinu oznaczono czerwonymi kółkami. Położenie toroidalnych wysoko-spinowych izomerów (THSI) oznaczono żółtą gwiazdką.

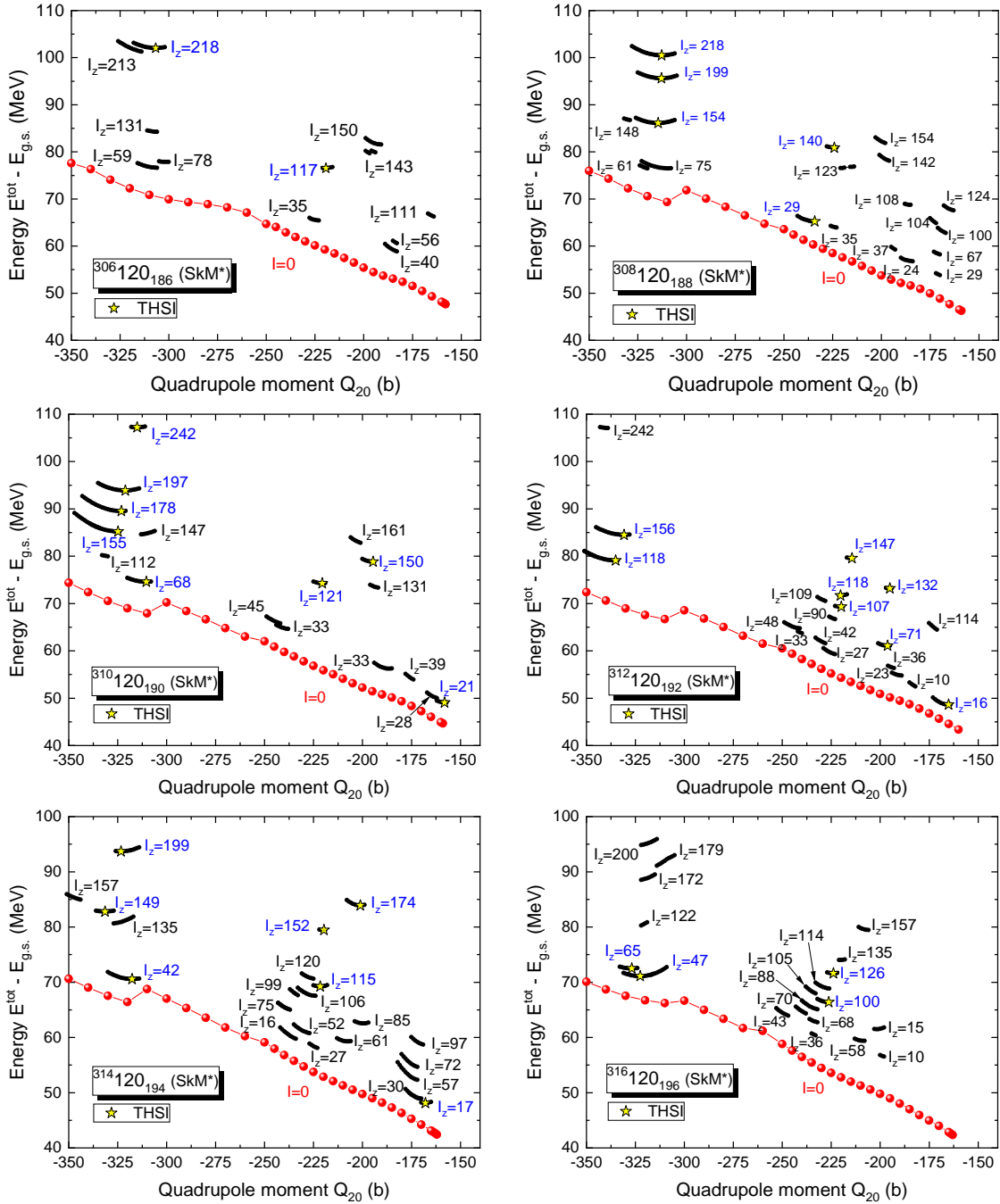
Jeśli w zastosowanej metodzie wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-HF uzyskiwano stabilną konfigurację równowagi ze spinem  $I_z$ , to odpowiadała ona poszukiwanemu stanowi THSI (żółte gwiazdki na rysunkach).

Poza jądrami  $^{282}_{120}_{162}$ ,  $^{284}_{120}_{164}$  i  $^{290}_{120}_{170}$  z analizowanego łańcucha izotopów



**Rysunek 3.59:** (kontynuacja Rys. 3.58). Energie deformacji superciężkich parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 172-182$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Energie toroidalnych konfiguracji bez spinu oznaczono czerwonymi kółkami. Położenie toroidalnych wysoko-spinowych izomerów (THSI) oznaczono żółtą gwiazdką.

$Z = 120$ , toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne zostały znalezione we wszystkich pozostałych jądrach. Wielkości charakteryzujące znalezione stany THSI: składowa protonowa spinu  $I_z^{\text{proton}}$ , składowa neutronowa spinu  $I_z^{\text{neutron}}$ , moment kwadrupolowy  $Q_{20}$ , parametr  $\hbar\omega_z$  oraz energia wzbudzenia liczona względem stanu podstawowego  $E^*$ ,



**Rysunek 3.60:** (kontynuacja Rys. 3.58 i 3.59). Energie deformacji superciężkich parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 186-196$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Energie toroidalnych konfiguracji bez spinu oznaczono czerwonymi kółkami. Położenie toroidalnych wysoko-spinowych izomerów (THSI) oznaczono żółtą gwiazdką.

zestawione są w Tabeli 3.9.

**Tabela 3.9:** Właściwości toroidalnych wysoko-spinowych stanów izomerycznych superciężkich parzystych izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-196$ .

$N$	$I_z = I_z^{proton} + I_z^{neutron} [\hbar]$	$Q_{20}$ [b]	$\hbar\omega_z$ [MeV]	$E^*$ [MeV]
160	108=43+65	-147.51	0.25	56.52
	140=57+83	-151.09	0.30	65.62
166	85=35+50	-225.63	0.14	65.33
	91=35+56	-216.45	0.15	65.48
168	36=16+20	-227.28	0.05	62.07
	90=43+47	-156.40	0.24	57.43
	177=79+98	-225.28	0.30	87.32
172	80=38+42	-151.98	0.20	57.38
174	16=0+16	-185.62	0.05	57.23
	38=16+22	-234.48	0.05	67.74
	59=25+34	-230.13	0.10	69.47
	146=66+80	-158.78	0.30	75.81
176	71=35+36	-239.76	0.10	72.52
	100=40+60	-209.30	0.15	72.42
	111=40+71	-206.82	0.20	74.58
	164=69+95	-256.50	0.25	90.59
178	86=40+46	-212.61	0.15	70.86
	97=40+57	-210.69	0.20	72.62
	108=38+70	-159.42	0.25	66.52
180	120=40+80	-213.16	0.25	78.23
	148=50+98	-214.17	0.28	85.58
	180=69+111	-263.20	0.25	94.90
	224=98+126	-271.79	0.30	107.01
182	111=44+67	-220.25	0.20	76.59
184	35=20+15	-222.29	0.08	66.87
	53=20+33	-216.45	0.10	68.13
	81=26+55	-297.73	0.10	79.21
	112=40+72	-219.11	0.20	76.65
	144=52+92	-283.79	0.16	87.31
	208=79+129	-300.83	0.28	101.57
186	117=40+77	-219.41	0.20	76.54
	218=79+139	-306.67	0.30	102.04
188	29=17+12	-234.26	0.05	65.24

ciąg dalszy na następnej stronie

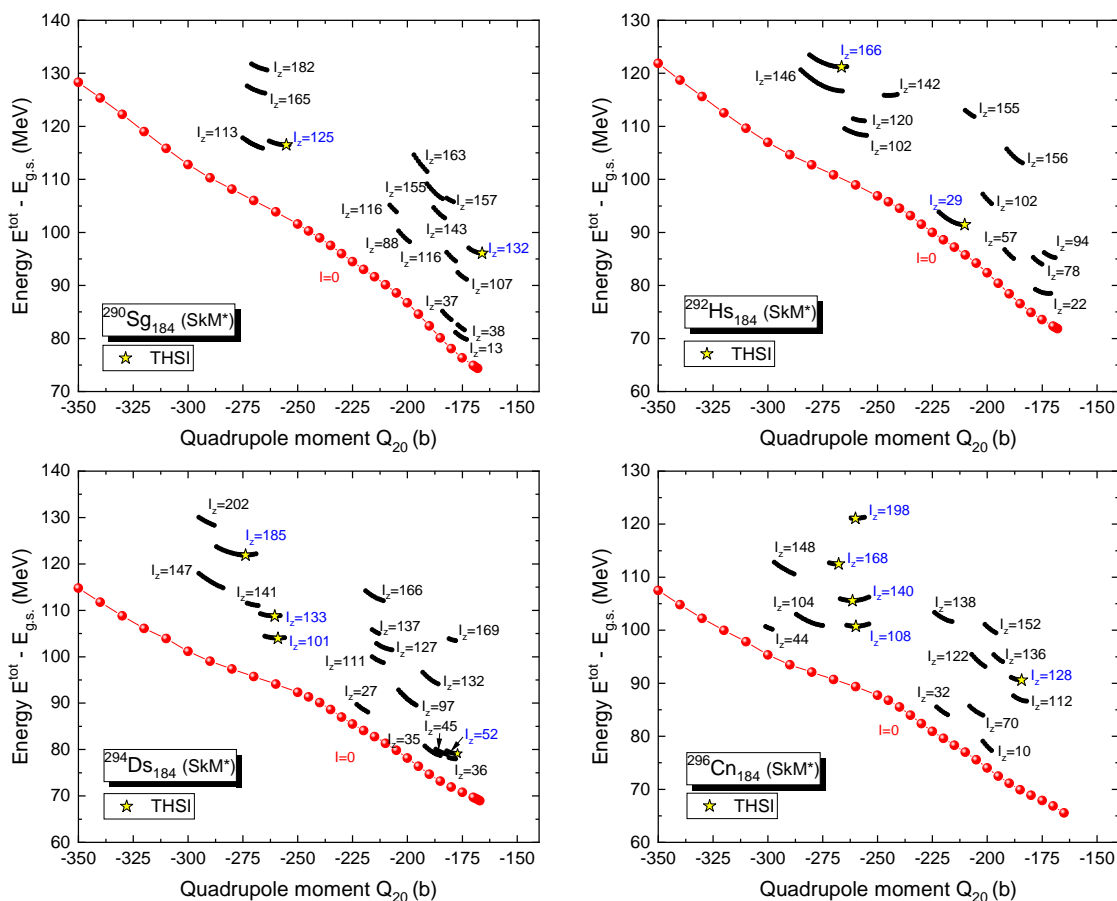
Tabela 3.9 – kontynuacja poprzedniej strony

$N$	$I_z = I_z^{proton} + I_z^{neutron} [\hbar]$	$Q_{20}$ [b]	$\hbar\omega_z$ [MeV]	$E^*$ [MeV]
	140=50+90	-224.13	0.25	80.90
	154=60+94	-314.54	0.15	86.11
	199=79+120	-312.89	0.25	95.62
	218=79+139	-312.73	0.30	100.47
190	21=9+12	-158.13	0.05	59.78
	68=26+42	-310.33	0.10	55.79
	121=40+81	-220.53	0.25	74.27
	150=55+95	-194.63	0.30	78.82
	155=60+95	-324.82	0.15	66.42
	178=60+118	-323.08	0.20	70.72
	197=79+118	-321.08	0.25	75.07
	242=94+148	-315.04	0.32	88.43
192	16=0+16	-165.14	0.05	48.64
	71=31+40	-196.20	0.15	61.08
	107=40+67	-219.90	0.20	69.32
	118=40+78	-220.29	0.25	71.71
	118=40+78	-335.11	0.10	79.10
	132=44+88	-195.10	0.25	73.19
	147=59+88	-214.38	0.30	79.57
	156=60+96	-330.75	0.20	84.50
194	17=0+17	-167.90	0.05	48.12
	42=26+16	-317.63	0.05	70.56
	115=40+75	-221.62	0.20	69.22
	149=60+89	-331.41	0.20	82.80
	152=59+93	-219.71	0.30	79.44
	174=55+119	-201.07	0.30	83.91
	199=79+120	-323.28	0.25	93.69
196	47=26+21	-322.54	0.05	71.09
	65=26+39	-326.83	0.10	72.50
	100=40+60	-226.31	0.17	66.39
	126=40+86	-223.88	0.25	71.61

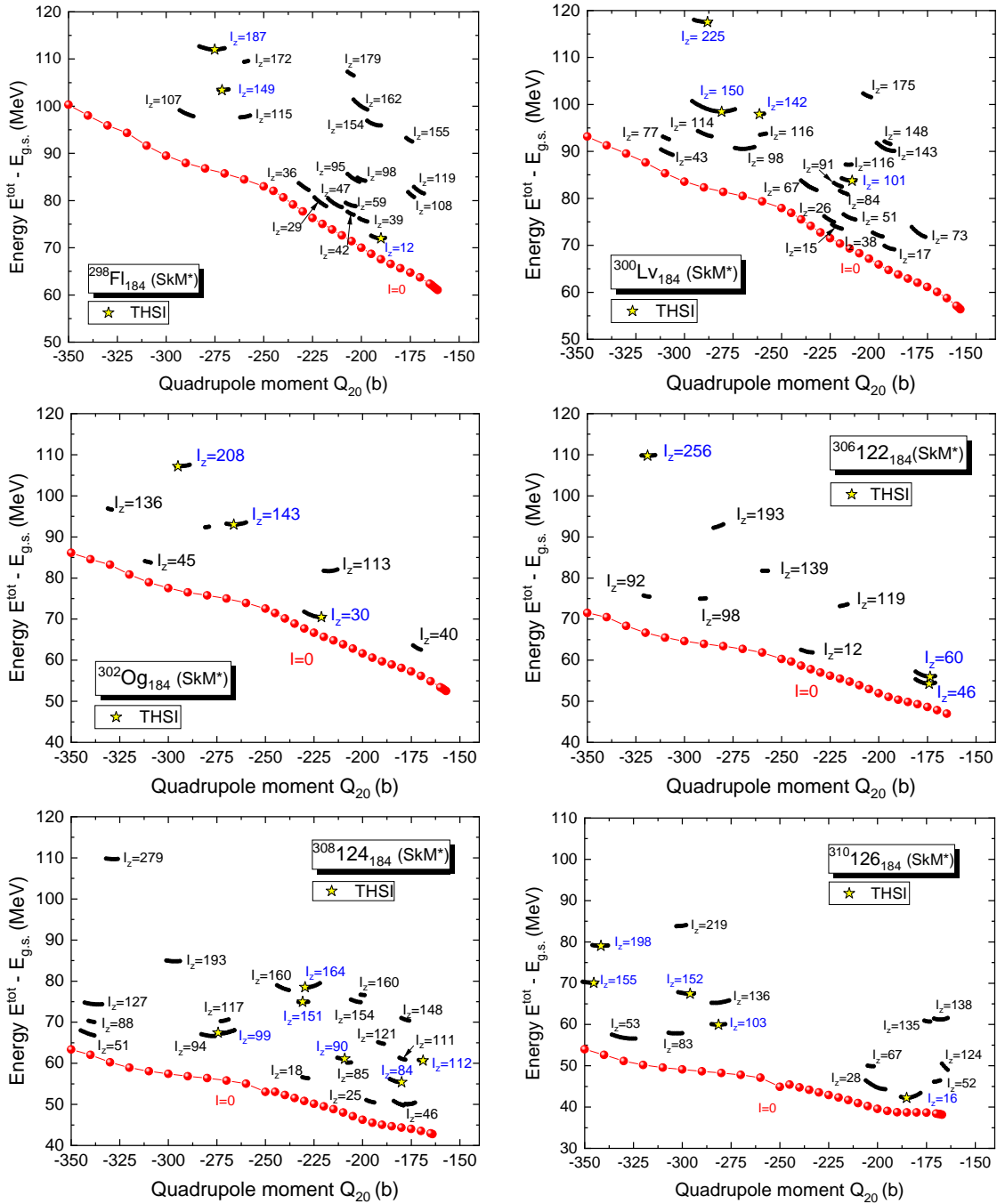


### 3.6.4 Toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne izotonów $N = 184$

Analogiczne, jak dla łańcucha izotopów  $Z = 120$ , poszukiwania wysoko-spinowych stanów izomerycznych zostały przeprowadzone dla izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ . Uzyskane wyniki przedstawione zostały na Rys. 3.61 i 3.62 oraz w Tabeli 3.10.



**Rysunek 3.61:** Energie deformacji superciężkich parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-112$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Energie toroidalnych konfiguracji bez spinu oznaczono czerwonymi kółkami. Położenie toroidalnych wysoko-spinowych izomerów (THSI) oznaczono żółtą gwiazdką.



**Rysunek 3.62:** Energie deformacji superciężkich parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 114-126$  w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$ . Energie toroidalnych konfiguracji bez spinu oznaczono czerwonymi kółkami. Położenie toroidalnych wysoko-spinowych izomerów (THSI) oznaczono żółtą gwiazdką.

**Tabela 3.10:** Właściwości toroidalnych wysoko-spinowych stanów izomerycznych superciężkich parzystych izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ .

$N$	$I_z = I_z^{proton} + I_z^{neutron} [\hbar]$	$Q_{20}$ [b]	$\hbar\omega_z$ [MeV]	$E^*$ [MeV]
106	125=41+84	-255.17	0.20	116.49
	132=49+83	-166.00	0.30	96.08
108	29=14+15	-210.32	0.05	91.45
	166=54+112	-266.40	0.25	121.19
110	52=23+29	-177.18	0.10	79.10
	101=35+66	-258.99	0.10	103.98
	133=49+84	-260.42	0.20	108.76
	185=73+112	-273.78	0.30	121.90
112	108=42+66	-259.90	0.15	100.73
	128=45+83	-184.37	0.26	90.59
	140=56+84	-261.44	0.20	105.55
	168=56+112	-267.72	0.26	112.48
	198=75+123	-260.05	0.30	121.08
114	12=0+12	-189.97	0.05	71.99
	149=57+92	-271.36	0.20	103.42
	187=75+112	-275.09	0.25	112.00
116	101=29+72	-213.71	0.20	83.76
	142=58+84	-261.38	0.20	97.94
	150=58+92	-280.82	0.20	98.47
	225=96+129	-288.14	0.30	117.55
118	30=15+15	-221.21	0.05	70.47
	143=59+84	-266.27	0.20	93.02
	208=79+129	-295.08	0.30	107.18
122	46=14+32	-174.11	0.10	54.26
	60=14+46	-173.61	0.15	55.97
	256=98+158	-318.94	0.32	109.75
124	84=32+52	-179.94	0.20	55.37
	90=32+58	-209.21	0.20	61.10
	99=33+66	-274.33	0.15	67.43
	112=46+66	-168.95	0.20	60.65
	151=69+82	-230.86	0.26	74.97
	164=69+95	-229.60	0.28	78.51
126	16=0+16	-185.08	0.05	42.24

ciąg dalszy na następnej stronie

Tabela 3.10 – kontynuacja poprzedniej strony

$Z$	$I_z = I_z^{proton} + I_z^{neutron} [\hbar]$	$Q_{20}$ [b]	$\hbar\omega_z$ [MeV]	$E^*$ [MeV]
	103=37+66	-281.47	0.14	59.94
	152=60+92	-296.03	0.20	67.46
	155=63+92	-345.27	0.16	70.09
	198=87+111	-341.70	0.25	79.03

# Rozdział 4

## Podsumowanie

W rozprawie przedstawiono wyniki dotyczące badań superciężkich jąder atomowych, które przeprowadzone zostały z wykorzystaniem samozgodnego modelu średniego pola Hartree’ego-Focka-Bogolubowa (HFB), z jądrowym funkcjonałem gęstości Skyrme’a. Przebadano łącznie 68 parzysto-parzystych superciężkich jąder atomowych, w tym izotopy flerowu Fl ( $Z = 114$ ) z liczbą neutronów  $N = 154-196$ , izotopy  $Z = 120$  z  $N = 160-196$ , łańcuch izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$  oraz neutronowo-deficytowe izotopy  $Z = 118, 120, 122$  i  $124$ .

Wybór łańcuchów izotopów  $Z = 114$  i  $120$  oraz izotonów  $N = 184$  wynikał z faktu, że przewidywane dla jąder superciężkich liczby magiczne w modelach makroskopowo-mikroskopowych to  $Z = 114$  i  $N = 184$ , zaś w modelach mikroskopowych  $Z = 120$  i  $N = 184$ . Natomiast podjęcie badań obszaru jąder neutronowo-deficytowych  $Z = 118-124$  wiązało się z teoretycznymi przewidywaniami dotyczącymi występowania dla tych jąder ekstremalnie zdeformowanych stanów równowagi *oblate* (SDO minima).

Badania długich łańcuchów izotopów  $Z = 114$  i  $120$  oraz izotonów  $N = 184$ , przeprowadzone z wykorzystaniem modelu średniego pola HFB z funkcjonałem gęstości Skyrme’a SkM\*, wraz z dodatkowymi więzami na masowe momenty multipolowe (Skyrme-CHF), pozwoliły wyznaczyć statyczne (w minimum energii) ścieżki prowadzące do rozszczepienia oraz opisać ewolucję deformacji jąder w stanie podstawowym, w zależności liczby neutronów  $N$ . Ponadto, dwuwymiarowa analiza powierzchni energii całkowitej  $E^{tot}$  (mapy  $\beta$ - $\gamma$ ) umożliwiła zbadanie wpływu trójosiowych deformacji jądra na wysokość barier  $B_f$ . Dodatkowo, dla każdego z analizowanych jąder, wykonane zostały obliczenia energii uwalnianych  $Q_\alpha$  oraz czasów połowicznego zaniku  $T_\alpha$  ze względu na rozpad  $\alpha$ .

Dzięki jednowymiarowej analizie energii  $E^{tot}(Q_{20})$ , w obszarze dużych deformacji *oblate* ( $Q_{20} \geq -350$  b), możliwe było określenie zakresu deformacji kwadrupolowej, w którym występują rozwiązania z toroidalnymi rozkładami gęstości materii jądrowej. Wykorzystując metodę wymuszonego obrotu w modelu Skyrme’a-CHF (z więzami)

oraz Skyrme'a-HF, dla łańcucha izotopów  $Z = 120$  oraz izotonów  $N = 184$  przeprowadzono poszukiwania toroidalnych wysokospinowych stanów izomerycznych (*toroidal high-spin isomeric states* - THSI states).

### Powierzchnie potencjału parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) i $Z = 120$ - deformacja *prolate*

Analiza energii całkowitej HFB  $E^{tot}$  parzystych superciężkich izotopów flerowu ( $Z = 114$ ) w funkcji momentu kwadrupolowego  $Q_{20}$  jąder z liczbą neutronów  $N = 162 - 192$  (Rys. 3.9, 3.10, 3.11) wykazała istnienie dwóch ścieżek prowadzących do jądrowego rozszczepienia: symetrycznej sEF - wzdłuż, której jądro rozszczepia się na dwa jednakowe fragmenty oraz asymetrycznej aEF - wzdłuż, której dochodzi do rozszczepienia asymetrycznego. Za wyjątkiem najcięższych izotopów Fl z  $N > 184$ , na wykresach  $E^{tot}(Q_{20})$  widoczne są dwugarbne bariery potencjału (sEF), z pierwszą barierą w pobliżu  $Q_{20} \approx 50$  b i drugą, niższą w sąsiedztwie  $Q_{20} \approx 100$  b. W przypadku większości izotopów Fl ścieżki asymetryczne aEF przebiegają w ten sposób, że redukowana jest druga bariera osiowosymetryczna sEF. Natomiast dla izotopów z  $N > 186$  druga bariera znika, co prowadzi do redukcji szerokości bariery rozszczepieniowej. Z jednowymiarowej analizy efektu związanego z dopuszczeniem trójosiowych deformacji wynika, że efekt ten redukuje pierwszą barierę dla izotopów  $Z = 114$  z  $N \geq 182$ .

Dla superciężkich izotopów  $Z = 120$  (Rys. 3.14, 3.15, 3.16), za wyjątkiem najcięższych izotopów z  $N > 184$ , na wykresach  $E^{tot}(Q_{20})$ , podobnie jak w przypadku izotopów Fl, widoczne są dwugarbne bariery potencjału (sEF). W przypadku izotopu  $^{306}120_{186}$  druga bariera podlega znaczącej redukcji, a dla izotopów  $N > 186$  znika. Z jednowymiarowej analizy efektu związanego z dopuszczeniem trójosiowych deformacji wynika, że dla wszystkich izotopów  $Z = 120$  widoczna jest redukcja pierwszej bariery. Poza jądrem  $^{280}120_{160}$ , dla wszystkich pozostałych izotopów  $Z = 120$ , oprócz symetrycznych ścieżek rozszczepieniowych (sEF) znalezione zostały ścieżki asymetryczne (aEF). W przypadku izotopów  $Z = 120$  z  $N = 162 - 184$  ścieżki asymetryczne aEF przebiegają w ten sposób, że zredukowana jest druga bariera osiowosymetryczna sEF.

Analiza map  $\beta$ - $\gamma$  energii  $E^{tot}$  pozwoliła stwierdzić, że dla izotopów flerowu z liczbą neutronów  $N = 154 - 168$  (Rys. 3.12, 3.13) minima stanu podstawowego zlokalizowane są w przedziale  $Q_{20} = 25 - 30$  b. W miarę, jak rośnie liczba neutronów, lokalne maksimum  $E^{tot}$ , wokół  $Q_{20} = 0$  b podlega redukcji, a w jądrze  $^{284}\text{Fl}_{170}$  pojawia się drugie, konkurujące minimum z deformacją *oblate*  $Q_{20} \approx -25$  b. Podobna sytuacja występuje w przypadku izotopów z  $N = 172 - 178$ . W jądrze  $^{294}\text{Fl}_{180}$  lokalne sferyczne maksimum z  $Q_{20} = 0$  b znika i pojawia się szerokie minimum, w którym stany z deformacjami *oblate* i *prolate* są energetycznie nierozróżnialne od stanu sferycznego. Izotopy flerowu z  $N = 182 - 192$  to jądra sferyczne, przy czym dla  $^{306}\text{Fl}_{192}$  z minimum sferycznym współ-

istnieje minimum trójosiowe. W izotopach z  $\text{Fl}_{194,196}$  występują jedynie płytkie minima trójosiowe. W większości parzystych izotopów flerowu (z  $N = 164 - 192$ ) widoczne są trójosiowe punkty siodłowe, tym niemniej redukcja pierwszej osiowosymetrycznej bariery  $B_f^{axial}$  ma miejsce jedynie dla izotopów z  $N = 176 - 192$ . W przypadku izotopów z  $N = 164-174$  trójosiowe punkty siodłowe mają energie wyższe niż  $B_f^{axial}$ . Największa (ok. 25%) redukcja barier  $B_f^{axial}$  obserwowana jest w  $^{296}\text{Fl}_{182}$  i  $^{298}\text{Fl}_{184}$ , gdzie sięga wartości 2.4 MeV (Rys. 3.19 (a)).

W przypadku izotopów  $Z = 120_{160,162,164}$  (Rys. 3.17, 3.18) położenie stanu podstawowego znajduje się w pobliżu  $Q_{20} \approx 30$  b. Dla tych neutronowo-deficytowych izotopów, z minimum stanu podstawowego konkuruje drugie minimum odpowiadające  $Q_{20} \approx -60$  b (*superdeformed oblate*, SDO). W przypadku izotopu  $^{286}120_{166}$  minimum SDO staje się minimum stanu podstawowego. W jądrze tym z minimum SDO współistnieją dwa porównywalne energetycznie minima z  $Q_{20} \approx -20$  b i  $Q_{20} \approx 20$  b. Izotopy z  $N = 168-178$  to jądra z deformacją *oblate* w stanie podstawowym  $Q_{20} \approx -20$  b, przy czym z minimum tym współwystępuje drugie lokalne minimum w sąsiedztwie deformacji *prolate* z  $Q_{20} \approx 20$  b. W izotopie  $^{300}120_{180}$  oba minima, z deformacją *oblate* i deformacją *prolate*, „łączą się”, gdyż rozdzielająca je lokalna bariera w  $Q_{20} = 0$  b znika. Powstałe „szerokie” minimum zawiera nierozróżnialne energetycznie stany z symetrią sferyczną oraz deformacjami *oblate* i *prolate*. Izotopy z  $N = 182-194$  to jądra sferyczne, natomiast izotop  $^{316}120_{196}$  w stanie podstawowym ma deformację trójosiową. Dla izotopów  $Z = 120$  z  $N > 164$  efekty trójosiowe redukują pierwszą barierę osiowosymetryczną  $B_f^{axial}$ , przy czym redukcja ta jest większa niż w przypadku izotopów Fl i dla  $N > 178$  przekracza 30%. Biorąc pod uwagę minima SDO w neutronowo-deficytowych izotopach  $Z = 120$ , w przypadku  $^{280}120_{160}$  bariera  $B_f^{SDO}$  znika, zaś w nuklidach  $120_{162,164,166}$  bariery  $B_f^{SDO}$  są o ok. 2 MeV niższe od  $B_f^{axial}$ . Wysokości barier  $B_f$  izotopów  $Z = 120$  z  $N = 160-184$  rosną wraz ze wzrostem liczby neutronów i osiągnęły maksymalną wartość 8.30 MeV w podwójnie magicznym izotopie  $^{304}120_{184}$ . Bariery  $B_f$  izotopów z  $N > 184$  szybko maleją ze wzrostem liczby neutronów. W przypadku izotopów Fl średnia wysokość maksymalnych barier  $B_f$  dla  $178 \leq N \leq 184$  wynosi 6.69 MeV, a dla  $Z = 120$  wynosi 8.16 MeV (Rys. 3.19 (b)).

### Ewolucja kształtów równowagi i związane z nią przemiany fazowe deformacji parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) i $Z = 120$

Parzyste izotopy flerowu z  $154 \leq N \leq 170$  w swoich stanach podstawowych mają deformację *prolate* i odpowiadają symetrii dynamicznej  $SU(3)$  w modelu IBM (Rys. 3.25). Izotopy Fl z  $172 \leq N \leq 178$  to grupa jąder niestabilnych osiowo, które opisuje symetria dynamiczna  $O(6)$ . W izotopie granicznym  $^{284}\text{Fl}_{170}$  zachodzi gwałtowna zmiana wartości momentu kwadrupolowego w stanie podstawowym i współwystępują dwa

minima, *prolate* i *oblate*. Reprezentowany przez jądro  $^{284}\text{Fl}_{170}$  punkt krytyczny  $O(6)$  opisuje nieciągłą przemianę fazową pierwszego rodzaju, w której współwystępują obie fazy *prolate* i *oblate*. Izotopy Fl z  $182 \leq N \leq 192$  to jądra sferyczne z symetrią dynamiczną  $U(5)$ , przy czym w izotopie  $^{306}\text{Fl}_{192}$  oprócz sferycznego minimum współwystępuje również minimum trójosiowe. Podobnie, dwa ostatnie izotopy  $^{308}\text{Fl}_{194}$  i  $^{310}\text{Fl}_{196}$  mają płaskie minima trójosiowe. Przejście między grupą izotopów niestabilnych osiowo  $O(6)$  a grupą izotopów sferycznych  $U(5)$  opisuje punkt potrójny  $E(5)$  reprezentowany przez izotop  $^{294}\text{Fl}_{180}$ , którego energia HFB w funkcji  $Q_{20}$  tworzy szerokie minimum w kształcie litery U. W punkcie potrójnym  $E(5)$ , gdzie współwystępują trzy fazy: *sferyczna*, *prolate* i *oblate*, zachodzi ciągła przemiana fazowa drugiego rodzaju między symetrią dynamiczną  $O(6)$  a symetrią  $U(5)$ , odpowiadającą jądrum sferycznym,  $O(6) \longleftrightarrow U(5)$ .

W przypadku izotopów  $Z = 120$  jedyną istotną różnicą w stosunku do izotopów Fl jest występowanie ekstremalnych minimów *oblate* (SDO) w neutronowo deficytowych izotopach  $^{120}_{160,162,164,166}$  (Rys. 3.25). Minima SDO występują obok minimów *prolate* stanu podstawowego. Jedynie w izotopie  $^{286}120_{166}$  minimum SDO staje się minimum stanu podstawowego, z którym konkurują dwa dodatkowe minima, *oblate*  $Q_{20} \approx -20$  b i *prolate*  $Q_{20} \approx 25$  b. Izotopy  $^{120}_{160,162,164}$  opisuje symetria dynamiczna  $SU(3)$  (deformacja *prolate*), a biorąc pod uwagę minima SDO, symetria dynamiczna  $\overline{SU(3)}$ . Kolejne izotopy z  $168 \leq N \leq 178$  należą do grupy niestabilnych osiowo jąder z symetrią dynamiczną  $O(6)$ . Izotop przejściowy  $^{286}120_{166}$  reprezentuje punkt krytyczny  $O(6)$ , w którym ma miejsce nieciągła przemiana fazowa pierwszego rodzaju i współwystępują fazy *prolate*, *oblate* i ekstremalna *oblate* (SDO). Podobnie, jak to miało miejsce dla izotopu  $^{294}\text{Fl}_{180}$ , izotop  $^{300}120_{180}$  pełni rolę punktu potrójnego  $E(5)$ , w którym zachodzi ciągła przemiana fazowa drugiego rodzaju między  $O(6) \longleftrightarrow U(5)$ . Izotopy  $Z = 120$  z  $182 \leq N \leq 194$  to jądra sferyczne z symetrią dynamiczną  $U(5)$ , natomiast izotop  $^{316}120_{196}$  ma płytkie minimum trójosiowe.

### Rozpady alfa parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) i $Z = 120$

Uzyskane wartości  $T_\alpha$  rosną wraz ze wzrostem liczby neutronów zarówno dla łańcucha izotopów Fl, jak i  $Z = 120$  (Rys. 3.26). Przy uwzględnieniu konfiguracji SDO w neutronowo-deficytowych izotopach  $Z = 120$ ,  $T_\alpha$  dla  $N \leq 170$  w przypadku obu łańcuchów przyjmują podobne wartości, odpowiadające  $\sim 1 \mu\text{s}$ . Dla  $N \geq 172$  wartości  $T_\alpha$  izotopów Fl gwałtownie wzrastają do wartości  $\sim 1$  s i dla  $^{298}\text{Fl}_{184}$  osiągają wartość  $T_\alpha = 33.1$  s. Odpowiednio, w przypadku izotopu  $^{304}120_{184}$   $T_\alpha = 0.21$  ms, tj. o ponad 5 rzędów wielkości mniej niż dla  $^{298}\text{Fl}_{184}$ . Przy zmianie liczby neutronów z 184 na 186 w obu łańcuchach izotopów widoczny jest gwałtowny spadek wartości  $T_\alpha$ , charakterystyczny dla zamkniętej powłoki związanej z  $N = 184$ .



### Powierzchnie potencjału parzystych izotopów Fl ( $Z = 114$ ) i $Z = 120$ - deformacja *oblate*

Dla izotopów Fl i  $Z = 120$  w obszarze dla  $Q_{20} < -130$  b zachodzi gwałtowna zmiana topologii zdeformowanej powierzchni jądra ze sferycznej (jednospójnej) na toroidalną (Rys. 3.33). Istnienie przedziału deformacji  $Q_{20}$ , w którym współwystępują rozwiązania jednospójne i toroidalne może świadczyć o tym, że zmiana topologii powierzchni jądrowej jest nieciągłą przemianą fazową pierwszego rodzaju. W przypadku izotopów Fl szerokość przedziału  $\mathbf{AB}$ , w którym współwystępują oba rozwiązania, jest niemal stała (za wyjątkiem izotopu  $^{310}\text{Fl}_{196}$ ) i wynosi ok. 30 b. Dla wszystkich izotopów Fl ostatnie rozwiązanie jednospójne ( $\mathbf{A}$ ) znajduje się w przedziale  $-208 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{A}) \leq -162 \text{ b}$ , a pierwsze rozwiązanie toroidalne ( $\mathbf{B}$ ) w przedziale  $-162 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{B}) \leq -132 \text{ b}$ . Szerokość przedziału  $\mathbf{AB}$  dla izotopów  $Z = 120$  rośnie wraz z wartością liczby neutronów  $N$  i dla  $N = 160$  szerokość  $\mathbf{AB}$  wynosi ok. 35 b, a dla  $N = 196$  ok. 50 b. Dla wszystkich izotopów  $Z = 120$  ostatnie rozwiązanie jednospójne ( $\mathbf{A}$ ) znajduje się w przedziale  $-215 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{A}) \leq -175 \text{ b}$ , a pierwsze rozwiązanie toroidalne w przedziale  $-163 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{B}) \leq -139 \text{ b}$ .

### Powierzchnie potencjału oraz rozpady alfa parzystych izotonów $N = 184$ - deformacja *prolate*

W przypadku izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 108-126$  (Rys. 3.35, 3.36) istnieją dwie ścieżki prowadzące do jądrowego rozszczepienia: ścieżka symetryczna sEF oraz asymetryczna aEF. Dla  $Z \geq 112$  ścieżki asymetryczne aEF przebiegają w ten sposób, że zredukowana jest druga bariera osiowosymetryczna sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ), mająca początek w obszarze deformacji kwadrupolowej  $Q_{20} \approx 100$  b. Dla wszystkich analizowanych parzystych izotonów  $N = 184$  efekt związany z dopuszczeniem trójosiowych deformacji elipsoidalnych redukuje pierwszą i drugą barierę sEF. Wszystkie analizowane superciężkie izotony  $N = 184$  to jądra sferyczne. Ponadto, każdy z badanych nuklidów posiada trójosiowe punkty siodłowe, co oznacza redukcję pierwszej osiowosymetrycznej bariery  $B_f^{axial}$ . Największa (ponad 35%) redukcja bariery  $B_f^{axial}$  obserwowana jest w  $^{306}\text{122}_{184}$ , gdzie sięga wartości 4.74 MeV (Rys. 3.38).

Wartości  $Q_\alpha$  otrzymane dla parzystych izotonów  $N = 184$  rosną monotonicznie, a tym samym wartości  $T_\alpha$  maleją wykładniczo wraz ze wzrostem liczby protonów  $Z$  i dla  $Z = 124$  i  $126$   $T_\alpha$  osiąga wartość poniżej  $1 \mu\text{s}$  (Rys. 3.39).

### Powierzchnie potencjału parzystych izotonów $N = 184$ - deformacja *oblate*

Dla analizowanych parzystych izotonów  $N = 184$  zależność energii HFB  $E^{tot}$  od momentu kwadrupolowego  $Q_{20} < 0$  b (Rys. 3.40, 3.41) ma podobny charakter, jak w

przypadku izotopów Fl i  $Z = 120$ . Dla  $Q_{20} < -150$  b energia  $E^{tot}$  szybko rośnie, a tym samym energia wiązania jądra  $E_{bind} = -E^{tot}$  maleje. Wraz ze wzrostem deformacji *oblate* energia  $E^{tot}$  konfiguracji toroidalnych rośnie, jednak wzrost ten jest mniejszy niż w przypadku konfiguracji jednospójnych. Podobnie, jak dla izotopów Fl i  $Z = 120$ , występuje przedział deformacji  $Q_{20}$ , w którym współistnieją rozwiązania jednospójne i toroidalne. Szerokość przedziału **AB**, w którym współwystępują oba rozwiązania jest najmniejsza dla ( $Z = 106$ ) i wynosi 19 b, zaś największą wartość osiąga dla izotonu z  $Z = 122$  i wynosi 44 b. W przypadku wszystkich parzystych izotonów  $N = 184$  ostatnie rozwiązanie jednospójne (**A**) leży w przedziale  $-210 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{A}) \leq -187 \text{ b}$ , a pierwsze rozwiązanie toroidalne (**B**) w przedziale  $-168 \text{ b} \leq Q_{20}(\mathbf{B}) \leq -157 \text{ b}$  (Rys. 3.42 (a)).

### Neutronowo-deficytowe izotopy $Z = 118, 120, 122$ i $124$

Neutronowo-deficytowe parzyste izotopy  $Z = 118-124$  posiadają trzy minima osiowosymetryczne: **A** (*prolate*), **B** (SDO) i **C** (*oblate*) (Rys. 3.47, 3.48). Nuklidy  $120_{166}$ ,  $122_{162,164,166}$ ,  $124_{164,166,168}$  w stanach podstawowych mają deformację SDO. Natomiast w przypadku izotopów  $120_{160,162,164}$  i  $122_{168}$  energia z minimum SDO różni się od energii stanu podstawowego o około 300 keV. Interesujący jest przypadek izotopów  $120_{160,162,164}$  (Rys. 3.49), dla których widoczna jest redukcja energii  $Q_{\alpha}(\mathbf{B})$  (przejście SDO-SDO) względem energii  $Q_{\alpha}$  (przejście g.s.-g.s.). W przypadku izotopów  $120_{160,162,164}$  obserwuje się zdecydowany wzrost czasów  $T_{\alpha}(\mathbf{B})$  w stosunku do  $T_{\alpha}$ . Dla tych trzech jąder logarytm współczynnik wzbronienia (*hideance factor*)  $\log(T_{\alpha}(\mathbf{B})/T_{\alpha}(g.s.))$  wynosi odpowiednio: 2.47, 2.88 i 3.70. Cztery izotopy  $120_{164,166,168,170}$  przekraczają granicę  $T_{\alpha} = 1 \mu s$ , a spośród nich nuklidy  $120_{164,166}$  mogą przyjmować deformacje SDO w stanie podstawowym.

### Toroidalne wysoko-spinowe stany izomeryczne izotopów $Z = 120$ i izotonów $N = 184$

W przypadku wystarczająco dużych deformacji *oblate* ( $Q_{20} < -130$  b), we wszystkich analizowanych parzysto-parzystych superciężkich jądrach pojawiają się, w modelu Skyrme'a-CHFB, rozwiązania z toroidalnymi rozkładami materii jądrowej. Wraz ze wzrostem deformacji *oblate* energia  $E^{tot}$  konfiguracji toroidalnych rośnie prawie liniowo, a na wykresie  $E^{tot}(Q_{20})$  brak jest lokalnych minimów. W celu ustabilizowania kwantowych układów z toroidalnymi rozkładami materii wprowadzono dodatkowe wiązanie na moment pędu układu ustawiony wzdłuż osi symetrii torusa  $I = I_z$ . W przypadku, gdy moment pędu  $I = I_z$  osiąga pewną wartość krytyczną, układ może osiągać metastabilny toroidalny wysoko-spinowy stan izomeryczny (THSI). Stosując metodę wymuszonego obrotu w modelu Skyrme'a-HF (z pominięciem korelacji pairing oraz wiązania na moment kwadrupolowy  $Q_{20}$ ) generowano wysokie wartości momentu pędu

du  $I = I_z$ , uszeregowując pojedyncze nukleonowe momenty pędu wzdłuż osi symetrii jądra. Poszukiwania stanów THSI przeprowadzono dla łańcucha izotopów  $Z = 120$  z liczbą neutronów  $N = 160-196$  oraz izotonów  $N = 184$  z liczbą protonów  $Z = 106-126$ . W przypadku izotopów  $Z = 120$  znaleziono 64 stany THSI (Tab. 3.9), a w przypadku izotonów  $N = 184$  zlokalizowano 37 stanów THSI (Tab. 3.10).



# Bibliografia

- [1] Yu. Ts. Oganessian, V. Utyonkov, Y. Lobanov, F. Abdullin, A. Polyakov, R. Saggaidak, I. Shirokovsky, Y. Tsyganov, A. Voinov, G. Gulbekian, S. Bogomolov, B. Gikal, A. Mezentsev, S. Iliev, V. Subbotin, A. Sukhov, K. Subotic, V. Zagrebaev, G. Vostokin, M. Itkis, K. Moody, J. Patin, D. Shaughnessy, M. Stoyer, N. Stoyer, P. Wilk, J. Kenneally, J. Landrum, J. Wild, R. Lougheed, *Synthesis of the isotopes of elements 118 and 116 in the  $^{245}\text{Ca} + ^{48}\text{Ca}$  fusion reactions*, Phys. Rev. C **74**, 044602 (2006).
- [2] W. D. Myers, W. J. Swiatecki, *Anomalies in nuclear masses*, Ark. Fys. **36**, 343 (1967).
- [3] H. Meldner, *Nuclides far off the Stability Line*, Ark. Fys. **36**, 593 (1967).
- [4] S. G. Nilsson, C. F. Tsang, A. Sobiczewski, Z. Szymanski, S. Wycech, C. Gustafson, I. L. Lamm, P. Möller, B. Nilsson, *On the nuclear structure and stability of heavy and superheavy elements*, Nucl. Phys. A **131**, 1 (1969).
- [5] M. Bender, K. Rutz, P. G. Reinhard, J. A. Maruhn, W. Greiner, *Potential energy surfaces of superheavy nuclei*, Phys. Rev. C **58**, 2126 (1998).
- [6] K. Rutz, M. Bender, T. Burvenich, T. Schilling, P. G. Reinhard, J. A. Maruhn, W. Greiner, *Superheavy nuclei in self-consistent nuclear calculations*, Phys. Rev. C **56**, 238 (1997).
- [7] T. Sil, S. K. Patra, B. K. Sharma, M. Centelles, X. Vinas, *Superheavy nuclei in a relativistic effective Lagrangian model*, Phys. Rev. C **69**, 044315 (2004).
- [8] A. Staszczak, C. Y. Wong, *Toroidal super-heavy nuclei in Skyrme–Hartree–Fock approach*, Acta Phys. Pol. B **40**, 753 (2009).
- [9] A. Staszczak, C. Y. Wong, A. Kosior, *Toroidal high-spin isomers in the nucleus  $^{304}120$* , Phys. Rev. C, **95**, 054315 (2017).

- [10] A. Kosior, A. Staszczak, C. Y. Wong, *Toroidal nuclear matter distributions of superheavy nuclei from constrained Skyrme-HFB calculations*, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **10**, 249 (2017).
- [11] A. Kosior, A. Staszczak, C. Y. Wong, *Properties of superheavy isotopes  $Z = 120$  and isotones  $N = 184$  within the Skyrme-HFB model*, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **11**, 167 (2018).
- [12] M. Warda, *Toroidal structure of super-heavy nuclei in the HFB theory*, Int. J. Mod. Phys. E **16**, 452 (2007).
- [13] A. V. Afanasjev, S. E. Agbemava, A. Taninah, *Exploring nuclear exotica at the limits*, Act. Phys. Pol. B, **13**, 347 (2020).
- [14] A. V. Afanasjev, S. E. Agbemava, A. Gyawali, *Hyperheavy nuclei: existence and stability*, Phys. Let. B **782**, 533 (2018).
- [15] S. E. Agbemava, A. V. Afanasjev, *Hyperheavy spherical and toroidal nuclei: The role of shell structure*, Phys. Rev. C **103**, 034323 (2021).
- [16] J. Bartel, P. Quentin, M. Brack, C. Guet, H. B. Håkansson, *Towards a better parametrisation of Skyrme-like effective forces: A critical study of the SkM force*, Nucl. Phys. A **386**, 79 (1982).
- [17] P. Jachimowicz, M. Kowal, and J. Skalski, *Superdeformed oblate superheavy nuclei*, Phys. Rev. C **83**, 054302 (2011).
- [18] J. Chadwick, *Possible Existence of a Neutron*, Nature **129**, 11 (1932).
- [19] O. Hahn, F. Strassmann, *Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle*, Naturwissenschaften **27**, 11 (1939).
- [20] O. Hahn, F. Strassmann, *Über die Entstehung von Radiumisotopen aus Uran durch Bestrahlen mit schnellen und verlangsamten Neutronen*, Naturwissenschaften **26**, 755 (1938).
- [21] C. F. von Weizsäcker, *Zur Theorie der Kernmassen*, Z. Phys. **96**, 431 (1935).
- [22] N. Bohr, J. A. Wheeler, *The Mechanism of Nuclear Fission*, Phys. Rev. **56**, 426 (1939).
- [23] G. N. Flerov, K. A. Petrzhak, *Spontaneous Fission of Uranium*, C. R. (Dokl.) Akad. Sci. USSR **28**, 500 (1940).

- [24] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Struktura jądra atomowego, tom 1: Ruch jednocząstkowy*, PWN Warszawa (1975).
- [25] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Struktura jądra atomowego, tom 2: Deformacje jądrowe*, PWN, Warszawa (1984).
- [26] Yu. Ts. Oganessian, *Fusion and fission induced by heavy ions*, Lect. Notes Phys. **33**, 221 (1975).
- [27] Yu. Ts. Oganessian, *Experiments on the synthesis of neutron-deficient kurchatovium isotopes in reactions induced by  $^{50}\text{Ti}$  Ions*, Nucl. Phys. A **239**, 157 (1975).
- [28] S. Hofmann, G. Münzenberg, *The discovery of the heaviest elements*, Rev. Mod. Phys. **72**, 733 (2000).
- [29] S. Hofmann, *Superheavy Elements*, Lect. Notes Phys. **764**, 203 (2009).
- [30] Yu. Ts. Oganessian, V. K. Utyonkov, *Superheavy nuclei from  $^{48}\text{Ca}$ -induced reactions*, Nucl. Phys. A **27**, 62 (2015).
- [31] P. Armbruster, G. Münzenberg, *An experimental paradigm opening the world of superheavy elements*, Eur. Phys. J. H **37**, 237 (2012).
- [32] K. Morita, K. Morimoto, D. Kaji, T. Akiyama, S. Goto, H. Haba, E. Ideguchi, R. Kanungo, K. Katori, H. Koura, H. Kudo, T. Ohnishi, A. Ozawa, T. Suda, K. Sueki, H. Xu, T. Yamaguchi, A. Yoneda, A. Yoshida, YuLiang Zhao, *Experiment on the Synthesis of Element 113 in the Reaction  $^{209}\text{Bi}({}^{70}\text{Zn},n)^{278}113$* , J. Phys. Soc. Jpn. **73**, 2593 (2004).
- [33] K. Morita, K. Morimoto, D. Kaji, T. Akiyama, S. Goto, H. Haba, E. Ideguchi, K. Katori, H. Koura, H. Kikunaga, H. Kudo, T. Ohnishi, A. Ozawa, N. Sato, T. Suda, K. Sueki, F. Tokanai, T. Yamaguchi, A. Yoneda, A. Yoshida, *Observation of Second Decay Chain from  $^{278}113$* , J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 045001 (2007).
- [34] K. Morita, K. Morimoto, D. Kaji, H. Haba, K. Ozeki, Y. Kudou, T. Sumita, Y. Wakabayashi, A. Yoneda, K. Tanaka, S. Yamaki, R. Sakai, T. Akiyama, S. Goto, H. Hasebe, M. Huang, T. Huang, E. Ideguchi, Y. Kasamatsu, K. Katori, Y. Kariya, H. Kikunaga, H. Koura, H. Kudo, A. Mashiko, K. Mayama, S. Mitsuoka, T. Moriya, M. Murakami, H. Murayama, S. Namai, A. Ozawa, N. Sato, K. Sueki, M. Takeyama, F. Tokanai, T. Yamaguchi, A. Yoshida, *New Result in the Production and Decay of an Isotope,  $^{278}113$ , of the 113th Element*, J. Phys. Soc. Jpn. **81**, 103201 (2012).

- [35] G. T. Seaborg, *Elements Beyond 100, Present Status and Future Prospects*, Annu. Rev. Nucl. Sci. **18**, 53 (1968).
- [36] Yu. Ts. Oganessian, V. K. Utyonkov, Yu. V. Lobanov, F. Sh. Abdullin, A. N. Polyakov, I. V. Shirokovsky, Yu. S. Tsyganov, G. G. Gulbekian, S. L. Bogomolov, B. N. Gikal, A. N. Mezentsev, S. Iliev, V. G. Subbotin, A. M. Sukhov, A. A. Voinov, G. V. Buklanov, K. Subotic, V. I. Zagrebaev, M. G. Itkis, J. B. Patin, K. J. Moody, J. F. Wild, M. A. Stoyer, N. J. Stoyer, D. A. Shaughnessy, J. M. Kenneally, P. A. Wilk, R. W. Loughheed, R. I. Ilkaev, S. P. Vesnovskii, *Measurements of cross sections for the fusion-evaporation reactions  $^{244}\text{Pu}(^{48}\text{Ca}, xn)^{292-x}114$  and  $^{245}\text{Cm}(^{48}\text{Ca}, xn)^{293-x}116$* , Phys. Rev. C **69**, 054607 (2004).
- [37] Yu. Ts. Oganessian, V. K. Utyonkov, Yu. V. Lobanov, F. Sh. Abdullin, A. N. Polyakov, I. V. Shirokovsky, Yu. S. Tsyganov, G. G. Gulbekian, S. L. Bogomolov, B. N. Gikal, A. N. Mezentsev, S. Iliev, V. G. Subbotin, A. M. Sukhov, A. A. Voinov, G. V. Buklanov, K. Subotic, V. I. Zagrebaev, M. G. Itkis, J. B. Patin, K. J. Moody, J. F. Wild, M. A. Stoyer, N. J. Stoyer, D. A. Shaughnessy, J. M. Kenneally, P. A. Wilk, R. W. Loughheed, R. I. Ilkaev, S. P. Vesnovskii, *Measurements of cross sections and decay properties of the isotopes of elements 112, 114, and 116 produced in the fusion reactions  $^{233,238}\text{U}^{242}\text{Pu}$ , and  $^{248}\text{Cm} + ^{48}\text{Ca}$* , Phys. Rev. C **70**, 064609 (2004).
- [38] V. I. Zagrebaev, M. G. Itkis, Yu. Ts. Oganessian, *Fusion-fission dynamics and perspectives of future experiments*, Phys. At. Nucl. **66**, 1033 (2003).
- [39] V. I. Zagrebaev, *Fusion-fission dynamics of super-heavy element formation and*, Nucl. Phys. A **734**, 164 (2004).
- [40] P. A. Ellison, K. E. Gregorich, J. S. Berryman, D. L. Bleuel, R. M. Clark, I. Dragojevic, J. Dvorak, P. Fallon, C. Fineman-Sotomayor, J. M. Gates, O. R. Gothe, I. Y. Lee, W. D. Loveland, J. P. McLaughlin, S. Paschalis, M. Petri, J. Qian, L. Stavsetra, M. Wiedeking, H. Nitsche, *New superheavy element isotopes:  $^{242}\text{Pu}(^{48}\text{Ca}, 5n)^{285}114$* , Phys. Rev. Lett. **105**, 182701 (2010).
- [41] F. Hessberger, S. Hofmann, V. Ninov, P. Armbruster, H. Folger, G. Münzenberg, H. Schött, A. Popeko, A. Yeremin, A. Andreyev, S. Saro, *Spontaneous fission and alpha-decay properties of neutron deficient isotopes  $^{257-253}104$  and  $^{258}106$* , Z. Phys. Hadrons Nucl. **359**, 415 (1997).
- [42] G. Münzenberg, P. Armbruster, H. Folger, P. Heßberger, S. Hofmann, J. Keller, K. Poppensieker, W. Reisdorf, K. H. Schmidt, H. J. Schött, M. Leino, R. Hingmann, *The identification of element 108*, Z. Phys. A, Atoms Nucl. **317**, 235 (1984).



- [43] S. Hofmann, *New elements - approaching  $Z = 114$* , Rep. Prog. Phys. **61**, 639 (1998).
- [44] S. Hofmann, S. Heinz, R. Mann, J. Maurer, J. Khuyagbaatar, D. Ackermann, S. Antalic, W. Barth, M. Block, H. G. Burkhard, V. F. Comas, L. Dahl, K. Eberhardt, J. Gostic, R. A. Henderson, J. A. Heredia, F. P. Heßberger, J. M. Kenneally, B. Kindler, I. Kojouharov, J. V. Kratz, R. Lang, M. Leino, B. Lommel, K. J. Moody, G. Münzenberg, S. L. Nelson, K. Nishio, A. G. Popeko, J. Runke, S. Saro, D. A. Shaughnessy, M. A. Stoyer, P. Thörle-Pospiech, K. Tinschert, N. Trautmann, J. Uusitalo, P. A. Wilk, A. V. Yeremin, *The reaction  $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm} \rightarrow ^{296}116^*$  studied at the GSI-SHIP*, Eur. Phys. J. A **48**, 62 (2012).
- [45] C. Düllmann, M. Schädel, A. Yakushev, A. Türler, K. Eberhardt, J. Kratz, D. Ackermann, L. L. Andersson, M. Block, W. Brüche, J. Dvorak, H. Essel, P. Ellison, J. Even, J. Gates, A. Gorshkov, R. Graeger, K. Gregorich, W. Hartmann, R. D. Herzberg, F. Heßberger, D. Hild, A. Hübner, E. Jäger, J. Khuyagbaatar, B. Kindler, J. Krier, N. Kurz, S. Lahiri, D. Liebe, B. Lommel, M. Maiti, H. Nitsche, J. Omtvedt, E. Parr, D. Rudolph, J. Runke, B. Schausten, E. Schimpf, A. Semchenkov, J. Steiner, P. Thörle-Pospiech, J. Uusitalo, M. Wegrzecki, N. Wiehl, *Production and Decay of Element 114: High Cross Sections and the New Nucleus  $^{277}\text{Hs}$* , Phys. Rev. Lett. **104**, 252701 (2010).
- [46] L. Stavsetra, K. Gregorich, J. Dvorak, P. Ellison, I. Dragojevic, M. Garcia, H. Nitsche, *Independent Verification of Element 114 Production in the  $^{48}\text{Ca} + ^{242}\text{Pu}$  Reaction*, Phys. Rev. Lett. **103**, 132502 (2009).
- [47] H. Haba, D. Kaji, H. Kikunaga, Y. Kudou, K. Morimoto, K. Morita, K. Ozeki, T. Sumita, A. Yoneda, Y. Kasamatsu, Y. Komori, K. Ooe, A. Shinohara, *Production and decay properties of the 1.9- $s$  isomeric state in  $^{261}\text{Rf}$* , Phys. Rev. C **83**, 034602 (2011).
- [48] Yu. Ts. Oganessian, *Heaviest nuclei from  $^{48}\text{Ca}$ -induced reactions*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **34**, R165 (2007).
- [49] D. Ackermann, Ch. Theisen, *Nuclear structure features of very heavy and super-heavy nuclei - tracing quantum mechanics towards the 'island of stability'*, Phys. Scr. **92**, 083002 (2017).
- [50] J. Magill, R. Dreher, Zs. Sóti, *Karlsruher Nuklidkarte*, 10. Auflage 2018, (Nucleonica GmbH, Karlsruhe 2018).

- [51] S. Hofmann, S. N. Dmitriev, C. Fahlander, J. M. Gates, J. B. Roberto, H. Sakai, *On the discovery of new elements (IUPAC/IUPAP Provisional Report)*, Pure Appl. Chem. **90**, 1773 (2018).
- [52] V. I. Zagrebaev, A. V. Karpov, I. N. Mishustin, W. Greiner, *Production of heavy and superheavy neutron-rich nuclei in neutron capture processes*, Phys. Rev. C, **84**, 044617 (2011).
- [53] V. I. Zagrebaev, W. Greiner, *Synthesis of superheavy nuclei: A search for new production reactions*, Phys. Rev. C **78**, 034610 (2008).
- [54] W. D. Myers, W. J. Swiatecki, *Nuclear masses and deformations*, Nucl. Phys. **81**, 1 (1966).
- [55] S. G. Nilsson, *Binding states of individual nucleons in strong deformed nuclei*, Mat. Fys. Medd., Dan. Vid. Selsk. **29**, 16, 1 (1955).
- [56] S. G. Nilsson, I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [57] V. M. Strutinsky, *Shell effects in nuclear masses and deformation energies*, Nucl. Phys. A **95**, 420 (1967).
- [58] V. M. Strutinsky, *"Shells" in deformed nuclei*, Nucl. Phys. A **122**, 1 (1968).
- [59] S. G. Nilsson, J. R. Nix, A. Sobiczewski, Z. Szymanski, S. Wizech, C. Gustafson, P. Möller, *On the spontaneous fission of nuclei with  $Z$  near 114 and  $N$  near 184*, Nucl. Phys. A **115**, 545 (1968).
- [60] U. Mosel, W. Greiner, *On the stability of superheavy nuclei against fission*, Z. Phys. **222**, 261 (1969).
- [61] E. O. Fiset, J. R. Nix, *Calculation of half-lives for superheavy nuclei*, Nucl. Phys. A **193**, 674 (1972).
- [62] M. G. Mayer, *On Closed Shells in Nuclei*, Phys. Rev. **74**, 235 (1948).
- [63] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, *On the "Magic Numbers" in Nuclear Structure*, Phys. Rev. **75**, 1766 (1949).
- [64] A. Sobiczewski, F. A. Gareev, B. N. Kalinkin, *Closed shells for  $Z > 82$  and  $N > 126$  in a diffuse potential well*, Phys. Lett. **22**, 500 (1966).

- [65] S. G. Nilsson, C. F. Tsang, A. Sobiczewski, Z. Szymanski, S. Wycech, C. Gustafson, I. L. Lamm, P. Möller, B. Nilsson, *On the nuclear structure and stability of heavy and superheavy elements*, Nucl. Phys. A **131**, 1 (1969).
- [66] M. Bender, R. Bernard, G. Bertsch, S. Chiba, J. Dobaczewski, N. Dubray, S. A. Giuliani, K. Hagino, D. Lacroix, Z. Li, P. Magierski, J. Maruhn, W. Nazarewicz, J. Pei, S. Péru, N. Pillet, J. Randrup, D. Regnier, P.-G. Reinhard, L. M. Robledo, W. Ryssens, J. Sadhukhan, G. Scamps, N. Schunck, C. Simenel, J. Skalski, I. Stetcu, P. Stevenson, S. Umar, M. Verriere, D. Vretenar, M. Warda, S. Åberg, *Future of nuclear fission theory*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **47**, 113002 (2020).
- [67] M. Bender, K. Rutz, P.-G. Reinhard, J. A. Maruhn, W. Greiner, *Shell structure of superheavy nuclei in self-consistent mean-field models*, Phys. Rev. C **60**, 034304 (1999).
- [68] A. T. Kruppa, M. Bender, W. Nazarewicz, P.-G. Reinhard, T. Vertse, S. Ćwiok, *Shell corrections of superheavy nuclei in selfconsistent calculations*, Phys. Rev. C **61** 034313 (2000).
- [69] M. Bender, P.-H. Heenen, P.-G. Reinhard, *Self-consistent mean-field models for nuclear structure*, Rev. Mod. Phys. **75**, 121 (2003).
- [70] K. H. Schmidt, C. C. Sahm, K. Pielenz, H. G. Clerc, *Some remarks on the error analysis in the case of poor statistics*, Z. Phys. A **316**, 19 (1984).
- [71] C. M. Folden III, K. E. Gregorich, Ch. E. Düllmann, H. Mahmud, G. K. Pang, J. M. Schwantes, R. Sudowe, P. M. Zielinski, H. Nitsche, D. C. Hoffman, *Development of an Odd-Z-Projectile Reaction for Heavy Element Synthesis:  $^{208}\text{Pb}(^{64}\text{Ni},n)^{271}\text{Ds}$  and  $^{208}\text{Pb}(^{65}\text{Cu},n)^{272}\text{111}$* , Phys. Rev. Lett. **93**, 212702 (2004).
- [72] K. Rutz, M. Bender, W. Greiner, *Superheavy nuclei in self-consistent nuclear calculations*, Phys. Rev. C **56**, 238 (1997).
- [73] R. K. Gupta, S. K. Patra, W. Greiner, *Structure of  $^{294,302}120$  Nuclei Using the Relativistic Mean-Field Method*, Mod. Phys. Lett. A **12**, 1727 (1997).
- [74] S. K. Patra, *A systematic study of superheavy nuclei for  $Z = 114$  and beyond using the relativistic mean field approach*, et al Nucl. Phys. A **651**, 117 (1999).
- [75] Ch. Bao-Qiu, M. Zhong-Yu, Z. Zhi-Yuan, S. Hong-Qiu, Z. Yao-Lin, *Deformed Potential Energy of Super Heavy Element  $Z = 120$  in a Generalized Liquid Drop Model*, IOP Publishing **22**, 302 (2005).

- [76] S. Tapaa, S. K. Patra, B. K. Sharma, M. Centelles, X. Viñas, *Superheavy nuclei in a relativistic effective Lagrangian model*, Phys. Rev. C **69**, 044315 (2004).
- [77] P. Möller, R. Nix, *Stability and decay of nuclei at the end of the periodic system*, Nucl. Phys. A **549**, 84 (1992).
- [78] P. Möller, R. Nix, *Stability of heavy and superheavy elements*, J. Phys. G **20**, 1681 (1994).
- [79] P. Möller, A. J. Sierk, T. Ichikawa, A. Iwamoto, R. Bengtsson, H. Uhrenholt, S. Åberg, *Heavy-element fission barriers*, Phys. Rev. C **79**, 064304 (2009).
- [80] P. Möller, A. J. Sierk, T. Ichikawa, A. Iwamoto, M. Mumpower, *Fission barriers at the end of the chart of the nuclides*, Phys. Rev. C **91**, 024310 (2015).
- [81] P. Jachimowicz, M. Kowal, J. Skalski, *Properties of heaviest nuclei with  $98 \leq Z \leq 126$  and  $134 \leq N \leq 192$* , Atomic Data and Nuclear Data Tables **138**, 101393 (2021).
- [82] A. Sobiczewski, K. Pomorski, *Description of structure and properties of superheavy nuclei*, Prog. Part. Nucl. Phys. **58** 292 (2007).
- [83] A. Staszczak, M. Stoitsov, A. Baran, W. Nazarewicz, *Augmented Lagrangian method for constrained nuclear density functional theory*, Eur. Phys. J. A **46**, 85 (2010).
- [84] J. Dobaczewski, J. Dudek, *Solution of the Skyrme–Hartree–Fock equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator basis. I. The method*, Comput. Phys. Commun. **102**, 166 (1997).
- [85] J. Dobaczewski, J. Dudek, *Solution of the Skyrme–Hartree–Fock equations in the Cartesian deformed harmonic oscillator basis. II. The program HFODD*, Comput. Phys. Commun. **102**, 183 (1997).
- [86] J. Dobaczewski, J. Dudek, *Solution of the Skyrme–Hartree–Fock equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator basis. (III) HFODD (v1.75r): A new version of the program*, Comput. Phys. Commun. **131**, 164 (2000).
- [87] J. Dobaczewski, P. Olbratowski, *Solution of the Skyrme–Hartree–Fock–Bogolyubov equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator basis. (IV) HFODD (v2.08i): A new version of the program*, Comput. Phys. Commun. **158**, 158 (2004).

- [88] J. Dobaczewski, P. Olbratowski, *Solution of the Skyrme-Hartree-Fock-Bogolyubov equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator basis. (V) HFODD (v2.08k): A new version of the program*, Comput. Phys. Commun. **167**, 214 (2005).
- [89] J. Dobaczewski, W. Satuła, B. G. Carlsson, J. Engel, P. Olbratowski, P. Powalowski, M. Sadziak, J. Sarich, N. Schunck, A. Staszczak, M. Stoitsov, M. Zalewski, H. Zduńczuk, *Solution of the Skyrme-Hartree-Fock-Bogolyubov equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator basis. (VI) HFODD (v2.40h): A new version of the program*, Comput. Phys. Commun. **180**, 2361 (2009).
- [90] N. Schunck, J. Dobaczewski, J. McDonnell, W. Satuła, J. A. Sheikh, A. Staszczak, M. Stoitsov, P. Toivanen, *Solution of the Skyrme-Hartree-Fock-Bogolyubov equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator basis. (VII) HFODD (v2.49t): A new version of the program*, Comput. Phys. Commun. **183**, 166 (2012).
- [91] N. Schunck, J. Dobaczewski, W. Satuła, P. Bączyk, J. Dudek, Y. Gao, M. Konieczka, K. Sato, Y. Shi, X. B. Wang, T. R. Werner, *Solution of the Skyrme-Hartree-Fock-Bogolyubov equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator basis. (VIII) HFODD (v2.73y): A new version of the program*, Comput. Phys. Commun. **216**, 145 (2017).
- [92] J. Dobaczewski, B. G. Carlsson, J. Dudek, J. Engel, P. Olbratowski, P. Powalowski, M. Sadziak, J. Sarich, W. Satuła, N. Schunck, A. Staszczak, M. Stoitsov, M. Zalewski, H. Zduńczuk, *HFODD (v2.40h) User's Guide*, arXiv:0909.3626, (2009).
- [93] HFODD Home Page, <https://www.fuw.edu.pl/~dobaczew/hfodd/hfodd.html>.
- [94] <https://www-windows.gsi.de/tasca/research/research.html>.
- [95] T. H. R. Skyrme, *The effective nuclear potential*, Nucl. Phys. **9**, 615 (1958/59).
- [96] D. Vautherin, D. M. Brink, *Hartree-Fock Calculations with Skyrme's Interaction. I. Spherical Nuclei*, Phys. Rev. **C5**, 626 (1972).
- [97] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, R. Schaeffer, *A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities*, Nucl. Phys. A **643**, 441 (1998).
- [98] F. Stancu, D. M. Brink, H. Flocard, *The tensor part of Skyrme's interaction*, Phys. Lett. B **68**, 108 (1977).
- [99] J. Dobaczewski, H. Flocard, J. Treiner, *Hartree-Fock-Bogolyubov description of nuclei near the neutron-drip line*, Nucl. Phys. A **422**, 103 (1984).

- [100] Y. M. Engel, D. M. Brink, K. Goeke, S. Krieger, D. Vautherin, *Time-dependent hartree-fock theory with Skyrme's interaction*, Nucl. Phys. A **249**, 215 (1975).
- [101] E. Perlińska, S. G. Rohoziński, J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, *Local density approximation for proton-neutron pairing correlations: Formalism*, Phys. Rev. C **69**, 014316 (2004).
- [102] V. Hellemans, P. H. Heenen, M. Bender, *Tensor part of the Skyrme energy density functional. III. Time-odd terms at high spin*, Phys. Rev. C **85**, 014326 (2012).
- [103] J. Dobaczewski, J. Dudek, *Time-odd components in the mean field of rotating superdeformed nuclei*, Phys. Rev. C **52**, 1827 (1995).
- [104] P. G. Reinhard, H. Flocard, *Nuclear effective forces and isotope shifts*, Nucl. Phys. A **584**, 467 (1995).
- [105] J. C. Slater, *A Simplification of the Hartree-Fock Method*, Phys. Rev. **81**, 385 (1951).
- [106] J. Dobaczewski, J. Dudek, S. G. Rohoziński, T. R. Werner, *Point symmetries in the Hartree-Fock approach. I. Densities, shapes, and currents*, Phys. Rev. C **62**, 014310 (2000).
- [107] J. Dobaczewski, J. Dudek, S. G. Rohoziński, T. R. Werner, *Point symmetries in the Hartree-Fock approach. II. Symmetry-breaking schemes*, Phys. Rev. C **62**, 014311 (2000).
- [108] M. J. A. de Voigt, J. Dudek, Z. Szymański, *High-spin phenomena in atomic nuclei*, Rev. Mod. Phys. **55**, 949 (1983).
- [109] A. V. Afanasjev, D. B. Fossan, G. J. Lane, I. Ragnarsson, *Termination of rotational bands: disappearance of quantum many-body collectivity*, Phys. Rep. **322**, 1 (1999).
- [110] D. L. Hill, J. A. Wheeler, *Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena*, Phys. Rev. **89**, 1102 (1953).
- [111] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, (New York, Springer-Verlag, 1997), str. 30.
- [112] J. Klamut, K. Durczewski, J. Sznajd, *Wstęp do fizyki przejść fazowych*, (Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław 1979).

- [113] <https://upload.wikimedia.org/>
- [114] C. Y. Wong, *Toroidal and spherical bubble nuclei*, Ann. Phys. **77**, 279 (1973).
- [115] M. Brack, J. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinsky, C. Y. Wong, *Funny Hills: The Shell-Correction Approach to Nuclear Shell Effects and Its Applications to the Fission Process*, Rev. Mod. Phys. **44**, 320 (1972).
- [116] P. H. Heenen, J. Skalski, A. Staszczak, D. Vretenar, *Shapes and  $\alpha$ - and  $\beta$ -decays of superheavy nuclei*, Nucl. Phys. A **944**, 415 (2015).
- [117] P. Cejnar, J. Jolie, R. F. Casten, *Quantum phase transitions in the shapes of atomic nuclei*, Rev. Mod. Phys. **82**, 2155 (2010).
- [118] D. Warner, *A triple point in nuclei*, Nature **420**, 614 (2002).
- [119] R. F. Casten, *Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei*, Nature Phys. **2**, 811 (2006).
- [120] J. Jolie, P. Cejnar, R. F. Casten, S. Heinze, A. Linnemann, V. Werner, *Triple Point of Nuclear Deformations*, Phys. Rev. Lett. **89**, 182502 (2002).
- [121] F. Iachello, A. Arima, *The Interacting Boson Model*, (Cambridge Univ. Press 1987).
- [122] F. Iachello, *Dynamic Symmetries at the Critical Point*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3580 (2000).
- [123] F. Iachello, *Analytic Description of Critical Point Nuclei in a Spherical-Axially Deformed Shape Phase Transition*, Phys. Rev. Lett. **87**, 052502 (2001).
- [124] P. Möller, J. R. Nix, K.-L. Kratz, *Nuclear properties for astrophysical and radioactive-ion-beam applications*, At. Data Nucl. Data Tables **66**, 131 (1997).
- [125] A. Parkhomenko, A. Sobiczewski, *Phenomenological Formula for  $\alpha$  Decay Half-Lives of Heaviest Nuclei*, Acta Phys. Pol. B **36**, 3095 (2005).
- [126] J. Eggers, *Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows*, Rev. Mod. Phys. **69**, 865 (1997).
- [127] E. Pairam, A. Fernández-Nieves, *Generation and Stability of Toroidal Droplets in a Viscous Liquid*, Phys. Rev. Lett. **102**, 234501 (2009).
- [128] J. D. McGraw, J. Li, D. L. Tran, A.-C. Shi, K. Dalnoki-Veress, *Plateau-Rayleigh instability in a torus: formation and breakup of a polymer ring*, Soft Matter **6**, 1258 (2010).

- [129] A. K. Nurse, S. R. Coriell, G. B. McFadden, *On the Stability of Rotating Drops*, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **120**, 74 (2015).
- [130] C. Y. Wong, *Rotating toroidal nuclei*, Phys. Rev. C **17**, 331 (1978).
- [131] A. Bohr, *Rotational motion in nuclei*, Rev. Mod. Phys. **48**, 365 (1976).
- [132] A. Bohr, B. R. Mottelson, *The structure of angular momentum in rapidly rotating nuclei*, Nucl. Phys. A **354**, 303c (1981).
- [133] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980), p. 142.
- [134] D. R. Inglis, *Particle Derivation of Nuclear Rotation Properties Associated with a Surface Wave*, Phys. Rev. **96**, 1059 (1954).
- [135] D. R. Inglis, *Nuclear Moments of Inertia due to Nucleon Motion in a Rotating Well*, Phys. Rev. **103**, 1786 (1956).
- [136] G. Andersson, S. E. Larsson, G. Leander, P. Möller, S. G. Nilsson, I. Ragnarsson, S. Åberg, R. Bengtsson, J. Dudek, B. Nerlo-Pomorska, K. Pomorski, Z. Szymański, *Nuclear shell structure at very high angular momentum*, Nucl. Phys. A **268**, 205 (1976).
- [137] B. R. Mottelson, J. G. Valatin, *Effect of Nuclear Rotation on the Pairing Correlation*, Phys. Rev. Lett. **5**, 511 (1960).
- [138] A. Staszczak, C. Y. Wong, *A region of high-spin toroidal isomers*, Phys. Lett. B **738**, 401 (2014).



# Publikacje własne

- W1.** A. Kosior, A. Staszczak, C. Y. Wong, *Toroidal nuclear matter distributions of superheavy nuclei from constrained Skyrme-HFB calculations*, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **10**, 249 (2017), arXiv:1701.06327.
- W2.** A. Staszczak, C. Y. Wong, A. Kosior, *Toroidal high-spin isomers in the nucleus  $^{304}120$* , Phys. Rev. C **95**, 054315 (2017), arXiv:1705.01408.
- W3.** A. Kosior, A. Staszczak, C. Y. Wong, *Properties of superheavy isotopes  $Z = 120$  and isotones  $N=184$  within the Skyrme-HFB model*, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **11**, 167 (2018), arXiv:1801.00954.



# TOROIDAL NUCLEAR MATTER DISTRIBUTIONS OF SUPERHEAVY NUCLEI FROM CONSTRAINED SKYRME–HFB CALCULATIONS\*

A. KOSIOR, A. STASZCZAK

Institute of Physics, Maria Curie Skłodowska University, Lublin, Poland

CHEUK-YIN WONG

Physics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, TN USA

(Received February 1, 2017)

Using the Hartree–Fock–Bogoliubov (HFB) self-consistent mean-field theory with the SkM\* Skyrme energy-density functional, we study nuclear structure properties of even–even superheavy nuclei (SHN) of  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones. The shape of the nucleus along the lowest energy curve as a function of the quadrupole moment  $Q_{20}$  makes a sudden transition from the oblate spheroids (biconcave discs) to the toroidal shapes, in the region of large oblate quadrupole moments.

DOI:10.5506/APhysPolBSupp.10.249

## 1. Introduction

Since the time when Wheeler coined the term *superheavy nuclei* (SHN) in 1955 [1], our knowledge of the “very heavy nuclei” has become more extensive and systematic. During the last 60 years, the heaviest known nucleus limit has been extended from  ${}^{256}_{101}\text{Md}$  (1955) [2] to  ${}^{294}_{118}\text{Og}$  (2006) [3], and the properties of SHN have been studied mostly in the region of prolate deformations. In this region, the energy surfaces of SHN reveal two paths to fission: a reflection-symmetric path corresponding to elongated fission fragments (sEF) and the reflection-asymmetric path with elongated fission fragments (aEF), which bifurcates from the sEF path after the first barrier, see *e.g.* Ref. [4]. There are also predictions on the ground state deformations, fission barrier heights, and spontaneous-fission and  $\alpha$ -decay half-lives of SHN; for a recent review, see, for example, Refs. [5, 6].

---

\* Presented at the XXIII Nuclear Physics Workshop “Marie and Pierre Curie”, Kazimierz Dolny, Poland, September 27–October 2, 2016.

Theoretically, the properties of SHN have been studied much less in the oblate region than in the prolate region, with a few exceptions, such as the study on super-deformed-oblate SHN at quadrupole moment  $Q_{20} = -60$  to  $-55$  b [5, 7]. Within the self-consistent constraint Skyrme–Hartree–Fock+BCS model, we found equilibrium toroidal nuclear density distributions at oblate deformation  $Q_{20} \leq -200$  b for the hypothetical SHN  $^{316}_{122}$ ,  $^{340}_{130}$ ,  $^{352}_{134}$ , and  $^{364}_{138}$  [8].

It is interesting to note that it was also Wheeler who suggested long ago that under appropriate conditions, the nuclear fluid may assume a toroidal shape [9]. In 1970s, the idea of a toroidal nucleus was examined in the framework of the liquid drop model and shell corrections [10, 11].

This contribution is devoted to a systematic investigation on the chain of even–even  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones within the self-consistent constraint Skyrme–Hartree–Fock–Bogoliubov (Skyrme–HFB) mean-field theory in the region of large oblate deformations.

## 2. Model and results

The constrained Skyrme–HFB approach is equivalent to the minimization of the Skyrme energy density functional  $E^{\text{tot}}[\bar{\rho}]$  with respect to the densities and currents under appropriate constraints [12]. Using the method of Lagrange multipliers, we solve an equality-constrained problem (ECP)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\bar{\rho}} E^{\text{tot}}[\bar{\rho}] \\ \text{subject to: } \langle \hat{N}_q \rangle = N_q, \quad (q = p, n), \\ \langle \hat{Q}_{\lambda\mu} \rangle = Q_{\lambda\mu}, \end{array} \right. \quad (1)$$

where the constraints are defined by the average values  $N_{p,n}$  of the proton and neutron particle-number operators  $\hat{N}_{p,n}$ , and by the constrained values  $Q_{\lambda\mu}$  of the mass-multiple-moment operators  $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ .

The above ECP equations were solved using an augmented Lagrangian method [13] with the symmetry-unrestricted code HFODD [14]. In the particle–hole channel, the Skyrme SkM\* [15] force was applied and a density-dependent mixed pairing interaction [4] in the particle–particle channel was used. The code HFODD uses the basis expansion method utilizing a three-dimensional Cartesian deformed harmonic oscillator basis. In the present study, we used a basis which consists of states having not more than  $N = 26$  quanta in the Cartesian directions, and not more than 1140 states.

As an example, the total HFB energy of SH nucleus  $^{304}_{120}_{184}$  as a function of the quadrupole moment  $Q_{20}$  is shown in Fig. 1. In addition to a spherical ground state minimum, one can see two paths leading to fission

on the prolate side: a reflection-symmetric path with the elongated fission fragments (sEF) (open circles) and a reflection-asymmetric path with the elongated fission fragments (aEF) (dashed line). On the oblate side, the self-consistent nuclear density under the  $Q_{20}$  constraint changes from an oblate spheroidal to a biconcave disc shape, as the magnitude of oblate  $Q_{20}$  increases. When the oblate  $Q_{20}$  magnitude exceeds 158 b, there emerges an additional self-consistent toroidal nuclear density solution.

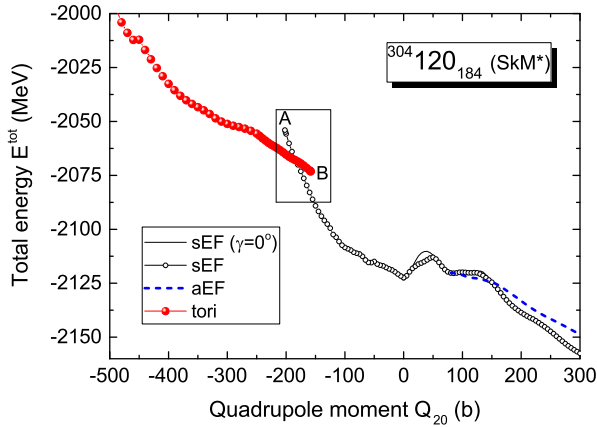


Fig. 1. (Color online) Total HFB energy of  $^{304}_{120}_{184}$  as a function of the quadrupole moment. The open circular points and dashed (blue) line show the symmetric (sEF) and asymmetric (aEF) elongated fission pathways, respectively. The axially symmetric sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) fission pathway is marked by a solid thin line. In the region of large oblate deformation  $Q_{20} \leq -158$  b, the nuclear matter density distributions appear in a toroidal shape for the (red) solid circular points.

In the region marked by a rectangle in Fig. 1, one can see a discontinuity [17, 18] in HFB energy plot. Between points A–B of constraint  $Q_{20}$  values, two different solutions exist, one with the biconcave disc shapes and another with toroidal shapes. Actually, with more than one constraint, the energy surface may contain two valleys separated by a saddle point region, as *e.g.* in Fig. 2 in Ref. [18]. In the self-consistent Skyrme–HFB method, the energy of the system is automatically minimized in the non-constrained subspace of degrees of freedom. However, to examine the region separating the biconcave disc shape valley from toroidal shape valley in detail will require an additional constraint. In this paper, our goal is to check if the valleys with toroidal SHN nuclear shapes may be reached at the extremely oblate deformation region; it suffices to study the energy curves only with a single quadrupole moment constraint.

An enlarged view of the transition from the biconcave disc to the toroidal shape of Fig. 1 is shown in Fig. 2 (a), where our Skyrme–HFB calculations give the biconcave disc solutions ending at the point A (at  $Q_{20}(A) = -202$  b), and another toroidal solutions starting at the point B (at  $Q_{20}(B) = -158$  b). The nuclear density distributions of  $^{304}_{120}_{184}$  calculated at A and B are depicted in Fig. 2 (b), which indicates that the nuclear density at the toroidal geometrical center is very small at the starting point B of the toroidal sequence, but remains to be about  $0.08/\text{fm}^3$  at point A of the biconcave disc sequence.

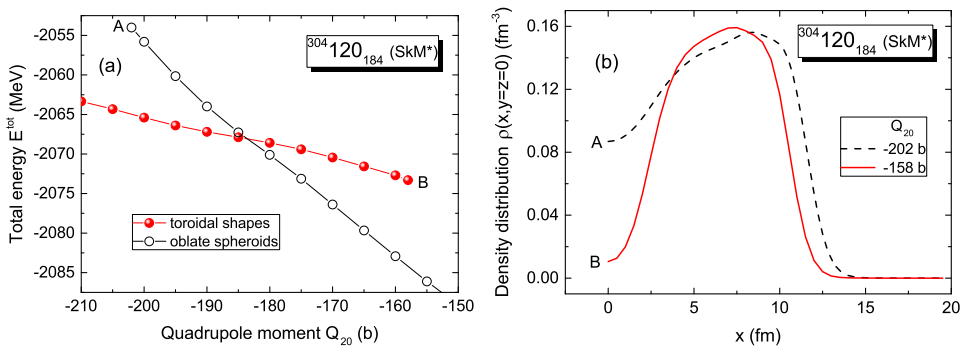


Fig. 2. (Color online) (a) An enlarged view of Fig. 1, the total HFB energy of  $^{304}_{120}_{184}$  as a function of the quadrupole moment between points A–B, where a shape transition from oblate spheroids (biconcave discs) to toroidal shapes takes place. (b) The nuclear density distribution at  $Q_{20}(A) = -202$  b (biconcave disc) and  $Q_{20}(B) = -158$  b (torus).

In the region of quadrupole moment between  $Q_{20}(A)$  and  $Q_{20}(B)$ , both biconcave disc and toroidal solutions coexist for  $^{304}_{120}_{184}$ . It is of interest to examine the single-particle states of these two types of solutions in this oblate deformation region. The proton single-particle levels of  $^{304}_{120}_{184}$  close to the Fermi energy as a function of  $Q_{20}$  between  $Q_{20}(A)$  and  $Q_{20}(B)$  for the biconcave disc and toroidal sequences are shown in the upper and lower panels of Fig. 3, respectively. Levels with positive parity are drawn as solid curves, while those with negative parity are drawn as dashed curves. Each single-particle state is labeled with the Nilsson quantum numbers  $[N, n_z, A]\Omega$  of the dominant component. Each level is doubly degenerate. The circled numbers denote the occupation numbers. For the sake of comparison, Fig. 4 gives the neutron single-particle levels close to the Fermi energy for the biconcave disc solution in the upper panel and the toroidal solution in the lower panel.

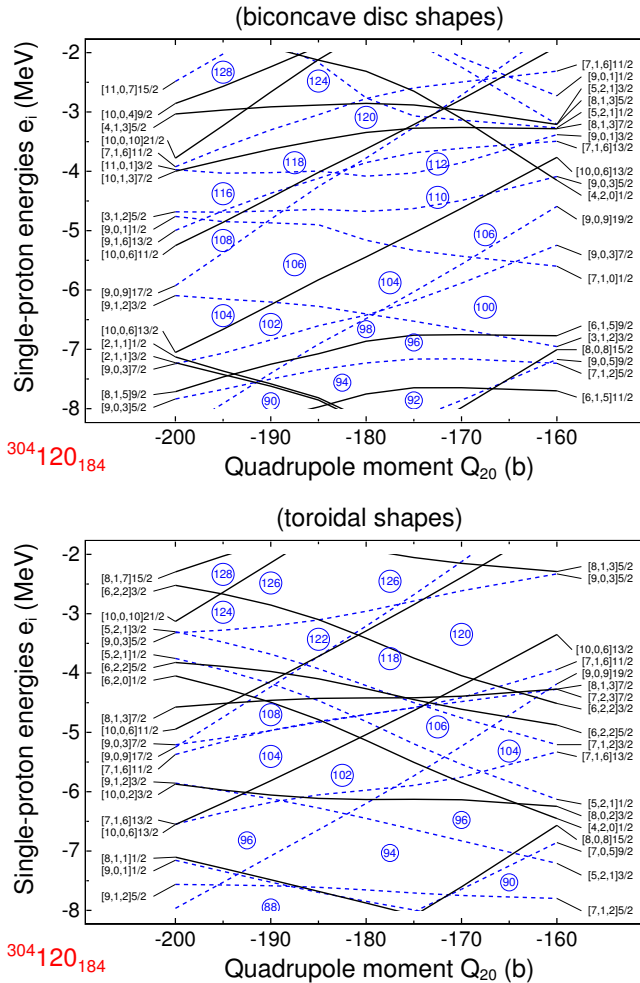


Fig. 3. (Color online) Proton single-particle levels of  $^{304}120_{184}$  as a function of the quadrupole moment. The levels with positive parity are drawn with solid lines, while those with negative parity are drawn with dashed (blue) lines. The upper panel is for a biconcave disc shape and the lower panel for a toroidal shape.

Even though Figs. 3 and 4 pertain to the self-consistent single-particle states for  $^{304}120$ , we expect that the mean-field potential depends mostly on nuclear density shape and the quadrupole moment, and varies only slightly as a function of the atomic number and the neutrons number. The single-particle state diagrams in Figs. 3 and 4 can be approximately applied to an extended region around  $^{304}120_{184}$ .

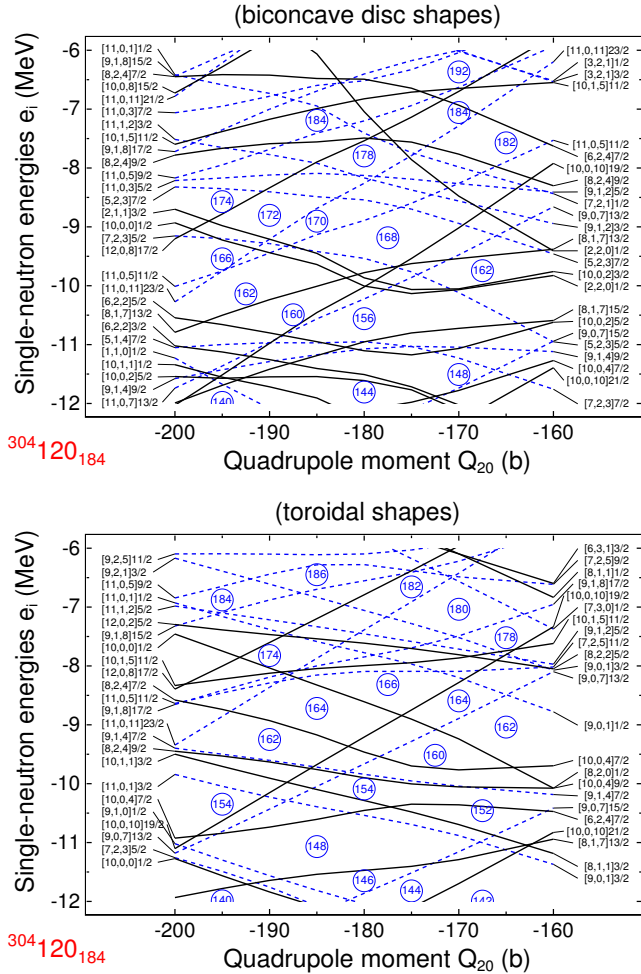


Fig. 4. (Color online) The same as in Fig. 3, but for the neutron single-particle levels.

We infer from Figs. 3 and 4 that the densities of proton and neutron single-particle states are far from being uniform. There are regions of sparse density of single-particle states which can be identified as single-particle “shells” associated with enhanced stability [16]. It will be of future interest to exploit the property of the extra stability of SHN for which the toroidal proton and neutron shells are located at the same deformation. The shell effects play an even more significant role when the bulk properties of the system lead to a nearly flat bulk energy as a function of the deformation, such as would be expected for systems with  $Z \geq 122$  [8]. The complexity of the single-particle state energy level diagram indicates that the location of the neutron and proton shells needs to be examined on a case-by-case basis.



Figure 5 (a) gives the Skyrme–HFB energies as a function of the quadrupole moment of even–even  $Z = 120$  isotopes with the number of neutrons from 166 to 190, in the region of the shape transition from the biconcave disc shape to the toroidal shape. The toroidal and biconcave disc total energies decrease as a function of increasing  $Q_{20}$  and do not possess an energy minimum. The slope of the toroidal energy as a function of  $Q_{20}$  appears to be nearly independent of the neutron number, for  $Z = 120$  isotopes. The biconcave disc energy curve and the toroidal energy curve apparently *cross* each other at an energy *crossing* point, whose location moves to a more negative  $Q_{20}$  value as the neutron number increases. Along the lowest energy curve as a function of  $Q_{20}$  in Fig. 5 (a), there is a sudden shape transition from the biconcave disc shape to the toroidal shape at the energy *crossing* point. The first solution with the toroidal shape takes place at  $Q_{20} = -150$  b for  $N = 166$ , and at  $Q_{20} = -160$  b for  $N = 190$ .

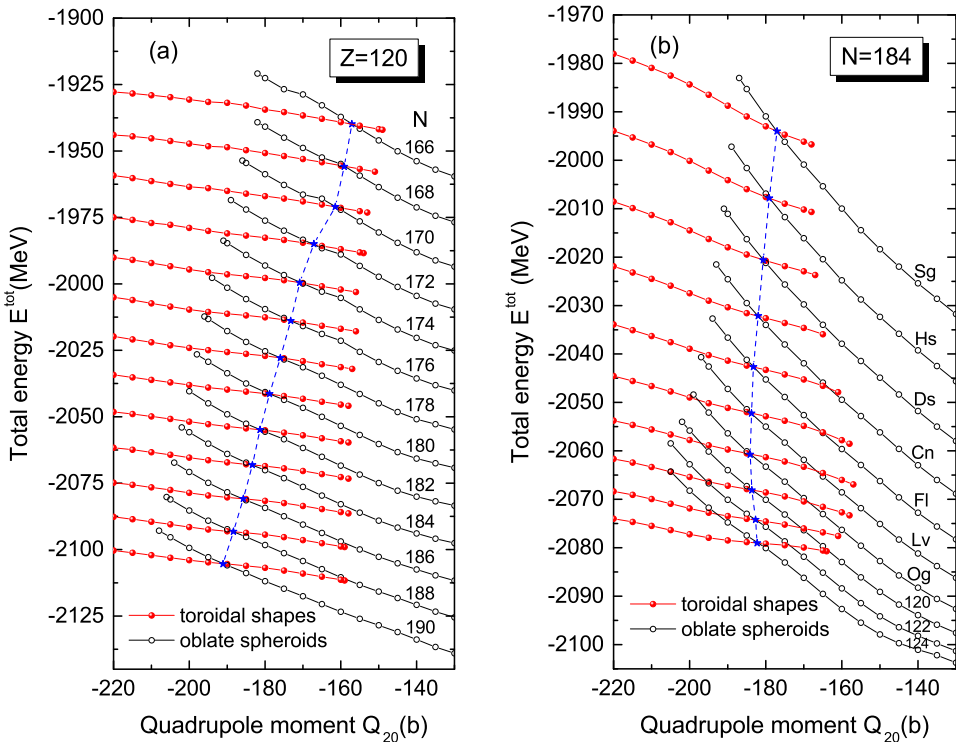


Fig. 5. (Color online) Shape transitions from the biconcave disk shapes to the toroidal shapes for the even–even isotopes  $Z = 120$  in panel (a), and for the even–even isotones  $N = 184$  in panel (b). The points of energy *crossing* (see the text) of the oblate spheroids and toroidal shapes solutions are connected by a dashed (blue) line.

Similar results, but for the even–even  $N = 184$  isotones with the number of protons from 106 to 124 are shown in Fig. 5 (b). For those isotones, one observes that as the proton number increases, the magnitude of the Coulomb repulsion increases, and the magnitude of the slope of the toroidal energy curve becomes smaller. The toroidal energy curve for  $Z = 124$  is nearly but not completely flat. Further increase in the proton number may render a toroidal energy equilibrium at a greater oblate deformation. The energy *crossing* points of the biconcave disk and toroidal energy curves occur at  $Q_{20} \approx -180$  b for all atomic numbers in Fig. 5 (b).

### 3. Conclusions and discussions

The Coulomb repulsion from a large number of protons in an SH nucleus has a tendency to push the nuclear matter outward, making it easier to assume a toroidal shape. We examine here SHN in the region of  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones. We find that as the magnitude of the oblate  $Q_{20}$  increases along the lowest energy curve, there is a sudden shape transition from a biconcave disc to a torus. For  $Z = 120$  isotopes with  $166 \leq N \leq 190$  and for  $N = 184$  isotones with  $106 \leq Z \leq 124$ , the total energy curves lie on a slope, indicating that these nuclei in a toroidal shape are unstable against returning to the shape of a sphere-like geometry.

Our examination of the single-particle states in this region reveal that the density of single-particle levels is far from being uniform and single-particle shells are present at various toroidal deformations. Because the energy curve as a function of  $Q_{20}$  becomes flatter with increasing  $Z$ , one expects that by increasing the atomic number beyond  $Z \geq 122$  with possible appropriate toroidal shells, some toroidal figures of equilibrium may become possible. Future search for toroidal nuclei may focus attention in this superheavy region in conjunction with possible nuclear shell effects.

The presence of a large angular momentum will facilitate the formation of a toroidal nucleus. In this regard, it will be useful to examine SHN with non-collective rotations whose spin along the symmetry axis arises from particle–hole excitations [19]. Previous investigations reveal a region of toroidal high-spin isomers in the light mass region [20–25]. A recent investigation shows that  $^{304}_{120}184$  with  $I = I_z = 81$  and  $208 \hbar$  may be toroidal high-spin isomers [26].

The research was supported in part by the Division of Nuclear Physics, U.S. Department of Energy under contract DE-AC05-00OR22725 and the National Science Center (NCN), Poland, project No. 2016/21/B/ST2/01227.

## REFERENCES

- [1] J.A. Wheeler, Proceedings of the International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1955, vol. 2, United Nations, New York 1956, p. 155.
- [2] A. Ghiorso *et al.*, *Phys. Rev.* **98**, 1518 (1955).
- [3] Y.T. Oganessian *et al.*, *Phys. Rev. C* **74**, 044602 (2006).
- [4] A. Staszczak, A. Baran, W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **87**, 024320 (2013).
- [5] P.-H. Heenen, J. Skalski, A. Staszczak, D. Vretenar, *Nucl. Phys. A* **944**, 415 (2015).
- [6] A. Baran *et al.*, *Nucl. Phys. A* **944**, 442 (2015).
- [7] P. Jachimowicz, M. Kowal, J. Skalski, *Phys. Rev. C* **83**, 054302 (2011).
- [8] A. Staszczak, C.Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B* **40**, 753 (2009).
- [9] See a reference to J.A. Wheeler's toroidal nucleus in G. Gamow, *Biography of Physics*, New York: Harper & Brothers Publishers, 1961, pp. 297.
- [10] C.Y. Wong, *Ann. Phys.* **77**, 279 (1973).
- [11] C.Y. Wong, *Phys. Rev. C* **17**, 331 (1978).
- [12] E. Perlinska, S.G. Rohozinski, J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **69**, 014316 (2004).
- [13] A. Staszczak, M. Stoitsov, A. Baran, W. Nazarewicz, *Eur. J. Phys. A* **46**, 85 (2010).
- [14] N. Schunck *et al.*, *Comput. Phys. Commun.* **183**, 166 (2012).
- [15] J. Bartel *et al.*, *Nucl. Phys. A* **386**, 79 (1982).
- [16] M. Brack *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **44**, 320 (1972).
- [17] P. Möller *et al.*, *Phys. Rev. C* **79**, 064304 (2009).
- [18] N. Dubray, D. Regnier, *Comput. Phys. Commun.* **183**, 2035 (2012).
- [19] A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nucl. Phys. A* **354**, 303c (1981).
- [20] T. Ichikawa *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 232503 (2012).
- [21] T. Ichikawa, K. Matsuyanagi, J.A. Maruhn, N. Itagaki, *Phys. Rev. C* **89**, 011305(R) (2014).
- [22] A. Staszczak, C.Y. Wong, *Phys. Lett. B* **738**, 401 (2014).
- [23] A. Staszczak, C.Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B* **46**, 675 (2015).
- [24] A. Staszczak, C.Y. Wong, *Phys. Scr.* **90**, 114006 (2015).
- [25] A. Staszczak, C.Y. Wong, *EPJ Web Conf.* **117**, 04008 (2016).
- [26] A. Staszczak, C.Y. Wong, A. Kosior, to be published.



# Toroidal high-spin isomers in the nucleus $^{304}\text{120}$

A. Staszczak,<sup>1</sup> Cheuk-Yin Wong,<sup>2</sup> and A. Kosior<sup>1</sup><sup>1</sup>*Institute of Physics, Maria Curie-Skłodowska University, pl. M. Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin, Poland*<sup>2</sup>*Physics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee 37830, USA*

(Received 21 February 2017; published 22 May 2017)

**Background:** Strongly deformed oblate superheavy nuclei form an intriguing region where the toroidal nuclear structures may bifurcate from the oblate spheroidal shape. The bifurcation may be facilitated when the nucleus is endowed with a large angular momentum about the symmetry axis with  $I = I_z$ . The toroidal high- $K$  isomeric states at their local energy minima can be theoretically predicted using the cranked self-consistent Skyrme-Hartree-Fock method.

**Purpose:** We use the cranked Skyrme-Hartree-Fock method to predict the properties of the toroidal high-spin isomers in the superheavy nucleus  $^{304}\text{120}_{184}$ .

**Method:** Our method consists of three steps: First, we use the deformation-constrained Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov approach to search for the nuclear density distributions with toroidal shapes. Next, using these toroidal distributions as starting configurations, we apply an additional cranking constraint of a large angular momentum  $I = I_z$  about the symmetry  $z$  axis and search for the energy minima of the system as a function of the deformation. In the last step, if a local energy minimum with  $I = I_z$  is found, we perform at this point the cranked symmetry- and deformation-unconstrained Skyrme-Hartree-Fock calculations to locate a stable toroidal high-spin isomeric state in free convergence.

**Results:** We have theoretically located two toroidal high-spin isomeric states of  $^{304}\text{120}_{184}$  with an angular momentum  $I = I_z = 81\hbar$  (proton 2p-2h, neutron 4p-4h excitation) and  $I = I_z = 208\hbar$  (proton 5p-5h, neutron 8p-8h) at the quadrupole moment deformations  $Q_{20} = -297.7$  b and  $Q_{20} = -300.8$  b with energies 79.2 and 101.6 MeV above the spherical ground state, respectively. The nuclear density distributions of the toroidal high-spin isomers  $^{304}\text{120}_{184}$  ( $I_z = 81\hbar$  and  $208\hbar$ ) have the maximum density close to the nuclear matter density,  $0.16\text{ fm}^{-3}$ , and a torus major to minor radius aspect ratio  $R/d = 3.25$ .

**Conclusions:** We demonstrate that aligned angular momenta of  $I_z = 81\hbar$  and  $208\hbar$  arising from multiparticle-multiparticle excitations in the toroidal system of  $^{304}\text{120}_{184}$  can lead to high-spin isomeric states, even though the toroidal shape of  $^{304}\text{120}_{184}$  without spin is unstable. Toroidal energy minima without spin may be possible for superheavy nuclei with higher atomic numbers,  $Z \gtrsim 122$ , as reported previously [A. Staszczak and C. Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B* **40**, 753 (2008)].

DOI: [10.1103/PhysRevC.95.054315](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.95.054315)

## I. INTRODUCTION

The landscape of the total energy surface of a nucleus in the deformation degrees of freedom is central to our understanding of the equilibrium shapes and the evolutionary paths in nuclear dynamics. In Fig. 1, one can see the total energy surface for the superheavy nucleus  $^{304}\text{120}_{184}$  as a function of the quadrupole and octupole degrees of freedom calculated in the constrained Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) approach with the Skyrme energy density functional. In addition to the spherical ground-state minimum, the landscape contains the symmetric-elongated-fission (sEF) and asymmetric-elongated-fission (aEF) paths leading to fission. These features have important experimental implications in the multimodal fission decay properties of heavy and superheavy nuclei (cf. Refs. [1–3]).

The potential energy surface in Fig. 1 pertains to reflection-symmetric and reflection-asymmetric prolate shapes. How does the energy surface look in the oblate deformation region? What kinds of the nuclear (equilibrium) shapes may there be in this oblate deformation region?

To gain the proper perspective, it is informative to discuss some general features of our results in the prolate and oblate regions and then examine in detail in this paper how oblate

region results are obtained. The total HFB energy of  $^{304}\text{120}_{184}$  as a function of the quadrupole moment  $Q_{20}$  is shown in Fig. 2. On the prolate deformation side, the prescission density configurations for the sEF and aEF paths are shown at the ends of both paths (at  $Q_{20} \approx 360$  b for sEF and  $Q_{20} \approx 650$  b for aEF). The effects of triaxiality on the change of the inner and outer axial-symmetric barriers are shown in the insert of Fig. 2. On the oblate deformation side with a negative  $Q_{20}$ , one starts from the energy minimum for a spherical ground state to go to the higher energies for oblate spheroids. As the oblate  $Q_{20}$  magnitude increases, the oblate spheroidal density changes into a biconcave disk with flattened center density. At  $Q_{20} \approx -200$  b, the biconcave disk energy surface reaches an energy about 72 MeV above the spherical ground state. Upon a further increase in the oblate deformation, a sudden shape transition from a biconcave disk to a torus takes place with a reduction of the total energy of the nucleus by 10.8 MeV.

The geometry of the toroidal nuclear densities can be characterized by the aspect ratio  $R/d$ , where  $R$  is the major radius, the distance from the center of the torus hole to the center of the torus tube, and  $d$  is the minor radius, the radius of the tube. As is shown in Fig. 2 for  $Q_{20} \leq -158$  b, the aspect

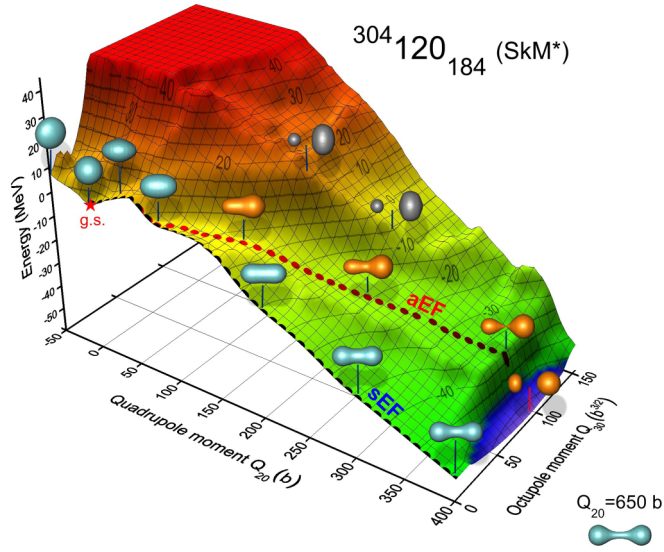


FIG. 1. Total HFB energy surface of  $^{304}_{120}_{184}$  as a function of the quadrupole  $Q_{20}$  and octupole  $Q_{30}$  moments. The HFB energy is normalized to the ground state energy. The dashed lines show the symmetric (sEF) and asymmetric elongated fission (aEF) paths along different valleys.

ratio  $R/d$  of the toroidal solution of the Skyrme-HFB model increases as the oblate  $Q_{20}$  magnitude increases.

With regard to the emergence of toroidal nuclear matter densities, Wheeler suggested long ago that under appropriate conditions the nuclear fluid may assume a toroidal shape [4]. Conditions that are favorable for the formation of nuclei with a toroidal shape are the cases of excess charge, excess angular

momentum, and nuclear shell effects [5,6]. In the semiclassical liquid-drop model, nuclei with a toroidal shape begin to develop as the fissility parameter  $x$  exceeds 0.964. However, the toroidal nucleus is plagued with various instabilities [5], and the search for toroidal nuclei continues [7]. When a toroidal nuclear system is endowed with an angular momentum along the symmetry axis,  $I = I_z$ , the variation of the rotational energy of the spinning nucleus can counterbalance the variation of the toroidal bulk energy to lead to toroidal isomeric states at their local energy minima, when the angular momentum  $I = I_z$  is beyond a threshold value [6]. A rotating liquid-drop toroidal nucleus can also be stable against sausage instabilities (known also as Plateau-Rayleigh instabilities, in which the torus breaks into smaller fragments [8,9]), when the same mass flow is maintained across the toroidal meridian to lead to high-spin isomers within an angular momentum window [6].

The rotating liquid-drop model is useful as an intuitive, qualitative guide to point out the essential balance of forces leading to possible toroidal figures of equilibrium. The quantitative assessment of toroidal high-spin isomer (THSI) relies on microscopic descriptions that include both the bulk properties of the nucleus and the single-particle shell effects in self-consistent mean-field theories, such as the Skyrme-Hartree-Fock (Skyrme-HF) approach. Self-consistent mean-field theories are needed because noncollective rotation with an angular momentum about the symmetry axis is permissible quantum mechanically for an axially symmetric toroid only by making single-particle particle-hole excitations to align the angular momenta of the constituents along the symmetry axis [10–15]. As a consequence, only a certain discrete, quantized set of total angular momentum  $I = I_z$  states is allowed. We shall adopt the simplified notation that all spins and angular momenta are implicitly in units of  $\hbar$  except otherwise explicitly indicated to resolve ambiguities.

It was recently found that the THSI with  $I = 60$  may be in the local energy minimum in the excited states of  $^{40}\text{Ca}$  by using a cranked Skyrme-HF method starting from the initial ring configuration of 10  $\alpha$  particles [16,17]. Using a cranked Skyrme-HF approach, it was found that toroidal high-spin isomeric states have actually a rather general occurrence for an extended region of even-even light nuclei with  $28 \leq A \leq 52$  [18]. With different rings of  $\alpha$  particles as initial states, it was also subsequently confirmed that there are THSI solutions in the extended region of  $36 \leq A \leq 52$  [19]. The particle-hole nature of the light high-spin toroidal isomers has been examined in Ref. [20], the toroidal high-spin isomers with  $N \neq Z$  have been located [21], and the THSIs in  $^{56}\text{Ni}$  have been described in Ref. [22]. For the nucleus  $^{24}\text{Mg}$ , a toroidal diabatic excited state without spin has also been found [23].

In addition to the high-spin toroidal isomers in the light mass region, the superheavy nuclei with large atomic numbers provides another favorable region for toroidal nuclei formation, because the large Coulomb repulsion tends to push the nuclear matter outward to make it energetically advantageous to assume a toroidal shape. A previous work in the superheavy region in the self-consistent constraint Skyrme Hartree-Fock+BCS (Skyrme-HF+BCS) framework indicates that toroidal energy minima are present at various

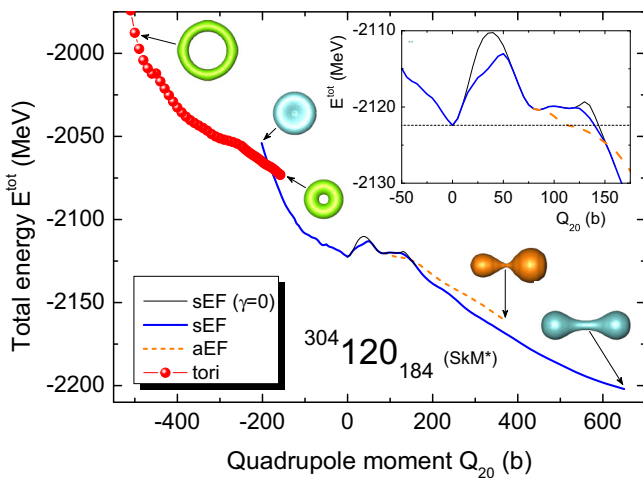


FIG. 2. Total HFB energy curve of  $^{304}_{120}_{184}$  as a function of the quadrupole moment. The thick solid (blue color) and gray dashed (orange) lines show the symmetric (sEF) and asymmetric (aEF) elongated fission pathways along different valleys, respectively. The effects of triaxiality on the inner and outer barriers are shown in the inset, where the axially symmetric sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) fission pathway is marked by solid thin (black) line. The nuclear matter density distributions with toroidal shapes appear at the region of large oblate deformation  $Q_{20} \leq -158$  b dark gray (red) solid circles.



energies as the atomic number increases beyond  $Z \gtrsim 122$  [7]. For example, the superheavy nuclei  $^{316}122_{194}$ ,  $^{340}130_{210}$ , and  $^{352}134_{218}$  have toroidal local potential energy minima lying at about 50, 25, and 12 MeV above their corresponding deformed oblate ground-state energy minimum, respectively. The superheavy nucleus  $^{364}138_{226}$  has a toroidal local potential energy minimum that lies even below the oblate spheroidal energy minimum.

Our purpose in the present paper is to explore the closed-shell superheavy nucleus  $^{304}120_{184}$  which is localized close to the center of the island of stability (cf. Refs. [3,24]). A toroidal system of  $^{304}120_{184}$  without a spin may not be stable [25]. It is of interest to find out whether the superheavy nucleus  $^{304}120_{184}$  with a toroidal density may become stabilized by the addition of a large nuclear spin.

This paper is organized as follows. In Secs. II A–C, we describe the theoretical model. In Sec. III A, we examine properties of the toroidal system of  $^{304}120_{184}$  without spin and study the single-particle states in the constrained Skyrme-HFB calculations as a function of the quadrupole moment. In Sec. III B, we present results of the cranked Skyrme-HF calculations for  $^{304}120_{184}$  with a toroidal density and a spin. The properties of  $^{304}120_{184}$  toroidal high-spin isomers are presented in Sec. III C. Finally, we summarize our studies in Sec. IV.

## II. DESCRIPTION OF THE MODEL

### A. The Skyrme energy density functional

In the local density approximation, the Skyrme energy density functional (EDF), up to second order in derivatives of the density (i.e., the most general quadratic EDF), can be expressed in terms of seven proton and neutron local densities: the particle (scalar) density  $\rho_q(\mathbf{r})$ , kinetic energy (scalar) density  $\tau_q(\mathbf{r})$ , spin-current (pseudotensor) density  $\mathbb{J}_q(\mathbf{r})$ , current (vector) density  $\mathbf{j}_q(\mathbf{r})$ , spin (pseudovector) density  $\mathbf{s}_q(\mathbf{r})$ , spin-kinetic (pseudovector) density  $\mathbf{T}_q(\mathbf{r})$ , and tensor-kinetic (pseudovector) density  $\mathbf{F}_q(\mathbf{r})$ , where  $q = \{p, n\}$ ; see Refs. [26–29].

The above local densities are all real, and  $\rho_q(\mathbf{r})$ ,  $\tau_q(\mathbf{r})$ , and  $\mathbb{J}_q(\mathbf{r})$  are time even, whereas  $\mathbf{j}_q(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{s}_q(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{T}_q(\mathbf{r})$ , and  $\mathbf{F}_q(\mathbf{r})$  are time odd. The spin-current pseudotensor density  $\mathbb{J}_q(\mathbf{r})$  can be decomposed into trace, antisymmetric, and symmetric parts, giving the pseudoscalar  $\mathcal{J}_q(\mathbf{r})$ , vector  $\mathbf{J}_q(\mathbf{r})$ , and (traceless) pseudotensor  $\tilde{\mathcal{J}}_q(\mathbf{r})$  densities, respectively.

The time reversal and spatial symmetries impose restrictions on the local densities [30,31]. In spherical nuclei [the rotational and mirror symmetry, O(3)], the pseudoscalar  $\mathcal{J}_q(\mathbf{r})$ , all the pseudovector [ $\mathbf{s}_q(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{T}_q(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{F}_q(\mathbf{r})$ ], and the pseudotensor  $\tilde{\mathcal{J}}_q(\mathbf{r})$  local densities vanish. In the case of axial and reflection symmetry, only the pseudoscalar component  $\mathcal{J}_q(\mathbf{r})$  vanishes. For the description of static properties in even-even nuclei, all the time-odd densities must vanish to preserve the time-reversal invariance of the density matrix in the particle-hole channel.

The standard proton-neutron separable Skyrme EDF can be divided into two parts, built of the seven isoscalar ( $t = 0$ )

and seven isovector  $T_z = 0$  component ( $t = 1$ ) single-particle densities [30]

$$E_{\text{Sk}} = \sum_{t=0,1} \int d^3\mathbf{r} [\mathcal{H}_t^{\text{even}}(\mathbf{r}) + \mathcal{H}_t^{\text{odd}}(\mathbf{r})], \quad (1)$$

where the isoscalar densities are the total ( $n + p$ ) densities, while the isovector densities are the differences of the neutron and proton ( $n - p$ ) densities. The energy densities  $\mathcal{H}_t^{\text{even}}(\mathbf{r})$  and  $\mathcal{H}_t^{\text{odd}}(\mathbf{r})$  are the real, time-even, scalar, and isoscalar functions of local densities and their derivatives. The time-even part of Skyrme EDF

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t^{\text{even}}(\mathbf{r}) = & C_t^\rho [\rho_0] \rho_t^2 + C_t^{\Delta\rho} \rho_t \Delta\rho_t + C_t^\tau \rho_t \tau_t \\ & + C_t^{J^0} \mathcal{J}_t^2 + C_t^{J^1} \mathbf{J}_t^2 + C_t^{J^2} \tilde{\mathcal{J}}_t^2 \\ & + C_t^{\nabla J} \rho_t \nabla \cdot \mathbf{J}_t, \end{aligned} \quad (2)$$

is expressed as a bilinear form of the time-even densities and their derivatives. The time-odd Skyrme EDF

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t^{\text{odd}}(\mathbf{r}) = & C_t^s [\rho_0] s_t^2 + C_t^{\Delta s} s_t \cdot \Delta s_t + C_t^T s_t \cdot \mathbf{T}_t + C_t^j j_t^2 \\ & + C_t^{\nabla j} s_t \cdot (\nabla \times \mathbf{j}_t) \\ & + C_t^{\nabla s} (\nabla \cdot s_t)^2 + C_t^F s_t \cdot \mathbf{F}_t \end{aligned} \quad (3)$$

contains all time-odd densities and their derivatives written in a bilinear form. The terms proportional to the coupling constants  $C_t^{\nabla s}$  and  $C_t^F$  occur for tensor force only and both are equal zero in the standard parametrizations of the Skyrme effective interactions.

Invariance under local gauge transformations of the Skyrme energy density (1) links pairs of time-even and time-odd terms in the energy functional provided that the coupling constants fulfill the constraints [32]:

$$\begin{aligned} C_t^\tau &= -C_t^j, \\ C_t^{J^0} &= -\frac{1}{3} C_t^T - \frac{2}{3} C_t^F, \\ C_t^{J^1} &= -\frac{1}{2} C_t^T + \frac{1}{4} C_t^F, \\ C_t^{J^2} &= -C_t^T - \frac{1}{2} C_t^F, \\ C_t^{\nabla J} &= C_t^{\nabla j}. \end{aligned} \quad (4)$$

The spin-orbit terms are proportional only to  $C_t^{\nabla J} = C_t^{\nabla j}$  in the standard Skyrme functionals. However, with the generalized spin-orbit interaction (with the full isovector freedom in the spin-orbit term [33])

$$\begin{aligned} C_0^{\nabla J} &= -b - \frac{1}{2} b', \\ C_1^{\nabla J} &= -\frac{1}{2} b', \end{aligned} \quad (5)$$

where  $b$  and  $b'$  are the new parameters.

Four zero-order coupling constants of the Skyrme EDF ( $C_t^\rho[\rho_0]$ ,  $C_t^s[\rho_0]$ ) can be expressed in terms of the Skyrme force parameters [34] ( $t_0$ ,  $x_0$ ,  $t_3$ ,  $x_3$ ,  $\alpha$ ) and the rest (24 second-order) coupling constants can be expressed in terms of the other seven Skyrme force parameters ( $t_1$ ,  $x_1$ ,  $t_2$ ,  $x_2$ ,  $W_0$ ,  $t_e$ ,  $t_o$ ), and therefore, the time-odd coupling constants in the Skyrme EDF are linear combination of the time-even ones [32]; see also Refs. [26,28,29] for further discussion.

The total energy in the Skyrme-HFB approach is

$$\begin{aligned}
E^{\text{tot}}[\bar{\rho}] &\equiv E^{\text{tot}}[\rho, \tau, \mathbb{J}; \mathbf{s}, \mathbf{T}, \mathbf{j}, \mathbf{F}; \bar{\rho}] \\
&= \int d^3\mathbf{r} [\mathcal{E}_{\text{kin}}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_{\text{Sk}}(\mathbf{r})] \\
&\quad + \int d^3\mathbf{r} [\mathcal{E}_{\text{Coul}}^{\text{dir}}(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_{\text{Coul}}^{\text{ex}}(\mathbf{r})] \\
&\quad + \int d^3\mathbf{r} \mathcal{E}_{\text{pair}}(\mathbf{r}) + E_{\text{corr}}, \quad (6)
\end{aligned}$$

where  $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \tau_0(\mathbf{r})(\hbar^2/2m)$  is a kinetic energy density of both protons and neutrons (for the neutron and proton masses being approximated by their average value),  $\mathcal{E}_{\text{Sk}}$  is the Skyrme EDF, Eq. (1), and  $\mathcal{E}_{\text{Coul}}^{\text{dir}}$ ,  $\mathcal{E}_{\text{Coul}}^{\text{ex}}$  are direct and exchange Coulomb energy densities, respectively.

The  $\mathcal{E}_{\text{pair}}$  is the isovector  $|T_z| = 1$  pairing energy density, corresponding to a density-dependent  $\delta$  interaction

$$\mathcal{E}_{\text{pair}} = \sum_{q=p,n} \frac{V_q^0}{4} \left[ 1 - V^1 \left( \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{\rho_{st}} \right)^\beta \right] \bar{\rho}_q^2(\mathbf{r}), \quad (7)$$

where  $\rho_{st}$  is the saturation density of nuclear matter that approaches the density inside the nucleus,  $\beta = 1$  (usually), and  $V^1 = 0, 1$ , or  $1/2$  for *volume*-, *surface*-, or *mix*-type pairing, and  $\bar{\rho}_q(\mathbf{r})$  is the pairing density for protons and neutrons [35]. The volume pairing interaction acts primarily inside the nuclear volume, while the surface pairing acts on the nuclear surface. A correction term,  $E_{\text{corr}}$ , includes corrections for spurious motions caused by symmetry violation in the mean-field approximation [36].

### B. The method of Lagrange multipliers

The constrained and/or cranked Skyrme-HF(B) approach is equivalent to minimization of the  $E^{\text{tot}}$  EDF, Eq. (6), with respect to the densities and currents. Using the method of Lagrange multipliers, we solve an equality-constrained problem (ECP) for the objective function  $E^{\text{tot}}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\bar{\rho}} E^{\text{tot}}[\bar{\rho}] \\ \text{subject to: } \langle \hat{N}_q \rangle = N_q, \quad (q = p, n), \\ \langle \hat{Q}_{\lambda\mu} \rangle = Q_{\lambda\mu}, \\ \langle \hat{J}_i \rangle = I_i, \quad (i = x, y, z), \end{array} \right. \quad (8)$$

where the constraints are defined by average values  $N_{p/n} = Z$  or  $N$  for the proton and neutron particle-number operator  $\hat{N}_{p/n}$ , the constrained values  $Q_{\lambda\mu}$  for the mass-multiple-moment operators  $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ , and the constrained value  $I_i$  for the angular momentum operator  $\hat{J}_i$  along the  $i$  axes.

To solve the above ECP, one can use the standard method of Lagrange multipliers, e.g., the quadratic penalty method or the augmented Lagrangian method. A comparison of both methods can be found in Ref. [37].

The augmented Lagrangian functional (or Routhian) associated with ECP is defined as

$$\begin{aligned}
E'_c[\bar{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\omega}] &= E^{\text{tot}}[\bar{\rho}] - \sum_{q=p,n} \lambda_q \langle \hat{N}_q \rangle \\
&\quad + \sum_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu} (\langle \hat{Q}_{\lambda\mu} \rangle - Q_{\lambda\mu})^2 \\
&\quad + \sum_{\lambda\mu} \Lambda_{\lambda\mu} (\langle \hat{Q}_{\lambda\mu} \rangle - Q_{\lambda\mu}) \\
&\quad - \sum_{i=x,y,z} \omega_i \langle \hat{J}_i \rangle, \quad (9)
\end{aligned}$$

where  $\lambda_p, \lambda_n, \Lambda_{\lambda\mu}$ , and  $\omega_i$  are the *Lagrange multipliers*, and  $C_{\lambda\mu} > 0$  are the *penalty parameters*. In the ALM, the Lagrange multipliers  $\Lambda_{\lambda\mu}$  are iterated according to

$$\Lambda_{\lambda\mu}^{k+1} = \Lambda_{\lambda\mu}^k + 2C_{\lambda\mu}^k (\langle \hat{Q}_{\lambda\mu} \rangle - Q_{\lambda\mu}); \quad (10)$$

see Ref. [37] and references cited therein.

In an adiabatic approximation, nuclear collective and intrinsic degrees of freedom can be decoupled and the collective motion of nucleus can be described in terms of a few collective variables describing shape evolution. Using a primal function of ECP,

$$E^{\text{tot}}(Q_{\lambda\mu}; \mathbf{I}) = \min_{\langle \hat{Q}_{\lambda\mu} \rangle = Q_{\lambda\mu}, \langle \hat{J}_i \rangle = I_i} E^{\text{tot}}[\bar{\rho}], \quad (11)$$

one can characterize these shapes by the mean values of external fields represented by the multipole moments and angular momentum operators.

### C. The Skyrme-HFB calculations

The Hartree-Fock wave function is the Slater determinant of single-particle orbitals. Thus the orbitals depend on the single-particle Hamiltonian  $\hat{h}$ , which depends on the densities and currents. The densities and currents in turn depend on the orbitals, so we must solve ECP, Eq. (8), self-consistently (by iteration until convergence).

The above ECP was solved using the augmented Lagrangian method with the symmetry-unrestricted code HFODD [38], which solves the Skyrme-HFB equations in the Cartesian deformed harmonic-oscillator (h.o.) basis. In the particle-hole channel, the Skyrme SkM\* force [39] was applied and a density-dependent *mixed* pairing [1,40] interaction with the parameters  $V_n^0 = -268.9 \text{ MeV fm}^3$  and  $V_p^0 = -332.5 \text{ MeV fm}^3$  in the particle-particle channel was used.

The code HFODD calculates parameters of the h.o. basis using geometrical consideration [41]. The relative values of the frequencies of the deformed h.o. in the three Cartesian directions are defined by the condition  $\omega_x^{\text{ho}} R_x = \omega_y^{\text{ho}} R_y = \omega_z^{\text{ho}} R_z$ , while the overall factor is given by  $(\omega_x^{\text{ho}} \omega_y^{\text{ho}} \omega_z^{\text{ho}})^{1/3} = \omega_0$ , where  $\hbar\omega_0 = f \times 41 \text{ MeV}/A^{1/3}$  is the spherical h.o. frequency and  $f = 1.2$  is a scaling factor [41]. In the above condition,  $R_x = R(\pi/2, 0)$ ,  $R_y = R(\pi/2, \pi/2)$ , and  $R_z = R(0, 0)$  are the lengths of principal axes of a sharp-edge reference body surface, defined by deformation parameters



$\alpha_{\lambda\mu}$  in terms of multipole expansion

$$R(\theta, \phi) = c(\alpha) \left[ 1 + \sum_{\lambda=0}^{\lambda_{\max}} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right], \quad (12)$$

where  $c(\alpha)$  is a function of  $\alpha_{\lambda\mu}$  such that the volume enclosed by the surface does not depend on  $\alpha$ . In the present study, we have used the axially deformed h.o. basis with the deformation parameter  $\alpha_{20}$  chosen to be equal to the mean-field value calculated in the code for a given value of  $\langle \hat{Q}_{20} \rangle$ , cf. Eq. (1.35) of Refs. [12,42]. For example, this procedure for the quadrupole moment constraint  $Q_{20} = -200$  b gives  $\alpha_{20} = -0.70$ , which corresponds to  $\hbar\omega_{\perp} = \hbar\omega_x^{\text{ho}} = \hbar\omega_y^{\text{ho}} = 5.96$  and  $\hbar\omega_z^{\text{ho}} = 11.03$ . We keep this deformed h.o. basis when we examine toroidal shapes with the large oblate deformation  $Q_{20} < -200$  b. The basis was composed of the 1140 lowest states taken from the  $N_0 = 26$  h.o. shells. With this basis size, our tests show that we can properly describe toroidal shapes up to  $Q_{20} \gtrsim -600$  b deformation.

Our objective is to locate local toroidal figures of equilibrium, if any, in the multidimensional search space of  $\{A, Q_{20}, I\}$ . We first use the quadrupole moment  $Q_{20}$  constrained Skyrme-HFB approach to search for the nuclear density distributions with toroidal shapes. Next, using as starting configurations the toroidal solutions, we apply the constrained and cranked around the symmetry  $z$ -axis Skyrme-HF approach to map out the energy landscape for axially symmetric toroidal shapes under  $Q_{20}$  and  $I = I_z$  constraints. If the states with  $I = I_z$  as a function of  $Q_{20}$  deformation reveal a local energy minimum, then the quadrupole constraint is removed at that minimum and symmetry-unrestricted free convergence is tested to ensure that the noncollectively rotating toroid nucleus is indeed a figure of equilibrium. It is worth noting that in the unconstrained and symmetry-unrestricted cranked Skyrme-HF calculations we do not impose the axial and reflection symmetries to the toroidal system to ensure its stability with respect to these modes.

#### D. Pairing correlations

As mentioned above, in the present calculations we use the constrained Skyrme-HFB approach only during the first stage of our method, when we try to establish the region of  $Q_{20}$  deformation with the toroidal solutions. In the following calculations, we apply the cranked Skyrme-HF model (neglecting the pairing correlations) trying to locate the THSIs.

A quantal system such as axially symmetric toroid cannot rotate around a symmetry axis. In the cranking approach, the Lagrangian multiplier  $\omega_z$  allows one to solve the ECP (8) with a supplementary condition on an angular momentum  $\langle \hat{J}_z \rangle = I_z$ , where the  $z$  axis is chosen as the symmetry axis. The total angular momentum  $I = I_z$ , in a case when  $\omega_x = \omega_y = 0$ , is built up by selecting nucleonic orbitals that are most favorable in creating the states with required angular momentum and with the lowest energy, the so-called optimal configurations (cf. Refs. [10–15]). This noncollective rotation around the symmetry axis is permissible quantum mechanically only by particle-hole excitations with respect to the uncranked state, leading to aligned single-particle angular momenta along the

symmetry axis

$$\begin{aligned} I_z = \langle \hat{J}_z \rangle &= \sum_{i=1}^A \langle \hat{j}_z \rangle_i = \sum_i^A (\Omega_z)_i \\ &= \sum_{i \text{ exc}} (\Omega_z^{\text{part}} - \Omega_z^{\text{hole}})_i, \end{aligned} \quad (13)$$

where  $\Omega_z = \Lambda_z \pm 1/2$  denotes the projection of the single-particle angular momentum onto the symmetry  $z$  axis and in the second equation the sum runs over the particle-hole excitations.

The Cooper pairs in a nucleus are composed of the pairs of nucleons in the time-reversal conjugate orbitals with  $\Omega_z = \pm\Omega$ . The pairing correlation diminishes with each particle-hole excitation, which successively breaks down the Cooper pairs. When the seniority of a configuration increases, the blocking effect [12,15] is effective in reducing the pairing correlations in the toroidal high-spin states. We neglect the pairing in the present study of the THSIs. It would certainly be interesting to examine the effect of weak pairing correlations on toroidal high-spin isomers, but that will be left for a future study.

### III. RESULTS AND DISCUSSIONS

#### A. Toroidal system of $^{304}\text{120}_{184}$ without spin

Using the above self-consistent Skyrme-HFB mean-field theory, we study first the nucleus  $^{304}\text{120}_{184}$  under the constraint of a fixed  $Q_{20}$  without spin. We obtain the total energy of the system with a toroidal density as a function of the constrained  $Q_{20}$ , as shown in Fig. 2. It indicates that even though  $^{304}\text{120}_{184}$  without spin may have a toroidal density for  $Q_{20} \leq -158$  b, its total energy curve as a function of  $Q_{20}$  lies on a slope. This implies that the toroidal system of  $^{304}\text{120}_{184}$  without spin is unstable against the tendency to return to a sphere-like geometry; cf. Ref. [25]. For future exploration of possible superheavy toroidal nuclear system without spin, it will be necessary to go to systems with a greater charge numbers with  $Z \geq 122$  as in Ref. [7] or alternatively to find single-particle “shells” in proton and neutron numbers in regions of sparse single-particle level densities at the top of the Fermi surface, for which the shell effects may provide a sufficiently shell correction [43] to stabilize a toroidal nuclear system.

To study the shell effects in superheavy toroidal nuclear system without spin, we examine the single-particle states of  $^{304}\text{120}_{184}$  with a toroidal density as a function of the quadrupole moment  $Q_{20}$  in self-consistent Skyrme-HFB calculations. The self-consistent single-particle potential will also assume a toroidal shape. The proton and neutron single-particle energy levels (in the canonical basis) for  $^{304}\text{120}_{184}$  are shown in Figs. 3 and 4, respectively. Each single-particle state is labeled by the Nilsson quantum numbers  $[N, n_z, \Lambda]\Omega$  of the dominant component and is twofold degenerate, with  $\Omega_z = \pm\Omega$ . Solid and dashed curves are used to distinguish positive- and negative-parity levels, respectively. We find from Figs. 3 and 4 that the densities of neutron and proton single-particle states are far from uniform. There are regions of sparse single-particle level densities which can be identified as the shells associated with enhanced stability [43]. For brevity of

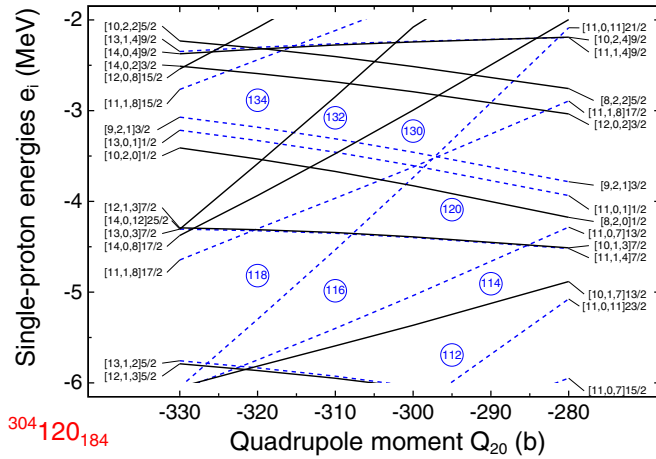


FIG. 3. Proton single-particle levels in the canonical basis for  $^{304}\text{120}_{184}$  in the toroidal configuration as a function of the constraining quadrupole moment  $Q_{20}$ , obtained in the Skyrme-HFB calculations. The levels with positive parity are drawn with solid (black) lines, while those with negative parity are drawn with gray dashed (blue color) lines. The circled numbers denote the occupation numbers at regions of spare single-particle energy level density (“shells”).

notation, we shall call these shells associated with a toroidal nuclear density and potential the *toroidal* shells.

For the nucleus  $^{304}\text{120}_{184}$  in the toroidal configuration at  $Q_{20} \approx -300$  b, Figs. 3 and 4 show that the proton Fermi surface for  $Z = 120$  resides in the low single-particle level density region of a proton shell at  $Z = 120$ , but the neutron Fermi surface for  $N = 184$  resides in a region of high single-particle level density. The stabilizing effects for the *toroidal* proton shell at  $Z = 120$  with a negative proton shell correction is counterbalanced by the destabilizing effect for  $N = 184$  with a positive neutron shell correction, in the region of deformation  $Q_{20} \approx -300$  b. Furthermore, the bulk Coulomb interaction in  $^{304}\text{120}_{184}$  nucleus is just below the threshold to open up a hole for a toroidal system, as it is for a nucleus with  $Z \geq 122$  [7]. As a consequence, in the Skyrme-HFB approach,

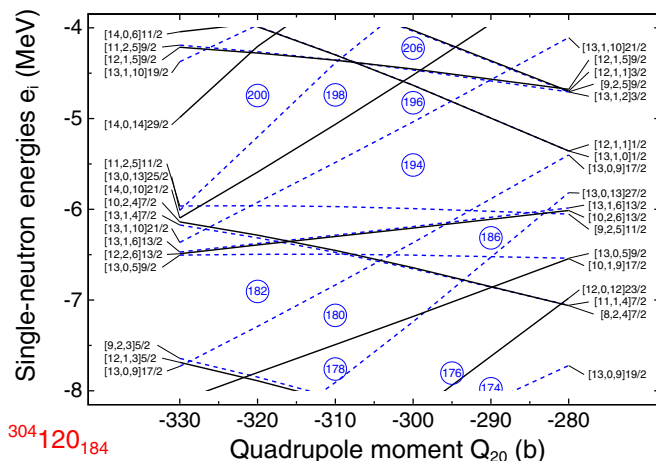


FIG. 4. The same as in Fig. 3, but for the neutron single-particle levels.

which takes into account both the bulk properties and the shell effects, the combined total energy of  $^{304}\text{120}_{184}$  without spin in the toroidal configuration does not possess an energy minimum as a function of  $Q_{20}$ .

Even though Figs. 3 and 4 pertain to the self-consistent single-particle states for  $^{304}\text{120}_{184}$ , we expect that as the mean-field potential varies only slightly as a function of the atomic number and the neutrons number, and as it depends more sensitively on the spatial shape of the nuclear density distribution, the single-particle state diagrams in Figs. 3 and 4 can therefore be approximately applied as single-particle states for the deformations  $Q_{20}$  in the toroidal configuration in an extended region around  $^{304}\text{120}_{184}$ . One can therefore read out various *toroidal* shells for protons and neutrons at various deformations  $Q_{20}$  in Figs. 3 and 4. One finds proton shells at  $Z = 116, 118, 120, 132,$  and  $134$ , and neutron shells at  $N = 180, 182, 186, 194,$  and  $198$ . In our future work, we will exploit the property of the extra stability of superheavy nuclei for which the *toroidal* proton and neutron shells are located at the same deformation.

### B. Construction of toroidal configurations of $^{304}\text{120}_{184}$ with high spin

As the toroidal configurations of  $^{304}\text{120}_{184}$  nucleus are unstable without spin, we like to examine here whether toroidal  $^{304}\text{120}_{184}$  may be stabilized when it possesses an angular momentum aligned along the symmetry axis such that  $I = I_z$ . Following Bohr and Mottelson [11], we can construct a nucleus with an aligned angular momentum  $I_z$  by particle-hole excitations. Specifically, referring to the single-particle states in Figs. 3 and 4 for toroidal system of  $^{304}\text{120}_{184}$  at  $Q_{20} = -300$  b without spin, we can make a hole at a state with angular momentum component  $-\lvert\Omega_z^{\text{hole}}\rvert$  and place it at a particle state with angular momentum  $\Omega_z^{\text{part}}$ . The particle-hole pair will generate an aligned angular momentum  $I_z$  of magnitude  $\Omega_z^{\text{part}} + \lvert\Omega_z^{\text{hole}}\rvert$ ; see Eq. (13). By making many such particle-hole excitations, a nucleus with a very high spin,  $I = I_z$ , can be constructed, especially when the number of particle-hole excitations and the magnitudes  $\lvert\Omega_z\rvert$  of these participating particle and hole states are large. Because  $I_z$  depends on  $\Omega_z$  and the number of particle-hole excitations, it assumes quantized nontrivial values that can only be obtained from a detailed examination of the structure of the single-particle state energy diagram of the nucleus of interest.

There are two equivalent ways to construct a high-spin state with the spin aligned along the symmetry axis: (i) the method of employing the tilted Fermi surfaces and (ii) the plots of the single-particle Routhians  $e'_i = e_i - \hbar\omega \cdot (\Omega_z)_i$  as a function of  $\hbar\omega \equiv \hbar\omega_z$ .

The single-particle energy level diagram at a fixed quadrupole moment, say  $Q_2 = -300$  b, can be expanded out to include the additional dependence of  $\Omega_z$  as the horizontal axis, as shown in Figs. 5 and 6. The Fermi surface for this case without spin shows up as a horizontal line and all levels below it are occupied; see an inset in Fig. 5. A high-spin state can be constructed by tilting the Fermi level in the expanded single-particle diagram; cf. Ref. [13]. The degree of tilt can be specified in the Skyrme-HF calculations by

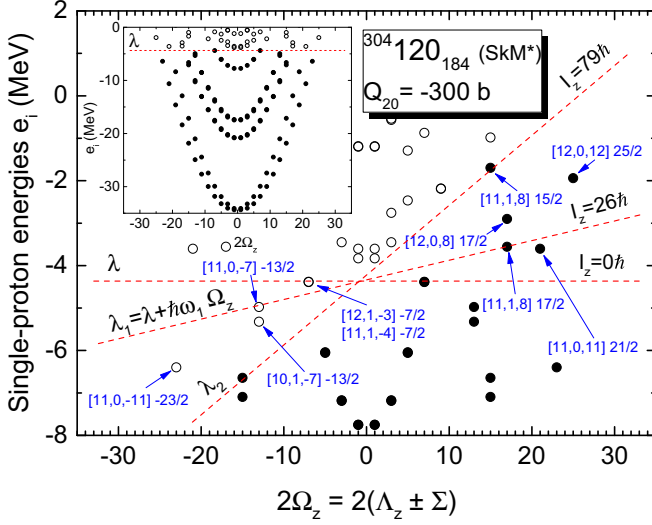


FIG. 5. The proton single-particle energy levels of  $^{304}120_{184}$  in the toroidal configuration at  $Q_{20} = -300$  b, as a function of  $2\Omega_z$ . The thin gray dashed (red color) lines give the tilted proton Fermi surfaces which lead to the proton spin value  $I_z = 26$  for  $\hbar\omega_1 \approx 0.1$  MeV and  $I_z = 79$  at  $\hbar\omega_2 \approx 0.28$  MeV. In the case of  $I_z = 79$ , the occupied states are shown as solid circular points, and the unoccupied states as open circles.

the Lagrange multiplier  $\hbar\omega$  which describes the constraint  $I_z = \langle \hat{J}_z \rangle = \sum_{i=1}^A (\Omega_z)_i$ , with each  $I = I_z$  spanning a small region of  $\hbar\omega$  [12].

We collect in Table I the particle-hole excitation configurations leading to the states of  $^{304}120_{184}$  with  $I_z = 81$  and 208. They are particle-hole excitations relative to the Skyrme-HFB states without spin, as labeled by the quantum

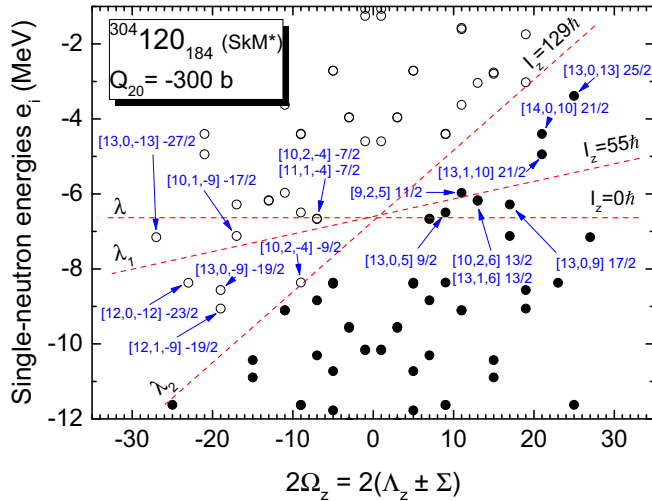


FIG. 6. The neutron single-particle energy levels of  $^{304}120_{184}$  in the toroidal configuration at  $Q_{20} = -300$  b, as a function of  $2\Omega_z$ . The thin dashed lines give the tilted neutron Fermi surfaces which lead to the neutron spin value  $I_z = 55$  for  $\hbar\omega_1 \approx 0.1$  MeV, and  $I_z = 129$  for  $\hbar\omega_2 \approx 0.28$  MeV. In the case of  $I_z = 129$ , the occupied states are shown as solid circular points, and the unoccupied states as open circles.

TABLE I. The particle-hole excitation configurations leading to the states of  $^{304}120_{184}$  with  $I_z = I_z(\text{proton}) + I_z(\text{neutron}) = 26 + 55 = 81$  and  $I_z = 79 + 129 = 208$ .

	Hole states	Particle states
$I_z(\text{proton}) = 26$	[11,1,-4] -7/2	[11,0,11] 21/2
	[12,1,-3] -7/2	[11,1,8] 17/2
	[11,0,-7] -13/2	[12,0,8] 17/2
$I_z(\text{proton}) = 79$	[10,1,-7] -13/2	[12,0,12] 25/2
	[11,0,-11] -23/2	[11,1,8] 15/2
	[10,2,-4] -7/2	[13,0,5] 9/2
$I_z(\text{neutron}) = 55$	[11,1,-4] -7/2	[13,0,9] 17/2
	[10,1,-9] -17/2	[13,1,6] 13/2
	[13,0,-13] -27/2	[10,2,6] 13/2
	[12,0,-12] -23/2	[9,2,5] 11/2
	[13,0,-9] -19/2	[13,1,10] 21/2
$I_z(\text{neutron}) = 129$	[12,1,-9] -19/2	[14,0,10] 21/2
	[10,2,-4] -9/2	[13,0,13] 25/2

numbers  $[N, n_z, \Lambda_z]\Omega_z$  for the optimal toroidal configurations of  $^{304}120_{184}$  at  $Q_{20} = -300$  b in Figs. 5 and 6.

In addition to the tilted Fermi surface method, there is another equivalent method using the diagrams of single-particle Routhians vs  $\hbar\omega$ . Upon using a Lagrange multiplier  $\hbar\omega$  to describe the constraint of an aligned angular momentum  $I = I_z$  along the symmetry  $z$  axis, the constrained single-particle Hamiltonian becomes  $\hat{h}' = \hat{h} - \hbar\omega \hat{j}_z$ , where  $\hat{j}_z$  is the  $z$  component of the single-particle angular momentum operator along the symmetry axis with eigenvalue  $\Omega_z$ . The single-particle Routhian  $e'_i$  is the eigenvalues of  $\hat{h}'$  for the single-particle state  $i$ . A nucleus in the state with a total aligned angular momentum  $I_z$  along the symmetry axis can be constructed by populating states below the Fermi level in the single-particle Routhian level diagram. As the Routhian  $e'_i(\hbar\omega)$  for the state  $\Omega_z$  is shifted from the corresponding single-particle energy without spin  $e'_i|_{\hbar\omega=0}$  by a term proportional to  $-\hbar\omega(\Omega_z)_i$ , different Lagrange multipliers  $\hbar\omega$  will result in different ordering of the single-particle Routhians and different  $I_z$ , for a given occupation number  $Z$  or  $N$ . In Figs. 7 and 8, we give the proton and neutron single-particle Routhians as a function of the constraining Lagrange multiplier  $\hbar\omega$ , for a toroidal system of  $^{304}120_{184}$  with  $Q_{20} = -300$  b, obtained in self-consistent cranked Skyrme-HF calculations.

We can use single-particle Routhians in Figs. 7 and 8 to determine  $I_z$  as a function of the nucleon occupation number  $N_{p/n}$  and  $\hbar\omega$ . For a given  $N_{p/n}$  and  $\hbar\omega$ , the aligned  $I_z$  angular momentum can be obtained by summing  $\Omega_z$  over all states below the Fermi surface, cf. Eq. (13). For the occupation numbers of  $Z = 120$  and  $N = 184$  in Figs. 7 and 8, there are shells, regions of low Routhian energy level density, for different  $I_z$  configurations at different values of  $\hbar\omega$ . They represent configurations with relative enhanced stability [5,43]. In the corresponding Skyrme-HF calculation, they may lead to local energy minima for various allowed angular momenta.

Figure 7 shows that for the proton occupation number  $Z = 120$ , possible shells are located at  $I_z(\text{proton}) = 0, 26, 41, 60, \text{ and } 79$  at different values of  $\hbar\omega$ . Figure 8 shows that for

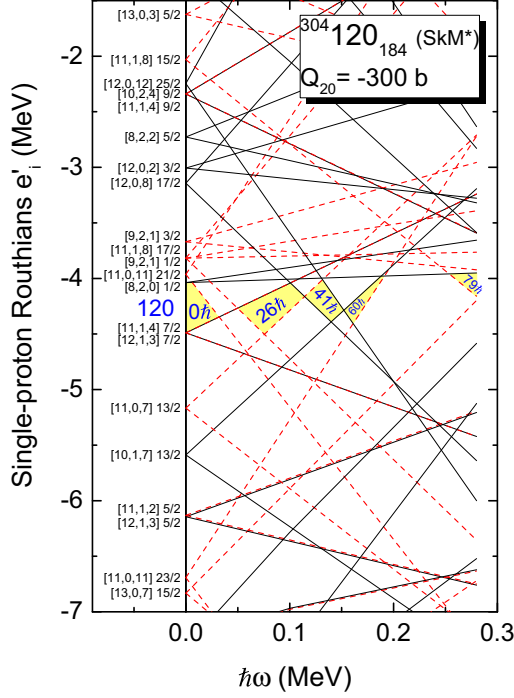


FIG. 7. Proton single-particle Routhians of  $^{304}120_{184}$  in the toroidal configuration with  $Q_{20} = -300$  b, as a function of the cranking frequency  $\hbar\omega$ . The states are labeled by the Nilsson quantum numbers  $[N, n_z, \Lambda]\Omega$ . Solid (black) and dark gray dashed (red color) curves are used to distinguish even and odd principal quantum number states, respectively. The aligned angular momenta  $I_z$  for  $Z = 120$  protons are shown at various  $\hbar\omega$  locations.

the neutron occupation number  $N = 184$ , possible shells are  $I_z(\text{neutron}) = 0, 20, 55, 92, 112$ , and  $129$  at various values of  $\hbar\omega$ . For a nucleus to have a local minimum with a total aligned angular momentum  $I_z = I_z(\text{proton}) + I_z(\text{neutron})$ , the  $\hbar\omega$  locations of the proton and neutron shells need to be close to each other. We find that by combining the proton and neutron spins, the total spin of the system can be  $I_z = 81$  at  $\hbar\omega \approx 0.1$  MeV and  $I_z = 208$  at  $\hbar\omega \approx 0.28$  MeV for  $Q_{20} = -300$  b.

Referring to the proton single-particle Routhians diagram at  $\hbar\omega \approx 0.1$  MeV in Fig. 7, the proton spin of  $I_z(\text{proton}) = 26$  for the 2p-2h excitation arises by emptying the  $[11, 1, -4]-7/2$  and  $[12, 1, -3]-7/2$  states and occupying  $[11, 0, 11]21/2$  and  $[11, 1, 8]17/2$  states. This result in the alignment of  $I_z = 7$  from the holes,  $I_z = 19$  from particles, and  $I_z(\text{proton}) = 7 + 19 = 26$ ; cf. Eq. (13). In Fig. 8, the neutron spin of  $I_z(\text{neutron}) = 55$  arises by emptying  $[10, 2, -4]-7/2$ ,  $[11, 1, -4]-7/2$ ,  $[10, 1, -9]-17/2$ , and  $[13, 0, -13]-27/2$  states, and populating  $[13, 0, 5]9/2$ ,  $[13, 0, 9]17/2$ ,  $[13, 1, 6]13/2$ , and  $[10, 2, 6]13/2$  states. This results in  $I_z(\text{neutron}) = 29 + 26 = 55$  for which the neutron holes provide 29 units and the neutron particles 26. The total spin of the toroidal system of  $^{304}120_{184}$  at  $\hbar\omega \approx 0.1$  MeV is  $I_z = I_z(\text{proton}) + I_z(\text{neutron}) = 26 + 55 = 81$ .

For the nuclear total spin of  $I_z = 208$  at  $\hbar\omega \approx 0.28$  MeV, one observes from Fig. 7 that the proton spin of  $I_z(\text{proton}) = 79$  from the 5p-5h excitation arises by emptying the proton states  $[11, 1, -4]-7/2$ ,  $[12, 1, -3]-7/2$ ,  $[11, 0, -7]-13/2$ ,  $[10, 1, -7]-13/2$ , and  $[11, 0, -11]-23/2$ ,

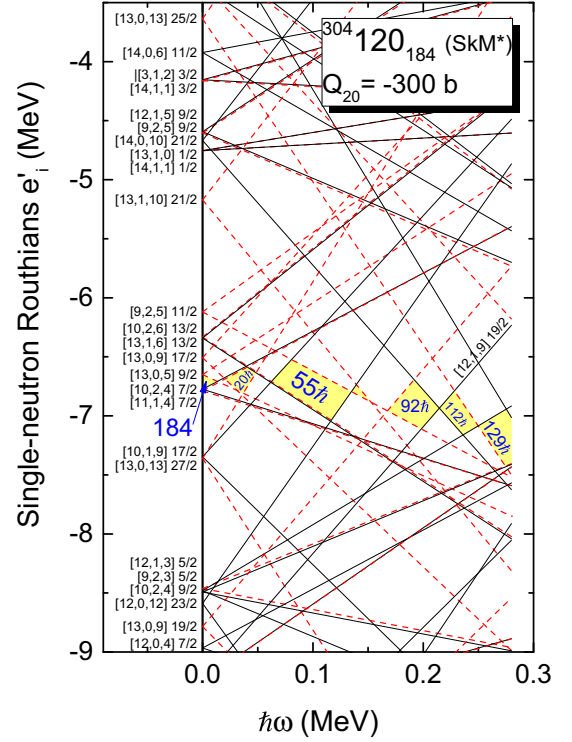


FIG. 8. The same as in Fig. 7, but for the neutron single-particle Routhians of  $^{304}120_{184}$  in the toroidal configuration. The aligned angular momenta  $I_z$  for  $N = 184$  neutrons are shown at various  $\hbar\omega$  locations.

and occupying proton states  $[11, 0, 11]21/2$ ,  $[11, 1, 8]17/2$ ,  $[12, 0, 8]17/2$ ,  $[12, 0, 12]25/2$ , and  $[11, 1, 8]15/2$ . This result in the alignment of  $I_z = (63/2)$  from the holes, and  $I_z = (95/2)$  from particles. The proton 5p-5h excitation gives  $I_z(\text{proton}) = (63/2) + (95/2) = 79$ . In Fig. 8, the neutron spin of  $I_z(\text{neutron}) = 129$  arises from the 8p-8h excitation by emptying  $[10, 2, -4]-7/2$ ,  $[11, 1, -4]-7/2$ ,  $[10, 1, -9]-17/2$ ,  $[13, 0, -13]-27/2$ ,  $[12, 0, -12]-23/2$ ,  $[13, 0, -9]-19/2$ ,  $[12, 1, -9]-19/2$ ,  $[10, 2, -4]-9/2$  states, and populating  $[13, 0, 5]9/2$ ,  $[13, 0, 9]17/2$ ,  $[13, 1, 6]13/2$ ,  $[10, 2, 6]13/2$ ,  $[9, 2, 5]11/2$ ,  $[13, 1, 10]21/2$ ,  $[14, 0, 10]21/2$ , and  $[13, 0, 13]25/2$  states. The neutron 8p-8h excitation gives  $I_z(\text{neutron}) = 64 + 65 = 129$ .

The self-consistent single-particle Hamiltonian  $\hat{h}'$  under an aligned angular momentum constraint depends on the Hamiltonian operator  $\hat{h}$  that is a self-consistent function of the nuclear density and nuclear current. The latter nuclear current depends on the aligned angular momenta  $I_z$ , which depends in turn on the Lagrange multiplier  $\hbar\omega$ . Therefore, the single-particle Routhian,  $e'_i$ , which is the eigenvalue of  $\hat{h}'$ , can acquire an additional self-consistency dependence on  $\hbar\omega$ , in addition to the explicit dependency on  $-\hbar\omega\Omega_z$ . We find that the self-consistent Skyrme-HF single-particle Routhians  $e'_{Nn_z\Lambda_z\Omega_z}(\hbar\omega)$  in Figs. 7 and 8 can be approximately represented by

$$e'_{Nn_z\Lambda_z\Omega_z}(\hbar\omega) \approx e'_{Nn_z\Lambda_z\Omega_z}|_{\hbar\omega=0} + a\hbar\omega - \hbar\omega\Omega_z, \quad (14)$$



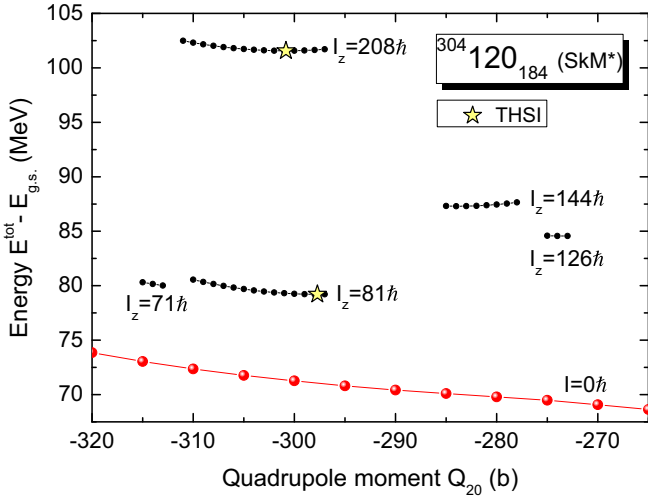


FIG. 9. The deformation energies of  $^{304}_{120}_{184}$  in the toroidal configuration as a function of the quadrupole moment  $Q_{20}$  for  $I_z = 0, 71, 81, 126, 144,$  and  $208$ . The locations of the toroidal high-spin-isomers (THSIs) for  $I_z = 81$  and  $208$  are indicated by star symbols. All deformation energies are measured relative to the energy of the spherical ground state.

where the additional term  $a\hbar\omega$  with a parameter  $a \approx 0.5$  arises from the effect of self-consistency of the single-particle Routhian Hamiltonian  $\hat{h}'$ . It affects mostly those states with a small value of  $\Omega_z$  and is unimportant for states with large  $\Omega_z$ . In the present case for proton occupation number at  $Z = 120$ , an  $\Omega_z = 1/2$  state occurs by chance at the top to the Fermi surface, as in Fig. 7.

### C. The toroidal high-spin isomers in $^{304}_{120}_{184}$

The tilted Fermi surface method or the Routhian single-particle method in the last subsection deals only with the construction of a state with an aligned angular momentum along the toroidal symmetry axis. The question of the stability for such a nucleus needs to be examined by studying the dependence of the total energy as a function of  $Q_{20}$  and  $I_z$ . The investigation can be carried out by extending the Skyrme-HFB calculations further to include both the quadrupole moment  $Q_{20}$  constraint and the angular momentum constraint,  $I = I_z$  using a Lagrange multiplier  $\hbar\omega$  as the cranking frequency. As stated in Sec. II D, we have carried out the cranking calculations without the pairing interaction, using the cranked Skyrme-HF approach.

Applying an additional constraint of an angular momentum  $I = I_z$  about the symmetry  $z$  axis in the cranked Skyrme-HF calculations, we search for the energy minima of  $^{304}_{120}_{184}$  in the toroidal configuration as a function of the deformation  $Q_{20}$  and aligned angular momentum  $I_z$ . If a local energy minimum with  $I = I_z$  is found, we perform at this point the cranked symmetry-unrestricted and deformation unconstrained Skyrme-HF calculations to locate a stable THSI state in free convergence.

The results of such calculations for  $^{304}_{120}_{184}$  are presented in Fig. 9, where we plot the deformation energy (relative to the

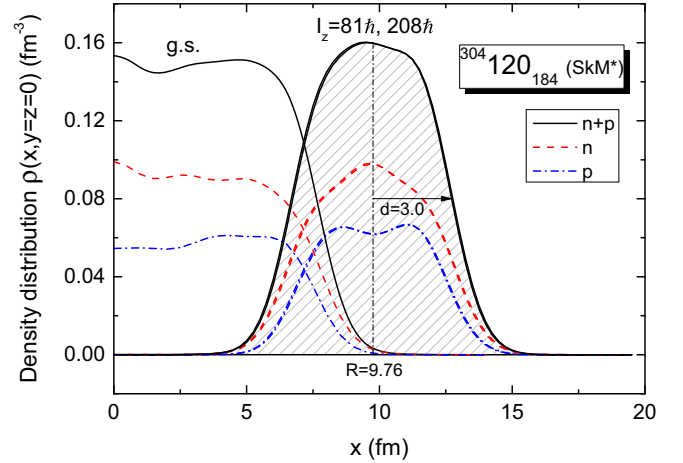


FIG. 10. Neutron, proton, and total density profiles of the THSIs  $^{304}_{120}_{184}$  ( $I = 81$  and  $208$ ) as a function of  $x$  for a cut in  $y = 0$  and  $z = 0$ .

spherical ground state energy) of the high-spin toroidal states as a function of the constrained  $Q_{20}$ , for different quantized  $I_z$ . For each point  $(Q_{20}, I_z)$  on an  $I_z$  curve, it was necessary to adjust  $\hbar\omega$  to ensure that the total aligned angular momentum of all nucleons in the occupied states gives the quantized  $I_z$  value of interest.

From the energy surface of  $^{304}_{120}_{184}$  ( $I_z = 81$ ) in the toroidal configuration in Fig. 9, we find that when we vary the constrained  $Q_{20}$  with  $\hbar\omega \approx 0.1$  MeV, the deformation energy of the nucleus in the toroidal configuration as a function of  $Q_{20}$  has a minimum. Similarly, from the energy surface of  $^{304}_{120}_{184}$  ( $I_z = 208$ ), we find that when we vary the constrained  $Q_{20}$  with  $\hbar\omega \approx 0.28$  MeV, the deformation energy of the nucleus as a function of  $Q_{20}$  has a minimum. Thus, we have theoretically located two THSI states of  $^{304}_{120}_{184}$  with an angular momentum  $I = I_z = 81$  (proton  $2p-2h$ , neutron  $4p-4h$  excitation) and  $I = I_z = 208$  (proton  $5p-5h$ , neutron  $8p-8h$ ) at  $Q_{20} = -297.7$  b and  $Q_{20} = -300.8$  b with energies  $79.2$  and  $101.6$  MeV above the spherical ground-state energy, respectively. In Fig. 9, deformation energies for  $I = I_z = 126$  at  $Q_{20} \sim -275$  b and  $I = I_z = 144$  at  $Q_{20} \sim -280$  b are also exhibited. As there are no energy minima for these  $I_z$  states, there are no toroidal high-spin isomers with these aligned angular momenta.

After the THSIs  $^{304}_{120}_{184}$  with  $I = I_z = (81$  and  $208)$  have been located, we can examine their properties. Their density profiles as a cut in the plane of positive  $x$  is shown in Fig. 10 and as density contours in Fig. 11. The corresponding density profile for the superheavy nucleus in the spherical ground state is also exhibited in Fig. 10. It is interesting to note that the density profiles of the two THSIs with  $I_z = 81$  and  $I_z = 208$  are nearly the same, as shown indistinguishably in Fig. 10.

One observes in Fig. 10 that the maximum magnitude of the total densities in the  $^{304}_{120}_{184}$  THSIs with  $I = 81$  and  $208$  are about the same as those of the nucleus with a spherical shape. This is in contrast to the case of THSI nuclei in the light mass region where the maximum density of the THSI nuclei are only about half of the equilibrium nuclear matter density

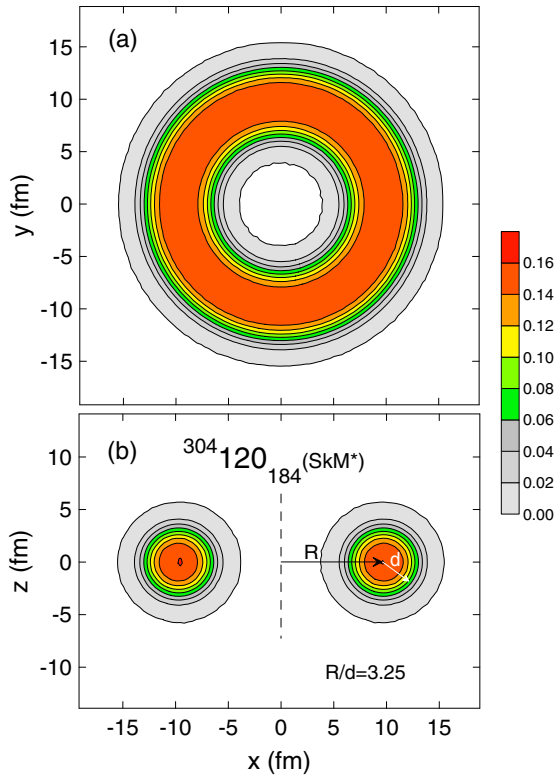


FIG. 11. Contours of the total nuclear densities of  $^{304}\text{120}_{184}$  ( $I_z = 81$ ) in cuts  $x - y$  (a) and  $x - z$  (b).

of the nuclei in the ground state [18]. This arises because the occurrence of THSI nuclei in the light-mass region is dominated by the nuclear shell effect and the occupation of the lowest displaced harmonic oscillator states with  $n_\rho = n_z = 0$ . For the superheavy nuclei region, the Coulomb repulsion dominates and there are many states involved. Hence, the nuclear density is not greatly affected by the change from a spherical shape to a toroidal shape.

The density contours in Figs. 10 and 11 indicate a well-developed hole in the density of the nucleus. One can characterize the THSI  $^{304}\text{120}_{184}$  ( $I_z = 81$ ) by the average geometry parameters of

$$\rho_{\max} = 0.161/\text{fm}^3, R = 9.76 \text{ fm}, d = 3.00 \text{ fm}, \quad (15)$$

which yields  $R/d = 3.25$ . They have the maximum density close to the nuclear matter density,  $0.16 \text{ fm}^{-3}$ . The density profile for the THSI at  $I_z = 208$  is very similar and will not be exhibited.

#### IV. SUMMARY

Because of the strong Coulomb repulsion, there is a tendency for the shape of a nucleus with excess charge to bifurcate from a spheroidal into a toroidal shape in the superheavy region. We examine the case of  $^{304}\text{120}_{184}$ . Without spin, the Coulomb repulsion and shell effects are not sufficient to allow an equilibrium toroidal shape for  $^{304}\text{120}_{184}$ . Toroidal minima without spin are possible for superheavy nuclei with greater atomic numbers, as reported earlier [7].

The spin of a nucleus with an angular momentum about the toroidal symmetry axis has a stabilizing tendency. We have theoretically located two toroidal high-spin isomeric states of  $^{304}\text{120}_{184}$  with an angular momentum  $I = I_z = 81$  (proton 2p-2h, neutron 4p-4h excitation) and  $I = I_z = 208$  (proton 5p-5h, neutron 8p-8h) at  $Q_{20} = -297.7 \text{ b}$  and  $Q_{20} = -300.8 \text{ b}$  with energies 79.2 and 101.6 MeV above the spherical ground-state energy, respectively. The nuclear density distribution of the THSIs  $^{304}\text{120}_{184}$  ( $I_z = 81$  and 208) have the maximum density close to the nuclear matter density,  $0.16 \text{ fm}^{-3}$ , and a toroidal major to minor radius aspect ratio  $R/d = 3.25$  with  $R = 9.76 \text{ fm}$ .

Our search to locate the THSIs in  $^{304}\text{120}_{184}$  was focused on the region  $-320 \text{ b} < Q_{20} < -265 \text{ b}$  of deformation and it is hard to predict whether two found toroidal isomers are yrast states. Figure 9 shows that the  $^{304}\text{120}_{184}$  ( $I_z = 81$ ) THSI may appear to lie on the yrast line as there is no energy minimum with a lower spin lying below this state. Whether the higher  $^{304}\text{120}_{184}$  ( $I_z = 208$ ) THSI state is an yrast state is not known as it depends on the energies of the band of collective states built on the toroidal intrinsic high-spin state of  $^{304}\text{120}_{184}$  ( $I_z = 81$ ), by rotating about an axis perpendicular to the toroidal symmetry axis. A further investigation is required to study this question.

The results of the single-particle state diagrams and Routhian diagrams obtained in the present calculations as a function of deformation  $Q_{20}$  and the Lagrange multiplier  $\hbar\omega$  indicate that there are shells in the toroidal shape and the spin degrees of freedom. Extra stability can be maintained at appropriate occupation numbers, deformations, and spin. Hence, there may be many toroidal superheavy nuclei as a function of  $(Z, N, Q_{20}, \text{ and } I_z)$  that need to be uncovered. The region of toroidal superheavy nuclei may provide an interesting area for further explorations. Future investigations on ways to produce and to detect these states with toroidal densities will be of great interest.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The research was supported in part by the Division of Nuclear Physics, U.S. Department of Energy under Contract No. DE-AC05-00OR22725 and the National Science Centre (NCN), Poland, Project No. 2016/21/B/ST2/01227.

[1] A. Staszczak, A. Baran, J. Dobaczewski, and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **80**, 014309 (2009).

[2] M. Warda, A. Staszczak, and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **86**, 024601 (2012).

- [3] A. Staszczak, A. Baran, and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **87**, 024320 (2013).
- [4] See a reference to J. A. Wheeler's toroidal nucleus in G. Gamow, *Biography of Physics* (Harper and Brothers, New York, 1961), p. 297.
- [5] C. Y. Wong, *Ann. Phys.* **77**, 279 (1973).
- [6] C. Y. Wong, *Phys. Rev. C* **17**, 331 (1978).
- [7] A. Staszczak and C. Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B* **40**, 753 (2008), and references cited therein.
- [8] J. Eggers, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 865 (1997).
- [9] E. Páram and A. Fernández-Nieves, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 234501 (2009).
- [10] G. Andersson, S. E. Larsson, G. Leander, P. Möller, S. G. Nilsson, I. Ragnarsson, S. Åberg, R. Bengtsson, J. Dudek, B. Nerlo-Pomorska, K. Pomorski, and Z. Szymański, *Nucl. Phys. A* **268**, 205 (1976).
- [11] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nucl. Phys. A* **354**, 303c (1981).
- [12] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980).
- [13] M. J. A. de Voigt, J. Dudek, and Z. Szymański, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 949 (1983).
- [14] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure* (Cambridge University Press, New York, 1995).
- [15] A. V. Afanasjev, D. B. Fossan, G. J. Lane, and I. Ragnarsson, *Phys. Rep.* **322**, 1 (1999).
- [16] T. Ichikawa, J. A. Maruhn, N. Itagaki, K. Matsuyanagi, P.-G. Reinhard, and S. Ohkubo, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 232503 (2012).
- [17] T. Ichikawa, K. Matsuyanagi, J. A. Maruhn, and N. Itagaki, *Phys. Rev. C* **89**, 011305(R) (2014).
- [18] A. Staszczak and C. Y. Wong, *Phys. Lett. B* **738**, 401 (2014).
- [19] T. Ichikawa, K. Matsuyanagi, J. A. Maruhn, and N. Itagaki, *Phys. Rev. C* **90**, 034314 (2014).
- [20] A. Staszczak and C. Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B* **46**, 675 (2015).
- [21] A. Staszczak and C. Y. Wong, *Phys. Scr.* **90**, 114006 (2015).
- [22] A. Staszczak and C. Y. Wong, *EPJ Web Conf.* **117**, 04008 (2016).
- [23] W. Zhang, H.-Z. Liang, S.-Q. Zhang, and J. Meng, *Chin. Phys. Lett.* **27**, 102103 (2010).
- [24] A. Baran, M. Kowal, P.-G. Reinhard, L. M. Robledo, A. Staszczak, and M. Warda, *Nucl. Phys. A* **944**, 442 (2015).
- [25] A. Kosior, A. Staszczak, and C. Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl.* **10**, 249 (2017).
- [26] E. Perlinska, S. G. Rohozinski, J. Dobaczewski, and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **69**, 014316 (2004).
- [27] T. Lesinski, M. Bender, K. Bennaceur, T. Duguet, and J. Meyer, *Phys. Rev. C* **76**, 014312 (2007).
- [28] M. Bender, K. Bennaceur, T. Duguet, P.-H. Heenen, T. Lesinski, and J. Meyer, *Phys. Rev. C* **80**, 064302 (2009).
- [29] V. Hellemans, P.-H. Heenen, and M. Bender, *Phys. Rev. C* **85**, 014326 (2012).
- [30] D. Vautherin and D. M. Brink, *Phys. Rev. C* **5**, 626 (1972); Y. M. Engel, D. M. Brink, K. Goeke, S. Krieger, and D. Vautherin, *Nucl. Phys. A* **249**, 215 (1975).
- [31] S. G. Rohozinski, J. Dobaczewski, and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **81**, 014313 (2010); *Int. J. Mod. Phys. E* **19**, 640 (2010).
- [32] J. Dobaczewski and J. Dudek, *Phys. Rev. C* **52**, 1827 (1995); **55**, 3177(E) (1997); *Acta Phys. Pol. B* **27**, 45 (1996).
- [33] P.-G. Reinhard and H. Flocard, *Nucl. Phys. A* **584**, 467 (1995).
- [34] T. H. R. Skyrme, *Philos. Mag.* **1**, 1043 (1956); *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1959); **9**, 635 (1959); **9**, 641 (1959).
- [35] J. Dobaczewski, H. Flocard, and J. Treiner, *Nucl. Phys. A* **422**, 103 (1984).
- [36] M. Bender, P.-H. Heenen, and P.-G. Reinhard, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 121 (2003).
- [37] A. Staszczak, M. Stoitsov, A. Baran, and W. Nazarewicz, *Eur. J. Phys. A* **46**, 85 (2010).
- [38] N. Schunck, J. Dobaczewski, J. McDonnell, W. Satuła, J. A. Sheikh, A. Staszczak, M. Stoitsov, and P. Toivanen, *Comput. Phys. Commun.* **183**, 166 (2012); N. Schunck, J. Dobaczewski, W. Satuła, P. Baczyk, J. Dudek, Y. Gao, M. Konieczka, K. Sato, Y. Shi, X. B. Wang, and T. R. Werner, *ibid.* **216**, 145 (2017).
- [39] J. Bartel, P. Quentin, M. Brack, C. Guet, and H. B. Håkansson, *Nucl. Phys. A* **386**, 79 (1982).
- [40] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, and M. V. Stoitsov, *Eur. J. Phys. A* **15**, 21 (2002).
- [41] J. Dobaczewski and J. Dudek, *Comput. Phys. Commun.* **102**, 166 (1997); **102**, 183 (1997).
- [42] J. Dobaczewski, W. Satuła, B. G. Carlsson, J. Engel, P. Olbratowski, P. Pawłowski, M. Sadziak, J. Sarich, N. Schunck, A. Staszczak, M. Stoitsov, M. Zalewski, and H. Zduńczuk, *Comput. Phys. Commun.* **180**, 2361 (2009).
- [43] M. Brack, J. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinsky, and C. Y. Wong, *Rev. Mod. Phys.* **44**, 320 (1972).





PROPERTIES OF SUPERHEAVY  
ISOTOPES  $Z = 120$  AND ISOTONES  $N = 184$   
WITHIN THE SKYRME–HFB MODEL\*

A. KOSIOR, A. STASZCZAK

Institute of Physics, Maria Curie-Skłodowska University, Lublin, Poland

CHEUK-YIN WONG

Physics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge TN, USA

(Received December 28, 2017)

We study the nuclear properties of even–even superheavy  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones with the Skyrme–Hartree–Fock–Bogoliubov (HFB) approach. Within this model, we examine the deformation energy surfaces and two paths to fission: a reflection-symmetric path with elongated fission fragments (sEF) and a reflection-asymmetric path corresponding to elongated fission fragments (aEF). Furthermore, we explore the energy surfaces in the region of very large oblate deformations with toroidal nuclear density distributions. While the energy surfaces of toroidal  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones do not possess energy minima without angular momenta, local energy minima (toroidal high-spin isomeric states) appear for many of these superheavy nuclei with specific angular momenta about the symmetry axis. We have theoretically located the toroidal high-spin isomers (THSIs) of  $^{302}\text{Og}_{184}$ ,  $^{302}\text{120}_{182}$ ,  $^{306}\text{120}_{186}$ , and  $^{306}\text{122}_{184}$ .

DOI:10.5506/APhysPolBSupp.11.167

## 1. Introduction

Nuclei with excessive charges have a tendency to distribute the density in the oblate configuration in the shape of a biconcave disks or a toroid [1–3]. The additional presence of a large angular momentum about the symmetry axis enhances the stability of a toroidal density distribution. Previously, we examined the energy surfaces of even–even superheavy  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones in extremely prolate and oblate shapes, without and with an angular momentum [2, 3]. We found that even though toroidal density distributions frequently appear in constraint HFB calculations, there is no

---

\* Presented at the XXIV Nuclear Physics Workshop “Marie and Pierre Curie”, Kazimierz Dolny, Poland, September 20–24, 2017.

local toroidal energy minimum when there is no angular momentum in this region of  $Z$  and  $A$ . However, under the constraint of an angular momentum about the symmetry axis, toroidal high-spin isomers (THSIs) show up as local energy minima in  $^{304}120_{184}$  when it is endowed with specific angular momenta [3]. In the present contribution, we continue our examination of the energy surfaces of other even–even superheavy  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones, and search for THSIs under the constraint of angular momenta about the symmetry axis. We find many local energy minima, THSI states, in the even–even neighborhood of  $^{304}120$ , indicating the common presence of toroidal high-spin isomer in the superheavy region.

## 2. Skyrme–HFB Model

In our method, we use the constrained and/or cranked Skyrme–Hartree–Fock–Bogoliubov (HFB) approach, which is equivalent to minimization of the Skyrme energy density functional  $E^{\text{tot}}[\bar{\rho}]$ , with respect to the densities and currents under a set of constraints (see Ref. [3] and references cited therein). Taking the method of Lagrange multipliers, we solve an equality-constrained problem (ECP)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\bar{\rho}} E^{\text{tot}}[\bar{\rho}] \\ \text{subject to: } \langle \hat{N}_q \rangle = N_q, \quad (q = p, n), \\ \langle \hat{Q}_{\lambda\mu} \rangle = Q_{\lambda\mu}, \\ \langle \hat{J}_i \rangle = I_i, \quad (i = x, y, z), \end{array} \right. \quad (1)$$

where the constraints are defined by the average values  $N_{p,n}$  of the proton and neutron particle-number operators  $\hat{N}_{p,n}$ , the constrained values  $Q_{\lambda\mu}$  of the mass multiple moment operators  $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ , and the constraint components of the angular momentum vector  $I_i$ . The above ECP equations are solved using an augmented Lagrangian method [4] with the symmetry-unrestricted code HFODD [5], which uses the basis expansion method utilizing a three-dimensional Cartesian deformed harmonic oscillator (h.o.) basis. The basis was composed of the 1140 lowest states taken from the  $N_0 = 26$  h.o. shells. In the particle–hole channel, the Skyrme SkM\* force [6] was applied and a density-dependent *mixed* pairing [3] interaction in the particle–particle channel was used.

We use the constrained Skyrme–HFB approach when we try to establish the region of the quadrupole deformation with the spherical and toroidal density distributions. The cranked Skyrme–HF model (without pairing correlations) was applied to locate the THSIs under the constraint of an angular momentum about the symmetry axis.

### 3. Energy surfaces of $Z = 120$ isotopes and $N = 184$ isotones

Figures 1 and 2 present the total HFB energy of even–even superheavy  $Z = 120$  isotopes with number of neutrons from  $N = 160$  to 190. For each isotope except  $^{300}_{120}160$ , one can see two paths leading to fission: a reflection-symmetric path with the elongated fission fragments (sEF) (open circles) and a reflection-asymmetric path with the elongated fission fragments (aEF) (dashed curves). The axially symmetric sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) fission paths are marked by the dash-dotted thin curves. The differences between the total HFB energies calculated along sEF and sEF with  $\gamma = 0^\circ$  paths indicate dependence of fission barriers on triaxiality. Furthermore, Figs. 1 and 2 show that with increasing number of neutrons, barrier heights increase and reach a maximal value of  $\sim 10$  MeV for  $N = 180$  and 182.

For neutron-deficient isotopes with number of neutrons  $N$  from 160 to 166, the ground state lies in the region of  $Q_{20} \sim -50$  b. This means that these nuclei are super-oblate-deformed, see Ref. [7]. For the next group of six nuclei, *i.e.* with number of neutrons from  $N = 168$  to 178, there exist two minima, the ground state minimum in the region of  $Q_{20} \sim -25$  b and the second one in the region of  $Q_{20} \sim +25$  b. It indicates the transitional nature of the nuclei. For the next nucleus, with  $N = 180$  neutrons, we have another situation, in which the barrier between two minima disappears. This flat-bottom spherical potential allows the mixture of oblate, spherical, and prolate shapes at the ground state, and can be viewed as the E(5) critical-point solution [8] in the interacting boson approximation. All of the next isotopes (with  $N \geq 182$ ) have spherical shapes in the ground state.

Figure 3 presents the total HFB energy but for even–even superheavy  $N = 184$  isotones with number of protons from  $Z = 106$  (seaborgium) to 126. All of them have spherical ground state minima and the double-humped fission barriers (with inner and outer maxima). Moreover, one can see that with the increase of protons number  $Z$ , the inner-barrier height rises and for  $Z = 114$  to 124, this barrier reaches the maximum value of  $\sim 10$  MeV (taking into account the effect of the lowering of the barrier height due to triaxiality). Each of the examined isotones, except the seaborgium, exhibit two fission paths: sEF and aEF. For  $Z \geq 116$ , the aEF paths have substantially lower outer barriers, which means that these isotones favor the asymmetric fission path.

The total HFB energy surfaces in Figs. 1–3 are presented for the quadrupole moment  $Q_{20} \geq -75$  b only. If the magnitude of oblate  $Q_{20}$  deformation increases, the oblate spheroidal shapes of nuclei alter to the biconcave disc shapes and for even greater oblate deformations, a new family of toroidal shapes emerges, see Fig. 2 in Ref. [3]. In Figs. 4 and 5, we explore the shape of the energy surface of even–even  $Z = 120$  isotopes with  $N = 160$  to 190 in the extremely oblate configuration by increasing the magnitude

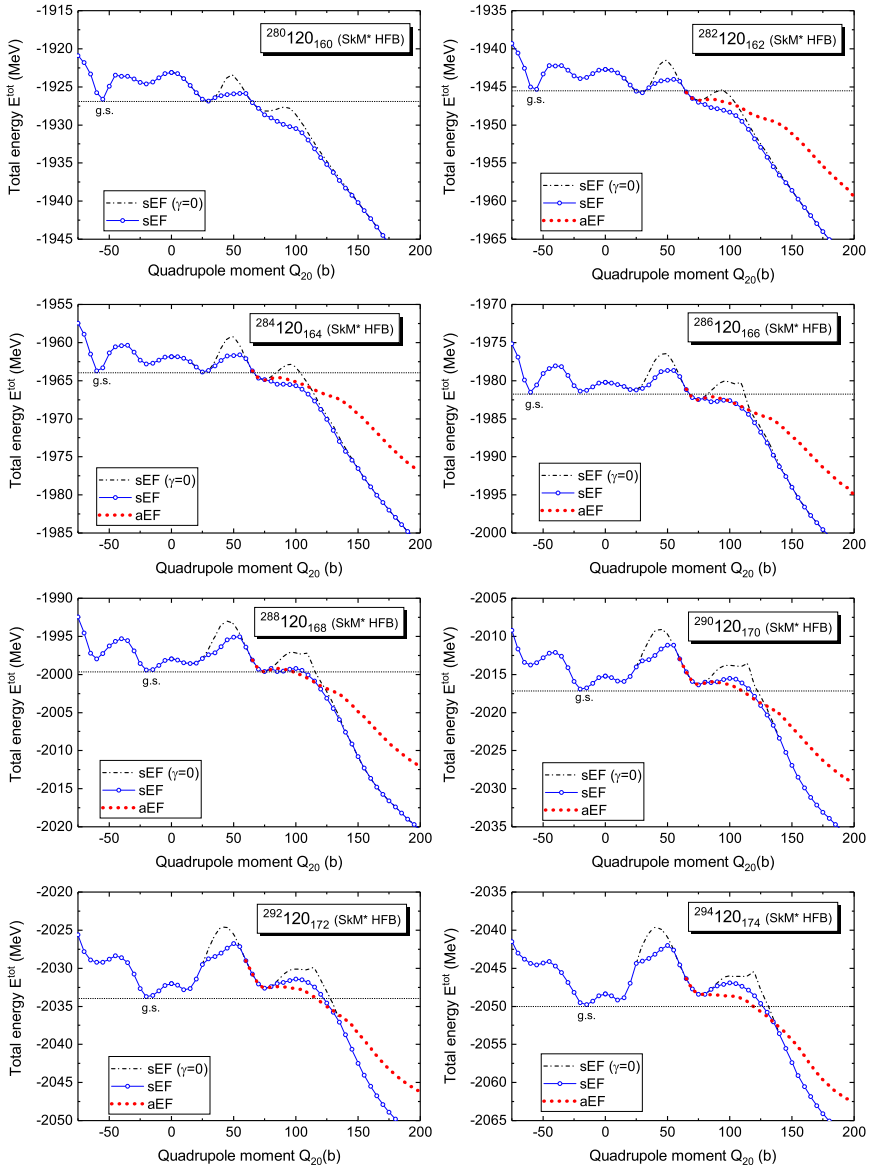


Fig. 1. (Color online) Total HFB energy as a function of the quadrupole moment for the even–even  $Z = 120$  isotopes with number of neutrons from  $N = 160$  to  $174$ . The open circular points (blue) and short dashed (red) lines show the symmetric (sEF) and asymmetric (aEF) elongated fission pathways, respectively. The axially symmetric sEF ( $\gamma = 0^\circ$ ) fission pathways are marked by the dash-dotted curves.

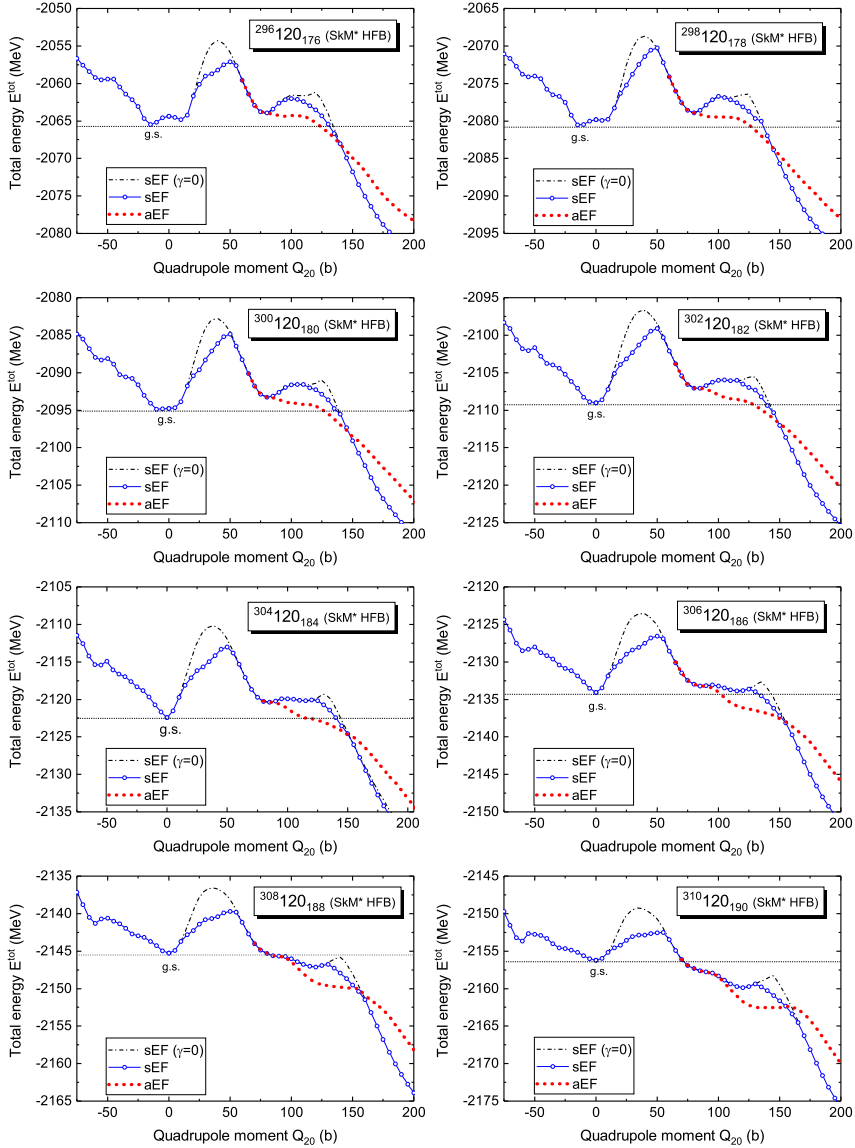


Fig. 2. (Color online) The same as Fig. 1, but for number of neutrons from  $N = 176$  to 190.

of the constrained (negative) quadrupole moment ( $Q_{20} \geq -300$  b). For all isotopes with  $N \geq 166$ , the figures show how the energy surfaces vary as the shape makes a transition from biconcave disc to the toroidal shape at the region of large oblate deformation  $Q_{20} \lesssim -160$  b.

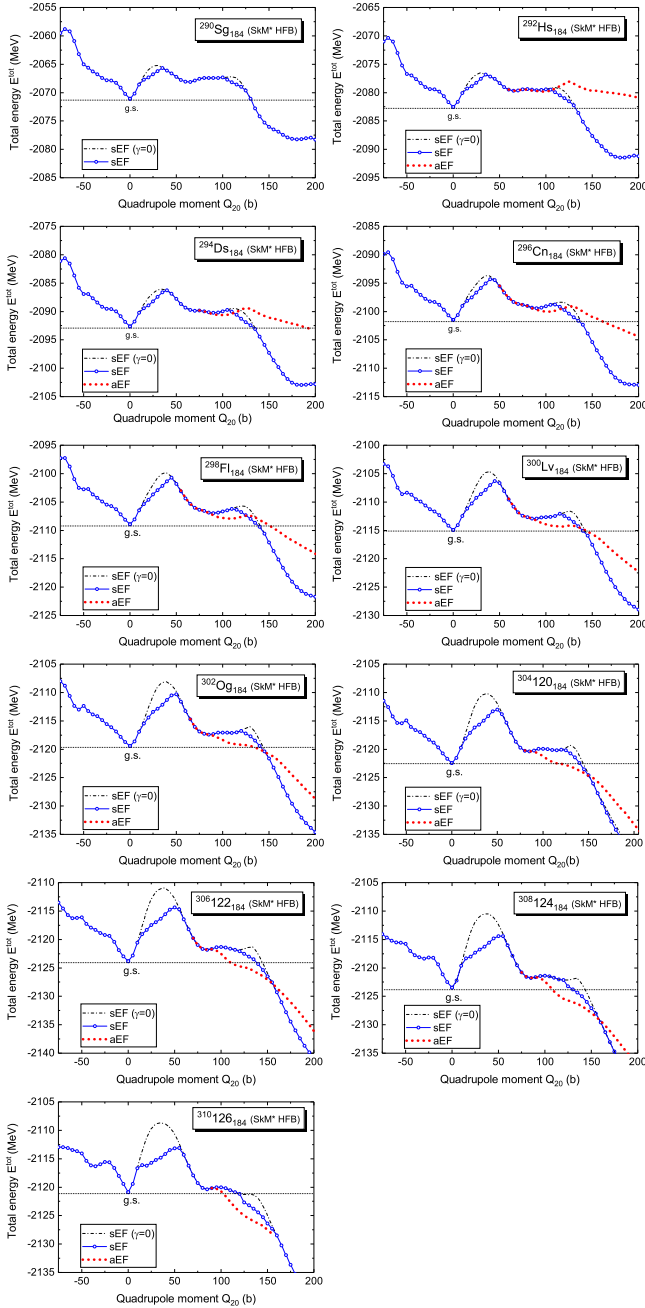


Fig. 3. (Color online) The same as Figs. 1 and 2, but for even-even  $N = 184$  isotones with number of protons from  $Z = 106$  to 126.

In addition, Figs. 4 and 5 present the energy difference,  $\Delta E$ , between the ground state and the energy point where two topological solutions (biconcave and toroidal) have the same energy. The value of  $\Delta E$  increases with the increasing number of neutrons until the isotope  $^{302}120_{182}$ , with the value  $\Delta E = 54.6$  MeV, and then it starts to slowly decrease.

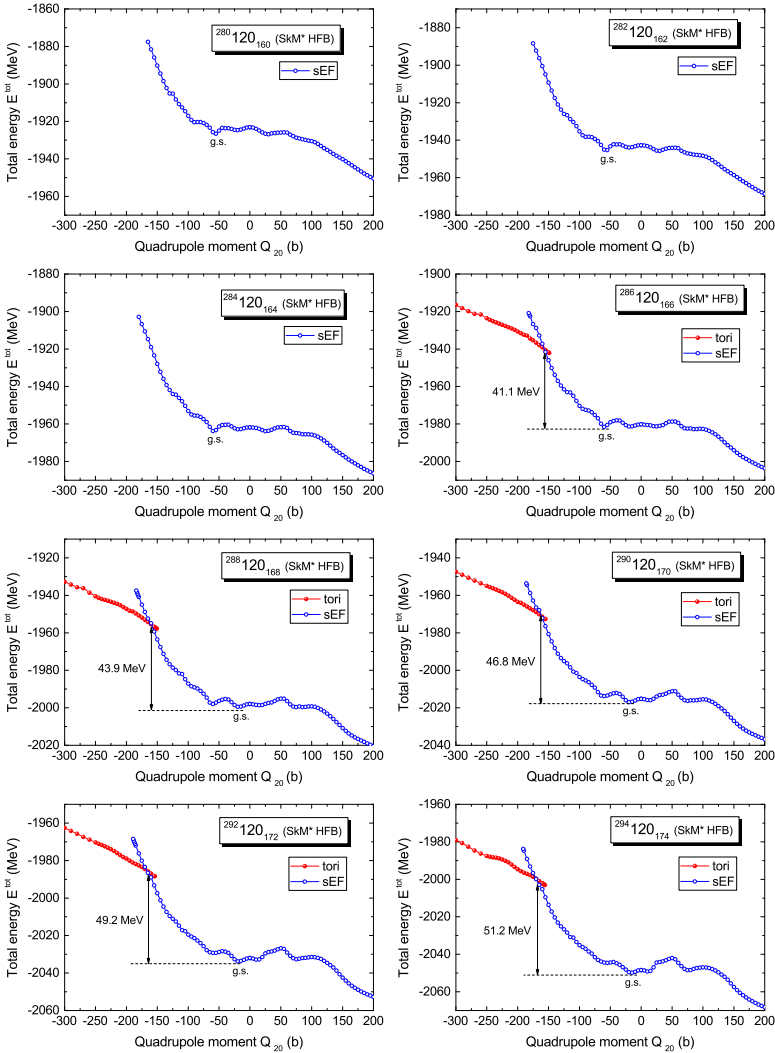


Fig. 4. (Color online) Total HFB energy of even–even  $Z = 120$  isotopes with  $N = 160$  to  $174$  as a function of the quadrupole moment. The open circular points (black/blue) show the symmetric elongated fission (sEF) pathways. The nuclear matter density distributions with toroidal shapes appear at the region of large oblate deformation  $Q_{20} \lesssim -160$  b (solid grey/red circles).

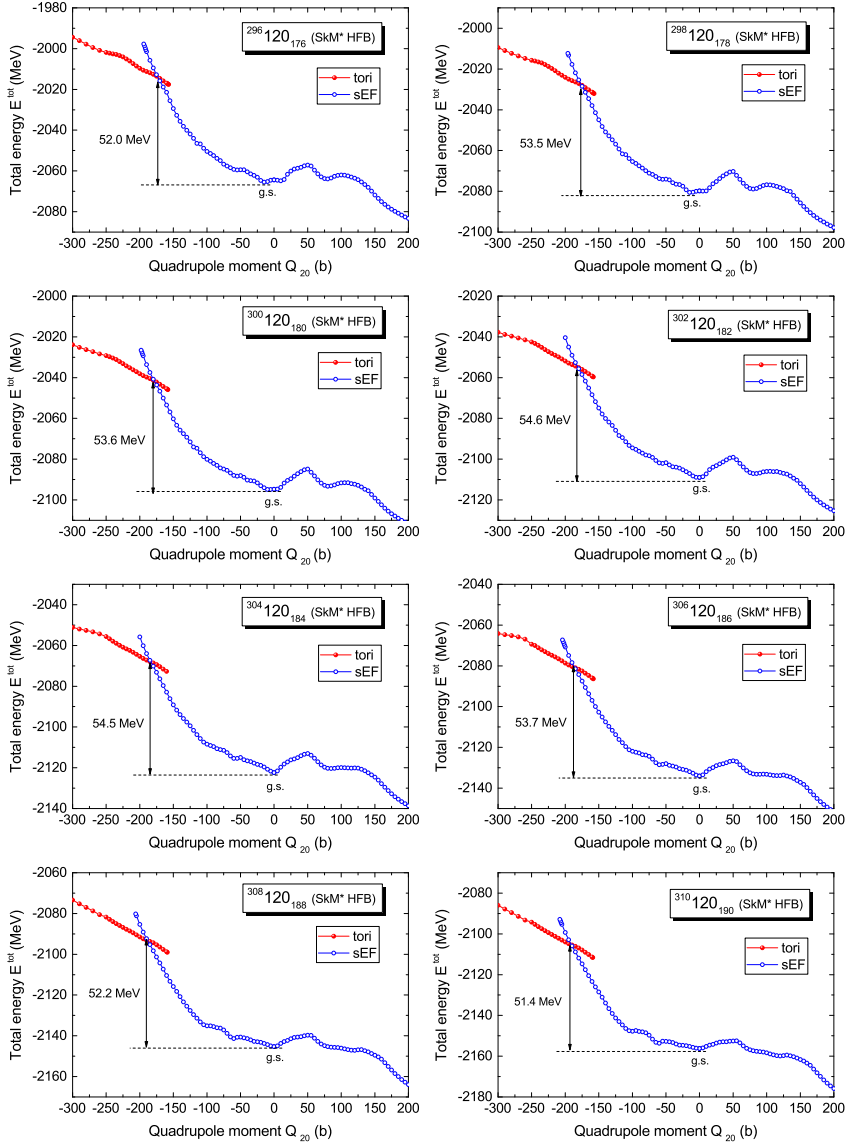


Fig. 5. (Color online) The same as Fig. 4, but for number of neutrons from  $N = 176$  to 190.

Figure 6 shows the same as Figs. 4 and 5, but for even-even  $N = 184$  isotones with number of protons from  $Z = 106$  to 126. One can see that when the number of protons increases the energy difference,  $\Delta E$ , rapidly decreases, from 78.1 to 38.7 MeV, and furthermore, the toroidal energy curves become oriented more horizontally.



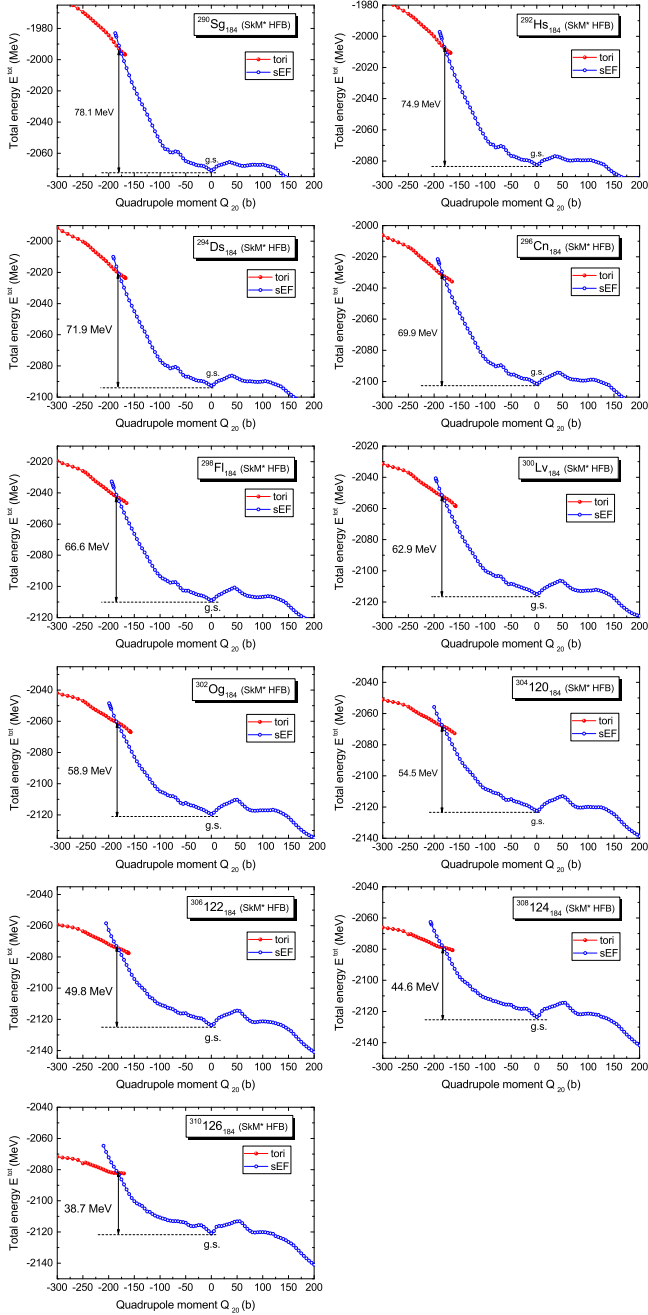


Fig. 6. (Color online) The same as Figs. 4 and 5, but for even-even  $N = 184$  isotones with number of protons from  $Z = 106$  to 126.

#### 4. Toroidal high-spin isomers

From the results shown in Figs. 4–6 for the  $Z = 120$  isotopes and the  $N = 184$  isotones under consideration, it is important to note that the total energy curves in the toroidal configurations lie on a slope as a function of  $Q_{20}$ , and there is no energy minimum there. So without an angular momentum, these toroidal configurations are unstable and have a tendency to return to a sphere-like geometry. However, the stability of a toroidal nucleus may be enhanced if it possesses an angular momentum about the symmetry axis  $I_z$ . Because a quantal axially-symmetric toroid cannot collectively rotate about its symmetry axis, only non-collective rotations, such as those arising from particle–hole excitations are possible in quantum mechanics.

There are two equivalent ways to construct a high-spin state with spin aligned along the symmetry axis, as presented previously in [3], where we found THSI nucleus  $^{304}120_{184}$  with  $I_z = 81$  and  $208\hbar$ . Using similar methods to explore neighboring even–even nuclei in the  $(Z, A)$  space, we obtain the energy curves of toroidal density distributions with different angular momentum components  $I_z$  aligned along the symmetry axis. In Fig. 7, we show sections of the deformation energy surfaces of isotones  $^{302}\text{Og}_{184}$  and  $^{306}122_{184}$  as a function of quadrupole moment  $Q_{20}$  for different aligned angular momenta.

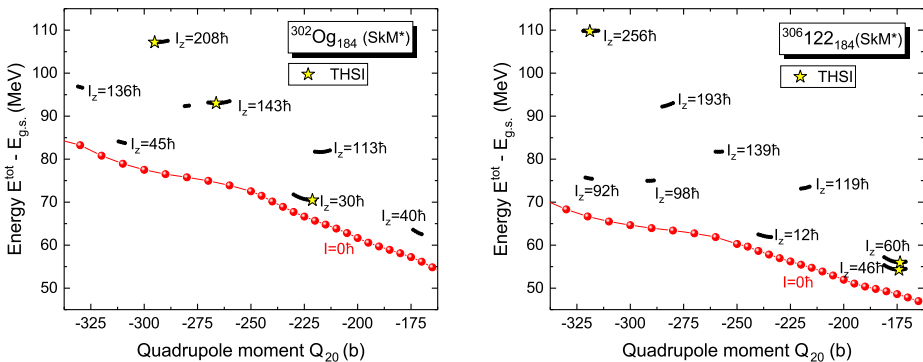


Fig. 7. (Color online) The deformation energies of  $^{302}\text{Og}_{184}$  (left panel) and  $^{306}122_{184}$  (right panel) as a function of the quadrupole moment  $Q_{20}$  for different aligned angular momenta  $I = I_z$ . The locations of the toroidal high-spin isomers (THSIs)  $^{302}\text{Og}_{184}$  ( $I_z = 30, 143, 208\hbar$ ) and  $^{306}122_{184}$  ( $I_z = 46, 60, 256\hbar$ ) are indicated by star symbols. All deformation energies are measured relative to the energy of the spherical ground state.

We find that while many energy curves for different aligned angular momenta do not possess an energy minimum, there are specific aligned angular momenta for which the energy curves show localized energy minima. These

energy minima are indicated by the star symbols in Fig. 7 for THSI  $^{302}\text{Og}_{184}$  with  $I_z = 30, 143, 208 \hbar$ , and  $^{306}122_{184}$  with  $I_z = 46, 60, 256 \hbar$ . Figure 8 represents the same situation as Fig. 7, but for isotopes  $^{302}120_{182}$  and  $^{306}120_{186}$  for which THSIs exist for  $I_z = 111 \hbar$  and  $I_z = 117, 218 \hbar$ , respectively.

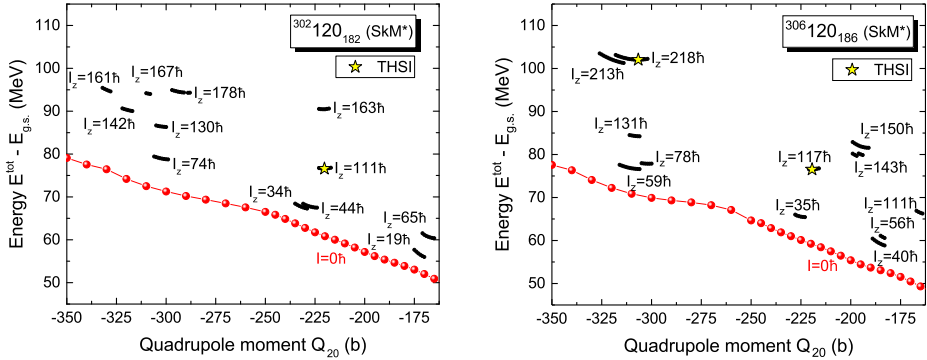


Fig. 8. (Color online) The same as Fig. 7, but for  $^{302}120_{182}$  ( $I_z = 111 \hbar$ ) (left panel) and  $^{306}120_{186}$  ( $I_z = 117, 218 \hbar$ ) (right panel) THSIs.

The properties of found THSI states are tabulated in Table I, where  $\hbar\omega_z$  is the Lagrange multiplier (cranking frequency) and  $E^*$  denotes the energy measured relative to the energy of the spherical ground state.

TABLE I

Properties of the toroidal high-spin isomers (THSIs) of  $^{302}\text{Og}_{184}$ ,  $^{306}122_{184}$ ,  $^{302}120_{182}$ , and  $^{306}120_{186}$ .

$Z$	$N$	$I_z = I_z^{\text{proton}} + I_z^{\text{neutron}} [\hbar]$	$Q_{20} [\text{b}]$	$\hbar\omega_z [\text{MeV}]$	$E^* [\text{MeV}]$
118	184	$30 = 15 + 15$	-221.2	0.05	70.5
		$143 = 59 + 84$	-266.3	0.20	93.0
		$208 = 79 + 129$	-295.1	0.30	107.2
122	184	$46 = 14 + 32$	-174.1	0.10	54.3
		$60 = 14 + 46$	-173.6	0.15	56.0
		$256 = 98 + 158$	-318.9	0.32	109.7
120	182	$111 = 44 + 67$	-220.3	0.20	76.6
120	186	$117 = 40 + 77$	-219.4	0.20	76.5
		$218 = 79 + 139$	-306.7	0.30	102.0

## 5. Conclusions and discussions

We examine here properties of the superheavy nuclei of even–even  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones. The obtained results for  $Z = 120$  isotopes show the change of position of the ground state with the increase of the number of neutrons from  $N = 160$  to 190. The most neutron-deficient isotopes form the group of the super-oblate-deformed nuclei, for  $N = 168$  to 178, there exists the transitional region of nuclei with two oblate and prolate minima separated by small barrier. This barrier disappears for  $N = 180$  and the flat-bottom potential allows the mixture of oblate, spherical, and prolate shapes at the ground state. Finally, all next isotopes with  $N \geq 182$  are spherical in their ground states. In the case of  $N = 184$  isotones with spherical ground states and the double-humped fission barriers, it is found that with the increase of the number of protons, the inner-barrier height rises and reaches the value of  $\sim 10$  MeV for  $Z = 114$  to 124. Moreover, for majority of the  $Z = 120$  isotopes and  $N = 184$  isotones, one can observe competition between two paths leading to fission: one with the symmetric elongated fragments (sEF) and the second with asymmetric elongated fragments (aEF).

Focusing our attention on the extremely oblate region, we search for toroidal high-spin isomers in the neighborhood of  $^{304}120_{184}$  where toroidal high-spin isomers have been located previously in theoretical calculations [3]. We find that the neighboring even–even  $N = 184$  isotone with  $Z = 118$  and 122, as well as the  $Z = 120$  isotopes with  $N = 182$  and 186, also possess toroidal high-spin isomers at various angular momentum components and quadrupole moments. The occurrence of toroidal high-spin isomers may appear to be rather common in the superheavy nuclei region.

The research was supported in part by the Division of Nuclear Physics, U.S. Department of Energy under the contract DE-AC05-00OR22725.

## REFERENCES

- [1] A. Staszczak, C.-Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B* **40**, 753 (2009).
- [2] A. Kosior, A. Staszczak, C.-Y. Wong, *Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl.* **10**, 249 (2017).
- [3] A. Staszczak, C.-Y. Wong, A. Kosior, *Phys. Rev. C* **95**, 054315 (2017).
- [4] A. Staszczak, M. Stoitsov, A. Baran, W. Nazarewicz, *Eur. J. Phys. A* **46**, 85 (2010).
- [5] N. Schunck *et al.*, *Comput. Phys. Commun.* **216**, 145 (2017).
- [6] J. Bartel *et al.*, *Nucl. Phys. A* **386**, 79 (1982).
- [7] P.-H. Heenen, J. Skalski, A. Staszczak, D. Vretenar, *Nucl. Phys. A* **944**, 415 (2015).
- [8] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3580 (2000).

