ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXV, 27 SECTIO H 1991

Zakład Nauk Ekonomicznych
Filii UMCS w Rzeszowie

Elżbieta MAKSYMIAK

Koincydencja i efekt katalizy w modelu o macierzy korelacji minoryzowanej przez macierz uniwersalną

Coincidence and Effect of the Catalysis of the Model About the Matrix of the Correlation Minorized by the Universal Matrix

Z. Hellwig[1] sformułował pytanie następującej treści: jakie dodatkowe warunki muszą być spełnione, aby model opisywany przez parę korelacyjną ($R = [r_{ij}]_{kxk'} R^o = [r_i]_{kx1}$) taką, że: $r_i > 0$, $r_i \neq 1$, $r_i r_j > r_{ij} > 0$ $(i,j = 1,2,\ldots,k;\ i \neq j)$ posiadał własność koincydencji. Odpowiedzi na to pytanie poświęcona jest praca M. Kolupy i E. Maksymiak.[2] W pracy E. Maksymiak uogólniono warunki podane w pracy Kolupy oraz przedstawiono zupełnie nowe warunki dotyczące problemu Hellwiga. Z kolei w niniejszej pracy rozstrzygnięto następujący problem; jakie dodatkowe warunki muszą być spełnione, by model opisywany przez parę korelacyjną ($R = [r_{ij}]_{kxk}$, $R^o = [r_i]_{kx1}$) taki, że: $r_{ij} = r_i r_j q_i$, $r_i \neq 0$ $(i,j = 1,2,\ldots,k;\ i < j)$, $q_i > 1$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$ posiadał własność koincydencji oraz by nie występował w nim efekt katalizy. Przedstawiony problem sformułowano i udowodniono w postaci dwóch twierdzeń. Zanim jednak podamy te twierdzenia udowodnimy pewien lemat, z którego będziemy korzystać w trakcie ich dowodów.

Lemat:
Jeżeli elementy d_{ij} macierzy kwadratowej D stopnia m spełniają warunki:
a) $d_{ij} = 1$ dla $i > j$
b) $d_{jj} \geq 1$

---

[1] Z. Hellwig: *Przechodniość relacji skorelowania pomiędzy zmiennymi losowymi i płynące stąd wnioski ekonometryczne*, „Przegl. Statyst." 1976, z. 1.

[2] M. Kolupa: *Macierze brzegowe w badaniach ekonometrycznych*, PWE, Warszawa 1982; E. Maksymiak: *O własności koincydencji i efekcie katalizy dla modeli opisywanych przez pewne pary korelacyjne*, „Przegl. Statyst." 1986, z. 4.

c) $d_{jj} \geq d_{j-1j} \geq \ldots d_{1j} \geq 0$

d) nierówności ostre $d_{jj} > 1$ i $d_{jj} > d_{j-1j}$ zachodzą dla wszystkich, być może z wyjątkiem jednego j, to $\det D > 0$.

Dowód:

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej względem n. Gdy $m = 1$ to $\det D = 1$ czyli teza jest prawdziwa. Dla dowodu załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla $m = n$ i że macierz D stopnia $n + 1$ spełnia założenia lematu. Jeżeli $d_{n+1\,n+1} > d_{n\,n+1}$, to do n-tej kolumny wyznacznika macierzy D dodajemy $n + 1$-szą kolumnę pomnożoną przez wyrażenie postaci $x = \frac{d_{nn}-1}{d_{n+1\,n+1}-d_{n\,n+1}}$ a następnie odejmujemy n-ty wiersz od $n + 1$-szego. Wtedy rozwijając wyznacznik macierzy D względem $n + 1$-szego wiersza otrzymujemy równość

$$\det D = (d_{n+1\,n+1} - d_{n\,n+1}) \det D^*,$$

gdzie D^* jest macierzą stopnia n o elementach $d^*_{ij} = d_{ij}$ dla $j < n$ i $d^*_{in} = d_{in} + xd_{i\,n+1}$. W przypadku gdy $d_{n+1\,n+1} = d_{n\,n+1}$ od $n + 1$-szego wiersza wyznacznika macierzy D odejmujemy n-ty wiersz i wyznacznik ten rozwijamy względem $n + 1$-szego wiersza. Po tym przekształceniu wyznacznik macierzy D ma postać

$$\det D = -(1 - d_{nn}) \det D^*,$$

gdzie elementy macierzy D^* stopnia n spełniają zależność:

$$d^*_{ij} = d_{ij} \quad \text{dla} \quad j < n \quad \text{i} \quad d^*_{in} = d_{i\,n+1}.$$

Na mocy założenia d) prawdziwa jest nierówność

$$1 - d_{nn} < 0.$$

Ponieważ d^*_{ij} spełnia założenia a) - d) (w obu przypadkach) więc na mocy indukcji matematycznej $\det D > 0$.

Poniżej przedstawiamy zapowiedziane wcześniej twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Jeżeli

$$r_{ij} = r_i r_j q_i \quad \text{oraz} \quad r_{ij} = r_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k;\ i < j) \tag{1}$$

$$r_{ij} = 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k; i = j) \tag{2}$$

$$q_i > 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k - 1) \tag{3}$$

$$q_i \leq q_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k - 2) \tag{4}$$

$$r_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{5}$$

$$\frac{1}{q_i} > r_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{6}$$

to $R = [r_{ij}]_{k\times k}$ jest macierzą korelacji i model opisywany przez parę korelacyjną (R, R^o) ma własność koincydencji.

Dowód:
Aby udowodnić, że $R = [r_{ij}]_{k\times k}$ jest macierzą korelacji wystarczy wykazać, że macierz ta jest dodatnio określona. Niech M będzie minorem głównym stopnia $m \leq k$ macierzy R, który na mocy zależności (1) ma postać

$$M = \begin{vmatrix} 1 & r_1r_2q_1 & r_1r_3q_1 & \ldots & r_1r_mq_1 \\ r_1r_2q_1 & 1 & r_2r_3q_2 & \ldots & r_2r_mq_2 \\ r_1r_3q_1 & r_2r_3q_2 & 1 & \ldots & r_3r_mq_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1r_mq_1 & r_2r_mq_1 & r_3r_mq_3 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Po zastosowaniu odpowiednich przekształceń do wyznacznika M otrzymujemy następującą zależność

$$M = \prod_{p=1}^{m} r_p \begin{vmatrix} \frac{1}{r_1} & r_2q_1 & r_3q_1 & \ldots & r_mq_1 \\ r_1q_1 & \frac{1}{r_2} & r_3q_2 & \ldots & r_mq_2 \\ r_1q_1 & r_2q_2 & \frac{1}{r_3} & \ldots & r_mq_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1q_1 & r_2q_2 & r_3q_3 & \ldots & \frac{1}{r_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{p=1}^{m} r_p^2 q_p \begin{vmatrix} \frac{1}{r_1^2q_1} & \frac{q_1}{q_2} & \frac{q_1}{q_3} & \ldots & \frac{q_1}{q_m} \\ 1 & \frac{1}{r_2^2q_2} & \frac{q_2}{q_3} & \ldots & \frac{q_2}{q_m} \\ 1 & 1 & \frac{1}{r_3^2q_3} & \ldots & \frac{q_3}{q_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & \frac{1}{r_m^2q_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{p=1}^{m} r_p^2 q_p \det R^o.$$

Ponieważ jak łatwo zauważyć elementy macierzy R^o spełniają założenia lematu więc $\det R^o > 0$. Stąd na mocy zależności (3) otrzymujemy, że $M > 0$ czyli macierz R jest macierzą korelacji. Poniżej wykażemy jeszcze, że model opisywany przez parę korelacyjną (R, R^o) ma własność koincydencji tzn., że zachodzi równość

$$\operatorname{sign} a_i = \operatorname{sign} r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

gdzie a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ są elementami wektora A spełniającego równanie

$$RA = R^o$$

Ponieważ $\det R \neq 0$ więc na podstawie wzorów Cramera otrzymujemy, że

$$a_i = \frac{\det R_i}{\det R} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{7}$$

gdzie R_i jest macierzą, której i-tą kolumną jest wektor R^o, zaś pozostałe jej kolumny są odpowiednio równe kolumnom macierzy R. Z równości (7) wynika, że $\operatorname{sign} a_i = \operatorname{sign} \det R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Dla zakończenia dowodu wystarczy więc wykazać, że

$$\operatorname{sign} \det R_i = \operatorname{sign} r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{8}$$

Z określenia macierzy R_i wynika, że ma ona postać

$$R_i = \begin{bmatrix} 1 & r_1 r_2 q_1 & \ldots & r_1 r_{i-1} q_1 & r_1 & r_1 r_{i+1} q_1 & \ldots & r_1 r_k q_1 \\ r_1 r_2 q_1 & 1 & \ldots & r_2 r_{i-1} q_2 & r_2 & r_2 r_{i+1} q_2 & \ldots & r_2 r_k q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1 r_k q_1 & r_2 r_k q_2 & \ldots & r_{i-1} r_k q_{i-1} & r_k & r_{i+1} r_k q_{i+1} & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze znanych własności wyznaczników przekształcamy $\det R_i$ w następujący sposób:

$$\det R_i = \prod_{p=1}^{k} r_p \begin{vmatrix} \frac{1}{r_1} & r_2 q_1 & \ldots & r_{i-1} q_1 & 1 & r_{i+1} q_1 & \ldots & r_k q_1 \\ r_1 q_1 & \frac{1}{r_2} & \ldots & r_{i-1} q_2 & 1 & r_{i+1} q_2 & \ldots & r_k q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1 q_1 & r_2 q_2 & \ldots & r_{i-1} q_{i-1} & 1 & r_{i+1} q_{i+1} & \ldots & \frac{1}{r_k} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{k} r_p^2 q_p r_i \begin{vmatrix} \frac{1}{r_1^2 q_1} & \frac{q_1}{q_2} & \ldots & \frac{q_1}{q_{i-1}} & 1 & \frac{q_1}{q_{i+1}} & \ldots & \frac{q_1}{q_k} \\ 1 & \frac{1}{r_2^2 q_2} & \ldots & \frac{q_2}{q_{i-1}} & 1 & \frac{q_2}{q_{i+1}} & \ldots & \frac{q_2}{q_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & \frac{1}{r_k^2 q_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{k} r_p^2 q_p r_i \det R_i^o$$

Ponieważ, jak łatwo zauważyć, elementy macierzy R_i^o spełniają założenia lematu więc

$$\det R_i^o > o$$

co dowodzi równości (8).
Z kolei przedstawimy drugie z zapowiedzianych twierdzeń.

Twierdzenie 2.
Aby w modelu z twierdzenia 1 nie wystąpił efekt katalizy wystarcza by para korelacyjna (R, R^o) była regularna.

Dowód
Na mocy założenia (1) i (3) oraz własności regularności pary korelacyjnej wynika, że

$$\bigwedge_{\substack{i,j=1,2,\dots,k \\ i<j}} r_{ij} > 0.$$

Należy jeszcze pokazać, że

$$\bigwedge_{\substack{i,j=1,2,\dots,k \\ i<j}} r_{ij} \leq \frac{r_i}{r_j}.$$

Ze wzorów (1) i (4) mamy prawdziwą następującą nierówność

$$\bigwedge_{\substack{i,j=1,2,\dots,k \\ i<j}} r_{ij} = r_i r_j q_i \leq r_i r_j q_j. \tag{9}$$

Ale na mocy wzoru (6) zachodzi zależność

$$\bigwedge_{j=1,2,\dots,k} r_j q_j < \frac{1}{r_j} \tag{10}$$

więc korzystając ze wzoru (9) i (10) otrzymujemy, że

$$\bigwedge_{\substack{i,j=1,2,\dots,k \\ i<j}} r_{ij} < \frac{r_i}{r_j}.$$

Podsumowując należy stwierdzić, że twierdzenia przedstawione w niniejszej pracy rozszerzają zbiór specyficznych typów macierzy korelacji takich, że odpowiadający im model posiada własność koincydencji i nie występuje w nim efekt katalizy. Twierdzenia te uzupełniają zakres wiadomości na temat koincydencji i efektu katalizy liniowych modeli ekonometrycznych a jest to problem wciąż aktualny.

SUMMARY

The present paper demonstrates the way of solving the following problem: what additional conditions must be satisfied for the model described by the correlative pair ($R = (r_{ij})_{kxk}$, $R^o = (r_i)_{kx1}$) such that $r_{ij} = r_i r_j q_i$, $r_i \neq 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k;\ i\ j)$, $q\ 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ to have the properties of coincidence and not to cause an effect of catalysis.