ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN-POLONIA
VOL. II, 5 SECTIO J 1989

Wydział Pedagogiki i Psychologii
Zakład Pedagogiki Szkoły Wyższej

Władysław DUBIEL

Polskie próby realizacji idei ruchu reformatorskiego w programach i podręcznikach matematyki w dwudziestoleciu międzywojennym na podstawie szkoły średniej ogólnokształcącej

Польские попытки реализации идеи реформаторского движения в программах и учебниках по математике в междувоенном двадцатилетию (на примере средней общеобразовательной школы)

Polish Attempts at Implementing the Reformatory Movement Modernizing the Syllabus and Mathematical Textbooks in the Twenty Inter-war Years as Exemplified by Grammar Schools

UWAGI WSTĘPNE

Rozwój matematyki, rosnący zasięg zastosowań wiedzy matematycznej w różnych dziedzinach nauki i działalności praktycznej człowieka oraz osiągnięcia pedagogiki i psychologii eksperymentalnej zrodziły na przełomie XIX i XX wieku żywy ruch naukowy i pedagogiczny niosący ze sobą poglądy, w których kładzie się nacisk na potrzebę reformy programów matematyki, a następnie metod jej nauczania i w końcu zasad organizacyjnych.

Gorącym zwolennikiem reformy nauczania matematyki w szkołach średnich był wybitny matematyk i dydaktyk, profesor Uniwersytetu w Getyndze, współtwórca programu merańskiego[1] – Feliks Klein (1849–1925). W jego pracach poświęconych sprawie reformy odczytujemy kilka postulatów. Ogólnie ujmując dotyczyły one:

1) uwypuklenia w nauczaniu pojęcia funkcji i elementu „dyskusyjnego",
2) potrzeby rozwoju wyobraźni przestrzennej i kształcenia nawyku myślenia funkcyjnego,
3) włączenia do matematyki szkoły średniej elementów matematyki wyższej,
4) łączenia w nauczaniu różnych działów matematyki.

[1] Działające w Niemczech Towarzystwo Przyrodników i Lekarzy powołało specjalną komisję, która jesienią 1905 roku w Meranie przedstawiła szczegółowe propozycje planów nauczania matematyki i przyrody w szkołach średnich. Z jej prac powstał tzw. program merański, który stał się kierunkowskazem wszystkich zmian w kształceniu matematyczno-przyrodniczym w Niemczech i zarazem wytyczną wszystkich nurtów reformatorskich w nauczaniu matematyki.

W nawiązaniu do eksperymentu J. Deweya i założeń wychowania proponowano zastosowanie metod nauczania sprzyjających zetknięciu uczniów z rzeczywistością, i wyzwalających ich aktywność i samodzielność.

W wielu krajach przeprowadza się reformy szkół a wraz z nimi wprowadza się nowe programy i metody nauczania matematyki. Przed pierwszą wojną światową ruch reformatorski ogarnął prawie wszystkie cywilizowane kraje świata.

Polska przed pierwszą wojną światową, będąc pod zaborami, nie miała jednolitego systemu szkolnictwa, a co za tym idzie jednolitych programów nauczania. Nowe idee ruchu i postulaty planu merańskiego docierały do polskich szkół w różnych wersjach. Prace związane z ich wcieleniem do szkół zbiegały się z nasileniem walki o wyzwolenie narodowe i polskie szkolnictwo.

W tej sytuacji trudno było liczyć na pełne urzeczywistnienie idei programu merańskiego i haseł nowego wychowania. Mimo trudności polscy matematycy i światli nauczyciele prowadzili prace związane z ulepszeniem nauczania matematyki. Prace te jednak zostały przerwane przez wybuch pierwszej wojny światowej. Podjęto je dopiero po odzyskaniu przez Polskę w 1918 roku niepodległości..

ODZWIERCIEDLENIE IDEI RUCHU REFORMATORSKIEGO W PROGRAMACH NAUCZANIA MATEMATYKI

Odradzająca się Polska po latach niewoli otrzymała w spadku po zaborach różne typy i systemy szkolnictwa średniego. Trzeba było rychło opracować dla organizowanych polskich szkół, w niepodległej Polsce, nowe plany i programy nauczania odpowiadające zmienionej rzeczywistości i rozwijającym się potrzebom ówczesnego życia społecznego i gospodarczego kraju. Do realizacji tych zadań przystąpiono od zaraz.

Twórcy nowych programów nauczania matematyki stanęli przed pytaniem: Jakie opracować programy? Czy oprzeć się na programach funkcjonujących w szkołach w okresie zaborów? Czy opracować własne – uwzględniające postęp nauki oraz nowe idee, które pojawiły się w nauczaniu szkolnym?

W różnych wypowiedziach, które dotyczyły tych kwestii dominował pogląd, że polskie programy nauczania matematyki nie powinny być kopią programów z okresu zaborów. Powinny być tworem nowym, dostosowanym do potrzeb i możliwości intelektualnych ówczesnej młodzieży, uwzględniać postęp wiedzy matematycznej i pedagogiczno-psychologicznej oraz być nastawione na poprawienie jakości nauczania matematyki. Jednak w praktycznych rozwiązaniach twórcom nowych programów wydanych w latach 1920–1922 nie udało się zupełnie oderwać od tradycji trzech zaborów ani też uwolnić od innych wpływów zagranicznych. Odbijają się one głównie w celach i treściach zawartych w tamtejszych programach nauczania. Tu najbardziej interesuje nas sprawa odzwierciedlenia tych idei, których korzenie sięgają do przełomowych haseł i tez wysuwanych w nauczaniu matematyki na początku bieżącego stulecia, tj. do tzw. planu merańskiego i nowego wychowania.

W strukturze celów nauczania matematyki – sformułowanych w programach wydanych w latach 1920- 1922 częściowo zróżnicowanych w zależności od typu gimnazjum – na czoło wybijają się formalne, skierowane na ogólny rozwój ucznia i kształcenie poszczególnych dyspozycji umysłowych (np. zdolność ścisłego rozumowania, rozumowania dedukacyjnego), mające swe źródło w teorii formalizmu dydaktycznego, która pozostaje w związku z filozofią Kanta. Zgodnie z tą teorią nieprzekazywanie wiedzy, lecz wszechstronny rozwój umysłu ucznia jest podstawowym zadaniem wszelkiego kształcenia. Wychodzono z założenia, że wyrobione na danych treściach sprawności intelektualne z kolei transferują na inne treści, ułatwiając przez to ich opanowanie.

Z analizy celów zawartych w powyższych programach wnosimy także, że odzwierciedlają się w nich postulaty planu merańskiego; akcentuje się potrzebę rozwijania u uczniów myślenia funkcyjnego, wyrobienia sprawności, stosowania matematyki do innych sąsiednich dyscyplin naukowych i w życiu codziennym.

Jednemu z celów nadano w programie brzmienie następujące:

„Przyzwyczajenie ucznia do dostrzegania związków funkcjonalnych zachodzących między znanymi mu zjawiskami, do ujmowania tych związków w postaci wzorów analitycznych i do badania własności odpowiednich funkcji".[2]

Zagadnienie funkcji potraktowano w programie w sposób następujący: w kl. IV (I) – „Wiadomości wstępne o zależności funkcjonalnej". Z pojęciem funkcji, jak podkreślano w uwagach do programu, należało zapoznać uczniów od początku roku przy nadażających się sposobnościach, mimo że umieszczone one zostały w dalszej części programu. W uwadze tej nie zostało jednak podkreślone wyraźnie, że istnieją w programie treści (pojęcia), które też mogą stwarzać sposobność do interpretowania ich w „duchu" idei zależności funkcjonalnej. W tej sytuacji na pierwszym miejscu w nauczaniu znalazła się sucha i zrutynizowana technika algebry, a nie główne idee i pojęcia dyscypliny wiedzy.

W kl. V (II) umieszczono funkcje: $y = ax + b$, $y = ax^2 + bc + c$ przy czym materiał na temat funkcji został „rozciągnięty" na kl. VI (III). W tej klasie ponadto program przewidywał dyskusję równania kwadratowego, funkcje: $y = \frac{a^2}{x}$ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ oraz funkcje trygonometryczne kąta ostrego, w kl. VII (IV) funkcje trygonometryczne kąta dowolnego. W ostatniej klasie VIII (V) przewidywano pogłębienie kursu gimnazjalnego.

Autorzy programów, uznając pojęcie funkcji za fundamentalne, nie uwzględnili w nich odpowiedniego materiału na którym można było w pełni ukazać użyteczność i doniosłość tego pojęcia.

Funkcje, do których wiodą zagadnienia proste i pojawiające się w sposób naturalny w nauczaniu nie są tylko funkcjami pierwszego czy drugiego stopnia, lecz są na ogół innymi funkcjami elementarnymi np. typu:

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}, \quad y = x^3 + px$$

Program nie uwzględnił także rachunku różniczkowego i całkowego, dającego środki do badania funkcji. Nie można było, jak zauważył S. Kulczycki,[3] przy takim potraktowaniu zagadnienia funkcji zrealizować w pełni celów założonych w programie.

W programach zauważamy uwypuklenie „elementu dyskusyjnego" (tzn. zagadnień dyskusyjnych), ponieważ ich zasadniczym celem miało być przygotowanie uczniów do

---

[2] *Program gimnazjum państwowego. Wydział matematyczno-przyrodniczy*, wyd. 3. Warszawa 1925, s. 89.

[3] S. Kulczycki, *Pojęcie funkcji w szkole średniej*, „Parametr" 1930, z. 4.

myślenia „funkcyjnego". Takie ujęcie zagadnienia funkcji, a szczególnie uwypuklenie „elementu dyskusyjnego" i w ogóle rozumienie „zadań dyskusyjnych" ukształtowało się w ówczesnej Polsce w dużym stopniu pod wpływem programów francuskich, z lat 1923, 1925, które odzwierciedlały tamtejszą myśl pedagogiczną.

Nadmiernie rozbudowane „zagadnienia dyskusyjne" prowadziły w praktyce do szablonowego traktowania tego problemu, zwolniły ucznia od własnego myślenia. Uczeń nie dostrzegał w tym „szablonie" uniwersalnej metody ogarniającej szeroki zakres problemów. Nie służyły więc „dyskusje" przygotowaniu ucznia do rozumienia ogólnego pojęcia funkcji ani też wyrobienia przekonania o wielkiej doniosłości tego pojęcia.

Mówiąc o wpływach francuskich na ujęcie nauki o funkcjach w naszym programie, należy także podkreślić, że widoczne są one również w traktowaniu innych zagadnień matematycznych. Szczególnie widoczne są w działach programu poświęconego algebrze.

W programach polskich można też dostrzec wpływ szkoły włoskiej, zwłaszcza w doborze i ujęciu treści działu geometrycznego. Na przykład w programie kl. VII (V) umieszczono geometryczną teorię odcinków proporcjonalnych „zaimportowaną" z Włoch. Teoria ta miała być opracowana w oparciu o twierdzenie Desargue'sa. Twierdzenie to z kolei wymagało wprowadzenia w tok planimetrii odpowiedniego działu poświęconego stereometrii.

Geometryczna teoria odcinków proporcjonalnych, ze względu na jej abstrakcyjność i potrzebę korzystania z dodatkowych wiadomości, wymagała dużego wysiłku i czasu. Stąd teoria ta nie znalazła w Polsce powszechnego uznania, spotkała się nawet z ostrą krytyką, chociaż byli i tacy, którzy uważali, że sprzyja ona wdrażaniu ucznia do ścisłego rozumowania dedukcyjnego.[4] Podejmowane próby jej modyfikacji, celem lepszego pod względem dydaktycznym ujęcia, nie poprawiły tej reputacji; w wyniku licznie wysuwanych pod jej adresem krytycznych uwag została ona w 1929 roku skreślona z programu.[5]

W programach matematyki wydawanych w latach dwudziestych nie znalazła też właściwej realizacji druga idea Kleina – idea fuzjonizmu.[6] Brak jest w nich wyraźnego polecenia łączenia stereometrii z planimetrią w jedną „całość". Można jedynie zauważyć łączenie niektórych elementów wiedzy w układzie: algebra-geometria, trygonometria-algebra. Do geometrii włączono geometrię wykreślną.

W *Programie naukowym szkoły średniej*, a następnie w programach nauczania wydanych w latach 1920–1922, znalazły pewne odbicie idee ruchu pedagogicznego w kwestiach odnoszących się do zasad i metod nauczania. Dużą wagę w tych dokumentach nadaje się zasadzie samodzielnej pracy i czynnej postawie ucznia. Naczelnym hasłem miało być poszukiwanie metod aktywizujących ucznia, który miał zdobywać wiedzę

---

[4] Zob. O h r e n s t e i n, *Teoria proporcji w kl. V gimnazjum humanistycznego i matematyczno-przyrodniczego*, [w:] *Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego*, Kraków 1929, s. 191.

[5] Zob. Okólnik Ministerstwa WR i OP z dnia 3 VII 1929.

[6] Fuzjonizm to dążenie do możliwie ścisłego, organicznego powiązania różnych działów matematyki (np. planimetrii ze stereometrią, algebry lub arytmetyki z geometrią).

na drodze własnej samodzielności, własnego wysiłku i myślenia. To wdrażanie ucznia do samodzielnej pracy, gruntownej i dokładnej, do ścisłego myślenia i głębszego zainteresowania otaczającą rzeczywistością, „jest ważnym postulatem społeczno-narodowym, bo może stać się narzędziem – jak stwierdza program – wszczepienia inteligentnej warstwie narodu tężyzny myśli i pracy".[7]

W przedmowie do wydania programu gimnazjum wyższego w roku 1922 s. VI znajdujemy wzmiankę, że wypowiada on „walkę książkom i werbalnym sposobom nauczania, przy których tylko nauczyciel jest czynny a uczeń w sposób bierny wyucza się lekcji z podręcznika lub wykładu usłyszanego w klasie, zmierza do bezpośredniego stykania młodzieży ze zjawiskami, które ona ma poznawać, do wywołania głębszego zainteresowania się nim, do organizowania pracy możliwie jak najbardziej samodzielnej i osobistej [. . .]". Tak więc program kładzie nacisk na aktywne i samodzielne zdobywanie wiedzy przez ucznia.

W programach nauczania opublikowanych po roku 1932, w większym stopniu niż w programach poprzedniego okresu, uwzględniono postulaty programu merańskiego i idee nowego wychowania. Uwidaczniają się one zarówno w celach, jak i treściach kształcenia, a także w komentarzach odnoszących się do metod nauczania.

W sformułowanych na wstępie do programu celach na czoło wybijają się cele materialne, skierowane na opanowanie przez ucznia określonego zasobu wiedzy, umiejętności i nawyków w operowaniu nią. Są i takie, które odnoszą się do rozwijania „dyspozycji logicznych" u ucznia, kształcenia wyobraźni przestrzennej, rozwijania aktywnego i i samodzielnego myślenia oraz do wyrabiania umiejętności stosowania wiedzy matematycznej do zagadnień z innych dziedzin nauki i życia".

W intencji nowego programu leży również zaprawianie uczniów do myślenia „funkcyjnego", co znalazło wyraz w kl. I, przy opracowywaniu rozdziału „stosunek wielkości jednorodnych, wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalnych". Nie była to jednak nauka o funkcji we właściwym tego słowa znaczeniu, lecz przygotowanie do niej przez gromadzenie odpowiedniego „materiału spostrzeżeniowego" i doświadczeń.

Istotne znaczenie dla nauki o funkcji miał też dział poświęcony równaniom i układom równań I stopnia w klasie II a równaniom drugiego stopnia w kl. IV. Termin „funkcja", jak też i nauka o niej wystąpiły dopiero w kl. III w dziale: *Elementarne wiadomości o funkcji.*

O wiele szerzej naukę o funkcji potraktowano w programie dwuletniego liceum ogólnokształcącego, zwłaszcza o profilu matematyczno-fizycznym. Do programu liceum włączono także elementy matematyki wyższej, elementy rachunku różniczkowego, podstawy geometrii analitycznej a nawet pojęcie całki (w liceum matematyczno-fizycznym). Postawiono pierwszy krok w kierunku zmiany struktury geometrii. Stopniowo przenikają do geometrii syntetycznej metody geometrii analitycznej, wprowadza się układ współrzędnych.

Autorzy programu dla czteroletniego gimnazjum dostrzegają potrzebę urzeczywist-

---

7 Por. *Program gimnazjum państwowego. Wydział humanistyczny*, Warszawa 1922, s. 20.

nienia idei fuzjonizmu. W klasie I gimnazjalnej mimo że program nie przewidywał geometrii, to jednak zalecał uwzględnienie w zadaniach problemów natury geometrycznej. Dobre warunki do realizacji idei fuzjonizmu (w układzie: geometria – algebra) stwarzał program kl. III przy rozpatrywaniu zagadnień tzw. miarowych. Zagadnienia miarowe zostały w tym programie inaczej ujęte niż poprzednio, usuwa się równoważność wielokątów, która figurowała w danym programie jako przygotowanie do wprowadzenia pola wielokąta. Twierdzenie Talesa i odwrotne do niego, jak też zastosowanie powyższych twierdzeń do jednokładności i podobieństwa figur, należało od razu ujmować w postaci miarowej, posługując się własnościami proporcji liczbowych ustalonych w kursie algebry.

Korzystne warunki do realizacji idei fuzjonizmu stwarzał program dwuletniego liceum. Tematy z algebry „przeplatane" są tematami z geometrii lub ustawione są tak, że można było je realizować równolegle. Dostrzegamy również organiczne powiązanie trygonometrii i geometrii, a także geometrii syntetycznej z geometrią analityczną.

W programach nauczania wydanych w latach trzydziestych proponuje się odchodzenie od statycznego traktowania treści, zauważyć można lepsze ukierunkowanie treści na potrzeby życia praktycznego, w szczególności życia gospodarczego kraju.

W układzie treści można dostrzec idee przewodnie, lepszą organizację materiału nauczania. Toruje sobie drogę pogląd, że matematyka szkolna powinna być „żywa", a jej nauczanie powinno być kierowane na rozwój aktywności matematycznej i na wyrobienie zainteresowań matematycznych ucznia na drodze samodzielnej i twórczej pracy w dostępnym mu zakresie.

Podkreślano, że w liceum powinno się dużo uwagi poświęcać kształtowaniu umiejętności posługiwania się zdobytą wiedzą oraz przygotowaniu uczniów do ścisłego i umotywowanego myślenia, jasnego formułowania myśli i poglądów.

W programach wyraźnie podkreślano, że w nauczaniu należy stosować takie metody, aby uczeń miał możliwość zdobywania wiedzy na drodze własnego wysiłku, należy stwarzać jak najczęściej okazję do jego inicjatywy i pomysłowości.

REALIZACJA IDEI RUCHU REFORMATORSKIEGO W PODRĘCZNKACH MATEMATYKI

W dwudziestoleciu międzywojennym opracowano kilka wartościowych podręczników dla szkół średnich. Podręcznki te, mimo że miały jeszcze charakter podręczników klasycznych, ale już „przesiąknięte" były nowymi ideami, które niósł ze sobą ruch naukowy i pedagogiczny w matematyce. Można je dostrzec m. in. w sposobie ujmowania niektórych partii materiału rzeczowego. W sposób bardziej wartościowy niż poprzednio przekazywane są w nich pojęcia i rozumowania matematyczne. Widoczne są próby lepszego dostosowania ujęcia materiału do poziomu umysłowego ucznia, jego rozwoju intelektualnego i samodzielnej lektury.

Podstawowe idee charakteryzujące większość podręczników szkolnych to: rozwijanie u uczniów myślenia „funkcyjnego" i dążność do łączenia różnych działów matematyki szkolnej (fuzjonizm).

Zakres i sposób ujęcia materiału dotyczącego funkcji w ówczesnych podręcznikach szkolnych nie był jednakowy. Autorzy podręczników do matematyki różnie traktowali materiał poprzedzający wiadomości o funkcji. Uwidacznia się to głównie w materiale zadaniowym. Staranne przygotowanie do nauki o funkcji obserwujemy w podręczniku T. Gutkowskiego.[8] W przedmowie do wydania pierwszego tego podręcznika (umieszczono w tymże wydaniu) m.in. czytamy:

„[. . .] przystępując do opracowania niniejszego podręcznika postawiłem sobie za główne zadanie rozwinięcie u ucznia tak zwanej myśli funkcjonalnej, co postarałem się przeciągnąć jako główną nić tkaniny całego kursu algebry".[9]

Już w rozdziale pierwszym tego podręcznika mamy zadania na obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych dla różnych wartości nadawanych literom tych wyrażeń, co miało wskazywać, że jedno i to samo wyrażenie może mieć różne wartości: „jeżeli zmienić wartość liter, to na ogół wartość wyrażenia się zmieni".[10]

Znajdowano wartości y określone wzorem, którym był wielomian stopnia pierwszego, później drugiego, w końcu iloraz takich wielomianów. Posługiwano się tu również odpowiednimi reprezentacjami graficznymi (przedstawiano graficznie zależności między przyjętymi wartościami x a otrzymanymi wartościami y).

Takie traktowanie odnośnych wyrażeń miało już na etapie przygotowawczym ukierunkowywać myśl ucznia, że pojęcie funkcji, które pozna później, nie może być utożsamiane ze wzorem ją opisującym, a także ułatwić mu (w przyszłości) zrozumienie definicji funkcji. Autor mocno podkreślał, że uczeń powinien najpierw zapoznać się z treścią tego pojęcia, zanim zacznie operować wyrazem „funkcja". Samo pojęcie funkcja definiuje w sposób następujący:

Zmienną zależną albo funkcją nazywamy taką zmienną, której wielkość zależy od drugiej zmiennej.[11]

Funkcję, tj. zmienną zależną, oznacza litera y lub f(x).

Pojęcie wykresu funkcji wprowadza w oparciu o graficzny obraz zmiany (w czasie) temperatury dziennej. Określa pierwiastek funkcji oraz podaje sposób znajdowania pierwiastków funkcji za pomocą wykresu krzywej. Z kolei przechodzi do omawiania zagadnienia: badanie funkcji. Samo badanie poprzedza podanie kilku twierdzeń, praktycznie przydatnych do badania funkcji. Po każdym twierdzeniu podaje przykład, w którym wykorzystuje twierdzenie ułatwiające badanie danej funkcji. Przebieg zmienności funkcji przedstawia tabelą i graficznie. Uwzględnione przykłady dotyczą funkcji liniowej, kwadratowej, homograficznej.

Dość szeroko potraktowano zagadnienie funkcji w podręcznikach J. Mihułowicza.[12] Każdy ze sposobów opisu funkcji został tu naświetlony w oddzielnym paragrafie.

---

8 T. G u t k o w s k i, Algebra elementarna, Warszawa 1922.

9 *Ibid.*, s.3.

10 *Ibid.*, s.61.

11 *Ibid.*, s.72.

12 J. M i h u ł o w i c z, *Podręcznik arytmetyki dla klasy IV - V szkół średnich*, Lwów 1920.

Wprowadzone wcześniej pojęcie funkcji, wykorzystał dalej przy opracowaniu proporcjonalności prostej i odwrotnej jako „szczególnych funkcji". Podręcznik zawierał także sporo zadań na tzw. „regułę trzech", a zasadniczy materiał dotyczący funkcji został tu zawarty w przykładach o treści zaczerpniętej z życia i innych nauk.

Późniejszy podręcznik S. Ruziewicza i E. Żylińskiego[13] pojęcie funkcji wprowadza jeszcze inaczej. Najpierw rozpatruje się pojęcie odpowiedniości elementów dwóch zbiorów, a następnie wykorzystuje je w definicji funkcji, przy czym zwrotem definiowanym nie była „funkcja" tylko „zależność funkcjonalna".

Podana tam definicja ma postać następującą.

Gdy mamy na przykład jakieś dwa zbiory przedmiotów Z_1, Z_2, przy czym poszczególnym elementom zbioru Z_1 odpowiadają poszczególne elementy zbioru Z_2, to mówimy, że pomiędzy elementami zbiorów Z_1 i Z_2 zachodzi zależność funkcjonalna lub co oznacza to samo, że przedmiot y zbioru Z_2 jest funkcją przedmiotu x zbioru Z_1. Oznaczamy to znakiem $y = F(x)$, mówiąc, że x jest zmienną niezależną, y zaś zmienną zależną"[14]

Z opracowywanych w ówczesnej szkole średniej funkcji najwięcej czasu przeznaczano na funkcję stopnia drugiego. Funkcja ta stwarzała wiele okazji do zapoznania uczniów z wieloma terminami i operacjami z zakresu teorii funkcji elementarnych. Zadania dotyczące funkcji kwadratowej wykorzystywano do zapoznania ucznia z ogólną wiedzą o funkcji i jej wykresie. Szczególnie lansowano zadania matematyczne „na dyskusję" i na badanie zależności funkcjonalnej. Zasadniczym celem tych zadań miało być przygotowanie uczniów do myślenia funkcyjnego. Chodziło tu o podkreślenie, że ze zmianą jednej wielkości zmienia się i druga. Jedna wielkość zależy od drugiej. Zagadnieniom tzw. „dyskusyjnym" poświęcono specjalne zbiory zadań.[15]

Znaczący udział w przyswajaniu przez uczniów pojęcia funkcji i pojęć z nim związanych miały zbiory zadań takich autorów jak: St.Bóbr[16], N. Rybkin[17], Z. Arlitewicz.[18]

Pewną rolę w nauce o funkcji spełniała trygonometria, realizowana przy końcu kursu matematyki (po opracowaniu funkcji). Takie umiejscowienie jej w programie pozwalało na utrwalenie i wzbogacenie zdobytej wcześniej wiedzy o funkcjach. Do wiadomości o funkcjach liczbowo-liczbowych dołączone zostały funkcje określone na innych zbiorach, mając też szereg innych własności (np. okresowość), z którymi uczeń nie spotkał się wcześniej.

---

[13] S. Ruziewicz i E. Żyliński, *Algebra. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich*, cz. I 1926.

[14] *Ibid.*, s. 151.

[15] Zob. np. R. Witwiński, *Badania zależności funkcjonalnej dla klas wyższych szkół średnich*, wyd. II, Warszawa 1921, *id.*, *Zbiór zadań z geometrii płaskiej wymagających zastosowania algebry. Zadania na wykrycie zależności między wielkościami geometrycznymi*, Warszawa 1922.

[16] S. Bóbr, *Badanie funkcji liniowej oraz trójmianu drugiego stopnia*, Warszawa 1920.

[17] Z. Arlitewicz, *Tematy maturalne z rozwiązaniami i objaśnieniami dla wyższych szkół średnich*, Warszawa 1923.

[18] N. Rybkin, *Zbiór zadań geometrycznych rachunkowych*, cz. II, *Stereometria*, Wyd. VI, Warszawa 1922.

Dział programowy traktujący o trygonometrii realizowano w oparciu o osobne podręczniki poświęcone tej gałęzi wiedzy. Na uwagę zasługują tu dwa z nich: W. Wojtowicza[19] i Wyczałkowskiego.[20] Zawierały one wiele pojęć trygonometrycznych, ujętych w sposób zbliżony do tego, z jakim mamy do czynienia w podręcznikach współczesnych. Funkcje trygonometryczne dostarczały wiele interesującego materiału do badania zmienności funkcji. Analizując zadania poświęcone badaniu funkcji wnosimy, że w ciągu omawianego okresu dążono do eliminowania metod rachunkowych na rzecz wykorzystania wiadomości o przekształceniach izometrycznych.

Asymilowanie przez ucznia pewnych cech myślenia funkcyjnego mogło odbywać się w ramach nauczania geometrii. Figury geometryczne rozumiane nie jako utwory statystyczne, lecz jako utwory podlegające przeobrażeniom rozmaitego rodzaju, mogły dostarczyć ku temu wiele sposobności. Okoliczności te wykorzystano w podręcznikach geometrii. Dobrze temu celowi służyły m. in. przekształcenia geometryczne (wprowadzające do geometrii pojęcia zmienności) i przykłady poszukiwania miejsc geometrycznych. Zagadnieniom tym w podręczniku W. Wojtowicza[21] poświęcono stosunkowo dużo miejsca. Ujęto je w duchu postulatów programu z Meranu, opracowanego przez grupę kierowaną przez F. Kleina. Na uwagę zasługuje tu sposób wyrażania miejsca geometrycznego za pomocą pojęcia ruchu. Znalezienie miejsca geometrycznego autor sprowadzał m. in. do „znalezienia linii, którą zakreśla punkt poruszający się po płaszczyźnie według pewnego prawa".[22] Uważał, że każde zagadnienie, dotyczące miejsc geometrycznych uczeń powinien wyrazić za pomocą pojęcia ruchu. A oto jedno z zadań: „W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest nieruchoma, długości dwóch przyprostokątnych są zmienne. Co kreśli jego środek ciężkości".[23]

Poczesne miejsce w podręcznikach geometrii zajmowały zastosowania algebry do rozwiązania zadań konstrukcyjnych. Trzeba było np. rozstrzygnąć jak znaleziony według wzoru odcinek zależy od odcinków danych. W związku z tym stwierdzono, że zadanie jest rozwiązywalne przy pomocy cyrkla i linii, gdy „odcinek szukany jest funkcją stopnia pierwszego lub drugiego odcinków danych".[24]

Ukoronowaniem nauki o funkcji w ramach kursu geometrii była geometria analityczna. W podręczniku *Geometria* A. Łomnickiego[25], stosuje się metody algebraiczne (unifikacja geometrii i algebry). We wstępie autor pisze:

Wyrażenia (algebraiczne lub przestępne), zawierające dwie zmienne możemy badać, analizować przy pomocy ich obrazów geometrycznych i wykrywać w ten sposób zawiłe nieraz związki matematyczne. Przykładem tego postępowania: graficzne rozwiązywanie równań. Z drugiej strony każdą

---

[19] W. Wójtowicz, *Trygonometria płaska do użytku szkół średnich*, Wyd. IV, Warszawa 1928.

[20] W. J. Wyczałkowski, *Trygonometria. Podręcznik dla szkół średnich*. Warszawa 1929. 1929.

[21] W. Wójtowicz, *Zarys geometrii do użytku szkół średnich*. Wyd. VI, Lwów 1926.

[22] *Ibid.*, s.112.

[23] *Ibid.*, s. 113.

[24] *Ibid.*, s. 289.

[25] Łomnicki, *Geometria. Podręcznik geometrii analitycznej*. Lwów 1921.

linią płaską, zbudowaną według jakiegoś znanego prawa można zastąpić wyrażeniem zawierającym dwie zmienne. W ten sposób zamiast badać utwór geometryczny przy pomocy niedokładnego rysunku lub niepewnej wyobraźni geometrycznej, badamy go przy pomocy ścisłego rachunku.

Obydwa te zagadnienia stanowią przedmiot geometrii analitycznej płaskiej. Badaniu wyrażeń zawierających trzy zmienne odpowiada badanie linii krzywych oraz powierzchni przestrzennych i jest przedmiotem geometrii przestrzennej, trójwymiarowej.

Znaczną część podręcznka zajmują krzywe stożkowe. Stwarzały one okazję do syntezy wiadomości o funkcjach, zwłaszcza dyskusje równań linii krzywych.

Druga idea: łączenia, „fuzji" planimetrii i stereometrii w polskich podręcznikach nie znalazła właściwej realizacji. Ograniczono się jedynie do przemiennego umieszczania pewnych rozdziałów z obu działów geometrii. Na przykład w podręczniku I. Zydlera[26] w 12 rozdziałach poświęconych planimetrii rozdział VII dotyczył położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Stereometrię obejmowały końcowe rozdziały: XIII-XV. W podręczniku W. Wojtowicza wśród pewników, podanych na początku książki, umieszczono również te, które dotyczyły przestrzeni. Więcej przykładów fuzjii można dostrzec w układach: arytmetyka – algebra, geometria – arytmetyka oraz trygonometria – geometria.

Wyrazem zewnętrznym realizacji tej idei było opracowanie wspólnych książek dla różnych działów matematyki szkolnej. A oto ich autorzy: K. Strutyński[27], J. Mihułowicz[28], N. Rybkin[29]. Wydane zostały i takie podręczniki, które w tytule miały *Geometria* a w podtytule *Planimetria i Stereometria*[30] lub *Trygonometria i Geometria.*[31]

Należy tu podkreślić, że w idei fuzjonizmu nie chodziło o umieszczenie obok siebie tematów z różnych dyscyplin, ale o ich wzajemne przenikanie się. Łączenie różnych dziedzin matematyki miało dawać pożądany pogląd na istotę matematyki i jej metody opisywania materialnego świata. Miała też dawać duże korzyści samemu nauczaniu, sprzyjać lepszemu objaśnianiu jednych pojęć za pomocą drugich. Za szczególnie pożyteczną rzecz uznawano w nauczaniu te momenty, w których występuje łączenie geometrii z arytmetyką lub algebrą – nauką abstrakcyjną mającą mniej punktów stycznych z życiem aniżeli geometria.

Praktyczną realizację idei łączenia arytmetyki (algebry) z geometrią dostrzegamy m. in. w podręczniku J. Mihułowicza[32] przy wykorzystaniu „linii liczbowych" (dzisiaj powiemy osi liczbowej), przy nauce o liczbie. Dodawanie i odejmowanie liczb obrazo-

---

[26] J. Z y d l e r, *Geometria w zakresie szkoły średniej*, Wyd. XIV, Warszawa 1925.

[27] K. S t r u t y n s k i. *Arytmetyka i geometria. Stopień niższy*, cz. III, Lwów 1928.

[28] J. M i h u ł o w i c z, *Podręcznik arytmetyki i algebry dla klasy VI gimnazjalnej*, Wyd. V, Lwów 1929.

[29] N. R y b k i n, *Zbiór zadań stereometrycznych wymagających zastosowania trygonometrii*, Wyd. IV, 1923.

[30] A. Ł o m n i c k i, *Geometria. Podręcznik dla szkół średnich*, cz. I, *Planimetria – Stereometria*, Lwów 1930.

[31] Ł o m n i c k i, *Geometria. Podręcznik dla szkół średnich*, cz. II, *Trygonometria*, Wyd. IV, Lwów 1930.

[32] Zob. np. J. M i h u ł o w i c z, *Podręcznik arytmetyki i algebry na klasę VII gimnazjalną*, Warszawa 1924.

wane było za pomocą odcinków. Iloczyn a • b interpretowano jako pole prostokąta, a iloczyn a • b • c jako objętość prostopadłościanu zbudowanego na odcinkach o długości a, b, c. Wzory skróconego mnożenia przedstawiano na odpowiednio dzielonych kwadratach lub sześcianach.

Przenikanie treści arytmetycznych i algebraicznych do geometrii obserwujemy także w podręczniku W. Wojtowicza[33], przy ujęciu zagadnienia: mierzenie wielkości geometrycznych. Przeprowadza się tu rozważania mające charakter rachunkowo-algebraiczny. W dowodach odnośnych twierdzeń operuje się liczbami, korzysta się z rachunku algebraicznego, np. dowód twierdzenia Herona o polu trójkąta.

Wzajemne przenikanie się pojęć i metod algebry i geometrii obserwujemy także w graficznej interpretacji liczby niewymiernej, graficznym rozwiązywaniu równań i ich układów. Z analizy algebraicznej korzysta się przy zadaniach konstrukcyjnych.

Najwyraźniejsze jednak zespolenie geometrii i arytmetyki (algebry) występuje w zbiorach zadań[34], które zawierają zadania z pogranicza przedmiotów. Proponuje się zadania rachunkowe, w których oblicza się miary odcinków lub pól, gdy dane są liczbowo pewne inne odcinki lub pola. Trzeba ułożyć równanie, którym czynią zadość niewiadome, co się najczęściej dokonuje przez zastosowanie twierdzeń o podobieństwie trójkątów oraz twierdzenia Pitagorasa, a następnie rozwiązuje te równania.

W podręcznikach wydanych po reformie z roku 1932 lepiej, w porównaniu z podręcznikami z poprzedniego okresu, ujęto niektóre zagadnienia matematyki szkolnej; uściślono niektóre pojęcia, poprawiono język i symbolikę. Te ulepszenia widoczne są zarówno w podręcznikach geometrii, jak i algebry. Mamy tu na uwadze podręczniki dla szkół średnich: S. Banacha[35], S. Straszewicza i S. Kulczyckiego[36], A. Łomnickiego[37], S. Steckela[38] i J. Mihułowicza[39].

W podręcznikach geometrii figury geometryczne traktuje się jako utwory mogące podlegać rozmaitego rodzaju przeobrażeniom. Prawa tych przeobrażeń (zmienność lub niezmienność) są przedmiotem badań. Pojęcie ruchu stanowi podstawę nauki o figurach przystających. W podręczniku S. Straszewicza i S. Kulczyckiego figury przystające definiuje się następująco:

Dwie figury, takie, że jedną z nich można otrzymać z drugiej przez przesunięcie, a potem obrót nazywamy przystającymi wprost. Dwie zaś figury, takie, że przez przesunięcie i obrót jednej można otrzymać figurę symetryczną do drugiej nazywamy przystającymi odwrotnie.[40]

---

33 W ó j t o w i c z, Zarys geometrii do użytku szkół średnich.

34 Zob. np. W i t w i ń s k i, *Zbiór zadań z geometrii płaskiej . . .*

35 Zob. S. B a n a c h, *Algebra dla III klasy gimnazjalnej,* Lwów – Warszawa 1935.

36 S. S t r a s z e w i c z, S. K u l c z y c k i, *Geometria dla klasy III gimnazjalnej,* Lwów – Warszawa, *id., Algebra dla II klasy liceum ogólnokształcącego. Wydział humanistyczny i przyrodniczy,* Warszawa 1938.

37 A. Ł o m n i c k i. Geometria dla II klasy gimnazjalnej, Lwów – Warszawa 1934, *id., Geometria dla IV klasy gimnazjalnej,* Lwów – Warszawa 1939.

38 S. S t e c k e l, *Algebra dla klasy drugiej liceów humanistycznych, przyrodniczych i klasycznych,* Warszawa 1938.

39 J. M i h u ł o w i c z, *Algebra dla I klasy liceum humanistycznego i przyrodniczego,* Lwów – Warszawa 1937.

40 S t r a s z e w i c z, K u l c z y c k i, *Geometria dla klasy III gimnazjalnej,* s. 8.

Bada się właściwości figury geometrycznej w powiązaniu z badaniem jej przekształcenia. Stosuje się liczne rozumowania, u podłoża których leży miarowe ujęcie odcinków, pól i objętości. Na przykład w podręczniku A. Łomnickiego[41] przy badaniu figur geometrycznych związki między figurami wyraża się jako związki między liczbami (np. związki miarowe w trójkącie). Związki opisuje się w języku algebry: Wysokość trójkąta równoramiennego można wyrazić jako funkcję jego boków:

$$w = \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2}$$

b – ramię trójkąta, c – podstawa"

W dowodach twierdzeń i ich zastosowaniach operuje się liczbami długościami odcinków. Z kolei metody geometryczne (graficzne) wykorzystuje się przy rozwiązywaniu zagadnień arytmetycznych (graficzne wyciąganie pierwiastka kwadratowego z danej liczby). Stosuje się więc metodę ścisłego kojarzenia rozważań rachunkowych z bezpośrednimi rozważaniami konstrukcyjnymi.

W podręcznikach algebry, w sposób zbliżony do stosowanych dzisiaj ujmuje się podstawowe wiadomości o funkcji. Stefan Banach pojęcie funkcji definiuje w sposób następujący:

[. . .] ilekroć dwie zmienne np. x i y są tak ze sobą związane, że każdej wartości x odpowiada tylko jedna wartość zmiennej y, mówimy że zmienna y jest funkcją zmiennej x.[42]

Potem omawia różne sposoby określania funkcji, wykresy funkcji i równania pierwszego stopnia. Wykresom i równaniom poświęca oddzielne rozdziały. Równania oświetla z „funkcyjnego" punktu widzenia, przez co pragnął podkreślić organiczne powiązanie tych zagadnień.

W podręcznikach dla dwuletniego liceum ogólnokształcącego pojęcie funkcji definiuje się jako pewne przyporządkowanie,, np. S. Steckel podaje taką oto definicję:

Niech będzie dany dowolny zbiór liczb rzeczywistych, który oznaczymy przez X. Przyporządkowujemy każdej liczbie x, należącej do zbioru X, jedną i tylko jedną wartość y (przy czym dwom różnym liczbom x_1 i x_2 niekoniecznie muszą być przyporządkowane różne wartości). Mówimy wówczas, że prawo ustalające to przyporządkowanie określa pewną funkcję w zbiorze X (tzn. wszystkie liczby zbioru X).[43]

Następnie rozważa się tu różne sposoby przedstawiania funkcji. Dalsze wiadomości o funkcjach dotyczą takich pojęć, jak: funkcja rosnąca, funkcja malejąca, granica funkcji, ciągłość i nieciągłość funkcji.

Pojęcie granicy definiuje w ten sposób:

Mając daną funkcję $y = f(x)$ mówimy, że $y \to A$, gdy $x \to x_0$, gdy y przyjmuje wartości dostatecznie mało różniące się od A, skoro tylko x przybiera wartości dostatecznie mało różniące się od x_0 (i różne od x_0).[44]

---

41 Łomnicki, *Geometria dla IV klasy gimnazjalnej*, s. 15.

42 Banach, *Algebra dla III klasy gimnazjalnej*, s. 50.

43 Steckel, *Algebra. Podręcznik dla klasy drugiej liceum przyrodniczego, humanistycznego i klasycznego*, s.6.

44 *Ibid.*

W podręczniku S. Staszewicza i S. Kulczyckiego[45] podano definicję Heinego w postaci następującej:

funkcja f(x) zmierza do granicy ł gdy x dąży do wartości c, znaczy: jeżeli x_1, x_2, x_3 . . . . . jest dowolnym ciągiem dążącym do c, to ciąg $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ . . . . . dąży do l (żadna z liczb x_1, x_2, x_3 nie równa się c).

Po ćwiczeniach na obliczanie granicy na podstawie powyższej definicji i podaniu odnośnych twierdzeń zajęto się ciągłością funkcji. Następnie, zgodnie z tradycją, wprowadzono pojęcie pochodnej funkcji jako granicę ilorazu różnicowego. Pojęcie pochodnej i twierdzenie o pochodnych zostały użyte do badania funkcji elementarnych. Idea „zależności funkcjonalnej" została rozwinięta w postaci wstępnych wiadomości z rachunku całkowego. Obejmowały one pojęcie funkcji pierwotnej, elementarne twierdzenia o funkcjach pierwotnych, pojęcie całki oznaczonej oraz jej najprostsze zastosowania geometryczne.

Trzecią część z serii podręczników dla kl. II liceum, opracowanych przez S. Straszewicza i S. Kulczyckiego, stanowiła grometria analityczna. Na kartach tego podręcznika omówiono m. in.: równania linii, zagadnienie analitycznego wyrażania przekształceń geometrycznych (przesunięcie równoległe, obrót, jednokładność, powinowactwo) równanie linii prostej oraz krzywe stożkowe. Rozważa się tu szereg zadań przy których rozwiązywaniu uczniowie mogli dostrzec możliwości określania różnych figur za pomocą równań i nierówności.

Teoria przekształceń geometrycznych została tu tak ujęta, że uczniowie mieli okazję do powtórzenia wiadomości o przekształceniach (poznanych wcześniej w ramach geometrii syntetycznej) oraz mogli zapoznać się z zastosowaniem metody współrzędnych do definiowania przekształceń i badania ich własności.

Podczas rozwiązywania niektórych zagadnień geometrycznych, np. przy wyznaczaniu odległości punktu od prostej, przy wyprowadzaniu równań stycznych do krzywych korzysta się z rachunku różniczkowego.

UWAGI KOŃCOWE

Problematyka przedstawiona w ninejszej pracy, ujęta z konieczności w sposób skrótowy, dowodzi, iż w całym omawianym okresie toczono walkę o taką matematykę szkolną, w której dostatecznie zostałyby odzwierciedlone nowe idee, niesione przez ogólny ruch reformatorski w początkach XX wieku. W związku z tym obserwujemy tendencje do rozszerzenia celów nauczania matematyki i do integrowania w nauczaniu różnych działów matematyki (idea fuzjonizmu). Dostrzegamy próbę lepszego usytuowania w programach i podręcznikach szkolnych niektórych pojęć matematycznych (np. pojęcie przekształcenia, pojęcie funkcji); starano się nadać im nową postać, zgodną z kierunkiem rozwoju matematyki jako nauki. Można również zauważyć troskę autorów programów i podręczników szkolnych o praktyczną stronę nauczania matematyki. Uwidacznia się to m. in. w uwzględnianiu w materiale nauczania tematyki związanej z życiem praktycznym i gospodarczym kraju, a także nachylonej w stronę fizyki i innych nauk. Zaczęła

[45] S t r a s z e w i c z, K u ł c z y c k i, *Algebra dla II klasy liceum ogólnokształcącego* . . ., s. 23.

torować sobie drogę (znalazła nawet odbicie w programach wydanych po roku 1932) idei elastycznego programu, dająca możliwości uwzględniania w pewnym stopniu różnych potrzeb i zainteresowań uczniów.

Podsumowując, można powiedzieć, że programy i podręczniki szkolne wydane w latach międzywojennych (a zwłaszcza po roku 1932), mimo że jeszcze były klasyczne, to jednak już były przesiąknięte nowymi ideami.

РЕЗЮМЕ

В данной работе автор попытался представить, в какой степени нашли свое отображение новые идеи научного и педагогического движения в польских программах по математике и учебниках, реализованные в средних общеобразовательных школах в междувоенный период. Особенному анализу подвергнуты программы и учебники, с точки зрения реализации Меранской программы и влияния реформ обучения математики, введенных в некоторых странах Европы.

SUMMARY

The paper is an attempt at revealing how far the new ideas of the academic and pedagogical movement became reflected in the Polish maths syllabus and textbooks which were adopted in secondary schools – grammar schools – in the inter-war period. Special attention in given to an analysis of the new curricula and books from the point of view of their implementing the Meran program and of the influence of the reforms in teaching mathematics introduced in certain European countries.