ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XVIII, 16 SECTIO H 1984

Zakład Zastosowań Matematyki
Wydział Ekonomiczny UMCS

Janusz MERKEL

Einige Bemerkungen über die Degeneration der optimalen Lösungen in den Aufgaben der linearen Programmierung

Uwagi o degeneracji rozwiązań optymalnych w zagadnieniach programowania liniowego

Замечания о дегенерации оптимальных решений в линейном программировании

Für die Modelle, welche die optimale Auswahl von verschiedenen landwirtschaftlichen Produktionsverfahren mittels Aufgaben linearer Programmierung (LP) beschreiben, ist in Nebenbedingungen ((1), S. 39) (in einschränkenden Bedingungen ((2), S. 18, 19)) das Hervortreten der rechten Seiten — die Null gleich sind — charakteristisch. Solche Nebenbedingungen sind z.B. verschiedene Bilanze des ganzen Verbrauchs (Futtermittel) oder der ganzen Umformung (Herdeumsatz) bestimmter Größen. Es handelt sich um Ausdrücke in Gestalt:

$$\sum_{j \leftarrow N_1} a_{ij}x_j \overset{<}{\underset{>}{=}} \sum_{j \leftarrow N_2} a_{ij}x_j \qquad \text{dabei } N_1 \cap N_2 \neq \emptyset.$$

Diese Ausdrücke kann man leicht auf folgende Gestalt zurückführen:

$$\sum_{j \leftarrow N_1} a_{ij}x_j - \sum_{j \leftarrow N_2} a_{ij}x_j \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$$

also auf die Gestalt der Nebenbedingungen mit rechten Seiten, welche Null gleich sind. In Futterbilanzen kann man ein bestimmtes Niveau des Vorrates einführen — die rechten Seiten der Nebenbedingungen werden dann statt Null positive Zahlen. In Herdeumsatzbilanzen dagegen haben wir nicht mit Reserven zu tun — die Abrechnung ist ganz, man kann in Nebenbedingungen der LP Aufgabe die rechten Seiten, welche gleich Null sind, nicht vermeiden.

Im Problem der optimalen Auswahl der Struktur von landwirtschaftlicher Produktion — in der durch den Verfasser dieser Bemerkungen gesehenen 33 Modellen * — betrug der Anteil der Nebenbedingungen, derer rechten Seiten Null gleich sind, von 0 bis 80 pro Hundert der allgemeinen Zahl der Nebenbedingungen.

Die Verteilung der gesprochenen Nebenbedingungen ist folgend:

	Die Zahl der Modelle	% der gesamten Zahl von 33 Modellen
keine Nebendingung	1	3
bis zu 25% der gesamten Zahl der Nebenbedingungen	14	43
von 25% bis zu 50%	6	18
von 50% bis zu 75%	9	27
über 75%	3	9

Die Modelle, in denen alle rechten Seiten positiv sind, gab es also ganz sporadisch.

Die nullgleichen rechten Seiten der Nebenbedingungen traten auch im Problem des Findens von optimaler Futterration hervor. In den durch den Verfasser gesehenen betreffenden 16 Modellen ** betrug der Anteil der Nebenbedingungen mit nullgleicher rechter Seite von 0 bis 97 p.H. der allgemeinen Zahl der Nebenbedingungen im Modell.

Die Verteilung obiger Nebenbedingungen ist folgend:

	Die Zahl der Modelle	% der gesamten Zahl von 16 Modellen
keine Nebenbedingung	11	68
bis zu 25% der gesamten Zahl der Nebenbedingungen	—	—
von 25% bis zu 50%	2	13
von 50% bis zu 75%	1	6
über 75%	2	13

* * *

* Siehe Anm.**.

** Diese Bemerkungen betreffen die Modelle in ostdeutschen, polnischen, sowjetischen, tschechoslowakischen und westdeutschen Fachpublikationen.

Das Hervortreten in der LP Aufgabe schon nur einer Nebenbedingung mit nullgleicher rechter Seite bringt die Degeneration dieser Aufgabe.

Der Verfasser dieses Artikels nimmt an, dass dem Leser die allgemeine Terminologie der linearen Programmierung und die wichtigsten Tatsachen aus dem Bereiche der Anwendungen von LP bekannt werden. So erinnert er, daß wir in weiteren Betrachtungen über symmetrisches Dual-Paar der LP Aufgaben sprechen werden, welches man mit Gebrauch von Matrizen folgend darstellen kann:

	Primale Aufgabe	Duale Aufgabe
Zielfunktion:	(max) $z = c^T x$	(min) $w = b^T y$
Nebenbedingungen:	$Ax \leqslant b$	$A^T y \geqslant c$
Nichtnegativitäts-bedingungen:	$x \geqslant 0$	$y \geqslant 0$

Die Variablen x_j der primalen Aufgabe werden wir weiter als die Größe der produktiven Tätigkeiten (der produktiven Aktivitäten) verstehen. Die Variablen y_i der dualen Aufgabe werden wir dagegen als die Schattenpreise — die Bewertungen der Einheiten der im beschränkten Umfange zur Verfügung stehenden Vorräte der Produktionsfaktore — verstehen. ((3), S. 189—190, 691—692). Die Schattenpreise werden durch den Verfasser dieses Artikels weiter „Dualpreise" genannt.)

Im symmetrischen Dual-Paar der LP Aufgaben sind die Werte der Zielfunktionen folgend abhängig: der Wert der maximalisierten Zielfunktion ist minder oder gleich dem Werte der minimalisierten Zielfunktion. Es ist leicht mittels der summarischen Einschreibung der LP Aufgabe zu zeigen:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j =$$

(Maximalisierung der Zielfunktion in Primal-Aufgabe)

$$\left(\text{wegen } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \right) \qquad \text{(a)}$$

(Ordnungswechsel der doppelten Summierens)

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = g(y_1, \ldots, y_m) \qquad (1)$$

(Minimalisierung der Zielfunktion in Dual-Aufgabe)

$$\left(\text{wegen } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \right) \qquad \text{(b)}$$

(Im Fall der Minimalisierung der Zielfunktion in Primal-Aufgabe und Maximalisierung der Zielfunktion in Dual-Aufgabe ist das obige Verfahren ähnlich.)

In der Theorie der linearen Programmierung wurde die Behauptung bewiesen, daß im Dual-Paar von LP Aufgaben der Maximalwert der Zielfunktion einer Aufgabe dem Minimalwerte der Zielfunktion zweiter Aufgabe gleich ist, also die optimalen Werte der beiden Zielfunktionen des Dual-Paares von Aufgaben sind gleich. ((4), S. 178—190)

Man kann sich auf diese Behauptung stützen und folgende Abhängigkeit von (1) ausführen:

$$\sum_j \Big(\sum_i a_{ij} y_i^o - c_j\Big) x_j^o = \sum_i \Big(b_i - \sum_j a_{ij} x_j^o\Big) y_i^o = 0 \qquad (2)$$

(der obere Index „o" bedeutet die Werte, welche die Variablen x_j und y_i in optimalen Lösungen annehmen).

Da die Ausdrücke in Klammern in (2) von einschränkenden Bedingungen der Primal-Aufgabe (b) und von einschränkenden Bedingungen der Dual-Aufgabe (a) ergeben, müssen diese Ausdrücke nicht negativ sein; ähnlich nicht negativ müssen sowie die Werte x_j und y_i als auch die Multiplikationen von zwei nicht negativen Faktoren sein. Endlich sind die Summen der nicht negativen Summanden gleich Null, wenn jeder Summand gleich Null ist. Wir bekommen als Ergebnis:

$$\Big(\sum_i a_{ij} y_i^o - c_j\Big) x_j^o = 0; \qquad \Big(b_i - \sum_j a_{ij} x_j^o\Big) y_i^o = 0 \qquad (3)$$

$$\text{bzw.} \quad \Big(\sum_j a_{ij} x_j^o - b_i\Big) y_i^o = 0; \qquad \Big(c_j - \sum_i a_{ij} y_i^o\Big) x_j^o = 0$$

bei Minimalisierung der Zielfunktion in Primal-Aufgabe und Maximalisierung der Zielfunktion in Dual-Aufgabe).

Damit die Multiplikation gleich Null wäre, genügt der Nullwert eines von Faktoren. Deshalb soll man in Betracht folgende Möglichkeiten ziehen:

— der erste Faktor ist gleich Null, der zweite Faktor ist positiv;

— der erste Faktor ist positiv, der zweite Faktor ist gleich Null.

Als Folge bekommen wir:

Wenn irgendeine einschränkende Bedingung sich in einer Aufgabe des Dual-Paares von LP Aufgaben für den extremalen Wert der Zielfunktion als scharfe Ungleichung realisiert, dann ist die mit dieser Bedingung verbundene Variable der Dual-Aufgabe Null gleich. Die zweite Folge ist dagegen:

Wenn die Variable in einer Aufgabe des Dual-Paares für den extremalen Wert der Zielfunktion positiv ist, dann nimmt die entsprechende einschränkende Bedingung in Dual-Aufgabe die Gestalt der Gleichung.

Das sind die allgemein bekannten Tatsachen in der Methodik der Bedienung von linearer Programmierung. Die Interpretation dieser Tatsachen im Bereiche der ökonomischen Probleme ist auch bekannt: die Produktionsfaktore, welche im Produktionsprozeß ganz ausgenutzt werden, haben die positiven Dualpreise, während die in Produktionsprozeß nur teilweise ausgenutzten Produktionsfaktore die nullgleichen Dualpreise haben.

Man kann jedoch nicht die Tatsache vermeiden, daß die Multiplikation der zwei Faktoren auch gleich Null sein kann, wenn die beiden Faktoren den Wert Null gleichzeitig haben. Solcher Fall —

$$\text{z.B.}\quad b_i - \sum_j a_{ij}x_j^o = 0 \qquad \text{und} \qquad y_i^o = 0$$

— soll analog zu Behauptung führen, daß die ganz im Produktionsprozeß ausgenutzten Produktionsfaktore die nullgleichen Dualpreise haben können. Darum soll man aussagen:

„Die Produktionsfaktore, welche im Produktionsprozeß ganz ausgenutzt werden, haben die nicht-negativen Dualpreise."

* * *

Der Fall des gleichzeitigen Nullwertes beider Faktoren der Multiplikation tritt gerade bei der Degeneration der Optimallösung der LP Aufgabe hervor.

(Man soll hier daran erinnern, daß bei der Bedienung mit Simplex-Algorithmus, um die LP Aufgabe zu lösen, alle Nebenbedingungen — die im Modell des konkreten ökonomischen Problems die Ungleichungen waren — in der Gestalt der exakten Gleichungen sein müssen. In diesem Zwecke führt man neben den Variablen des Modells — den Entscheidungsvariablen ((1), S. 25) anders natürlichen Variablen ((1), S. 152) anders echten Variablen ((2), S. 58) — die zusätzlichen sogenannten Schlupfvariablen (Bilanzierungsvariablen) ein ((3), S. 692). Die echte Variable der primalen Aufgabe entspricht der Schlupfvariable der dualen Aufgabe und die Schlupfvariable der primalen Aufgabe entspricht der echten Variable der dualen Aufgabe. ((2), S. 58), ((5), S. 57).

In aufeinanderfolgenden Lösungen im Laufe des Simplex-Algorithmus ist dagegen die Teilung der gesamten Menge aller Variablen auf Basisvariablen und Nichtbasisvariablen wichtig. ((3), S. 106)

Die Basisvariable der primalen Aufgabe entspricht der Nichtbasisvariable der dualen Aufgabe und die Nichtbasisvariable der primalen Aufgabe entspricht der Basisvariable der dualen Aufgabe.

Bei der Degeneration erscheint in Primal-Aufgabe des Dual-Paares die Nichteindeutigkeit der Auswahl der Variable, welche die Sammlung der Basisvariablen verlassen soll. Deshalb entstehen die Abzweigungen des Verlaufes des Simplex-Algorithmus, die zu verschiedenen alternativen Optimallösungen mit demselben Werte der Zielfunktion führen. In jeder degenerierten Optimallösung ist zwischen ihrer Basisvariablen mindestens eine Schlupfvariable mit Nullwert dabei anwesend. In der Optimallösung der Dual-Aufgabe dagegen mindestens eine Nichtbasisvariable den Nullwert des Simplex-Kriteriums (des Zeigers der Optimalität) annimt. Man kann also die Sammlung der Basisvariablen dieser Optimallösung ändern ohne Veränderung des Zielfunktionwertes. Das gibt verschiedene alternative Optimallösungen der Dual-Aufgabe. Es gibt auch die Fälle, wenn gleichzeitig in beiden Aufgaben des Dual--Paares sowie die Schlupfvariablen als Basisvariablen auf nullgleichem Niveau als auch noch die Nichtbasisvariablen mit dem Nullwerte des Simplex-Kriteriums anwesend sind. (Statt den Ausdruck „Simplex--Kriterium" oder „Optimalitätszeiger" zu gebrauchen, kann man über „Zielwirkung der Spalte" sagen. ((6), S. 139))

Denn die Schlupfvariable, welche als Basisvariable — auf dem Niveau das gleich Null ist — erscheint, der Nullwert der echten Dualvariable entspricht, die Nebenbedingung — mit der diese Schlupfvariable verbunden wird — kann man so in Ansicht nehmen, als ob diese Nebenbedingung scharfe Ungleichung wäre (in Wirklichkeit ist jedoch diese Nebenbedingung in diesem Falle eine genaue Gleichung). Wie ist es schon früher erwähnt — im Sinne der Interpretation der Aufgaben der linearen Programmierung im Bereiche der ökonomischen Problematik — die einschränkende Bedingung in der Gestalt der scharfen Ungleichung mit der linken Seite minderen als absolutes Glied deutet von einem Überschuß des bilanzierten Produktionsfaktors und dieser Produktionsfaktor hat desto einen nullgleichen Dualpreis.

In Beziehung auf Obigem wird es bequem sein — im Falle des Nullwertes der Schlupfvariable als Basisvariable in optimaler Lösung der LP Aufgabe — zu sagen, daß die Tendenz der Nichtausnutzung des vollen Vorrats von entsprechendem Produktionsfaktor vorhandet (die Tendenz einen freien Zutritt zu den entsprechenden Produktionsfaktor vorhandet). Nehmen wir außerdem die einschränkende Bedingung, in welcher der Nullwert der Schlupfvariable als Basisvariable in optimaler Lösung hervortrat, als eine zusätzliche einschränkende Bedingung an. Gleichzeitig nehmen wir an die einschränkende Bedingung, in welcher die Schlupfvariable auch gleich Null ist aber die Nichtbasisvariable ist als eine hauptsächliche einschränkende Bedingung.

Die Einführung in der LP Aufgabe einer zusätzlichen Nebenbedingung — wenn übrige hauptsächliche Nebenbedingungen ohne irgendeiner Veränderung bleiben — kann bisherigen optimalen Wert der Zielfunktion verschlimmern (ein Niederfall bei Maximalisierung) oder denselben auf bisherigem Niveau bewahren, kann dagegen nicht diesen Wert bessern. ((7), S. 145) Der nullgleiche Dualpreis in Beziehung auf entsprechender zusätzlicher Nebenbedingung — in der auf den Dualpreisen von Produktionsfaktoren begründeten Verabrechnung — bewirkt nicht die Vergrösserung der Produktionskosten, wenn der Vorrat des mit dieser Neben bedingung bilanzierten Produktionsfaktors steigern wird. Man kann deshalb in ökonomisch begründeter Art zu Vergrösserung des Zielfunktionwertes durch Änderungen der absoluten Glieder in hauptsächlichen einschränkenden Bedingungen streben und später den Zuwachs des absoluten Gliedes in zusätzlicher einschränkender Bedingung entsprechend anpassen. Solches Verfahren stört nicht die Prüfung von Stabilität der Optimallösung der LP Aufgabe auf nachträgliche Änderung von Schranken.

* * *

In durchschnittlichen Handbüchern über Lineare Programmierung und derer Anwendungen in ökonomischen Lehren gibt es nur Anweisungen wie im Falle der Degeneration der LP Aufgabe derer eindeutige Lösung zu bekommen, denn die Degeneration offensichtlich ein unbequemes unerwünschtes Ereignis für Lösungs- und Rechnungstechnik ist. Bisherige Praktik „des Austretens von Degeneration" macht jedoch die ökonomische Interpretation der optimalen Lösung sehr arm. Sie präsentiert nur eine von der ganzen Menge von alternativen Basisoptimallösungen, die Zahl derer zusammen mit der Zahl von Variablen und Nebenbedingungen mit nullgleichen absoluten Gliedern sehr schnell wächst.

Es scheint, dass es sehr nutzlich wäre, genaue Untersuchungen der Degeneration der LP Aufgabe zu führen. Besonders wäre die eventuelle Möglichkeit des Baues von speziellem Algorithmus für Digitalrechner, welches die ganze Menge der alternativen Optimallösungen erfassen lasse, ein interessantes Problem.

LITERATUR

1 S. Badewitz: *Mathematische Optimierung in der sozialistischen Landwirtschaft aus ökonomisch-technologischer Sicht.* VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin 1978.

2 K. J. Richter: *Methoden der Optimierung.* Band I: Lineare Optimierung. Eine Einführung. 4. erweiterte Auflage. VEB Buchverlag, Leipzig 1971.

3 *Wörterbuch der Kybernetik.* Herausgegeben von G. Klaus und H. Liebscher. Dietz Verlag, Berlin 1976.

4 H. Nikaido: *Wypukłyje struktury i matiematiczeskaja ekonomika.* Izd. „Mir", Moskwa 1972.
5 G. Ose: *Linearoptimierung.* VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1979.
6 G. Niesmeyer: *Einführung in die lineare Planungsrechnung.* Berlin 1968.
7 M. Simonnard: *Programowanie liniowe. PWN*, Warszawa 1967.

STRESZCZENIE

W parze dualnej zadań programowania liniowego wartości maksymalizowanej funkcji celu są mniejsze lub równe wartościom minimalizowanej funkcji celu. Jeśli te zadania nie są sprzeczne, wartości optymalne obu funkcji celu są równe. Można napisać:

$$\sum_j \left(\sum_i a_{ij}y_i^o - c_j\right) x_j^o = \sum_i \left(b_i - \sum_j a_{ij}x_j^o\right) y_i^o = 0$$

(górny wskaźnik „o" oznacza rozwiązanie optymalne).

Dobrze znanym w ekonomii jest fakt, że całkowicie wykorzystane czynniki produkcji mają dodatnie oceny dualne, częściowo wykorzystane — równe zeru oceny dualne (zmienna dualna związana z warunkiem ograniczającym zadania pierwotnego „większym niż" lub „mniejszym niż" będzie dodatnia, gdy wspomniany warunek ograniczający jest równy zeru lub będzie równa zeru, gdy ten warunek ma dodatnią prawą stronę). Wydaje się, że dotąd nie stanowił przedmiotu większego zainteresowania fakt, że całkowicie wykorzystane czynniki produkcji mogą posiadać oceny dualne równe zeru. Jest to charakterystyczne dla pary dualnej zdegenerowanych zadań programowania liniowego — z ich alternatywnymi rozwiązaniami optymalnymi i ocenami dualnymi. Przypadek $b_i - \sum_j a_{ij}x_j^o = 0$ i jednocześnie $y_i^o = 0$ został potraktowany przez autora jako przypadek graniczny nierówności $b_i - \sum_j a_{ij}x_j^o > 0$, implikującej $y_i^0 = 0$. Można mówić o tendencji wykorzystania czynnika produkcji na poziomie niższym niż zasób tego czynnika. Wniosek: całkowicie wykorzystane czynniki produkcji posiadają nieujemne oceny dualne.

РЕЗЮМЕ

В дуальной паре задач линейного программирования значения максимализованной функции цели меньше или разны значениям минимализованной функции цели. Если эти задачи не претиворечат друг другу, оптимальные значения обеих функций равны. Можно записать:

$$\sum_j \left(\sum_i a_{ij}y_i^o - c_j\right) x_j^o = \sum_i \left(b_i - \sum_j a_{ij}x_j^o\right) \quad y_i^o = 0$$

(„o" наверху обозначает оптимальное решение).

Из вышесказанного следует общеизвестное в экономии явление, что полностью использованные производственные факторы имеют положительные дуальные оценки, частично использованные — равные нулю дуальные оценки (дуаль-

ная переменная, связанная с ограничительным условием первичного задания „больше" или „меньше", будет положительной, когда это условие равно нулю или будет равна нулю, когда это условие имеет положительную правую сторону). По-видимому, до сих пор не привлекал особого внимания тот факт, что полностью использованные производственные факторы могут иметь дуальные оценки, равные нулю. Это характерно для дуальной пары дегенеративных задач линейного программирования, с их альтернативными оптимальными решениями и дуальными оценками. Случай $b_i - \sum_j a_{ij}x_j^o = 0$ и одновременно $y_i^o = 0$ трактуется как предельный в неравенстве $b_i - \sum_j a_{ij}x_j^o > 0$, из чего следует $y_i^o = 0$. Можно говорить о тенденции использования производственного фактора на более низком уровне, чем ресурсы этого фактора. Вывод: полностью использованные производственные факторы имеют неотрицательные дуальные оценки.