ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
Vol. XX, 11 SECTIO H 1986

Wydział Ekonomiczny Filii UMCS w Rzeszowie

Adam GÓRAL

Identyfikacja okresu wahań występujących w ekonomicznych szeregach czasowych

Частотный анализ в идентификации периода колебаний, наблюдаемых в экономических временных рядах

Frequency Analysis in the Identification of the Period of Fluctuations Occuring in Economic Time Series

WSTĘP

Analiza okresowości należy do najważniejszych problemów związanych z badaniem ekonomicznych szeregów czasowych. Uwzględnienie wahań okresowych w modelach opisujących dynamikę zjawisk ekonomicznych wpływa bowiem na wzrost stopnia dopasowania tych modeli do danych empirycznych [1]. Ponieważ poddawane dotychczas badaniu ekonomiczne szeregi czasowe charakteryzowały się wahaniami o różnych okresach [2], szczególnego znaczenia nabiera zagadnienie identyfikacji okresu wahań. Bardzo przydatną do tego celu wydaje się być analiza procesu losowego w dziedzinie częstotliwości. Z wymienionych powodów w pracy omówiono najmocniejszy test okresowości prostej, czyli test Fishera. Podjęto również próbę zwrócenia uwagi na rolę funkcji spektralnej zarówno we wstępnej ocenie okresu wahań, jak i w ocenie istot-

[1] Zob. np. Z. Zieliński: *Metody analizy dynamiki i rytmiczności zjawisk gospodarczych*. PWN, Warszawa 1979.

[2] W warunkach gospodarki kapitalistycznej analizowano m. in. szeregi czasowe z następującymi cyklami: 40—60 lat (cykl Kondratieffa), 20—30 lat (cykl Kuznetsa), 15—20 lat (cykl charakterystyczny dla budownictwa niektórych krajów) i 2—4 lat (cykl Kitchina). W szeregach czasowych opisujących zjawiska ekonomiczne charakterystyczne dla gospodarki socjalistycznej analizowano głównie wahania sezonowe.

ności wahań o różnych okresach. Dużo miejsca poświęcono problemowi nie omawianemu dotychczas w polskiej literaturze statystycznej, a mianowicie tzw. okresowości złożonej. Uwagi teoretyczne poparto przykładami empirycznymi wykorzystując szeregi czasowe analizowane w pracach J. Steczkowskiego, A. Zeliasia [3] i Z. Zielińskiego [4].

KLASYCZNE METODY IDENTYFIKACJI OKRESU WAHAŃ WYSTĘPUJĄCYCH W EKONOMICZNYCH SZEREGACH CZASOWYCH

W większości prac poświęconych badaniu dynamiki zjawisk ekonomicznych analizowane są wahania okresowe o okresie ustalonym jedynie na podstawie merytorycznej oceny zjawiska opisywanego przez dany szereg czasowy. Niewiele jest natomiast opracowań prezentujących metody identyfikacji okresu wahań. W polskiej literaturze statystycznej ciekawe uwagi odnośnie wymienionego powyżej problemu zawarto w pracach A. Sokołowskiego, K. Szymanowicz [5] oraz Z. Zielińskiego [6]. W pierwszej ze wspomnianych prac dokonano identyfikacji okresu wahań na podstawie analizy wariancji. Omawiana metoda wymaga podziału n elementowego szeregu czasowego kolejno na 2, 3, ..., n/2 równe części. Dla każdego z podziałów weryfikowana jest hipoteza o równości wartości przeciętnych odpowiadających poszczególnym podgrupom.

Weryfikacja postawionej hipotezy dokonywaną jest zgodnie z zasadami jednoczynnikowej analizy wariancji [7]. Autorzy metody twierdzą, iż w przypadku, gdy dla danego podziału istnieją podstawy do odrzucenia hipotezy o równości wartości przeciętnych, można sądzić, że w szeregu występują wahania, o okresie równym liczbie porównywanych średnich.

Z. Zieliński sugeruje, iż do badania okresu wahań występujących w ekonomicznych szeregach czasowych wystarczające jest niekiedy zastosowanie testów nieparametrycznych, wśród których na uwagę zasługuje test zgodności Kendalla dla kilku zmiennych [8].

Największe znaczenie w identyfikacji okresu wahań przypisywane jest testowi R. A. Fishera [9]. Poniżej omówiona zostanie istota tego testu.

---

[3] J. Steczkowski, A. Zeliaś: *Analiza wariancyjna i kowariancyjna w badaniach ekonomicznych*. PWN, Warszawa 1982.

[4] Zieliński: *op. cit.*

[5] A. Sokołowski, K. Szymonowicz: *Analiza wariancyjna w badaniach struktury harmonicznej szeregu czasowego*. Folia Oeconomica, XIX, 1976.

[6] Zieliński: *op. cit.*

[7] Zob. np. Steczkowski, Zeliaś: *op. cit.*, s. 134—147.

[8] Zob. np. Zieliński: *op. cit.*, s. 178—180.

[9] Test ten pochodzi z prac R. A. Fishera napisanych w latach 1929, 1930, 1940.

Załóżmy, że szereg czasowy $\{x_t;\ t=1, 2, ..., N\}$ opisywany jest przy pomocy następującego modelu:

$$x_t = f(t) + u_t, \quad t=1, 2, ..., N \tag{1}$$

gdzie:

$f(t)$ — funkcja okresowa z okresami będącymi podzielnikami liczby obserwacji N,

u_t — błąd losowy spełniający warunki:

$$E(u_t) = 0, \quad E(u_t^2) = \delta^2, \quad E(u_t u_s) = 0 \text{ dla } t \neq s$$

Z kryterium Weierstrassa [10] wynika, iż funkcję f(t) można wyrazić następująco:

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} [\alpha_j \cos(2\Pi jt/N) + \beta j \sin(2\Pi jt/N)], \tag{2}$$

gdy $N=2n+1$

lub

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} [\alpha_j \cos(2\Pi jt/N) + \beta_j \sin(2\Pi jt/N)] + \alpha_{N/2}(-1)^t, \tag{3}$$

gdzie $N=2n$.

Amplituda drgań odpowiadających j/N opisywana jest w omawianym przypadku wzorem o postaci:

$$\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

gdzie:

R_j — amplituda odpowiadająca j-tej częstotliwości,

α_j, β_j — współczynniki wielomianów (2) i (3).

Warto zaznaczyć, że harmonika z okresem 2 uwzględniona zostaje jedynie w przypadku parzystej liczby obserwacji. T. W. Anderson [11] dokonał oceny parametrów α_0, $\alpha_{N/2}$, α_j, β_j metodą najmniejszych kwadratów, uzyskując następujące zależności:

$$a_0 = N^{-1} \sum_{t=1}^{N} x_t, \tag{5}$$

---

[10] Zob. A. Smoluk: *Podstawy teorii aproksymacji i s.-funkcje*. PWE, Warszawa 1974.

[11] T. W. Anderson: *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley and Sons, Nowy Jork 1971.

$$a_j = 2N^{-1}\sum_{t=1}^{N} x_t \cos(2\Pi jt/N), \quad j = 1, 2, ..., n \tag{6}$$

$$b_j = 2N^{-1}\sum_{t=1}^{N} x_t \sin(2\Pi jt/N), \quad j = 1, 2, ..., n \tag{7}$$

$$a_{N/2} = N^{-1}\sum_{t=1}^{N} x_t(-1)^t.$$

Na podstawie wzorów (4), (6), (7) uzyskiwana jest ocena amplitudy R_j w formie:

$$\hat{R}_j = \sqrt{a_j^2+b_j^2}. \quad j = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

Hipotezę, że szereg czasowy $\{x_t;\ t=1, 2, ..., N\}$ charakteryzuje się brakiem wahań okresowych można zapisać w postaci:

$$H_0 : f(1)=f(2) ... =f(N) \tag{9}$$

lub

$$H_0 : R_1=R_2= ... =R_n=0. \tag{10}$$

Jeżeli hipotezy alternatywne przyjmą formę:

$$H_1 : R_j^2>0, \text{ pozostałe } R_i^2 = 0, \quad \begin{matrix}(i=1, 2, ..., n;\\ j=1, 2, ..., n)\end{matrix}$$

to mówimy o badaniu okresowości prostej [12]. W przypadku, gdy w hipotezie alternatywnej zakłada się, iż amplitudy różnią się istotnie od 0 dla dwóch lub więcej częstotliwości, to mamy do czynienia z analizą okresowości złożonej [13]. Hipotezę taką można przykładowo przedstawić w następujący sposób:

$$H_{jk} : R_j^2>0, \quad R_k^2>0, \quad \bigwedge_{l\neq j,\, k} R_l^2 = 0. \quad \begin{matrix}(j=1, 2, ..., n)\\ (k=1, 2, ..., n)\\ (l=1, 2, ..., n)\end{matrix}$$

T. W. Anderson [14] wykazał, że najmocniejszym testem okresowości dla hipotezy głoszącej okresowość prostą jest test Fishera. Podstawę tego testu stanowi przy uwzględnieniu wcześniejszych oznaczeń statystyka o postaci:

$$S=\max_{1\leqslant j\leqslant n} Y_j, \tag{11}$$

[12] W języku angielskim: simple periodicity.

[13] W języku angielskim: compound periodicity.

[14] Anderson: *op. cit.*

gdzie:

$$Y_j = \hat{R}_j^2 / \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i^2 . \tag{12}$$

Hipoteza zerowa jest w omawianym przypadku odrzucana, gdy wyznaczona z wzoru (11) wartość statystyki S przekroczy odczytaną z tablicy 1 wartość krytyczną g_F.

Konieczność analizy okresowości złożonej wynika z często spotykanej definicji wahań okresowych [15], a mianowicie: wahania okresowe o okresie P jednostek czasu stanowią sumę wahań periodycznych, których najkrótszą wspólną długością cyklu jest P jednostek czasu.

A. Siegel [16] podkreśla, że praktycznie nie ma powodów, aby sądzić, iż test Fishera charakteryzuje się wysoką mocą w warunkach hipotezy alternatywnej dotyczącej okresowości złożonej. Autor proponuje więc, aby badania nad okresowością złożoną prowadzić na podstawie statystyki utworzonej z wszystkich większych od g_F wartości Y_j. Ponieważ z teoretycznego punktu widzenia łatwo jest podać przykład, w którym występowaniu okresowości złożonej towarzyszy brak według testu Fishera okresowości prostej, A. Siegel zwraca uwagę, iż rozważane zagadnienie może być badane na podstawie następującej statystyki:

$$T = \sum_{j=1}^{n} (Y_j - \lambda g_F)_+ , \tag{13}$$

gdzie:

λ — stała określona przez autora testu na podstawie badań heurystycznych,

$(Y_j - \lambda g_F)_+$ — oznacza max $[(Y_j - \lambda g_F), 0]$

Hipotezę o braku wahań okresowych odrzuca się na rzecz hipotezy o okresowości złożonej, gdy T przekroczy odczytaną z tabeli 1 wartość krytyczną.

Dla $\lambda = 1$ statystyka T może być uważana za modyfikację testu Fishera do badania okresowości złożonej. Efektem wielu badań przeprowadzonych przez E. Siegela na szeregach sztucznie generowanych jest stwierdzenie, że w praktyce najlepsze rezultaty uzyskiwane są dla $\lambda = 0,4$. Wyznaczone przez wspomnianego autora krzywe mocy testu w zależności od λ zwracają uwagę na fakt, że gdy hipoteza alternatywna zakłada okresowość złożoną, moc testu jest znacznie wyższa dla $\lambda = 0,4$ niż dla $\lambda = 1$.

---

[15] Zob. S. Giembicki: *Wybrane problemy analizy ekonomicznych szeregów czasowych*. GUS, Warszawa 1974, s. 38.

[16] A. Siegel: *Testing for Periodicity in a Time Series*. Journal of the American Statistical Association, nr 370, 1980.

Tab. 1 Wartości krytyczne t_F dla T_F i g_F dla S_F
The critical values t_F for T_F and g_F for S_F

Poziom istotności	n	g_F	$0{,}8\, g_F$	$t_{0,8}$	$0{,}6 g_F$	$t_{0,6}$	$0{,}4 g_F$	$t_{0,4}$
	5	0,684	0,547	0,137	0,410	0,274	0,274	0,412
	6	0,616	0,493	0,123	0,370	0,246	0,246	0,381
	7	0,561	0,449	0,112	0,337	0,225	0,224	0,356
	8	0,516	0,413	0,103	0,309	0,208	0,206	0,334
	9	0,477	0,382	0,0955	0,286	0,193	0,191	0,316
	10	0,445	0,356	0,0891	0,267	0,181	0,178	0,301
$\alpha = 0{,}05$	15	0,335	0,268	0,0673	0,201	0,140	0,134	0,247
	20	0,270	0,216	0,0546	0,162	0,116	0,108	0,213
	25	0,228	0,182	0,0462	0,137	0,0997	0,0912	0,190
	30	0,198	0,158	0,0402	0,119	0,0880	0,0791	0,173
	35	0,175	0,140	0,0357	0,105	0,0791	0,0701	0,160
	40	0,157	0,126	0,0322	0,0944	0,0721	0,0630	0,150
	50	0,131	0,105	0,0270	0,0788	0,0616	0,0525	0,133
	5	0,789	0,631	0,158	0,473	0,315	0,315	0,473
	6	0,722	0,577	0,144	0,433	0,289	0,289	0,433
	7	0,664	0,532	0,133	0,399	0,266	0,266	0,399
	8	0,615	0,492	0,123	0,369	0,246	0,246	0,372
	9	0,573	0,458	0,115	0,344	0,229	0,229	0,349
	10	0,536	0,429	0,107	0,322	0,214	0,214	0,329
$\alpha = 0{,}01$	15	0,407	0,326	0,0814	0,244	0,164	0,163	0,262
	20	0,330	0,264	0,0660	0,198	0,134	0,132	0,222
	25	0,278	0,223	0,0557	0,167	0,114	0,111	0,194
	30	0,241	0,193	0,0484	0,145	0,0993	0,0965	0,174
	35	0,213	0,171	0,0428	0,128	0,0884	0,0854	0,159
	40	0,192	0,153	0,0385	0,115	0,0799	0,0766	0,146
	50	0,160	0,128	0,0321	0,0957	0,0673	0,0638	0,128

Zródło: A. Siegel: *Testing for Periodicity in a Time Series*. Journal of the American Statistical Associaton, nr 370, czerwiec 1980.

Dużą rolę w identyfikacji okresu wahań występujących w ekonomicznych szeregach czasowych może odgrywać również tzw. funkcja spektralna. Możliwości wykorzystania tej funkcji do analizy okresowości procesów losowych zostaną omówione w następnej części pracy.

FUNKCJA SPEKTRALNA W BADANIU OKRESOWOŚCI PROSTEJ I ZŁOŻONEJ

Niech $\{x_t;\ t=1, 2, ..., n\}$ oznacza realizację stacjonarnego w szerszym sensie i ergodycznego procesu losowego $\{\tilde{x}_t;\ t=0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ z funkcją autokowariancji o postaci:

$$\gamma(\tau) = E[(X_t - M)(X_{t+\tau} - M)], \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{14}$$

gdzie:

τ — rząd funkcji autokowariancji,
M — wartość oczekiwana procesu $\{X_t\}$.

Pod pojęciem funkcji spektralnej (widmowej) procesu $\{X_t\}$ rozumiana jest transformata Fouriera funkcji autokowariancji, czyli:

$$p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i2\Pi fk}, \quad -1/2 \leq f \leq 1/2 \tag{15}$$

gdzie: p(f) oznacza wartość funkcji spektralnej dla częstotliwości f.

Zgodny i asymptotycznie nieobciążony estymator funkcji p(f) przedstawiany jest często w następujący sposób:

$$\hat{p}(f_j) = \hat{\gamma}(0) + 2 \sum_{k=1}^{m} \hat{\gamma}(k)\, w(k) \cos(2\Pi f jk), \tag{16}$$

gdzie:

$\hat{\gamma}(k)$ oznacza wartość estymatora funkcji autokowariancji w punkcie k uzyskaną z wzoru o postaci:

$$\hat{\gamma}(k) = n^{-1} \sum_{=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \tag{17}$$

$$\bar{x} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} x_t, \tag{18}$$

m — punkt odcięcia funkcji autokowariancji (k = =0, 1, ..., m),
w(k) — funkcja wagowa, której transformata Fouriera nazywana jest oknem widmowym,
$f_j = j/2m$ (j = 0, 1, ..., m) — częstotliwość, dla której wyznaczana jest wartość widma.

Zapewnienie wysokiej efektywności estymacji funkcji spektralnej wymaga szeregu czasowego o dużej liczbie obserwacji ($n > 100$) oraz właściwego doboru wartości punktu odcięcia m i funkcji wagowej w(k) [17].

Wykorzystanie funkcji spektralnej do analizy okresowości poprzedzone było przez długi okres zastosowaniem do tego celu tzw. funkcji pe-

---

[17] Problemy te omawiane są m.in. w pracy G. M. Jenkinsa: *General Considerations in the Analysis of Spectra*, Technometrics, vol. 3, nr 2, maj 1961.

riodogramowej [18]. Warto zaznaczyć, iż funkcja periodogramowa, która jest niezgodnym estymatorem funkcji spektralnej, może być przedstawiona w następujący sposób:

$$I_n(f) = n^{-1}\left|\sum_{t=1}^{n} x_t e^{-i2\Pi ft}\right|^2 \quad -1/2 \leq f \leq 1/2 \tag{19}$$

lub

$$I_n(f) = \hat{\gamma}(0)+2\sum_{k=1}^{n-1}\hat{\gamma}(k)\cos(2\Pi fk), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2 \tag{20}$$

gdzie:

$\{x_t;\ t=1, 2, ..., n\}$ oznacza analizowany szereg czasowy, f jest częstotliwością,

$\hat{\gamma}(k);\ k=1, 2, ..., n-1$ oznacza ocenę wartości funkcji autokowariancji w punkcie k.

O występowaniu wahań okresowych w badanym szeregu czasowym świadczą istotne wartości periodogramu dla odpowiednich częstotliwości. Odpowiedź na pytanie dlaczego funkcja widmowa spełnia tak istotną rolę w analizie okresowości procesów losowych można znaleźć m. in. w pracach L. Dziembały i K. Zadory [19], C. W. J. Grangera [20], oraz M. Nerlove'a [21].

L. Dziembała i K. Zadora podkreślają, iż analizę okresowości procesu losowego sprowadza się do poszukiwania na wykresie funkcji widmowej takich miejsc, w których gwałtownie wzrasta wartość tej funkcji. Jeżeli taki wzrost jest obserwowany w punktach $f_1, f_2, ..., f_k$, to można wnioskować, iż rozważany proces jest cykliczny o okresach $1/f_1, 1/f_2, ..., 1/f_k$. W przypadku, gdy w całym przedziale $\langle 0, 1/2\rangle$ funkcja p(f) jest bardzo gładka, to w badanym procesie nie występują wahania cykliczne.

M. Nerlove [22] stwierdza, że sezonowość można zdefiniować jedynie przy wykorzystaniu pojęcia „funkcja spektralna". Wspomniany autor pod pojęciem sezonowości rozumie tę charakterystykę szeregu czasowego, która powoduje wzrost wartości funkcji spektralnej dla częstotliwo-

[18] D. R. Brillinger podkreśla w pracy pt. *Wriemiennyje riady* (MIR, Moskwa 1980), że Shuster zastosował analizę periodogramową do badania okresowości już w latach 1894 i 1897.

[19] L. Dziembała, K. Zadora: *Zastosowanie analizy widmowej do badania wahań cyklicznych*. Przegląd Statystyczny, nr 19, 1971.

[20] C. W. J. Granger: *The Typical Spectral Shape of An Economic Variable*. Econometrica, vol. 34, nr 1, styczeń 1966.

[21] M. Nerlove: *Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures*. Econometrica, vol. 32, nr 3, lipiec 1964.

[22] Nerlove: *op. cit.*

ści sezonowych. C. W. J. Granger[23] omawiając problem typowej dla ekonomicznych szeregów czasowych krzywej spektralnej, formułuje prawo, które również świadczy o tym, iż okres wahań znajduje odzwierciedlenie w wartościach widma. Prawo to brzmi następująco: „(...) jeżeli dokonamy dekompozycji występujących w ekonomicznych szeregach czasowych wahań długookresowych na składowe częstotliwościowe, to amplitudy tych składowych będą łagodnie zmniejszały się wraz ze zmniejszaniem się okresu".

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, iż mimo że rola analizy częstotliwościowej w ocenie wahań okresowych jest niepodważalna, to większość tego typu badań ma charakter subiektywny. Często wykorzystywane jest bowiem stwierdzenie, że w szeregu czasowym występują wahania cykliczne w okresie T, gdy wartość funkcji spektralnej lub periodogramowej w punkcie 1/T powoduje istnienie w wykresie wymienionych funkcji tzw. „wierzchołka". Wydaje się, że nadanie tego typu badaniom obiektywnego charakteru należy ściśle powiązać z problemem badania istotności wartości funkcji spektralnej. Problem ten omówiony został już w 1961 roku przez E. J. Hannana[24]. Wymieniony autor podjął próbę weryfikacji hipotezy o niezależności zmiennych tworzących dany proces losowy. Ponieważ krzywa spektralna jest w przypadku procesu czysto losowego linią prostą równoległą do osi częstotliwości, weryfikowana hipoteza jest równoważna hipotezie (10) z testu Fishera. E. J. Hannan[25] wykazał, że statystyka o postaci:

$$K(f_j) = [I_n(f_j)/p(f_j)] / \sum_{j=1}^{m} [I_n(f_j)/p(f_j)], \tag{21}$$

gdzie:

$f_j = j/2m \quad j = 1, 2, ..., m$

$I_n(f_j)$ — wartość funkcji periodogramowej w punkcie f_j,

$p(f_j)$ — wartość funkcji spektralnej w punkcie f_j,

charakteryzuje się rozkładem asymptotycznie zbieżnym do rozkładu statystyki Y_j z testu Fishera. Podstawę podejmowanych na podstawie rozważanego testu decyzji stanowią wartości następującej statystyki:

$$S_H = \max_j \hat{K}(f_j) = \max_j \left\{ [I_n(f_j)/\hat{p}(f_j)] / \sum_{j=1}^{m} [I_n(f_j)/\hat{p}(f_j)] \right\}, \tag{22}$$

gdzie: $\hat{p}(f_j)$ oznacza ocenę wartości funkcji spektralnej w punkcie f_j.

---

[23] Granger, *op. cit.*

[24] E. J. Hannan: *Testing for a Jump in the Spectral Function*. Journal of the Royal Statistical Society, B, vol. 23, nr 2, 1961.

[25] E. J. Hannan: *Analiz wriemiennych riadow*. Nauka, Moskwa 1964.

W przypadku gdy uzyskana na podstawie określonego szeregu czasowego wartość statystyki S_H przekracza odczytaną z tablicy 1 wartość krytyczną g_F, hipotezę o braku wahań okresowych należy odrzucić.

Przytoczone w drugiej części pracy twierdzenie T. W. Andersona odnośnie mocy testu Fishera dowodzi, iż test ten powinien odgrywać decydującą rolę w badaniu okresowości prostej. Wydaje się natomiast, że związana z funkcją spektralną statystyka $K(f_j)$ może być pomocna przy konstrukcji testu służącego do weryfikacji hipotezy o okresowości złożonej.

Wykorzystanie uwag A. Siegela odnośnie statystyki T_F prowadzi do wniosku, iż okresowość złożoną można badać na podstawie statystyki wyrażonej w następujący sposób:

$$T_S = \sum_{i=1}^{m} \left[K(f_j) - \lambda g_F\right]_+ , \tag{23}$$

gdzie: λ zgodnie z wcześniejszymi uwagami przyjmuje się na poziomie 0,4.

Ponieważ rozkład T_s jest asymptotycznie zbieżny do rozkładu T_F, hipoteza o braku wahań okresowych w danym szeregu czasowym jest odrzucana, gdy wartość statystyki T_s przekracza odczytaną z tablicy 1 wartość krytyczną.

BADANIA EMPIRYCZNE

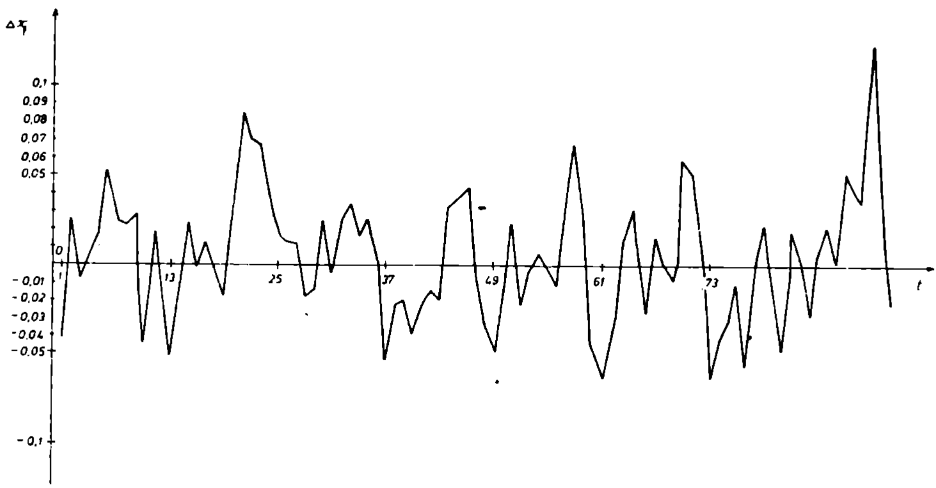
Przedstawiony na ryc. 1 szereg odchyleń od trendu wskaźników wykorzystania taboru PKS w Szczecinie w poszczególnych miesiącach lat 1965—1972 analizowany był przez Z. Zielińskiego[26]. Autor ten weryfikował hipotezę o występowaniu w wymienionym szeregu wahań sezonowych na podstawie nieparametrycznego testu Kendalla. Test ten pozwolił stwierdzić istotność analizowanych wahań. Analogiczne badanie przeprowadzone zostanie przy wykorzystaniu testów: Fishera i Hannana. Postawiono następujące hipotezy:

$$H_0 : R_1 = R_2 = \ldots R_n, \qquad n = 48$$

$$H_j : R_j > 0, \qquad R_i = 0 \qquad \bigwedge_{i \neq j} i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Na podstawie wzorów: (5), (6), (7) i (9) wyznaczono dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n$ oceny amplitud R_j. Wartość statystyki S, która jest spraw-

[26] Zieliński: op. cit., s. 180.



Ryc. 1. Odchylenie od trendu wskaźników wykorzystania taboru PKS w Szczecinie w latach 1965—1972

Deviations from trend of coefficients of using Polish Motor Transport (PKS) in Szczecin in 1965—1972

dzianem w teście Fishera, uzyskano z zależności (11) i (12) przyjmując $n=48$. Wartość ta wyniosła 0,27. Ponieważ S przekracza odczytaną z tablicy 1 dla $\alpha=0,05$ i $n=48$ wartość krytyczną g_F ($g_F \approx 0,14$), to hipotezę H_0 należy odrzucić na rzecz alternatywy H_j, gdzie[27] $j=8$. Widać więc, że test Fishera potwierdza sąd Z. Zielińskiego, iż w szeregu występują wahania o okresie rocznym. Prostą okresowość przedstawionego na ryc. 1 szeregu, analizowano również przy pomocy spektralnego testu Hannana. Wartość statystyki S_H okazała się jednak nieistotna[28] na poziomie istotności $\alpha=0,01$ i dla $m=24$.

Na ryc. 2 przedstawiono szereg czasowy zawierający informacje odnośnie skupu mleka przez spółdzielnie mleczarskie w woj. krakowskim w latach 1961—1968. J. Steczkowski i A. Zeliaś[29], wykorzystując analizę wariancji stwierdzili istotność występujących w danym szeregu wahań sezonowych i trendu. Wykonując, analogiczne jak w poprzednim przypadku, obliczenia uzyskano następujące wartości S_F i S_H : $S_F \approx 0,38$, $S_H \approx 0,9$. Wartości te przekraczają odczytane z tablicy 1 wartości krytyczne[30] g_F, co potwierdza wniosek J. Steczkowskiego i A. Zeliasia.

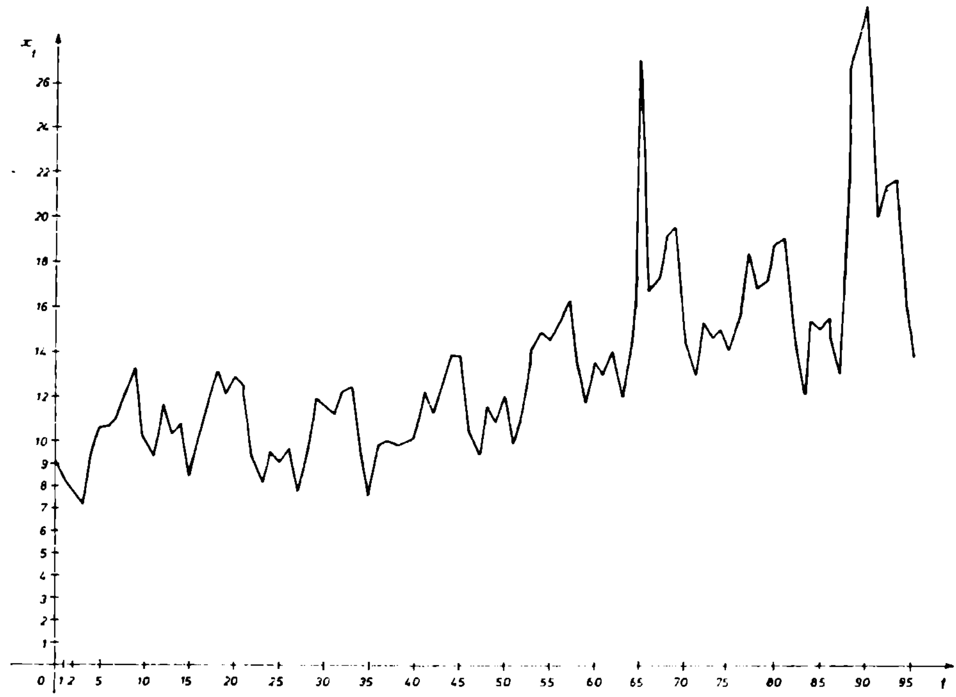
---

[27] Okazało się, że $S = Y_8$.

[28] $S_H = 0,11$, a $g_F = 0,23$.

[29] Steczkowski, Zeliaś: *op. cit.*

[30] W tym przypadku wartości krytyczne dla S_F oraz S_H odczytywane są odpowiednio przy założeniu, że $\alpha = 0,05$, $n = 48$ i $\alpha = 0,05$, $n = 24$.



Ryc. 2. Skup mleka przez spółdzielnie mleczarskie w woj. krakowskim w latach 1961—1968

Purchasing milk by co-operative creamery in Kraków province in 1961—1968

Podobne badanie zdecydowano się przeprowadzić dla szeregu uzyskanego w wyniku eliminacji trendu występującego w tzw. szeregach jednoimiennych czasokresów [31]. Do eliminacji trendu wykorzystano różnicowanie poszczególnych wartości szeregu wg następującej zależności:

$$z_{ik} = x_{i+1,k} - x_{i,k}. \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, ..., 7 \text{ (lata)} \\ j = 1, 2, ..., 12 \text{ (miesiące)} \end{array}$$

Statystyki S_F, S_H przyjęły odpowiednio wartości: 0,11 i 0,56. Widać więc, że jedynie test Hannana pozwolił stwierdzić, iż w szeregu $\{z_{ik}\}$ występują istotne wahania okresowe.

Warto zaznaczyć, że w rozważanych przypadkach nie było potrzeby wykorzystywania testów dotyczących badania okresowości złożonej. Stosowanie tych testów zaleca się wówczas, gdy w szeregu stwierdza się brak wahań określonego typu. Może się bowiem okazać, że wartości sta-

[31] Zob. A. Zeliaś: *Teoria prognozy*. PWE, Warszawa 1979.

tystyk Y_j, $K(f_j)$, pomimo iż są nieistotne z punktu widzenia testów Fishera i Hannana, to łącznie dają wartość T_F oraz T_S przekraczające odczytaną z tablicy 1 wartość krytyczną t_λ

ZAKOŃCZENIE

O dużej roli, jaką można przypisać analizie procesów losowych w dziedzinie częstotliwości decyduje niewątpliwie fakt, iż wahania okresowe o okresie P należy traktować jako sumę wahań periodycznych o okresach, których najkrótszą wspólną długością cyklu jest P jednostek czasu. Prezentowane w pracy uwagi teoretyczne oraz badania empiryczne upoważniają do sformułowania następujących wniosków:

1) badanie okresowości prostej należy prowadzić w oparciu o test Fishera,

2) wykres funkcji spektralnej można jedynie wykorzystać do wstępnej oceny okresu wahań występujących w danym szeregu czasowym,

3) obiektywna ocena istotności „wierzchołków" występujących w krzywej spektralnej wymaga zastosowania testu Hannana,

4) w sytuacji, gdy testy okresowości prostej prowadzą do odrzucenia hipotezy o występowaniu w szeregu wahań okresowych, badanie należy uzupełnić o analizę okresowości złożonej na podstawie testu A. Siegela lub testu zaproponowanego w pracy.

Na zakończenie warto zaznaczyć, że obliczenia do niniejszej pracy wykonano w ŚCO CYFRONET — Kraków na podstawie własnych programów.

РЕЗЮМЕ

В статье обращается внимание на роль частотного анализа в исследовании периодичности случайных процессов. Обсуждается наиболее мощный критерий простой периодичности — критерий Фишера, демонстрируются достоинства спектральной функции в идентификации периода колебаний, наблюдаемых в экономических временных рядах. Большое внимание уделено не обсуждаемой в польской статистической литературе проблеме исследования сложной периодичности. Предлагается критерий, использующий значение спектральной функции для анализа этой проблемы.

Теоретические замечания проверяются на основании анализа периодичности временных рядов, описывающих экономические явления.

SUMMARY

The work directs attention to the role of frequency analysis in investigating periodicity of stochastic processes. The most powerful test of simple periodicity has been discussed, that is Fisher's test and advantages of spectral function have been

presented in identifying the period of fluctuations occurring in economic time series Much space has been devoted to the problem to investigating complex periodicity, the problem which has not been discussed in Polish statistical literature. The author proposed a test taking advantage of the values of spectral function for the analysis of the problem.

Theoretical remarks have been verified on the basis of the analysis of periodicity of time series describing economic phenomena.