ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXXIII, 27 SECTIO D 1978

Zespół Statystyki Medycznej. Akademia Medyczna w Lublinie

Joanna KOMADA, Barbara LIGĘZA

Transformacja logarytmiczna a testowanie hipotez statystycznych przy statystycznym opracowywaniu doświadczeń

Логарифмическая трансформация и критерии статистических гипотез при статистической обработке эксперимента

The Logarithmical Transformation and the Verification of Statistical Hypothesis in the Statistical Analysis of Experiments

WSTĘP

Głównym celem pracy jest omówienie ogólnych zasad stosowania transformacji logarytmicznej, a następnie porównanie w oparciu o przykłady liczbowe sposobu opracowania statystycznego danych eksperymentalnych bezpośrednio i z użyciem transformacji. Pokażemy, jaki wpływ wywiera transformacja logarytmiczna na kształtowanie się wielkości odpowiednich średnich, wartości funkcji testowych i przedziałów ufności przy opracowaniu statystycznym doświadczeń w przeciwieństwie do opracowanych bezpośrednio. Zamieścimy zestawienia tych wielkości (tab. 1—6).

Każda z postawionych hipotez zerowych weryfikowana jest przeciwko pewnej hipotezie alternatywnej z obszarem krytycznym dwustronnym. Kontrolę spełnienia lub niespełnienia wymaganych warunków przeprowadzimy bezpośrednio przy opracowywanych przykładach, część z nich przeanalizujemy w rozważaniach ogólnych. Materiał doświadczalny, którym posłużymy się w naszych rozważaniach, dotyczy zagadnienia gospodarki jodowej w organizmie kobiety ciężarnej i jej noworodka. Każda występująca w nim wielkość liczbowa jodu jest średnią z kilku oznaczeń. Spośród wyodrębnionych dwu składników jodu całkowitego BEI i PBI w opracowaniu naszym oprzemy się na tym ostatnim.

Nie będziemy podawać wzorów używanych przy opracowywaniu statystycznym danych eksperymentalnych, bowiem znaleźć je można w powszechnie dostępnych pracach (6—8). W tab. 1—6 symbole oznaczone gwiazdką (*) dotyczą danych eksperymentalnych poddanych transformacji logarytmicznej, natomiast strzałka (→) wskazuje liczbę lagarytmowaną danego logarytmu. Terminologia i symbolika opierają się na notacji i słownictwie podanym w opracowaniach (7—9).

ROZWAŻANIA OGÓLNE

Zagadnieniem transformacji logarytmicznej zajmowało się wielu autorów; Bartlett, Pawłowski, Curtiss i inni (2, 5, 9). Wspólnym zagadnieniem tych prac jest rozkład logarytmiczno-normalny, a w konsekwencji jego ścisła więź z pojęciem transformacji logarytmicznej. Mówimy, że badana cecha Y ma rozkład logarytmiczno-normalny o parametrach μ, σ (μ — średnia populacji, σ — odchylenie standardowe populacji), jeśli zmienna losowa $X = \ln Y$ ma rozkład normalny o tych parametrach (9). Znając związek łączący cechy X i Y łatwo można napisać postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa cechy o rozkładzie logarytmiczno-normalnym, wyznaczyć jej wartość oczekiwaną i wariancję. Dokonując ponadto pewnych przeliczeń zauważymy, że funkcja gęstości tego rozkładu jest asymetryczna prawostronnie i to tym bardziej, im większe są wartości parametrów μ, σ. Wiadomo przy tym, że w wielu przypadkach rozkład zmiennej logarytmowanej zdąża szybciej do rozkładu normalnego niż sama zmienna. Ma to zwłaszcza znaczenie w przypadkach weryfikowania hipotez statystycznych o parametrach rozkładu, bowiem testy służące do tego opierają się na założeniu jego normalności. Założenie to może okazać się prawdziwe po dokonaniu koniecznych obliczeń na wartościach przetransformowanych przy pomocy logarytmu (2, 4).

Rozkład logarytmiczno-normalny jest często stosowany w ekonometrii (9), technice, zwłaszcza zaś w naukach przyrodniczych (4). Wśród tych ostatnich wyróżnimy medycynę i farmację, bowiem tam stosunkowo niewiele obserwacji o wartościach większych od zera, sugerujących często prawostronną deformację rozkładu badanej cechy, skłania przy opracowaniu statystycznym doświadczenia do stosowania założenia normalności rozkładu.

Ważnym celem stosowania transformacji w ogóle jest zmiana skali pomiarów w odniesieniu do przeprowadzanej analizy wariancji lub stosowania jakiegokolwiek testu weryfikującego hipotezy o parametrach rozkładu. Transformację danych eksperymentalnych uważa się za dobrą, jeśli:

a) wariancja zmiennej przekształconej nie ulega zmianie wraz ze zmianą średniej;

b) zmienna przekształcona ma przynajmniej w przybliżeniu rozkład normalny;

c) nowa skala zachowuje postulat stałości różnic, czyli jest taka, że fakt addytywności i liniowości efektów jest spełniony.

Prowadząc obliczenia na średnich, uzyskamy spełnienie tych warunków (2, 6). Opracowując przykłady liczbowe, prześledzimy założenia, technikę i następstwa przeprowadzania transformacji logarytmicznej. Zacznijmy od założeń. Aby w ogóle można było mówić o transformowaniu logarytmicznym obserwacji, muszą one być większe od zera. Wszystkie nasze przykłady liczbowe spełniają ten warunek. Zagadnienie przydatności rozważanej transformacji prześledzimy kolejno: warunek a) sprawdzimy przy każdym z omawianych przykładów. Spełnienie warunku b) jest oczywiste, bo logarytm wartości zmiennej wraz ze wzrostem liczby obserwacji dąży na ogół szybciej do rozkładu normalnego niż sama zmienna. Zmienna zaś, jako zespół średnich, ma rozkład co najmniej asymptotycznie normalny. Warunek c) jest spełniony — logarytmy są przekształceniem zachowującym postulat stałości różnic.

Ponieważ zajmujemy się doświadczeniami, w których mimo niewielkiej liczby obserwacji wiadomo, że badana cecha ma rozkład normalny — stosowanie przekształcenia logarytmicznego nie jest konieczne — wygodniej jest opracowywać statystycznie dane eksperymentalne bezpośrednio. W naszym przypadku opracujemy je w sposób dwojaki jedynie dlatego, aby pokazać, że wnioski odnoszące się do weryfikowanych hipotez będą takie same, zachodzą nieznaczne odchylenia w wielkościach: średniej, funkcji testowej i przedziału ufności.

TEST *t* STUDENTA

Badano stężenia jodu PBI w surowicy krwi dwu grup kobiet ciężarnych: z wczesną ciążą fizjologiczną i z poronieniami samoistnymi. Próby te liczyły po 20 osób. Przypuszczano, że stężenia jodu przy różnych rodzajach ciąży są różne. W tym celu dokonano weryfikacji hipotezy zerowej H_0: $\mu_1=\mu_2$ o równości wartości średnich stężenia jodu w populacjach badanych kobiet, od których pochodzą badane próby. Biorąc pod uwagę to, co było powiedziane poprzednio, przyjmujemy, że stężenia jodu w surowicy krwi kobiet ciężarnych mają rozkłady normalne. Hipotezę zerową o równości wariancji H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ w badanych populacjach sprawdzimy przy użyciu testu Bartletta z zastosowaniem statystyki χ^2.

Wyliczona, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, wartość statystyki $\chi^2=6{,}82$. Porównując ją z wartością $\chi^2_{0,001}=10{,}82$ odczytaną z tabel przy $\nu=1$ stopniu swobody i poziomie istotności 0,001, wnioskujemy o braku istotności różnic w wariancjach obu populacji. Można więc weryfikować postawioną hipotezę zerową o średnich przy pomocy testu *t* Studenta.

Tab. 1. Ważniejsze wielkości liczbowe stężenia jodu PBI w surowicy krwi kobiet przy wczesnej ciąży fizjologicznej i poronieniach samoistnych

More significant numerical values of PBI iodine concentration in the blood serum of women in early pregnancy and in cases of idophatic abortion

	Wczesna ciąża fizjologiczna	Poronienia samoistne
Liczebność	$n_1=20$ $n_1^*=20$	$n_2=20$ $n_2^*=20$
Wartość średnia	$\bar{y}_1=7{,}283$ mg% $\bar{y}_1^*=0{,}8578 \rightarrow 7{,}208$ mg%	$\bar{y}_2=4{,}767$ mg% $\bar{y}_2^*=0{,}6620 \rightarrow 4{,}592$ mg%

Weryfikując hipotezę o równości wariancji zmiennych przetransformowanych, otrzymujemy: $\chi_0^{2*}=7{,}2868<\chi^2_{0,001}=10{,}827$, co, podobnie jak poprzednio z ryzykiem błędu 0,001 i przy jednym stopniu swobody, pozwala na sformułowanie identycznego jak poprzednio wniosku. Pozwala to również na weryfikowanie hipotezy o równości wartości średnich w populacjach kobiet po przekształceniu danych eksperymentalnych za pomocą logarytmu.

Dokonajmy weryfikacji hipotezy H_0: $\mu_1=\mu_2$ o równości średnich stężeń jodu PBI w badanych populacjach kobiet ciężarnych przeciwko hipotezie alternatywnej H_1: $\mu_1\neq\mu_2$ bezpośrednio i po transformacji. Odpowiednie wielkości zestawmy w tab. 2.

Tab. 2. Podstawowe wielkości wyliczone przy weryfikowaniu hipotezy $H_0{:}\mu_1=\mu_2$ przeciwko $H_1{:}\mu_1\neq\mu_2$ i 99% przedział ufności t Studenta dla różnicy średnich stężenia jodu w surowicy krwi badanych kobiet

Basic values calculated on verifing the hypothesis $H_0{:}\mu_1=\mu_2$ against $H_1{:}\mu_1\neq\mu_2$ and the 99% interval of confidence t-Student for various mean values of iodine concentration in the blood serum of the examined women

Sposób opracowania:	Bezpośredni	Po transformacji
Stopnie swobody	$\nu=38$	$\nu^*=38$
Funkcja testowa	$t^\circ=6{,}5834$	$t^{\circ *}=6{,}2958$
99% przedział ufności	(1,48; 3,55) mg%	$(0{,}115;\ 0{,}2801) \rightarrow$ $\rightarrow (1{,}293;\ 1{,}906)^*$ mg%

Z porównania na poziomie istotności 0,01 wartości odczytanej z tablic t Studenta przy 38 stopniach swobody z wartością wyliczoną na podstawie próby losowej wynika w obu przypadkach, że $t^0>t_{0,01}=2{,}712$. Odrzucamy hipotezę zerową. Istnieją podstawy do twierdzenia z ryzykiem błędu 0,01, że stężenia jodu PBI są różne u kobiet z wczesną ciążą fizjologiczną w porównaniu do kobiet z poronieniami. Informacji o wielkości tych różnic dostarcza 99% przedział ufności zamieszczony w tab. 2.

TEST F

Przeprowadzono analizę wariancji z zastosowaniem testu F do weryfikowania hipotezy H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3$ o równości średnich stężenia jodu PBI w łożyskach kobiet trzech grup przy ciąży: donoszonej, nie donoszonej i przenoszonej. Przebadano stężenia jodu PBI w łożyskach 30 kobiet w trzech grupach ciąży: donoszonej, nie donoszonej i przenoszonej; po 10 kobiet w każdej grupie. Należało wykazać ewentualne zróżnicowania w stężeniach badanego jodu w poszczególnych grupach łożysk. Z powodów omówionych poprzednio przyjmujemy rozkłady stężeń jodu PBI za normalne w każdej populacji, z których pochodzą badane łożyska. Równość wariancji sprawdzamy za pomocą testu Bartletta weryfikującego hipotezę H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2$. Po przeprowadzeniu obliczeń uzyskujemy kolejno: $\chi_0^2=8{,}262$ dla danych eksperymentalnych bezpośrednio i $\chi_0^{2*}=12{,}80$ po ich zlogarytmowaniu, co w porównaniu z wartością graniczną $\chi^2_{0,001}=13{,}815$, odczytaną dla 2 stopni swobody, prowadzi do nieodrzucenia hipotezy H_0, zarówno przed stosowaniem transformacji, jak i po jej zastosowaniu. Fakt ten w rezultacie pozwala z jednej strony na stosowanie przekształcenia logarytmicznego, z drugiej zaś — na zastosowanie testu F. Wartości średnie dla opracowywanego doświadczenia zestawiono w tab. 3.

Tab. 3. Wartości średnie stężenia jodu PBI w łożyskach kobiet trzech grup ciąży (przed i po przekształceniu logarytmicznym danych eksperymentalnych)

Mean values of PBI iodine concentration in placentas of women belonging to three pregnancy groups (before and after logarithmic transformation of the experimental data)

Wartości średnie PBI w łożysku przy ciąży:	Przed przekształceniem	Po przekształceniu
Donoszonej	$\bar{y}_1=2{,}829$ mg%	$\bar{y}_1^*=0{,}3685\rightarrow 2{,}336$ mg%
Nie donoszonej	$\bar{y}_2=3{,}580$ mg%	$\bar{y}_2^*=0{,}5382\rightarrow 3{,}453$ mg%
Przenoszonej	$\bar{y}_3=2{,}950$ mg%	$\bar{y}_3^*=0{,}4609\rightarrow 2{,}890$ mg%

Według hipotezy zerowej postaci H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3$ średnie stężenia jodu we wszystkich trzech grupach ciąży są takie same. Celem zweryfikowania tej hipotezy wykonujemy zestawienie analizy wariancji, z jednej strony bezpośrednio, z drugiej — po transformacji danych eksperymentalnych (tab. 4). Porównawszy otrzymaną z obliczeń wartość funkcji testowej F^0 z odczytaną z tabel wartością graniczną $F_{0,05}$ wnioskujemy, że brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

W trakcie przeprowadzonej równocześnie analizy wariancji dla logarytmów danych eksperymentalnych — wniosek jest taki sam. Zatem fakt ten można zamknąć stwierdzeniem, że przy tym ryzyku błędu 0,05 i ta-

Tab. 4. Analiza wariancji dla klasyfikacji pojedynczej stężenia jodu PBI w łożyskach kobiet z ciążą: donoszoną, nie donoszoną i przenoszoną

Analysis of variance for simple classification of PBI iodine concentration in placentas of women with normal, premature and prolonged pregnancy

Zmienność	Stopnie swobody ν	Suma kwadratów nS^2 nS^{2*}	Średni kwadrat V	F^0 F^{0*}	$F_{0.05}$
Między łożyskami grup ciążowych	$\nu_{ob}=c-1=2$	$nS^2_{ob}=3{,}2518$ $nS^2_{ob}{}^*=0{,}1396$	$V_{ob}=1{,}6259$ $V_{ob}{}^*=0{,}0698$	1,236 1,50	3,35 3,35
Błąd	$\nu_e=n-c=27$	$nS^2_e=35{,}5163$ $nS^2_e{}^*=1{,}1935$	$V_e=1{,}3154$ $V_e{}^*=0{,}0442$	— —	
Całość	$\nu_y=n-1=29$	$nS^2_y=38{,}7681$ $nS^2_y{}^*=1{,}3331$	— —	—	

kiej liczebności próby nie stwierdza się istotnych różnic w średnich stężeniach jodu PBI w łożyskach kobiet przy ciążach: donoszonej, nie donoszonej i przenoszonej.

PODWÓJNA KLASYFIKACJA KRZYŻOWA

Przeprowadzono analizę wariancji dla podwójnej klasyfikacji krzyżowej stężenia jodu PBI u matki i noworodka przez porównanie dwu grup kobiet: miejskich i wiejskich, liczących po 19 kobiet w każdej grupie i mających tę samą liczbę noworodków. Nasuwa się problem, czy środowisko (miasto, wieś) wpływa na stężenie jodu PBI w surowicy krwi matki i noworodka. Ze względu na sposób zbierania danych eksperymentalnych, można przyjąć rozkład stężenia jodu za normalny w poszczególnych grupach. Badany problem podlega podwójnej klasyfikacji krzyżowej z jednakową liczbą obserwacji w podklasach, jeśli tylko wariancje w badanych populacjach kobiet ciężarnych można uznać za równe. Sprawdzimy ten fakt za pomocą testu Bartletta. W efekcie przeliczeń uzyskujemy dla danych eksperymentalnych $\chi^2=1{,}357$, co wobec $\chi^2_{0,7}=1{,}44$ (przy $\nu=3$ st. swobody i poziomie istotności $=0{,}7$) daje brak podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wariancji. Wnioskując na podstawie tego, można przeprowadzić analizę wariancji bezpośrednio, a także przekształcić logarytmami dane eksperymentalne i dopiero wtedy stosować analizę wariancji. W przypadku logarytmowania stałość wariancji zachowuje się w dalszym ciągu, bowiem $\chi^2_0=0{,}463<\chi^2_{0,7}=1{,}44$. Zestawienie analizy wariancji, liczone przy hipotezie $H_0{:}\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$, zamieszczono w tab. 5.

Z porównania wartości granicznych z wartościami wyliczonymi na podstawie prób wynika, że na poziomie istotności 0,01 i przy odpowiedniej licz-

Tab. 5. Analiza wariancji dla podwójnej klasyfikacji krzyżowej (równe liczebności w podklasach) dla porównania kobiet miejskich i wiejskich ze względu na stężenie jodu PBI w surowicy krwi matki i noworodka

Analysis of variance for two-way classification (equal to the number in subclasses) for comparison of PBI iodine concentration in the blood serum of mothers and their newborn babies coming from towns and villages

Zmienność	Stopnie swobody ν	Suma kwadratów nS^2 nS^{2*}	Średni kwadrat V	F^0 F^{0*}	$F_{0.01}$
A — między grupami pochodzeniowymi	$a-1=2-1=1$	$nS^2_a=$ 0,0003 $nS^2_a{}^*=$ 0,0000	$V_a=$ 0,0003 $V_a{}^*=$ 0,0000	— —	
B — między matkami i noworodkami	$b-1=2-1=1$	$nS^2_b=$ 19,7574 $nS^2_b{}^*=$ 0,0703	$V_b=$19,7574 $V_b{}^*=$ 0,0703	10,3937 10,81	7,00 7,00
Interakcja AB	$(a-1)(b-1)=1$	$nS^2_{ab}=$ 0,0450 $nS^2_{ab}{}^*=$ 0,0002	$V_{ab}=$ 0,0450 $V_{ab}{}^*=$ 0,0002	— —	
Błąd	$ab(k-1)=72$	$nS^2_e=$136,8632 $nS^2_e{}^*=$ 0,4670	$V_e=$ 1,9009 $V_e{}^*=$ 0,0065	— —	
Całość	$n-1=75$	$nS^2_y=$156,6659 $nS^2_y{}^*=$ 0,5375	— —		

bie stopni swobody stwierdza się istotne różnice jedynie między średnimi stężeniami jodu w surowicy krwi matek i noworodków. O wielkościach tych różnic można dowiedzieć się z przedziału ufności, np. Scheffégo (8) dla różnicy średnich (tab. 6).

Uwagi i wnioski

Przeprowadzone wyżej obliczenia oraz zamieszczone tabele, świadczą o stosunkowo niewielkich odchyleniach wielkości średnich i wartości funkcji testowych otrzymanych drogą wyliczeń po użyciu transformacji w stosunku do uzyskanych bezpośrednio. Przyczyna tego tkwi w co najmniej asymptotycznej normalności rozkładu badanej cechy, którą jest stężenie jodu w surowicy krwi kobiet ciężarnych i ich nowo urodzonych dzieci.

Większe odchylenie od rozkładu normalnego badanej cechy będzie pociągało mniejszą dokładność w wielkościach oszacowań interesujących nas parametrów, aż do uzyskania wręcz błędnych wniosków. Z tych względów w przypadkach opracowań, w których zakładamy jedynie normalność rozkładu badanej cechy, stosowanie transformacji logarytmicznej jest wskazane. Pozwala bowiem niejednokrotnie na uzyskanie wniosków bliższych stanowi faktycznemu niż przy opracowaniu bezpośrednim.

Tab. 6. Podstawowe wielkości liczbowe stosowane w określaniu przedziału ufności i przedział ufności Scheffégo dla różnicy średnich wartości jodu w surowicy krwi matki i noworodka

Basic values conformed to construction of the interval of confidence and the Scheffé interval of confidence for various mean values o iodine concentration in the blood serum of mother and their newborn babies

Dane eksperymentalne:	Bez logarytmowania	Po zlogarytmowaniu
Wartość średnia u matek	$\bar{y}_1=7{,}7803$ mg%	$\bar{y}_1^*=0{,}8839 \rightarrow 7{,}653$ mg%
Wartość średnia u noworodków	$\bar{y}_2=6{,}7605$ mg%	$\bar{y}_2^*=0{,}8229 \rightarrow 6{,}651$ mg%
Półprzedział ufności	$L=0{,}84$	$L^*=0{,}049$
99% przedział ufności Scheffégo	(0,1798; 1,8598) mg%	(0,0120; 0,1100) $\rightarrow$ $\rightarrow$ (1,023; 1,289)* mg%

PIŚMIENNICTWO

1. Bartlett M. S.: Square-Root Transformation in Analysis of Variance. Jour. Roy. Stat. Soc. Suppl. 3, 68, 1936.
2. Bartlett M. S.: The Use of Transformation. Biometrics 3, 39—45, 1947.
3. Bartlett M. S., Kendall D. G.: The Statistical Analysis of Variance Heterogeneity and the Logarithmic Transformation. Jour. Roy. Stat. Soc. Suppl. 8, 128, 1946.
4. Burn J. H., Finney D. J., Goodwin L. G.: Biological Standarization. Geoffrey Cumberlage Oxford University Press, 1950, 3—48.
5. Curtiss J. H.: On the Transformations Used in Analysis of Variance. Ann. Math. Statist. 24, 7—10, 1953.
6. Elandt R.: Statystyka matematyczna w zastosowaniu do doświadczalnictwa rolniczego. PWN, Warszawa 1964, 107—112, 214—218.
7. Oktaba W.: Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa. PWN, Warszawa 1966.
8. Oktaba W.: Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie. PWN, Warszawa 1971, 30—31, 57—61.
9. Pawłowski Z.: Wstęp do statystyki. PWN, Warszawa 1965, 30—49.

Otrzymano 16 XI 1976.

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматриваются общие принципы логарифмической трансформации и анализируется возможность ее применения на конкретных примерах. Учитывая концентрацию йода (с распределением по крайней мере равному асимптотическому распределению Гаусса) в сыворотке крови беремен-

ных женщин и новорожденных проведено верификацию нулевых гипотез равных средним показателям непосредственно и после применения трансформации. Получение одинаковых результатов подтверждает пригодность логарифмической трансформации, особенно в тех случаях, когда нет уверенности в какой степени распределение исследованного свойства близкое нормальному распределению.

SUMMARY

This paper deals with the general application of logarithmical transformation and its utility by way of experiments. Considering the concentration of iodine (its distribution being at least asymptotically normal) in the serum of pregnant women and, then, their newborn children it was possible to verify the null hypothesis about the identity of the mean values before and after application of the transformation. The obtained results confirmed the usefulness of the logarithmical transformation especially when there is no certainty whether the distribution of the studied feature is close enough to the normal distribution.