ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XV/XVI, 12 SECTIO H 1981/82

Zakład Nauk Ekonomicznych Filii UMCS w Rzeszowie

Adam GÓRAL

Zastosowanie analizy widmowej do badania szeregów czasowych

Приложение спектрального анализа в исследовании временных рядов

Application of Spectral Analysis in Time Series Studies

WPROWADZENIE

Na wstępie rozważań należy zwrócić uwagę na wszechstronne wykorzystanie funkcji widma mocy. Analiza widmowa (spektralna) jest jedną z metod badania szeregów czasowych. Dostarcza ona informacji dotyczących całkowitej wariancji procesu, omijając jednocześnie problem autokorelacji.[1] Szacowane widma mogą być również wykorzystane do rozwiązywania niektórych zagadnień taksonomicznych. Porównanie funkcji spektralnej danych symulowanych i odpowiadających im danych rzeczywistych może stanowić podstawę weryfikacji modelu systemu ekonomicznego. Powyższe fakty zadecydowały o wyborze tematu pracy. Ponieważ celem niniejszych rozważań jest zaprezentowanie wybranych zastosowań analizy widmowej w badaniach szeregów czasowych, artykuł ma charakter metodyczny.

Część drugą i trzecią pracy poświęcono podstawowym informacjom odnoszącym się do funkcji widma mocy. Część czwarta zawiera zagadnienia związane z wykorzystaniem ocen funkcji widmowej do analizy szeregów czasowych oraz do rozwiązywania niektórych problemów taksonomicznych. Zaprezentowany w części piątej przykład empiryczny stanowi ilustrację omawianej metody analizy danych.

---

[1] Problem autokorelacji jest specyficzny dla szeregów czasowych i trudno go pominąć prowadząc badanie metodami klasycznymi.

FUNKCJA WIDMA MOCY

Załóżmy, że $\{X_t\}$ jest stacjonarnym w szerszym sensie [2] procesem stochastycznym. Dla $\{X_t\}$ istnieje możliwość skonstruowania funkcji zwanej widmową gęstością mocy. Funkcja ta przyjmuje następującą postać:

$$f(\omega) = \frac{d\,F(\omega)}{d(\omega)}, \tag{2.1}$$

gdzie dF (ω) reprezentuje udział czynnika o częstotliwościach z przedziału (ω, ω+dω) w ogólnej wariancji procesu. Wydaje się, że z praktycznego punktu widzenia największe znaczenie ma przedstawienie widmowej gęstości mocy wynikające z twierdzenia N. Wienera—A. Chinczyna [3]. Twierdzenie to wyraża się zależnością:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \rho(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \rho(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \tag{2.2}$$

gdzie: ϱ(τ) to funkcja autokorelacji procesu $\{X_t\}$. Funkcję ϱ(τ) można przedstawić jako transformację Fouriera rzeczywistej funkcji F(ω), która jest dystrybuantą tzw. widmowego rozkładu procesu. Jeżeli w miejsce funkcji autokorelacji wprowadzi się do wzoru (2.2) funkcję kowariancji, otrzymuje się tzw. widmo mocy procesu, które określone jest w następujący sposób:

$$f^*(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \gamma(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \tag{2.3}$$

Wariancja procesu wyraża się wówczas wzorem [4]:

$$\delta_X^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\omega)\, d\omega. \tag{2.4}$$

Widać więc, że widmo mocy procesu informuje o tym, w jaki sposób łączna wariancja rozkłada się na drgania o poszczególnych częstotliwościach. W przypadku, gdy proces jest czysto losowy zarówno funkcja gęstości, jak i widmo mocy mają w przedziale ⟨−Π, Π⟩ wartość stałą.

---

[2] Mówimy, że proces stochastyczny jest stacjonarny w szerszym sensie (słabo stacjonarny), jeżeli jego wartość oczekiwana jest stała, a kowariancje zależą jedynie od różnicy $t_i - t_j$ (nie zależą od wartości t_i, t_j).

[3] Por. R. K. Oatnes, L. Enochson: *Analiza numeryczna szeregów czasowych*, Warszawa 1972.

[4] Wzór (1.4) wynika z tego, że φ(ω) jako funkcja gęstości spełnia warunek $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, d\omega = 1$.

C. Granger i M. Hatanaka stwierdzają [5], że w ekonomicznych procesach stochastycznych ważniejszą rolę odgrywają wahania o dłuższych okresach, czyli widmo ma kształt zbliżony do funkcji gęstości rozkładu normalnego uciętego w wartości przeciętnej.

ESTYMACJA FUNKCJI WIDMOWEJ

Trwające już od końca XIX w. prace nad problemem szacowania funkcji gęstości widmowej przyczyniły się do opracowania następujących metod estymacji tej funkcji [6]:

1) „standardowej", zwanej metodą Blackmana—Tukeya,
2) metody transformacji Fouriera,
3) metody filtracyjnej.

Największe znaczenie w szacowaniu funkcji widmowej ekonomicznych procesów stochastycznych ma metoda standardowa. Ogólnie rzecz biorąc, metoda ta polega na obliczeniu ocen funkcji kowariancji, a następnie na wyznaczeniu jej transformaty Fouriera. N. Wiener i A. Chinczyn wykazali w swych pracach, że obliczanie widm oparte na funkcji kowariancji jest efektywniejsze w porównaniu z metodą bezpośredniej transformacji Fouriera. Zastosowana do estymacji widma mocy metoda standardowa wykorzystuje estymator postaci:

$$\hat{f}^*(\omega_j) = \frac{1}{2\Pi}\left\{\lambda_0 C_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k C_k \cos \omega_j k\right\}, \tag{3.1}$$

gdzie: n — liczba obserwacji w szeregu czasowym,

$$\omega_j = \frac{\Pi \cdot j}{m}; \qquad (j = 0, 1, \dots m),$$

m — punkt odcięcia funkcji kowariancji (liczba opóźnień czasowych), λ_k — odpowiednie czynniki wagowe uśredniające widmo w paśmie częstotliwości, którego środkiem jest ω_j (przyjmuje się $\lambda_k = 0$ dla $k > m$).

C. Granger i M. Hatanaka [7] proponują obliczenie ocen funkcji kowariancji z wzoru:

$$C_k = \frac{1}{n-k}\left\{\sum_{t=1}^{n-k} X_t X_{t+k} - \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k} X_t \sum_{t=1+k}^{n} X_t\right\}. \tag{3.2}$$

[5] Zob. C. W. J. Granger, M. Hatanaka: *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton 1964.

[6] Dokładne rozważania na temat tych metod zawiera praca J. Bendata, A. Piersola: *Izmierienije i analiz słuczajnych processow*, Moskwa 1972.

[7] Granger, Hatanaka: *op. cit.*, s. 67.

Estymator (3.1) jest zgodnym oraz asymptotycznie nieobciążonym estymatorem funkcji widma mocy.[8] Jego wykorzystanie jest poprzedzone doborem wag λ_k. Należy zauważyć, że ze względu na podział w procesie estymacji podstawowego zakresu częstotliwości na (m+1) rozłącznych przedziałów, najkorzystniejsze byłoby zastosowanie wag o postaci filtru, którego funkcja przenoszenia jest równa:

$$g(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ dla } \omega_j - \frac{\pi}{2m} \leqslant \omega \leqslant \omega_j + \frac{\pi}{2m} \\ 0 \text{ w pozostałych wypadkach.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Brak możliwości znalezienia prostego filtru o funkcji przenoszenia wyrażonej wzorem (3.3) zadecydował o wykorzystaniu do estymacji widma mocy filtrów zwanych „oknami”.[9]

Z zastosowaniem charakterystyk częstotliwościowych „okien” wiąże się zjawisko tzw. przecieku widma. Pojawia się w takim przypadku możliwość przenikania części mocy związanej z częstotliwością o dużym znaczeniu, ale różnej od ω_k do oceny widma dla częstotliwości ω_k. W literaturze z zakresu analizy spektralnej spotyka się różne propozycje „okien” widmowych.[10] W praktyce wykorzystuje się najczęściej następujące wagi:

1) R. Blackmana—J. Tukeya $$\lambda_k = 1 - 2a + 2a \cos \frac{\pi k}{m} \tag{3.4}$$

2) B. T. „Hanning”[11] $$\lambda_k = \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi k}{m}) \tag{3.5}$$

3) B. T. „Hanning”[12] $$\lambda_k = 0{,}54 + 0{,}46 \cos \frac{\pi k}{m} \tag{3.6}$$

4) E. Parzena I $$\lambda_k = 1 - (\frac{k}{m})^2 \tag{3.7}$$

---

[8] Dowody tych własności zawarte są m. in. w pracy T. W. Andersona: *The Statistical Analysis of Time Series*, New York 1971.

[9] Nazwa „okno widmowe” wiąże się z tym, że filtry te dają wgląd jedynie w pewien wycinek zbioru częstotliwości.

[10] Zagadnieniem doboru wag zajmowali się w swoich pracach m. in.: G. Jenkins, E. Parzen, R. Blackman i J. Tukey.

[11] Waga ta została uzyskana po podstawieniu do wzoru (3.4) a=0,25.

[12] Wagę tę otrzymuje się wstawiając do wzoru (3.4) a=0,23.

Należy podkreślić, że estymatory widmowe uzyskane w wyniku zastosowania powyższych wag λ_K charakteryzują się podobnymi własnościami. Ciekawą systematykę charakterystyk [13] pozwalających porównywać efektywność wykorzystywanych okien widmowych można znaleźć w pracy A. Sokołowskiego. [14]

Szczególny wpływ na oceny widma mocy wywiera dobór punktu odcięcia m (liczba opóźnień czasowych w funkcji kowariancji) oraz liczby obserwacji n. Dotychczasowe badania wykazują, że dobre oszacowania funkcji spektralnej otrzymywane są, gdy $100 < n < 200$. Właśnie taki wniosek wysunięty został przez C. Grangera [15] i G. Jenkinsa [16]. Ci sami autorzy stwierdzają, że przy wyborze liczby opóźnień czasowych powinno brać się pod uwagę jedną z następujących zależności:

$$m < n/3,$$
$$m = n/5,$$
$$m = n/6.$$

Należy również pamiętać, że w przypadku, gdy w szeregu czasowym występują określone wahania cykliczne liczba m powinna być wielokrotnością częstotliwości odpowiadającej tym wahaniom. Wymaga się więc spełnienia następujących równości:

$$j = (2m)/a$$

gdzie: a — okres, j — liczba całkowita.

Na zakończenie rozważań dotyczących estymacji widma mocy procesu stochastycznego należy poruszyć problem rozkładu estymatora w próbie. G. Jenkins stwierdza w pracy [17], że przy założeniu normalności rozkładu zmiennej X(t) każda składowa estymatora $\hat{f}^*(\omega)$ ma rozkład w próbie określony w następujący sposób:

$$s\,\frac{\hat{f}^*(\omega_j)}{f^*(\omega_j)} = \chi_s^2, \tag{3.8}$$

gdzie: s — liczba stopni swobody, χ_s^2 — statystyka chi kwadrat o s stopniach swobody.

---

[13] Wśród tych charakterystyk na szczególną uwagę zasługują: szerokość okna widmowego, wariancja estymatora widma, porównywalna liczba stopni swobody i porównywalna liczba niezależnych ocen.

[14] A. Sokołowski: *Metody badania stacjonarności jednowymiarowych ciągów losowych*, Kraków 1977 (praca doktorska).

[15] Granger, Hatanaka: *op. cit.*

[16] G. M. Jenkins, D. Watts: *Spiektralnyj analiz i jego priłożenija*, Moskwa 1972.

[17] Jenkins, Watts: *op. cit.*

Założenie o normalności rozkładu procesu $\{X_t\}$ powoduje, że często zaleca się wykorzystywanie zmiennej log $\hat{f}^*(\omega)$, która ma rozkład normalny, niezależny od częstotliwości ω i słabo zależny od normalności procesu wyjściowego. Warto zwrócić uwagę, że zależność (3.8) dotyczy jedynie estymatora widma mocy uzyskanego metodą standardową. J. Bendat i A. Piersol[18] wykazują bowiem, że w przypadku zastosowania np. metody transformacji Fouriera rozkład estymatora funkcji widmowej należy aproksymować rozkładem chi-kwadrat o 2 stopniach swobody.

Oceny funkcji spektralnej można wykorzystać do obliczenia wariancji empirycznej procesu $\{X_t\}$. W tym celu stosuje się wzór o postaci:

$$s^2 = \frac{1}{m}\left[\frac{\hat{f}^*(0)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \hat{f}^*(\omega_j) + \frac{\hat{f}^*(\Pi)}{2}\right]. \tag{3.9}$$

R. Blackman i J. Tukey[19] wykazali w jednej z prac, że statystyka $n\,s^2/\delta^2$ ma rozkład chi kwadrat o liczbie stopni swobody określonej w przybliżeniu jako:

$$k = \frac{\left[\frac{\hat{f}^*(0)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \hat{f}^*(\omega_j) + \frac{\hat{f}^*(\Pi)}{2}\right]^2}{\frac{[\hat{f}^*(0)]^2}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} [\hat{f}^*(\omega_j)]^2 + \frac{[\hat{f}^*(\Pi)]^2}{2}} \cdot X(n/m). \tag{3.10}$$

ZASTOSOWANIE OCEN WIDMA MOCY DO ANALIZY SZEREGÓW CZASOWYCH

Zaprezentowane w pierwszych częściach pracy rozważania odnoszące się do podstaw analizy spektralnej oparte były na założeniu dotyczącym stacjonarności badanego procesu stochastycznego. Okazuje się, że szacowanie funkcji widma mocy daje dobre rezultaty zarówno w przypadku procesów stacjonarnych, jak i niestacjonarnych. C. Granger i E. Parzen stwierdzają w swych pracach, że przy wyznaczaniu widma mocy nie jest konieczne badanie, czy dany szereg jest stacjonarny. Zdaniem E. Parzena, istnieje nawet możliwość określenia stacjonarności bądź niestacjonarności procesu na podstawie oszacowanego widma mocy.

Załóżmy, że dokonano estymacji funkcji spektralnej metodą standardową. Na podstawie wzoru (3.9) łatwo zauważyć, że analiza spektralna

[18] Bendat, Piersol: *op. cit.*

[19] Por. T. H. Naylor: *Modelowanie cyfrowe systemów ekonomicznych*, Warszawa 1975, s. 355.

daje możliwość dekompozycji całkowitej wariancji badanego procesu na sumę składników odpowiadających pewnemu okresowi i przedstawionych za pomocą miary amplitudy. Widać więc, że strata informacji związana ze specyfiką szacowania widma mocy (z dużej liczby obserwacji (n) uzyskuje się jedynie (m+1) ocen estymatora $\hat{f}^*(\omega)$), jest tylko pozorna. Pojawia się bowiem możliwość określenia, które z częstotliwości ωj (j= 0, 1, ... m) w decydującym stopniu wpływają na poziom wariancji procesu. Funkcja widmowa dostarcza również cennych informacji odnośnie do poszczególnych składników[20] danego szeregu czasowego. W terminologii spektralnej składniki te stanowią realizacje wahań harmonicznych o różnych częstotliwościach. Trend jest realizacją wahań o częstotliwościach z przedziału $\langle 0, \Pi/2m \rangle$, gdzie m jest punktem odcięcia funkcji kowariancji. Drgania harmoniczne o okresie M/k (M jest parzystą liczbą równych podokresów mieszczących się w okresie rocznym, a k jest numerem harmoniki (k=1, 2, ..., M/2)) określają składnik sezonowy danego procesu. Składnik przypadkowy nie ma ograniczonego zakresu, a jego wkłady do widma mogą być rozciągnięte w całym przedziale częstotliwości $\langle 0, \Pi \rangle$. Powyższe rozważania wskazują na korzyści wynikające z bezpośredniego zastosowania analizy widmowej do badania ekonomicznych procesów stochastycznych. Okazuje się, że oceny widma mocy mogą być również wykorzystywane do rozwiązywania jednego z problemów taksonomicznych[21], a mianowicie do grupowania obiektów jednocechowych metodą odległości widmowej.[22]

Niech $\hat{f}_i^*(\omega)$ oraz $\hat{f}_k^*(\omega)$ będą estymatorami funkcji widmowej uzyskanymi z dwu różnych realizacji pewnego procesu X_t. Do weryfikacji hipotezy:

$$H_0 : f_k^*(\omega) = f_i^*(\omega)$$

wykorzystać można statystykę zaproponowaną przez J. Bendata i A. Piersola[23], wyrażoną następującym wzorem[24]:

$$D^2_{kl} = \left(\frac{2}{n_k} + \frac{2}{n_i}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{m} / \log \frac{\hat{f}_k^*(\omega_j)}{\hat{f}_i^*(\omega_j)}. \tag{4.1}$$

[20] Autor ma na myśli trend, wahania okresowe i składnik losowy.

[21] Taksonomia jest dziedziną zajmującą się wyodrębnianiem zbiorów jednorodnych ze względu na określone cechy.

[22] Metoda ta została zastosowana po raz pierwszy przez A. Sokołowskiego w pracy: *Metody badania stacjonarności jednowymiarowych ciągów losowych.*

[23] L. Dziembała, K. Zadora: *Zastosowanie analizy widmowej do badania wahań cyklicznych*, „Przegląd Statystyczny", 1971, nr 19.

[24] Statystyka D_{kl} nazwana została przez A. Sokołowskiego odległością widmową.

gdzie: (m+1) — liczba punktów estymacji, n_k, n_l — liczba stopni swobody odpowiednio dla

$$\hat{f}^*_k(\omega) \text{ i } \hat{f}^*_l(\omega).$$

Statystyka (4.1) ma rozkład chi kwadrat [25] o (m+1) stopniach swobody. Należy podkreślić, że jeśli obliczona wartość D_{kl}^2 spełnia nierówność:

$$D^2_{kl} \leqslant X^2_\alpha (m+1)\alpha, \tag{4.2}$$

(gdzie: χ^2 jest wartością odczytaną z tablic rozkładu chi kwadrat dla (m+1) stopni swobody oraz poziomu istotności α), to przy poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

Załóżmy, że wykorzystujemy do rozważań p różnych estymatorów funkcji widmowej. Dla każdej pary tych estymatorów wyznaczamy wartości D_{kl}^2 (k, l=1, 2, ... p). Otrzymaną tą drogą macierz odległości widmowych D przekształcamy na macierz binarną P, w której O oznacza, że dwa estymatory są równoważne, natomiast 1, że istotnie różnią się od siebie. Wykorzystując w kolejnym etapie postępowania metodę eliminacji wektorów [26], dokonujemy takiego podziału analizowanego zbioru, aby w każdej z wyodrębnionych grup znalazły się tylko elementy parami do siebie podobne (w sensie kryterium odległości). Przedstawiona metoda może być również wykorzystana do wyodrębniania zbioru realizacji danego procesu stochastycznego. Badanie tego procesu staje się w takim przypadku bardziej wiarygodne (omija się weryfikację hipotezy o tzw. ergodyczności). [27]

Analiza widmowa zasługuje na szczególną uwagę również z innych względów. Stanowić ona może metodę analizy danych generowanych w eksperymentach symulacyjnych [28] w oparciu o modele ekonomiczne. Dzięki funkcji widmowej można porównywać symulowane wyniki w przypadku stosowania dwóch lub wielu alternatywnych polityk gospodarczych. Porównanie widma danych symulowanych i odpowiadających im danych rzeczywistych pozwala dokonać weryfikacji modelu systemu ekonomicznego.

---

[25] Uzasadnienie faktu, że D_{kl}^2 ma rozkład chi kwadrat o (m+1) stopniach swobody można znaleźć w pracy: Bendat, Piersol: *op. cit.*

[26] Dokładne rozważania na ten temat zawarte są w pracy Sokołowskiego: *Metody badania stacjonarności jednowymiarowych ciągów losowych.*

[27] Proces jest ergodyczny, jeżeli rezultaty jego badania na podstawie jednej realizacji można uogólnić na cały proces.

[28] Symulacja jest techniką numeryczną, służącą do opisu przy pomocy maszyny cyfrowej zachowania złożonego systemu w ciągu pewnego czasu.

ZASTOSOWANIE ANALIZY WIDMOWEJ DO BADANIA KSZTAŁTOWANIA SIĘ CEN WOLNORYNKOWYCH OWSA W POLSCE W LATACH 1959—1973

Do badania procesu kształtującego ceny wolnorynkowe owsa w Polsce w latach 1959—1973 wykorzystano dane pochodzące z opracowania GUS „Statystyka cen". Źródłem informacji o cenach uzyskiwanych przez rolników w transakcjach wolnorynkowych[29] jest miesięczna sprawozdawczość GUS. Przeciętne ceny dla każdego z 17 województw obliczono jako średnie arytmetyczne wszystkich notowań z terenu danego województwa. W badaniach dysponowano 17 szeregami czasowymi, z których każdy zawierał 180 obserwacji. Ze względu na rozmiary tych szeregów w opracowaniu nie przytacza się zebranych danych.

Przed przystąpieniem do analizy kształtowania się cen wolnorynkowych w Polsce w latach 1959—1973 postawiono hipotezę, że wśród 17 województw występują grupy, w których dane zjawisko jest generowane przez ten sam proces stochastyczny. Do weryfikacji takiej hipotezy można wykorzystać m. in. metodę odległości widmowej. W pierwszym etapie badania przystąpiono więc do szacowania widm mocy szeregów czasowych, reprezentujących przebieg procesu w poszczególnych województwach. Estymację funkcji widmowej przeprowadzono dla m=24, gdyż spodziewano się wystąpienia w analizowanych szeregach głównie wahań sezonowych. Do wzoru (3.1) zastosowano „okno" Hanninga ze względu na jego małą szerokość (własność ta zapewnia niską korelację między $\hat{f}^*(\omega_j)$ a $\hat{f}^*(\omega_{j+2})$ oraz małe prawdopodobieństwo przecieku).[30]

Rezultaty szacowania widma mocy w poszczególnych województwach zamieszczono w tabeli 1. Analiza ocen funkcji spektralnej pozwala zidentyfikować cykle występujące w badanych szeregach czasowych. Przeprowadzone badania nasuwają następujące wnioski:

1) brak cyklu rocznego zauważa się jedynie w województwach w dawnym obszarze: warszawskim, łódzkim, lubelskim, kieleckim i białostockim,

2) w przeważającej części województw występuje cykl półroczny oraz kwartalny,

3) potwierdza się stwierdzenie, że w przypadku ekonomicznych szeregów czasowych szczególny wkład do wariancji wnoszą wahania o dłuższych okresach.

Należy zwrócić uwagę, że województwa, w których stwierdzono brak cyklu rocznego w badanych latach sąsiadowały ze sobą.

---

[29] Transakcje wolnorynkowe obejmują obroty sąsiedzkie oraz sprzedaż towarów ludności miejskiej.

[30] W przypadku okna „Hanninga" tzw. listki boczne nie stanowią nigdy więcej niż 2% wierzchołka głównego.

Tab. 1. Oceny widma mocy przy m=24, uzyskane metodą B.-T. „Hanning"
Power spectrum estimates at m=24 obtained by B. T. Hanning's method

Okres	Nazwa województwa																
	WAR	BYD	POZ	ŁÓD	KIE	LUB	BIA	WRO	OLS	GDA	KOS	SZC	ZIE	OPO	KAT	KRA	RZE
—	2284	3197	3337	3448	2488	3660	1572	2446	2035	1993	2988	2994	3123	3665	2811	2500	2014
48.0	4106	2202	2632	3062	2869	4216	2638	1741	1880	1459	1969	2202	2027	2174	2219	2418	1572
24.0	2079	349	553	947	1200	1649	1635	319	704	337	307	445	251	201	436	790	252
16.0	677	250	259	440	964	734	662	232	801	248	229	352	198	203	256	464	309
12.0	335	371	308	211	410	458	327	373	985	327	356	511	325	321	354	548	553
9.6	274	232	200	155	262	459	398	247	612	219	225	305	184	193	287	327	292
8.0	120	60	71	195	109	356	133	63	344	60	43	589	24	47	49	86	37
6.9	113	61	74	229	86	300	104	36	391	41	23	39	20	52	55	63	23
6.0	126	76	83	239	71	328	98	26	335	46	28	44	24	73	67	37	13
5.3	70	40	45	179	47	242	80	17	246	28	17	29	15	70	36	27	12
4.8	19	9	11	109	22	137	78	9	218	10	7	10	5	51	9	24	10
4.4	25	12	15	97	22	124	94	14	214	21	19	19	12	41	15	39	15
4.0	26	16	20	117	28	156	132	20	195	32	29	30	19	44	21	49	21
3.7	10	11	14	136	22	143	124	15	160	19	18	22	13	53	13	29	13
3.4	10	7	7	112	11	100	80	8	125	8	6	14	5	58	5	15	7
3.2	14	8	12	80	13	95	69	7	95	12	8	14	5	59	9	19	5
3.0	17	9	15	73	23	88	68	9	82	15	12	12	5	58	15	24	9
2.8	12	5	9	81	18	60	63	8	77	9	9	7	4	50	11	19	5
2.7	13	3	4	84	9	51	57	7	58	6	4	3	4	48	4	14	3
2.5	19	6	6	85	9	51	57	7	39	9	3	4	3	53	5	17	6
2.4	16	9	7	80	12	33	62	7	28	9	5	5	3	50	5	15	4
2.3	9	7	6	85	10	14	71	8	17	7	4	4	3	45	4	10	2
2.2	7	4	4	90	9	7	82	6	9	6	3	4	2	46	2	10	2
2.1	8	2	6	112	7	5	81	6	5	3	4	5	1	50	3	12	2
2.0	9	1	8	127	6	4	72	6	5	2	4	6	2	51	3	14	2

Źródło: Obliczenia własne (wg programu AS 20).

Tab. 2. Macierz odległości widmowych przy m=24
The matrix of spectrum distances at m=24

Woje-wództwo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
WAR	0																
BYD	17.67	0															
POZ	22.46	4.95	0														
ŁÓD	26.51	16.94	45.52	0													
KIE	1.14	10.90	94.02	9.63	0												
LUB	34.70	61.05	187.13	40.92	1.92	0											
BIA	21.88	5.05	184.02	26.07	7.80	28.26	0										
WRO	0.73	8.66	50.29	64.01	1.39	60.78	87.24	0									
OLS	2.08	3.93	9.24	56.07	120.04	12.93	141.10	888.92	0								
GDA	2.90	26.53	38.05	51.36	7.99	85.56	99.00	2.64	614.11	0							
KOS	8.60	1.97	53.78	67.53	3.12	79.42	207.60	31.36	960.17	38.91	0						
SZC	11.45	0.00	7.25	7.78	7.58	26.10	107.62	1.00	641.96	0.19	19.98	0					
ZIE	15.29	1.08	97.05	99.63	8.43	130.56	458.12	53.98	1083.30	60.87	17.69	46.47	0				
OPO	34.94	0.03	159.47	93.50	9.36	118.69	168.07	21.13	361.32	131.19	616.23	92.43	110.18	0			
KAT	6.73	0.01	8.70	45.83	3.37	99.09	155.79	28.07	403.23	9.87	9.87	8.73	1.57	366.96	0		
KRA	1.26	1.35	20.08	0.44	12.17	17.97	29.70	48.93	756.40	0.21	233.22	80.80	140.24	60.39	188.59	0	
RZE	2.47	17.79	96.07	19.52	13.99	32.45	255.77	31.36	1646.53	112.17	19.98	8.73	0.41	353.48	7.78	155.79	0

Źródło: Obliczenia własne (wg programu AS 33).

Kolejnym etapem badania było wyodrębnienie w zbiorze 17 województw grup charakteryzujących się jednorodnością (w sensie kryterium odległości). Wykorzystano w tym celu metodę odległości widmowej dla m=24. Wyniki obliczonych tą drogą charakterystyk D_{kl}^2 (k, l=1, 2, ... 17) określonych wzorem (4.1) zawarto w tabeli 2.

Ponieważ otrzymana w ten sposób macierz charakteryzuje się symetrycznością, wypełniono jedynie części pod główną przekątną. D_{kl}^2 ma rozkład chi kwadrat z (m+1) stopniami swobody. Z tabeli [31] rozkładu χ^2 przy danym poziomie istotności $\alpha=0{,}01$ [32] i dla 25 stopni swobody odczytano wartość krytyczną $\chi\alpha^2$ wynoszącą 44,31. Następnie utworzono macierz binarną o 17 wierszach i 17 kolumnach (p=17), przyjmując w tej macierzy 0, gdy $D_{kl}^2 < \chi\alpha^2$, natomiast 1 przy spełnieniu nierówności przeciwnej. W celu wyodrębnienia jednorodnych podzbiorów, w całym zbiorze województw zastosowano do otrzymanej macierzy metodę eliminacji wektorów (metoda ta polega na kolejnej eliminacji punktów empirycznych niepodobnych do największej liczby punktów pozostałych na danym etapie rozważań). Wyniki delimitacji zawiera tabela 3.

Tab. 3. Grupy województw wyodrębnionych metodą odległości widmowej przy m=24

Groups of voivodeships selected by the spectrum distance method at m=24

Numer grupy	I	II	III	IV	V
Numer województwa	1, 2, 5, 8, 10, 12, 17	15, 6, 7, 4	11, 16	9, 14	3, 13

Źródło: Obliczenia własne.

Znalezienie interpretacji dokonanego podziału wymagałoby gruntownej analizy merytorycznej przebiegu omawianego zjawiska w poszczególnych województwach. Wykracza to jednakże poza ramy niniejszych rozważań.

Na przykładzie procesu generującego ceny wolnorynkowe owsa w Polsce w latach 1959—1973 zaprezentowano niektóre możliwości wykorzystania analizy spektralnej do badań ekonomicznych. Uzyskane rezultaty potwierdzają, że w przypadku gdy badacz dysponuje długimi szeregami czasowymi, analiza widmowa daje interesujące rezultaty. Na zakończenie warto podkreślić, że tematem ciekawego opracowania z omawianego powyżej zakresu może być zastosowanie funkcji widmowej do badań symulacyjnych.

[31] R. Zieliński: *Tablice statystyczne*, Warszawa 1972.

[32] Przyjęcie takiego poziomu istotności ogranicza możliwość znalezienia się w wyodrębnionej grupie elementu znacznie różniącego się od pozostałych (w sensie kryterium odległości).

РЕЗЮМЕ

В статье представлены некоторые методы анализа временных рядов при использовании спектральной функции. Автор обращает внимание на эту собственность спектрального анализа, которая даёт возможность определить участие отдельных частот в дисперсии исследоваемого процесса. Много места посвящено также методу спектрального расстояния, который позволяет разрешить одну из таксономических проблем. Представленный в работе эмпирический пример подтвердил пригодность упомянутых методов анализа временных рядов.

SUMMARY

In the article the methods of time series analysis which are connected with the spectral function are presented. The author pays a special attention to this property of spectral analysis which lets define participation of individual frequencies in variance of the process. This article contains description of so-called "spectral distance method", which is based on the comparative studies of spectra derived from two different realizations of the stochastic process. The methods described in the article were verified as exemplified by the process which generated oat market prices in Poland in the years 1959—1973.