

Adam GÓRAL

**Spektralna ocena zgodności modelu ARIMA  
z danymi empirycznymi**

Спектральная оценка соответствия модели АРИМА эмпирическим данным

Spectral Test of the Goodness of Fit of ARIMA Model

WSTĘP

Widmo mocy procesów stochastycznych stanowi ważne narzędzie w analizie zjawisk ekonomicznych. Pozwala ono bowiem określić wpływ różnych częstotliwości na wariancję procesu oraz wyróżnić istotne wahania periodyczne. Badania, których rezultaty zawarto w pracy ([4]) potwierdzają hipotezę o celowości wykorzystania funkcji spektralnej do oceny wariancji procesu z istotną autokorelacją.

Celem niniejszej pracy jest zastosowanie funkcji widmowej do oceny zgodności modelu ARIMA<sup>1</sup>, z danymi empirycznymi.

Pierwsza część rozważań poświęcona jest zagadnieniom teoretycznym związanym z procesami ARIMA i testem równoważności widma mocy. Rezultaty identyfikacji modelu opisującego kształtowanie się cen giełdowych złota w latach 1977—1979 oraz ocenę zgodności tego modelu przy pomocy proponowanej przez autora procedury zawarto w końcowej części pracy.

LINIOWE MODELE TYPU ARIMA I ICH IDENTYFIKACJA

Liniiowe modele typu ARIMA wykorzystuje się do opisu zarówno stacjonarnych, jak i niestacjonarnych procesów losowych. Niniejsze rozważania ograniczono jedynie do tych procesów, które okazały się istotne

<sup>1</sup> Ang. Autoregressive Integrated Moving Average.

z punktu widzenia budowy modelu przedstawiającego kształtowanie się cen giełdowych złota w latach 1977—1979. Dokładną prezentację szerokiej klasy procesów ARIMA zawarto m. in. w pracach ([1]) i ([3]).

Niech  $B$  oznacza operator cofnięcia <sup>2</sup>, zaś  $\nabla$  operator różnicowania <sup>3</sup> o podstawie 1, czyli:

$$Bz_t = z_{t-1} \quad (1)$$

$$B^m z_t = z_{t-m} \quad (2)$$

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1 - B) z_t \quad (3)$$

gdzie  $\{z_t\}$  oznacza ciąg losowy.

Przy takich założeniach ogólną postać procesu typu ARIMA ( $p, d, q$ ) można przedstawić w następujący sposób:

$$F(B) \nabla^d z_t = G(B) a_t \quad (4)$$

gdzie

$\{a_t\}$  — proces czysto losowy <sup>4</sup>

$\{z_t\}$  — badany ciąg losowy

$$F(B) = 1 - l_1 B - l_2 B^2 - \dots - l_p B^p$$

$$\nabla^d z_t = (1 - B)^d z_t = w_t$$

W przypadku, gdy  $d = 0$  proces (4) zaliczany jest do klasy procesów ARMA ( $p, q$ ). Jeżeli  $d = 0$  i  $q = 0$  wzór (4) odpowiada procesowi autoregresywnemu rzędu  $p$  (AR( $p$ )). Dla  $d = 0$  i  $p = 0$  mamy do czynienia z procesem średniej ruchomej rzędu  $q$  (MA( $q$ )). Operacja różnicowania  $\nabla^d z_t$  ma na celu doprowadzenie ciągu  $\{z_t\}$  do stacjonarności.<sup>5</sup>

Jednym z najistotniejszych zagadnień związanych z procesami autoregresywnymi jest identyfikacja modeli opisujących te procesy. Wydaje się, że z praktycznego punktu widzenia najbardziej trafne uwagi zawarto w pracy (3, s. 173—207). Ogólnie mówiąc zagadnienie identyfikacji można sprowadzić do następujących etapów:

1) takiego różnicowania ciągu  $\{z_t\}$ , które dałoby stacjonarny ciąg  $\{w_t\}$ .

<sup>2</sup> Ang. backward shift operator.

<sup>3</sup> Ang. backward difference operator.

<sup>4</sup> Proces jest czysto losowy, gdy:

$$E(a_t) = 0$$

$$i \quad E(a_t, a_{t+s}) = \begin{cases} 0 & s \neq 0 \\ \delta_{a^2} & s = 0 \end{cases}$$

<sup>5</sup> Autor ma na myśli stacjonarność w szerszym sensie. Ciekawe uwagi odnośnie poszczególnych rodzajów stacjonarności zawarto m. in. w pracy (11).

2) identyfikacji modelu typu ARMA dla  $\{w_t\}$ .

Podstawę procedury identyfikacyjnej zaproponowanej przez G. E. P. Boxa i G. M. Jenkinsa stanowi zachowanie się funkcji autokorelacji ( $\rho_k$ ) i autokorelacji cząstkowej ( $l_{kk}$ ) procesu  $\{w_t\}$ . Jeżeli ciąg  $\{w_t\}$  uzyskany z  $\{z_t\}$  przez różnicowanie ( $w_t = \nabla^d z_t$ ) charakteryzuje się dość szybko wygasającą funkcją autokorelacji, to istnieją przesłanki do stwierdzenia, że  $\{w_t\}$  jest stacjonarny.

Można więc w takim przypadku przystąpić do identyfikacji procesu ARMA ( $p, q$ ). Autorzy pracy (3, s. 175) stwierdzają, że dla procesu mieszanego zawierającego AR( $p$ ) i MA( $q$ ) w zakresie funkcji autokorelacji istnieje możliwość zaobserwowania nakładającej się gasnącej fali sinusoidalnej i wykładniczej po pierwszych  $(q-p)$  rzędach. W zachowaniu się funkcji autokorelacji cząstkowej podobną prawidłowość dostrzega się po  $(p-q)$  rzędach. Przedstawione w końcowej części pracy badania empiryczne wymagają krótkiej charakterystyki procesów ARIMA o następujących parametrach: a) (2, 2, 0), b) (0, 1, 0), c) (0, 1, 1).

Ad. a) Proces ARIMA (2, 2, 0) wyraża się zależnością postaci:

$$(1 - l_1 B - l_2 B^2) \nabla^2 z_t = a_t, \quad (5)$$

gdzie

$\{a_t\}$  jest procesem czysto losowym.

Załóżmy, że  $r_i$ ; ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) oznacza ocenę teoretycznej autokorelacji rzędu ( $i$ ) ciągu  $\nabla^2 z_t$ ; ( $t = 3, \dots, n$ ). Oceny parametrów  $l_1$  i  $l_2$  można wyznaczyć na podstawie następujących równań:

$$\hat{l}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}, \quad (6)$$

$$\hat{l}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} \quad (7)$$

Macierz wariancji i kowariancji estymatorów  $l_1$  i  $l_2$  szacujemy wykorzystując wzór postaci:

$$\hat{V}(\hat{l}_1, \hat{l}_2) = n^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \hat{l}_2^2 & -\hat{l}_1(1 + \hat{l}_2) \\ -\hat{l}_1(1 + \hat{l}_2) & 1 - \hat{l}_2^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Podstawę estymacji wariancji procesu czysto losowego  $\{a_t\}$  stanowi następująca zależność:

$$\hat{\delta}_a^2 = c_0(1 - r_1 \hat{l}_1 - r_2 \hat{l}_2) \quad (9)$$

gdzie

$\hat{\delta}_a^2$  — ocena wariancji  $\{a_t\}$ ,

$c_0$  — ocena wariancji  $\{w_t\}$ .

\* Dokładne omówienie tych funkcji można znaleźć w pracach: (1) i (3).

W pracy (3, s. 176) podkreśla się, że proces jest typu ARIMA (2, 2, 0), jeśli wykres funkcji autokorelacji ciągu  $\{w_t\}$  ( $w_t = z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}$ ;  $t = 3, \dots, n$ ) można uzyskać z nakładającej się krzywej wykładniczej i tłumionej fali sinusoidalnej. Funkcja autokorelacji cząstkowej takiego procesu powinna przyjmować tylko dwie pierwsze różne od zera wartości.

Ad. b) Jeżeli okaże się, że funkcja autokorelacji ciągu  $\{w_t\}$  ( $w_t = z_t - z_{t-1}$ ;  $t = 2, \dots, n$ ) charakteryzuje się wykresem zbliżonym do wygasającej funkcji wykładniczej, zaś wszystkie wartości funkcji autokorelacji cząstkowej nie różnią się istotnie od zera, to będą podstawy do opisu procesu  $\{z_t\}$  przy pomocy modelu:

$$\nabla z_t = a_t \quad (t = 2, 3, \dots, n) \quad (10)$$

gdzie

$\{a_t\}$  jest procesem czysto losowym

Wariancję  $\{a_t\}$  można oszacować wyznaczając ocenę tego parametru dla  $\{w_t\}$ .

Ad. c) W przypadku, gdy funkcja autokorelacji procesu  $\{w_t\}$  ( $w_t = \nabla z_t$ ) przyjmuje wartość różną od zera jedynie dla pierwszego rzędu, zaś funkcja autokorelacji cząstkowej charakteryzuje się przebiegiem zbliżonym do wykładniczego, istnieje możliwość wysunięcia hipotezy, że proces jest typu ARIMA (0, 1, 1). Proces ten wyraża się związkami postaci:

$$\nabla z_t = a_t - h_1 \cdot a_{t-1} \quad (t = 2, 3, \dots, n) \quad (11)$$

Parametr  $h_1$  szacujemy rozwiązując następujące równanie kwadratowe:

$$r_1 = \frac{-\hat{h}_1}{1 + \hat{h}_1^2} \quad (12)$$

Sredni błąd szacunku  $h_1$  uzyskuje się z zależności:

$$\hat{V}(\hat{h}_1) = n^{-1} (1 - h_1^2), \quad (13)$$

zaś wariancję procesu  $\{a_t\}$  wyraża się wzorem:

$$\hat{\delta}_a^2 = c_o : (1 + \hat{h}_1^2). \quad (14)$$

Na zakończenie rozważań odnośnie procesów ARIMA warto wspomnieć o zagadnieniu weryfikacji hipotezy o zgodności danego modelu z danymi empirycznymi. W większości prac z omawianego zakresu szczególną rolę przywiązuje się do badania własności reszt odpowiadających określonym modelom. Do weryfikacji postawionej powyżej hipotezy wykorzystuje się statystykę:

$$Q = n \sum_{k=1}^m r_k^2(a), \quad (15)$$

gdzie

$r_k(a)$  — ocena wartości funkcji autokorelacji reszt modelu ARIMA, która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład chi — kwadrat z  $(m-p-q)$  stopniami swobody. Jeżeli wartość statystyki  $Q$  okaże się wyższa od wartości krytycznej  $X_{\alpha}^2$ , to hipotezę o zgodności modelu z danymi empirycznymi należy odrzucić.

W niniejszej pracy zaproponowana zostanie procedura pozwalająca zwerifikować hipotezę zerową na podstawie porównania widm mocy procesu teoretycznego i rzeczywistego.

#### TEST RÓWNOWAŻNOŚCI WIDMA MOCY W OCENIE ZGODNOŚCI MODELU AUTOREGRESYJNEGO Z DANymi EMPIRYCZNYMI

W pracach z zakresu analizy spektralnej zwraca się uwagę na wszechstronne możliwości wykorzystania funkcji widma mocy do badania własności stacjonarnych ciągów losowych. Wśród licznych zastosowań powyższej funkcji warto podkreślić jej następujące zalety:

a) informuje o wpływie poszczególnych częstotliwości na wariancję procesu,

b) pozwala wyznaczyć w danym ciągu losowym istotne wahania periodyczne,

c) może stanowić podstawę weryfikacji hipotezy, że dany proces jest czysto losowy.

W pracy (11) widmo mocy procesu zostało wykorzystane do wyodrębnienia jednorodnych podzbiorów z punktu widzenia określonej cechy. Autorzy prac (3, s. 294—295) i (8, s. 334—359) zwracają uwagę na możliwość zastosowania omawianej funkcji do oceny zgodności modelu ekonometrycznego z danymi empirycznymi. Przy założeniu, że ciąg  $\{a_t\}$  reprezentuje reszty modelu autoregresyjnego, stopień dopasowania tego modelu do procesu rzeczywistego można określić na podstawie wykresu funkcji  $C(f)$  postaci:

$$C(f) = \frac{\sum_{i=1}^j I(f_i)}{n \hat{\delta}_a^2} \quad (16)$$

gdzie <sup>7</sup>

$$I(f_i) = 2n^{-1} \left[ \sum_{t=1}^n (a_t \cos 2\pi f_i t)^2 + \sum_{t=1}^n (a_t \sin 2\pi f_i t)^2 \right]$$

$f_i = i/n$ ; ( $i = 0, 1, \dots, [n/2]$ )<sup>8</sup>

$\hat{\delta}_a^2$  oznacza ocenę wariancji procesu  $\{a_t\}$ .

Jak wykazują G. E. P. Box i G. M. Jenkins (3, s. 295) analizowany model można uważać za dobrze dopasowany, jeżeli wartości funkcji  $C(f_j)$  oscylują<sup>9</sup> wokół prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych  $(0, 0)$  i  $(0,5, 1,0)$ .

W niniejszym opracowaniu proponuje się metodę, która jak się wydaje powinna opisywać postawiony problem w sposób bardziej jednoznaczny. Załóżmy, że rozważamy proces losowy typu ARIMA  $(p, d, q)$  postaci:

$$(1 - l_1 B - l_2 B^2 - \dots - l_p B^p) w_t' = (1 - h_1 B - \dots - h_q B^q) a_t \quad (17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} w_t' &= w_t - \bar{w} \\ w_t &= \nabla^d z_t \\ \bar{w} &= \frac{1}{n-d} \sum_{t=1}^{n-d} w_t. \end{aligned}$$

$l_i$ ;  $(i = 1, 2, \dots, p)$  — oceny parametrów procesu autoregresyjnego,  
 $h_i$ ;  $(i = 1, 2, \dots, q)$  — oceny parametrów procesu średniej ruchomej,  
 $\{a_t\}$  — proces czysto losowy.

Jak łatwo zauważyć proces wyrażający się zależnością (17) można przedstawić w postaci:

$$w_t' = (l_1 B + l_2 B^2 + \dots + l_p B^p) w_t' + (1 - h_1 B - h_2 B^2 - \dots - h_q B^q) a_t \quad (18)$$

Dla realizacji niestacjonarnego procesu  $\{z_t\}$  utwórzmy następujące ciągi losowe:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t^E &= w_t' \\ \tilde{w}_t^T &= l_1 w_{t-1}' + \dots + l_p w_{t-p}' + a_t - h_1 a_{t-1} - \dots - h_q a_{t-q} \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie

$w_t' = \nabla^d z_t - \bar{w}$   
 $a_t$ ;  $(t = 1, 2, \dots, n-d)$  — ciąg liczb losowych uzyskanych przy wykorzystaniu generatora liczb losowych o rozkładzie  $N(0, \delta_a^2)$ .

Postawmy hipotezę, że model ARIMA  $(p, d, q)$  jest dobrze dopasowany do danych empirycznych. Wydaje się, że przy założeniu prawdziwości

<sup>7</sup> Wykres  $I(f_i)$  w zależności od  $f_i$  nazywany jest periodogramem.

<sup>8</sup>  $[n/2]$  oznacza część całkowitą z liczby  $n/2$ .

<sup>9</sup> Słowo „oscylują” stwarza możliwość subiektywnego spojrzenia na problem zgodności modelu.

powyższej hipotezy ciągi:  $\{w_t^T\}$  i  $\{w_t^E\}$  powinny reprezentować ten sam proces. Widma mocy<sup>10</sup> tych ciągów nie mogą więc różnić się od siebie w sposób statystycznie istotny. Załóżmy, że  $H_0$  ma postać:

$$P_T(f) = P_E(f)$$

gdzie

$P_T(f)$  — widmo mocy procesu  $\{w_t^T\}$ ,

$P_E(f)$  — widmo mocy  $\{w_t^E\}$ .

Weryfikację hipotezy  $H_0$  można przeprowadzić na podstawie testu równoważności widma mocy zaproponowanego przez J. S. Bendata i A. G. Piersola w pracy (2, s. 313). Autorzy testu wykazali, że przy założeniu prawdziwości  $H_0$  statystyka  $D_{ET}^2$  wyrażona wzorem:

$$D_{TE}^2 = \left( \frac{2}{S_E} + \frac{2}{S_T} \right)^{-1} \sum_{j=0}^m \left[ \log \frac{P_T(f_j)}{P_E(f_j)} \right]^2 \quad (20)$$

gdzie

$P_T(f_j)$  — oceny widma mocy odpowiednio procesu  $\{w_t^T\}$  i  $\{w_t^E\}$ ,

$(m+1)$  — liczba punktów estymacji funkcji spektralnej,

$S_E, S_T$  — liczba stopni swobody estymatorów  $P_E(f)$  i  $P_T(f)$ ,  
ma rozkład chi-kwadrat z  $(m+1)$  stopniami swobody.

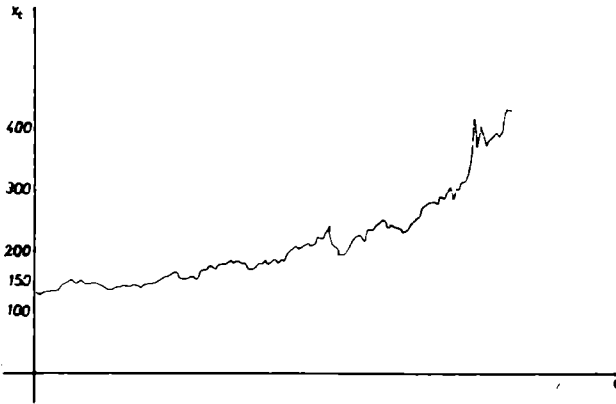
Jeżeli okaże się, że wyznaczona wartość  $D_{ET}^2$  spełnia nierówność  $D_{ET}^2 \geq X_\alpha^2$  ( $X_\alpha^2$  jest wartością krytyczną odczytaną z tablicy rozkładu chi-kwadrat na poziomie istotności  $\alpha$  i dla  $(m+1)$  stopni swobody), hipotezę o równoważności badanych widm należy odrzucić. Istnieją więc w takim przypadku podstawy do stwierdzenia, że model nie jest zgodny z danymi empirycznymi.

#### OCENA ZGODNOŚCI AUTOREGRESYJNEGO MODELU OPISUJĄCEGO KSZTAŁTOWANIE SIĘ CEN GIEŁDOWYCH ZŁOTA W LATACH 1977—1979

Podstawę rozważań tej części pracy stanowi szereg tygodniowych notowań cen złota na giełdzie w Londynie w latach<sup>11</sup> 1977—1979. Szereg ten przedstawiono na ryc. 1.

<sup>10</sup> Pod pojęciem widma mocy stacjonarnego procesu losowego rozumie się transformatę Fouriera jego funkcji kowariancji.

<sup>11</sup> Dane te zaczerpnięto z tygodnika „Życie Gospodarcze” (poszczególne numery w latach: 1977, 1978, 1979).



Ryc. 1. Ceny złota na giełdzie w Londynie w latach 1977—1979 (w dol. za troy uncję)  
Prices of gold at the Exchange in London in the years 1977—1979 (in dollars for a troy ounce)

Już pobieżna analiza powyższego wykresu wskazuje na niestacjonarność omawianego procesu. Postawiono więc hipotezę, że opis procesu generującego ceny giełdowe złota (w dol. za troy uncję) w Londynie w latach 1977—1979 może być dokonany na podstawie modelu typu ARIMA (p, d, q). W pierwszym etapie identyfikacji przeprowadzono operację różnicowania na wyjściowym ciągu  $\{z_t\}$  ( $t = 1, 2, \dots, 155$ ). Wartości funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej rzędu 1—20 oszacowano dla następujących ciągów:

$$\tilde{z}_t = z_t - \bar{z}$$

$$\tilde{w}_t^i = w_t^i - \bar{w} \quad (i = 1, \dots, 5; t = i+1, \dots, n)$$

gdzie

$$w_t^i = \rho^i z_t$$

Pierwszą z wymienionych funkcji estymowano na podstawie wzoru postaci:

$$r_k = c_k / c_0 \quad (21)$$

gdzie <sup>12</sup>

$$c_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} w_t w_{t+k}}{n},$$

<sup>12</sup> Jest to asymptotycznie nieobciążony estymator funkcji autokowariancji procesu losowego [1, s. 477].



$$c_0 = n^{-1} \sum_{i=1}^n w_i^2$$

$n$  — liczba elementów ciągu  $\{w_i\}$ .

Oceny funkcji autokorelacji cząstkowej wyznaczono rozwiązując układ równań Yule'a-Walkera, który w zapisie macierzowym można przedstawić równością:

$$R\hat{l} = r \quad (22)$$

gdzie

$R$  — macierz ocen wartości funkcji autokorelacji:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & r_2 & \dots & r_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & r_{k-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$l$  — wektor ocen współczynników autoregresji procesu AR(k):

$$\hat{l} = \begin{bmatrix} \hat{l}_{k_1} \\ \hat{l}_{k_2} \\ \vdots \\ \hat{l}_{k_k} \end{bmatrix}$$

$r$  — wektor ocen funkcji autokorelacji

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$$

Wartości <sup>13</sup>  $l_{kK}$  dla  $k=1,2, \dots, L$  (w naszym przypadku  $L=20$ ) stanowią oceny funkcji autokorelacji cząstkowej. Rezultaty uzyskane w przedstawiony w powyżej sposób zawarto w tabelach 1 i 2.

Uważna analiza wartości  $r$  oraz  $l$  ( $i=0,1, \dots, 5$ ) w konfrontacji z uwagami zawartymi w części 2, pozwoliła wysunąć przypuszczenie, że do badanego szeregu można dopasować następujące modele typu ARIMA: (2, 2, 0), (0, 1, 0) i (0, 1, 1). Do szacowania parametrów występujących w pierwszym i trzecim modelu wykorzystano wzory: (6), (7) i (12). Średnie błędy szacunku tych parametrów uzyskano natomiast na podstawie zależności: (8) i (13).

<sup>13</sup> Łatwo zauważyć, że np.  $l_{11}=r_1$ ,  $l_{22} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$

Tab. 1. Wartości estymatorów autokorelacji ( $r_k$ )  
 Values of the estimators of the autocorrelation ( $r_k$ )

$k^a$	Postać ciągu losowego					
	$z_t$	$\nabla z_t$	$\nabla^2 z_t$	$\nabla^3 z_t$	$\nabla^4 z_t$	$\nabla^5 z_t$
1	0,9605 <sup>b</sup>	-0,1780	-0,6184	-0,7158	-0,7616	-0,7969
2	0,9297	0,1084	0,0958	0,2077	0,3048	0,3909
3	0,8973	0,1218	0,1047	0,0607	0,0066	0,0787
4	0,8716	-0,0602	-0,0683	-0,0688	-0,0634	-0,0533
5	0,8476	-0,0702	-0,0032	0,0412	0,0808	0,1189
6	0,8230	-0,0998	-0,0858	-0,1237	-0,1719	-0,2119
7	0,8031	0,0789	0,2155	0,2678	0,2967	0,3055
8	0,7834	-0,1965	-0,3206	-0,3508	-0,3497	-0,3258
9	0,7611	0,2586	0,2973	0,3022	0,2802	0,2534
10	0,7313	-0,0491	-0,1456	-0,1485	-0,1423	-0,1387
11	0,7105	0,1219	0,0137	-0,0181	0,0276	0,0364
12	0,6772	0,1017	0,0436	0,0423	0,0417	0,0397
13	0,6494	-0,0029	-0,0615	-0,0738	-0,0827	-0,0861
14	0,6288	0,0468	0,0688	0,0920	0,1032	0,1081
15	0,6137	-0,0469	-0,0995	-0,1087	-0,1149	-0,1176
16	0,6031	0,1125	0,1007	0,1101	0,1159	0,1143
17	0,5905	0,0176	0,0742	-0,1002	-0,1051	-0,0980
18	0,5809	0,1239	0,1007	0,0992	0,0901	0,0799
19	0,5681	-0,0401	-0,0880	-0,0770	-0,0662	-0,0620
20	0,5606	0,0678	0,0211	0,0214	0,0248	0,0319

a k — oznacza rząd autokorelacji,

b wartość ta jest oceną autokorelacji rzędu pierwszego ciągu  $\{z_t\}$ .

Źródło: Obliczenia własne.

Tab. 2. Wartości estymatorów autokorelacji cząstkowej ( $I_{kk}$ )  
 Values of the estimators of partial autocorrelation ( $r_{kk}$ )

$k^a$	Postać ciągu losowego					
	$z_t$	$\nabla z_t$	$\nabla^2 z_t$	$\nabla^3 z_t$	$\nabla^4 z_t$	$\nabla^5 z_t$
1	-0,9695 <sup>b</sup>	-0,1780	-0,6184	-0,7158	-0,7616	-0,7969
2	-0,0943	0,0793	-0,4641	-0,6248	-0,6557	-0,6689
3	-0,0273	0,1597	-0,1971	-0,4877	-0,5082	-0,4554
4	0,0673	-0,0231	-0,0521	-0,3586	-0,3708	-0,2915
5	0,0280	-0,1224	-0,0206	-0,0995	0,0564	0,1857
6	-0,0159	-0,1538	-0,2452	-0,3299	-0,1287	-0,0162
7	0,0522	0,0793	0,0069	-0,0455	0,1037	0,0755
8	0,0107	-0,1218	-0,2866	-0,2468	-0,0327	-0,0143
9	-0,0426	0,2369	-0,0635	-0,1931	-0,0579	-0,0136
10	-0,1094	0,0230	-0,0770	-0,1389	-0,0714	-0,0151
11	0,0891	0,1142	-0,0381	0,0041	-0,0330	-0,0368
12	-0,1597	0,0518	-0,0484	0,1894	0,0902	0,0222
13	0,0054	0,0085	-0,0966	0,2632	0,1395	0,0916
14	0,1114	-0,0029	-0,0979	0,2595	0,0573	0,0839
15	0,0563	0,0138	-0,1033	0,2510	-0,0552	-0,0052
16	0,0475	0,0959	-0,1492	0,1582	-0,1171	-0,0561
17	0,0155	0,1900	-0,0959	-0,0439	-0,1555	-0,0931
18	0,0406	0,1255	0,0401	-0,1196	-0,0092	0,0344
19	-0,0309	-0,0203	0,0184	-0,2158	0,0701	0,0517
20	0,0692	-0,0232	-0,0024	-0,3318	0,0746	0,0067

a k — oznacza rząd autokorelacji cząstkowej,

b wartość ta oznacza oceną autokorelacji cząstkowej rzędu pierwszego ciągu  $\{z_t\}$ .

Źródło: Obliczenia własne.

Efektom prowadzonej w ten sposób estymacji były modele postaci:

$$a) \quad \tilde{w}_t = -0,9 \cdot \tilde{w}_{t-1} - 0,45 \cdot w_{t-2} + a_t \quad (23)$$

(0,0012)                      (0,0012)

$$b) \quad \tilde{w}_t = a_t \quad (24)$$

$$c) \quad \tilde{w}_t = a_t - 0,19 a_{t-1} \quad (25)$$

Kolejny etap badania stanowiła weryfikacja hipotezy o zgodności proponowanych modeli z danymi empirycznymi. Weryfikacji tej hipotezy dokonano dwoma metodami. Pierwsza z nich wykorzystywała wyrażoną wzorem (15) statystykę Q, zaś druga statystykę  $D_{ET}^2$  (20). Wyznaczenie wartości  $D_{ET}^2$  wymagało oszacowania funkcji widma mocy procesów:  $\{w_t^T\}$  i  $\{w_t^E\}$ . Ze względu na niezbyt długie szeregi czasowe (155 obserwacji) oraz konieczność wcześniejszego wykorzystania ocen funkcji autokowariancji zdecydowano się szacować funkcję spektralną metodą standardową<sup>14</sup> wykorzystując wzór postaci:

$$p(f_k) = 2 \left[ c_0 + 2 \sum_{h=1}^m 1/2 (1 + \cos(\pi h/m)) \cdot c_h \cos(\pi k h/m) \right] \quad (26)$$

gdzie

$p(f_k)$  — ocena funkcji widma mocy dla  $f_k = k/2m$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ),

$c_h$ ; ( $h = 0, 1, 2, \dots, m$ ) — ocena funkcji autokowariancji rzędu  $h$ .

Szczegółowe uwagi odnośnie tego estymatora zawarto w większości prac z zakresu analizy spektralnej<sup>15</sup>. W niniejszych badaniach zgodnie z sugestią K. Grangera i M. Hatanaki (5) wartość punktu odcięcia funkcji autokowariancji przyjęto na poziomie  $m = n/5$ .

Liczbę stopni swobody estymatorów  $P_E(f_k)$  i  $P_T(f_k)$  wyznaczono z zależności:

$$S_T = S_E = 2 \cdot n/m$$

Wartości statystyk: Q i  $D_{ET}^2$  dla modeli (23), (24) oraz (25) wraz z odpowiednimi wartościami krytycznymi<sup>16</sup> zawarto w tabeli 3.

<sup>14</sup> W tym samym celu można było również wykorzystać metodę szybkiej transformacji Fouriera (FFT).

<sup>15</sup> Zob.: (2), (5), (7), (9), (10).

<sup>16</sup> Wartości te odczytano z tablicy rozkładu chi-kwadrat dla poziomu istotności  $\alpha = 0,01$  oraz odpowiedniej liczby stopni swobody.

Tab. 3. Ocena zgodności modelu z danymi empirycznymi  
The estimation of the agreement of the model with empirical data

Postać modelu	Wartość Q	$X_a^2$	Wartość	$X_a^2$
	28,1615	37,1564	189,0380	52,0 <sup>a</sup>
	42,1779	38,5822	56,7838	52,0
	33,8498	38,5822	47,3864	52,0

<sup>a</sup> Wartość tę uzyskano poprzez interpolację liniową wartości  $X_a^2$  dla 30 i 40 stopni swobody ( $\alpha = 0,01$ ).

Źródło: Obliczenia własne.

Jak łatwo zauważyć, statystyka Q pozwala na poziomie istotności  $\alpha = 0,01$  uznać za zgodne z danymi empirycznymi modele: (23) i (25). Test równoważności widma mocy wskazuje natomiast na zgodność modelu (25). Obserwacja wyrazów ciągów:  $\{w_t^T\}$  i  $\{w_t^E\}$ <sup>17</sup> sugeruje, że ciągi te w przypadku modelu (23) znacznie różnią się od siebie. Dużo bliższe wydają się być  $\{w_t^T\}$  i  $\{w_t^E\}$  dla modelu III. Widać więc, że w omawianym przypadku statystyka  $D_{ET}^2$  daje bardziej wiarygodne rezultaty. Przedstawione powyżej uwagi pozwalają stwierdzić, że optymalny model opisujący kształtowanie się cen giełdowych złota w latach 1977—1979 ma postać:

$$\tilde{w}_t = a_t - 0,19 a_{t-1} \\ (0,0062)$$

#### ZAKOŃCZENIE

Zaproponowana w pracy procedura oceny zgodności modelu autoregresyjnego z danymi empirycznymi dała rezultaty bardziej wiarygodne w porównaniu z tymi, które uzyskano przy zastosowaniu testu związanego z ocenami funkcji autokorelacji reszt modelu. Wprawdzie prezentowany przykład empiryczny nie pozwala uogólnić powyższego stwierdzenia, ale sugeruje celowość przeprowadzenia symulacyjnych badań służących porównaniu mocy rozważanych testów. Zagadnienie to stanowić będzie temat dalszych badań autora. Podkreślenia godny jest również fakt, że niniejsza rozprawa potwierdza słuszność prostej procedury identyfikacyjnej modeli typu ARIMA, zaproponowanej przez G. E. P. Boxa i G. M. Jenkinsa. Wydaje się, że analogiczne badania można byłoby prze-

<sup>17</sup> Ze względu na długość tych ciągów nie prezentuje się ich w pracy.

prowadzić dla cen wolnorynkowych różnorodnych artykułów zarówno w warunkach gospodarki kaptalistycznej, jak i socjalistycznej. Uzyskane w ten sposób modele byłyby niewątpliwie pomocne w opisie szeregu zjawisk ekonomicznych.

#### L I T E R A T U R A

1. Anderson T., Statistyczny analiz wriemiennych riadow, „Mir”, Moskwa 1976.
2. Bendat J. S., Piersol A. G., Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych, PWN, Warszawa 1976.
3. Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis, Holden — Day, San Francisco 1976.
4. Góral A., Ludwiczak B., Spektralny estymator wariancji procesu stochastycznego z istotną autokorelacją. Zeszyty Naukowe AE w Krakowie, 165, Kraków 1982.
5. Granger K., Hatanaka M., Spektralny analiz wriemiennych riadow w ekonomikie, Statistika, Moskwa 1972.
6. Jakubczyc J., Widmowa analiza szeregów czasowych, „Wiadomości Statystyczne”, 2, 1975.
7. Jenkins G. M., Watts D., Spektralny analiz i jowo priłożenija, Mir, Moskwa 1972.
8. Naylor T. H., Modelowanie cyfrowe systemów ekonomicznych, PWN, Warszawa 1975.
9. Nerlove M., Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures, Econometrica, Vol. 32, Nr 3, 1964.
10. Otnes R. K., Enochson L., Analiza numeryczna szeregów czasowych, WNT, Warszawa 1978.
11. Sokołowski A., Metody badania stacjonarności jednowymiarowych ciągów losowych, praca doktorska, Kraków 1977.
12. Zieliński Z., Metody analizy dynamiki i rytmiczności zjawisk gospodarczych, PWN, Warszawa 1979.

#### Р Е З Ю М Е

В статье предлагается новая процедура оценки соответствия авторегрессивных моделей данным действительности. Эмпирической проверке подвергается метод идентификации авторегрессивных моделей, предложенный Дж. Э. П. Боксом и Дж. М. Дженкинсом. Эффект проведенных исследований представлен моделью, описывающей формирование цен золота на лондонской бирже в годы 1977—1979.

#### S U M M A R Y

The paper presents a suggestion for a new procedure of the checking of the goodness of fit of ARIMA models. Box — Jenkins method of the identification of autoregressive models is subject to empirical verification. The methods presented in the paper are verified on the basis of a model which describes the behaviour of Stock — Exchange prices of gold in London in 1977—1979.

