ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

LUBLIN-POLONIA

VOL.XLII,13 SECTIO AAA 1987

Instytut Fizyki UMCS

J. SZYMONA, A. BARAN, A. GÓŹDŹ, M. PIŁAT

Teoriogrupowa analiza elementów optycznych w układach światłowodowych*
III. Aberracje trzeciego rzędu

Group Theoretical Analysis of Optical Elements in Waveguide Systems
III. Third Order Aberrations

Теоретико-групповый анализ оптических элементов в системах световодов
III. Аберрации третьего порядка

1. HAMILTONIAN

W poprzednich częściach niniejszego opracowania przedstawione zostały ogólne teoretyczne podstawy opisu i analizy elementów układów optycznych w formalizmie teorii grup Liego. Przedstawiono rozwiązanie zagadnienia propagacji przyosiowego promienia świetlnego w światłowodzie gradientowym z dokładnością do wyrazów rzędu drugiego. Przedyskutowano także problem aberracji wywołanych uwzględnieniem w rozwinięciu hamiltonianu wyrazów czwartego rzędu. W tej części pracy rozważać będziemy przebieg promieni w światłowodzie gradientowym z dokładnością do wyrazów rzędu czwartego. Uwzględnienie tych wyrazów prowadzi do pojawienia się nieliniowości rzędu trzeciego w funkcjach opisujących bieg promieni.

Zgodnie ze wzorem (I. 6) hamiltonian układu optycznego o współczynniku załamania $n(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)$ ma następującą postać:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) = -\sqrt{n(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)^2 - p^2}\,. \tag{1}$$

*Praca finansowana z funduszy Problemu RR – I – 02

Załóżmy, że współczynnik załamania n zależy tylko od odległości od osi światłowodu: $n = n(q^2)$. Rozwinięcie wzoru (1) z dokładnością do wyrazów czwartego rzędu ma wtedy postać:

$$H = \frac{1}{2n_0^2}p^2 + \nu q^2 + \frac{1}{8n_0^3}p^4 + \rho q^4 + \frac{\nu}{2n_0^2}p^2q^2 \tag{2}$$

Jak widać, hamiltonian składa się z dwóch części. Pierwsze dwa wyrazy opisują układ bezaberracyjny omówiony w części I. Pozostałe wyrazy – rzędu czwartego – są odpowiedzialne za występowanie aberracji. Ewolucję dowolnej funkcji zależnej od punktu w przestrzeni fazowej $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ opisuje zgodnie z (I. 20) następujący operator:

$$\exp(-z\hat{H}) . \tag{3}$$

Przebieg promienia świetlnego jest wyznaczony przez dwie funkcje: $\mathbf{p}(z)$ i $\mathbf{q}(z)$. Działanie operatora (3) na współrzędne $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ powoduje „domieszanie" wyrażeń rzędu trzeciego, mamy więc do czynienia z problemem nieliniowym. Aby uwolnić się od nieliniowości, należy wprowadzić odpowiednie rozszerzenie przestrzeni fazowej. Ta nowa przestrzeń Z jest rozpięta na funkcjach połówkowych ${}^1\chi^{1/2}$, ${}^3\chi^{3/2}$ i ${}^3\chi^{1/2}$ zdefiniowanych przez wzory (II. 15, 16, 17). W ośmiowymiarowej przestrzeni Z operator ewolucji układu (3) działa liniowo, dzięki czemu obliczenia sprowadzają się do zwykłego mnożenia macierzy. Operator (3) jest szczególnym przypadkiem ogólnego elementu grupy A^3: $G(\mathbf{v}, w, \mathbf{u})$, przy odpowiednim wyborze parametrów $\mathbf{v}(z)$, $w(z)$ i $\mathbf{u}(z)$. Po znalezieniu tych funkcji działanie operatora (3) na wektor fazowy $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ obliczyć można ze wzoru (II. 19).

2. REPREZENTACJA MACIERZOWA

Hamiltonian (1) będący funkcją zmiennych fazowych $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ należy zastąpić operatorem $\hat{H}$ zdefiniowanym w równaniu (I. 7). Po wprowadzeniu operatorów ${}^n\hat{\chi}^j_m$ związanych z funkcjami ${}^n\chi^j_m$ określonymi w (II. 1, 2, 3) operator $\hat{H}$ przyjmie postać:

$$\hat{H} = \frac{1}{2n_0}\hat{\chi}^1_1 + \nu\hat{\chi}^1_{-1} + \frac{1}{8n_0^2}\hat{\chi}^2_2 + \frac{\nu}{2n_0^2}\hat{\chi}^2_0 + \rho\hat{\chi}^2_{-2} + \frac{2\nu}{3n}\hat{\chi}^0_0 \cdot \tag{4}$$

Działanie tego operatora na punkt $({}^1\chi^{1/2}, {}^3\chi^{3/2}, {}^3\chi^{1/2})$ rozszerzonej przestrzeni Z można przedstawić w postaci:

$$\hat{H}\begin{bmatrix} {}^1\chi^{1/2} \\ {}^3\chi^{3/2} \\ {}^3\chi^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\chi^{1/2} \\ {}^3\chi^{3/2} \\ {}^3\chi^{1/2} \end{bmatrix} , \tag{5}$$

gdzie macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ są następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2\nu \\ -\frac{1}{n_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{4\nu}{3n_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\nu}{3n_0^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\nu}{n_0^2} & 0 & 4\rho \\ -\frac{1}{2n_0^3} & 0 & -\frac{\nu}{n_0^2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 6\nu & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n_0} & 0 & 4\nu & 0 \\ 0 & -\frac{2}{n_0} & 0 & 2\nu \\ 0 & 0 & -\frac{3}{n_0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierzowym przedstawieniem operatora ewolucji (3) będącego elementem grupy A^3, która działa w przestrzeni funkcji określonych na rozszerzonej przestrzeni fazowej Z, jest macierz

$$\exp\left(z \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}\right). \tag{7}$$

Jawną postać tej macierzy jako funkcji zmiennej z można znaleźć rozwiązując układ równań różniczkowych (II. 19), gdzie $\alpha(z) = (\mathrm{v}(z), w(z), \mathrm{u}(z))$ jest zespołem parametrów opisujących poszczególne rodzaje aberracji [1].

W niniejszej pracy macierz (7) obliczono bezpośrednio przez rozwinięcie funkcji wykładniczej i zsumowanie powstałego w ten sposób szeregu. W rachunkach wykorzystano wzór Perrona na n-tą potęgę macierzy. Dość żmudne obliczenia prowadzą w końcu do następującego wzoru:

$$\exp(-z\hat{H}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{V} & 2w\,\mathbf{M}^{-1} \\ 0 & \mathbf{D}^{9/2}(\mathbf{M}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

gdzie: .5

$$\mathbf{M}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\kappa C_1 & \frac{\kappa^2}{\nu} S_1 \\ -\kappa^2 n_0 S_1 & 1-\kappa C_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \left[\begin{matrix} \frac{1}{2\sqrt{b}}\eta(-C_4+2C_2) & -\frac{3}{2}(\eta S_4 + \frac{1}{3}\varsigma z) \\ -\frac{1}{2b}(\eta(S_4-4S_2)-\varsigma z) & -\frac{3}{2\sqrt{b}}\eta(-C_4+2C_2) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{3}{2\sqrt{b}}\eta(C_4+2C_2) & \frac{1}{2b}(\eta(S_4+4S_2)-\varsigma z) \\ \frac{3}{2}(\eta S_4 + \frac{1}{3}\varsigma z) & \frac{1}{2\sqrt{b}}\eta(-C_4+2C_2) \end{matrix}\right],$$

$$w = -\left(\frac{2\nu}{3n_0^2}\right)z,$$

$$\mathbf{D}^{9/2} = \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2\beta & 3\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ \alpha^2\gamma & \alpha(2\beta\gamma+\alpha\delta) & \beta(\beta\gamma+2\alpha\delta) & \beta^2\delta \\ \alpha\gamma^2 & \delta(2\alpha\delta+\gamma\beta) & \delta(\alpha\delta+2\gamma\beta) & \beta\delta^2 \\ \gamma^3 & 3\gamma^2\delta & 3\gamma\delta^2 & \delta^3 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\kappa = \sqrt{\frac{2\nu}{n_0}}, \qquad b = \sqrt{2\nu n_0},$$

$$\eta = \frac{\nu}{4n_0^2}\cdot\frac{1-2n_0\rho}{\nu^2}, \quad \varsigma = \frac{\nu}{4n_0^2}\left(5+\frac{6n_0\rho}{\nu^2}\right),$$

$$S_k = \frac{1}{k\kappa}\sin(k\kappa z), \quad C_k = \frac{1}{k\kappa}(1-\cos(k\kappa z)).$$

Propagację promienia przedstawia trajektoria w zwykłej przestrzeni fazowej $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Ze skomplikowanego wzoru (8) wystarczy zachować tylko pierwszy wiersz, pozostałe bowiem nie niosą żadnej nowej informacji o przebiegu promienia:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}\left({}^1\chi^{1/2} + \mathbf{V}\,{}^9\chi^{9/2} + 2w\,{}^9\chi^{1/2}\right).$$

3. ABERRACJE

W części II pokazano, że każdy z sześciu parametrów $(\mathbf{v}, w)$ opisuje jakąś aberrację rozpatrywanego układu. Aberracje te są różne od aberracji znanych z analizy tradycyjnej, takich jak astygmatyzm, dystorsja, krzywizna pola itd., jednak wiążą się z nimi przez pewną transformację liniową. Ze wzoru (10) łącznie z wyrażeniami na macierze $\mathbf{M}^{-1}$ i $\mathbf{V}$, można odczytać następujące informacje:

(a) w przybliżeniu rzędu pierwszego, tzn. bez uwzględnienia aberracji, ruch promienia jest periodyczny z okresem równym $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\kappa} = \pi\sqrt{\frac{2n_0}{\nu}}$, co wynika z postaci macierzy $\mathbf{M}^{-1}$, w której występują funkcje $\sin(\kappa z)$ i $\cos(\kappa z)$;

(b) występujące w układzie aberracje związane są z sześcioma parametrami v_2, v_1, v_0, v_{-1}, v_{-2} oraz w; ponieważ parametry te są wzajemnie niezależne, w układzie występować będzie w ogólności sześć różnych i niezależnych aberracji;

(c) aberracje zależą od długości światłowodu, co wynika z postaci macierzy $\mathbf{V}$, w której występują funkcje zależne od z; parametr w również zależy od z;

(d) niektóre aberracje mają część oscylacyjną z okresem $\lambda_{ab} = \frac{1}{2}\lambda_G$ bowiem wyrażają się przez funkcje $\sin(2\kappa z)$, $\cos(2\kappa z)$, $\sin(4\kappa z)$ i $\cos(4\kappa z)$;

(e) niektóre aberracje mają część zależną liniowo od z, współczynnik proporcjonalności jest równy ς;

(f) oscylacyjne części aberracji mogą zostać usunięte przez odpowiedni wybór długości światłowodu, która musi być wielokrotnością λ_{ab};

(g) przez odpowiedni dobór kształtu współczynnika załamania, to jest parametrów ν i ρ, tak aby znikał współczynnik przy wyrazie liniowym ($\varsigma = 0$) można spowodować usunięcie aberracji, w których występuje część zależna liniowo od z;

(h) jedyną aberracją, której nie można usunąć jest aberracja związana ze współczynnikiem w; w tradycyjnej nomenklaturze jest to pewna kombinacja krzywizny pola i astygmatyzmu.

W przedstawionym wyżej formaliźmie teorii grup Liego możliwy jest jednolity opis powierzchni refrakcyjnych, a więc także powierzchni styku dwóch włókien o różnych parametrach. Możliwa jest także analiza światłowodów pozbawionych symetrii osiowej lub mających zmienną charakterystykę wzdłuż osi optycznej z.

BIBLIOGRAFIA

[1] Wolf K. B., The Group-theoretical treatment of abberating systems. Part II., *J. Math. Phys.*, vol. 27, 1458, (1986).

[2] Góźdź A., Baran A., Szymona J., Piłat M., *Ann. Univ. M.C.S.*, tom niniejszy.

SUMMARY

Light ray propagation in a waveguide is analysed up to the fourth order. Six types of aberration are discussed.

РЕЗЮМЕ

В работе рассуждается распространение светового луча в градиентном световоде с точностью до членов четвертого порядка. Получены формулы для шести различных аберраций.

Złożone 21.X.1988