ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXVIII, 40 SECTIO AA 1973

Instytut Fizyki UMCS
Zakład Fizyki Teoretycznej
Kierownik: prof. dr Stanisław Szpikowski

Maksymilian PIŁAT, Ryszard TARANKO

Wzajemne oddziaływanie strumienia elektronów i przewodzącego walca w podłużnym polu magnetycznym

Взаимодействие пучка электронов и проводящего стержня в продольном магнитном поле

The Interaction of an Electron Stream and a Conducting Cylinder in the Longitudal Magnetic Field

Problemy stateczności wzajemnego ruchu dwóch doskonale przewodzących ośrodków w polu magnetycznym lub też opływu ośrodka sprężystego przez strumień elektronów były rozważane w wielu pracach, np. [1, 2]. W pracach tych ograniczano się jednak do opływanych przez płaski, nieskończony strumień elektronów ośrodków sprężystych wypełniających półprzestrzeń lub tworzących płaską, równoległościenną, nieskończoną płytkę.

Badanie problemu stateczności przebiega w dwóch etapach. Etap pierwszy, ogólny, polega na wyprowadzeniu metodami analitycznymi z układu równań ruchu ośrodków i warunków brzegowych algebraicznego równania charakterystycznego na prędkość względną ośrodków, przy której amplitudy drgań rosną. Równanie charakterystyczne nawet w prostych przypadkach jest dostatecznie skomplikowane i rozwiązań można poszukiwać tylko metodami numerycznymi. Etap drugi dotyczy konkretnych przypadków i polega na numerycznym znalezieniu wartości prędkości z równania charakterystycznego przy warunku narastania amplitud.

Celem niniejszej pracy jest znalezienie równania charakterystycznego dla drgań samowzbudnych strumienia elektronów i doskonale przewodzącego ośrodka sprężystego w kształcie walca o przekroju kołowym, umieszczonego w podłużnym polu magnetycznym. Pole H i oś walca o promieniu a kierujemy wzdłuż osi z układu cylindrycznego. Strumień elektronów, obejmujący nieskończenie cienką warstwą walec, porusza się wzdłuż tworzących z niezaburzoną prędkością V_0. Powyższy problem będziemy rozpatrywać jako niezależny od współrzędnej φ. Przyjmiemy założenia mieszczące się w ramach ogólnie stosowanych uproszczeń, które pozwolą nam na względnie proste ujęcie problemu przy stosunkowo wiernym opisie zjawiska.

Zakładamy, że:

1. Gęstość strumienia elektronów jest tak mała, że można pominąć oddziaływanie ładunków na siebie wewnątrz strumienia.

2. Przy badaniu oddziaływania strumienia na ośrodek pominiemy wpływ wychyleń radialnych (z powierzchni $r = a$) na pole zaburzone w ośrodku.

3. Pole wzbudzone w walcu przez strumień elektronów jest małe w porównaniu z pierwotnym polem $\vec{H}$.

4. Składowa u_φ wektora przemieszczenia ośrodka sprężystego jest równa tożsamościowo 0.

Równanie ruchu przewodzącego ośrodka sprężystego w stałym, jednorodnym polu magnetycznym [3]:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{u} \times \vec{H}) \right] \times \vec{H} = \rho \ddot{\vec{u}} \tag{1}$$

gdzie u — wektor przemieszczenia, μ, λ — stałe Lamego, μ_0 — przenikalność magnetyczna ośrodka, ϱ — gęstość ośrodka,

$$\ddot{\vec{u}} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

ze względu na założenia [1—4] przyjmuje postać:

$$\begin{gathered} \mu\left[\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2}\right] + (\lambda+\mu)\left[u_{r,rr} - u_r/r^2 + u_{r,r}/r + u_{z,rr}\right] + \\ + \frac{\mu H^2}{4\pi}\left[u_{r,zz} - u_r/r^2 + u_{r,r}/r + u_{r,rr}\right] = \rho \ddot{u}_r \end{gathered} \tag{2}$$

$$\mu \Delta u_z + (\lambda + \mu)\left[\frac{u_{r,z}}{r} + u_{r,rz} + u_{z,zz}\right] = \rho \ddot{u}_z$$

$$u_\varphi = 0$$

gdzie u_r, u_z oznaczają składowe radialną i podłużną wektora u; przecinkiem oznaczona jest pochodna cząstkowa po współrzędnej przestrzennej.

W celu uproszczenia zapisu w dalszych rachunkach układ równań (2) przedstawimy w wygodniejszej postaci:

$$\begin{gathered} \overline{a}_1^2 u_{r,rr} + \overline{a}_1^2 u_{r,r}/r - \overline{a}_1^2 u_r/r^2 + \overline{a}_2^2 u_{r,zz} + (a_1^2 - a_2^2) u_{z,zr} = \ddot{u}_r \\ a_1^2 u_{z,zz} + \frac{a_2^2 u_{z,r}}{r} + a_2^2 u_{z,rr} + (a_1^2 - a_2^2)\left(\frac{u_{r,z}}{r} + u_{r,rz}\right) = \ddot{u}_z \end{gathered} \tag{3}$$

gdzie a_1, a_2 oznaczają odpowiednio podłużną i poprzeczną prędkość fali

$$\bar{a}_i^2 = a_i^2 + H^2/4; \quad i = 1, 2.$$

W dalszym ciągu przyjmiemy, że $\mu_0 \approx 1$. Równanie zaburzonego ruchu strumienia elektronów przy poprzednich założeniach jest następujące [1]:

$$\rho_m \frac{d^2\vec{\Phi}}{dt^2} = \rho_e \left[\vec{E}^* + (\vec{V}_0 \times \vec{h})/c + \left(\frac{d\vec{\Phi}}{dt} \times \vec{H} \right)/c \right] \tag{4}$$

gdzie d/dt — pochodna substancjalna, ϱ_m, ϱ_e — gęstość masowa i ładunkowa strumienia elektronów, $\vec{E}$, $\vec{h}$ — średnie wartości pól zaburzonych z lewej i prawej strony powierzchni, po której płynie strumień elektronów, $\vec{\Phi}$ — wektor przemieszczenia strumienia elektronów.

Powyższe równanie po wykorzystaniu związków:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -(\dot{\vec{u}} \times \vec{H})/c \\ \vec{h} &= \operatorname{rot}(\vec{u} \times \vec{H}) \end{aligned} \tag{5}$$

rozpisaniu na składowe we współrzędnych cylindrycznych i wyrugowaniu Φ_r, przechodzi w następujące równanie na składową $\Phi\varphi$:

$$\left. \ddot{\Phi}_\varphi + 2V_0 \dot{\Phi}_{\varphi,z} + V_0^2 \Phi_{\varphi,zz} + \Omega^2 \Phi_\varphi - \Omega \left[\dot{u}_r + V_0 \dot{u}_{r,z} \right] \right|_{r=a} = 0 \tag{6}$$

$[u_r + u_{r,z} V_0]_{r=a}$ — oznacza, że wyrażenie w nawiasie należy brać na powierzchni walca;

$\Omega = \varrho_e H/\varrho_m c$ — częstość cyklotronowa drgań elektronów w strumieniu.

Do równań (3) i (6) dołączamy warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + T_{rr} &= (\vec{j}_0 \times \vec{H})_r / c + \bar{T}_{rr} \\ \sigma_{zr} + T_{zr} &= \bar{T}_{zr} \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie σ_{ik}, T_{ik} oznaczają odpowiednio składowe tensora napięć mechanicznych i tensora napięć Maxwella w ośrodku; T_{ik} — składowe tensora napięć Maxwella w próżni; j_0 — wektor gęstości prądu strumienia elektronów.

Wyjściowy układ równań i warunki brzegowe rozważanego problemu możemy zatem zapisać następująco:

$$\bar{a}_1^2 u_{r,rr} + \bar{a}_1^2 u_{r,r}/r - \bar{a}_1^2 u_r/r^2 + \bar{a}_2^2 u_{r,zz} + (a_1^2 - a_2^2) u_{z,zr} = \ddot{u}_r$$

$$a_1^2 u_{z,zz} + \frac{a_2^2 u_{z,r}}{r} + a_2^2 u_{z,rr} + (a_1^2 - a_2^2)\left(\frac{u_{r,z}}{r} + u_{r,rz} \right) = \ddot{u}_z \tag{8}$$

$$\left. \ddot{\Phi}_\varphi + 2V_0 \dot{\Phi}_{\varphi,z} + V_0^2 \Phi_{\varphi,zz} + \Omega^2 \Phi_\varphi - \Omega \left[\dot{u}_r + V_0 \dot{u}_{r,z} \right] \right|_{r=a} = 0$$

$$\gamma u_{r,r} + \Gamma \frac{u_r}{r} + \beta u_{z,z} - n(\dot{\Phi}_\varphi - V_0 \Phi_{\varphi,z}) = 0 \tag{9}$$

$$u_{r,z} + u_{z,r} = 0$$

gdzie:

$$\gamma = a_1^2 - H^2/4\Pi\varrho$$
$$\beta = a_1^2 - 2a_2^2$$
$$\Gamma = \beta + \varkappa^2 - H^2/4\Pi\varrho$$
$$n = \varrho_e H/\varrho c$$

Rozwiązań układu równań (8) przy warunkach brzegowych (9) szukamy w postaci:

$$u_r = U_r(r) \exp[i(kz - \omega t)] \tag{10}$$
$$u_z = U_z(r) \exp[i(kz - \omega t)]$$
$$\Phi\varphi = C \exp[i(kz - \omega t)]$$

Podstawiając (10) do układu równań (8) i eliminując $U_z(r)$ otrzymujemy równanie na funkcję $U_r(r)$:

$$U_r^{IV}(r) + \frac{2}{r} U_r'''(r) + U_r''(r)\left[D_1 - \frac{3}{r^2}\right] + U_r'(r)\left[\frac{D_1}{r} + \frac{3}{r^3}\right] + U_r(r)\left[D_2 - \frac{D_1}{r^2} - \frac{3}{r^4}\right] = 0 \tag{11}$$

Wprowadzając teraz wielkości bezwymiarowe $s^2 = a_1^2/a_2^2$; $b^2 = \varkappa^2/a_2^2$; $\lambda^2 = v^2/a_2^2$ przedstawiamy współczynniki D_1 i D_2 w postaci:

$$D_1 = k^2\left[\frac{(\lambda^2 - 1 - b^2) + (s^2 - 1)^2}{s^2 + b^2} - (s^2 - \lambda^2)\right]$$
$$D_2 = k^4 \frac{(1 - s^2)(\lambda^2 - s^2)}{(s^2 - b^2)(s^2 - 1)} (1 + b^2 - \lambda^2) \tag{12}$$

Równanie (11) można przedstawić jako iloczyn operatorów różniczkowych Bessela działających na funkcję $U_r(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{r}\right)\right]\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \left(\alpha_2^2 - \frac{1}{r}\right)\right] U_r(r) = 0 \tag{13}$$

gdzie α_1^2, α_2^2 są pierwiastkami równania

$$\alpha^4 - D_1\alpha^2 + D_2 = 0$$

Rozwiązanie równania (11) jest więc następujące:

$$U_r(r) = K_1 J_1(\alpha_1 r) + K_2 J_1(\alpha_2 r) \tag{14}$$

gdzie K_1, K_2 — stałe całkowania, $J_1(x)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju.

Z równań (8) i (14) otrzymujemy:

$$U_z(r) = B_1 J_0(\alpha_1 r) + B_2 J_0(\alpha_2 r) \tag{15}$$

gdzie

$$B_m = K_m \frac{i}{\alpha_m k}\left[\alpha_m^2 + k^2 \frac{1 + b^2 - \lambda^2}{s^2 + b^2}\right] \frac{s^2 - b^2}{s^2 - 1}$$

$$m = 1, 2$$

Wstawiając rozwiązanie $U_r(r)$ dla $r = a$ do trzeciego równania układu (8) znajdujemy stałą C:

$$C = i\bar{\Omega}\,\frac{(U-\lambda)}{\bar{\Omega}^2-(U-\lambda)^2}\left[K_1 J_1(\alpha_1 a) + K_2 J_1(\alpha_2 a)\right] \tag{16}$$

gdzie $U = V_0/a_2$, $\Omega = \Omega/ka_2$. Podstawiając następnie funkcje (10), po uwzględnieniu (14), (15), (16), do warunków brzegowych (9) otrzymujemy:

$$K_1[J_0(\alpha_1 a)R_1 + J_1(\alpha_1 a)G] + K_2[J_0(\alpha_2 a)R_2 + J_1(\alpha_2 a)G] = 0 \tag{17}$$
$$K_1 J_1(\alpha_1 a)F_1 + K_2 J_1(\alpha_2 a)F_2 = 0$$

gdzie:

$$R_i = (s^2+b^2-\alpha^2)\alpha_m - (s^2-2)\left[\alpha_m^2 + k^2\frac{1+b^2-\lambda^2}{s^2+b^2}\right]\frac{s^2+b^2}{s^2-1}$$

$$G = -\frac{2}{a} - k\lambda\bar{\Omega}\Omega_1\frac{U-\lambda}{\bar{\Omega}^2-(U-\lambda)^2} + ikU\Omega_1 \tag{18}$$

$$F_m = ik - \frac{i}{k}\left[\alpha_m^2 + k^2\frac{1+b^2-\lambda^2}{s^2+b^2}\right]\frac{s^2+b^2}{s^2-1}$$

$$\Omega_1 = n/a_2 \qquad m = 1,\ 2$$

Z warunku istnienia niezerowych rozwiązań układu równań (17) otrzymujemy związek:

$$J_0(\alpha_1 a)J_1(\alpha_2 a)R_1F_2 + J_1(\alpha_1 a)J_1(\alpha_2 a)GF_2 - J_0(\alpha_2 a)J(\alpha_2 a)R_2F_1 -$$
$$- J(\alpha_2 a)J_1(\alpha_1 a)GF_1 = 0 \tag{19}$$

Posługując się metodą badania stateczności ruchu, przyjętą np. w [4], przekształcamy równanie (19) do postaci:

$$f_1(\lambda_1) = f_2(\lambda_2) \tag{20}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = U$$

gdzie:

$$f_1(\lambda_1) = \frac{J_0(\alpha_2 a)J_1(\alpha_1 a)R_2F_1 - J_0(\alpha_1 a)J_1(\alpha_2 a)R_1F_2}{J_1(\alpha_1 a)J_1(\alpha_2 a)\frac{i}{k}\frac{s^2+b^2}{s^2-1}(\alpha_1^2-\alpha_2^2)} + \frac{2}{a} - ik\Omega_1\lambda_1$$

$$f_2(\lambda_2) = \lambda_2 k\Omega_1\left[-\bar{\Omega}\frac{\lambda_2}{\bar{\Omega}^2-\lambda_2^2} + i\right]$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(\lambda_1)$$

$$\alpha_{1,2}^2(\lambda) = \frac{1}{2}k^2\left[\!\left[\frac{(\lambda^2-1-b^2)(s^2-1)^2}{s^2+b^2} - (s^2-\lambda^2) \pm\right.\right.$$
$$\left.\left.\pm\left\{\left[\frac{(\lambda^2-1-b^2)+(s^2-1)}{s^2+b^2} - (s^2-\lambda^2)^2\right]^2 - 4\frac{(1-s^2)(\lambda^2-s^2)(1+b^2-\lambda^2)}{(s^2+b^2)(s^2-1)}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\!\right]$$

Drgania samowzbudzone występują przy takich wartościach U, dla których pierwiastki λ układu równań (20) spełniają warunek:

$$Im(k\lambda) > 0 \tag{21}$$

PIŚMIENNICTWO

1. Kaliski S.: Proc. Vibr. Probl. 5, 3 (1964).
2. Kaliski S.: Proc. Vibr. Probl. 2, 4 (1964).
3. Nowicki W.: Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa 1966.
4. Kaliski S.: Proc. Vibr. Probl. 5, 3 (1964).

РЕЗЮМЕ

В работе обсуждается проблема устойчивости в продольном магнитном поле взаимного движения идеально проводящего упругого стержня и тонкого приповерхностного слоя свободных электронов. Найдено характерное уравнение для критической скорости, при которой амплитуды поверхностных волн начинают нарастать во времени.

SUMMARY

The motion of the surface free electron stream around the perfectly conducting elastic cylinder in a longitudal magnetic field was investigated in the paper. The stability of the system has been broken for the critical velocity of electrons. The equation for the critical velocity was then constructed.