Uniwersytet Marii Curie - Skłodowskiej
w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

ROZPRAWA DOKTORSKA

Zagadnienia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w ciągowych przestrzeniach Banacha

Autor:
Monika Krajewska
Promotor:
prof. dr hab. Józef Banaś

Lublin 2019

Spis treści

Wstęp **3**

1 Oznaczenia, definicje i pewne fakty pomocnicze **6**

2 Wiadomości wstępne **8**

2.1 Klasyczne ciągowe przestrzenie Banacha 8

2.2 Przestrzenie ciągów temperowanych 9

2.3 Przestrzenie słabo zwarcie generowalne 11

2.4 Pewne fakty dotyczące teorii równań różniczkowych zwyczajnych 12

3 Miary niezwartości **15**

3.1 Pojęcie miary niezwartości i operatora kondensującego 15

3.2 Miary niezwartości w klasycznych przestrzeniach ciągowych 20

3.3 Miary niezwartości w przestrzeniach ciągów temperowanych 25

4 Twierdzenia o istnieniu rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha z użyciem miary niezwartości **27**

4.1 Twierdzenie egzystencjalne z użyciem miary niezwartości i ogólnej funkcji Kamkego 27

4.2 Twierdzenia egzystencjalne z użyciem miary niezwartości w pewnych przypadkach szczególnych 28

4.3 Przypadek ośrodkowej przestrzeni Banacha 29

5 Twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych w klasycznych przestrzeniach Banacha **30**

5.1 Twierdzenie egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_1 30

5.2 Twierdzenie egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_∞ 32

5.3 Twierdzenie egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_∞ z zanikającym lub powiększającym się zaburzeniem 37

6 Twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni ciągów temperowanych **42**

6.1 Wprowadzenie 42

6.2 Nieskończony układ równań różniczkowych w przestrzeni ciągów temperowanych c_0^β . . . 43
6.2.1 Semiliniowy, dolnie przekątniowy, nieskończony układ równań różniczkowych . . . 44
6.2.2 Semiliniowy, górnie przekątniowy, nieskończony układ równań różniczkowych . . . 52
6.3 Twierdzenie egzystencjalne dla zaburzonego układu przekątniowego w przestrzeni ciągów temperowanych c^β . . . 63
6.4 Twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonego układów równań różniczkowych w przestrzeni ciągów temperowanych l_∞^β . . . 67

Literatura **73**

Wstęp

Teoria równań różniczkowych zwyczajnych jest jedną z najważniejszych gałęzi matematyki, co wynika z ogromnej ilości zastosowań tej teorii do opisu przebiegu wielu zjawisk w przyrodzie, technice i otaczającej nas rzeczywistości. Klasyczna teoria tych równań, tzn. teoria równań różniczkowych zwyczajnych w przestrzeniach skończenie wymiarowych, począwszy od lat pięćdziesiątych ubiegłego stulecia, stała się niemal teorią zamkniętą. Taki stan został przedstawiony w klasycznych książkach i monografiach, takich jak np. [15, 22, 27, 38, 39].

W 1950 roku znany matematyk francuski J. Dieudonné [18] pokazał na dwóch przykładach, że klasyczne wyniki teorii równań różniczkowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych przestają być prawdziwe w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych. Wystarczy tutaj wspomnieć chociażby o tym, że klasyczne twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla równania różniczkowego $x' = f(t, x)$ przy założeniu ciągłości prawej strony równania przestają być prawdziwe w przypadku, gdy rozważamy je w przestrzeni nieskończenie wymiarowej. Stało się to impulsem do prowadzenia badań równań różniczkowych zwyczajnych we wspomnianych przestrzeniach wymiaru nieskończonego. Pierwsze ważne wyniki w tym kierunku zostały uzyskane pod koniec lat pięćdziesiątych i na początku lat sześćdziesiątych dwudziestego wieku (por. [28, 36, 50]).
Wspomniane wyniki wykorzystywały jeszcze standardowe narzędzia analizy. Jednakże z biegiem lat zaczęto używać nowych metod analizy funkcjonalnej, związanej głównie z teorią miar niezwartości. Pozwoliło to na uzyskanie wielu rezultatów w ramach tzw. teorii równań różniczkowych zwyczajnych w przestrzeniach Banacha (wymiaru nieskończonego). Rezultaty te zostały przedstawione m.in. w pracach [2, 20, 23, 44, 46] oraz w książce [16] (por. także [1, 5, 6, 13, 17, 37, 45]).

Warto zwrócić uwagę na fakt, że we wspomnianej monografii K. Deimlinga [16] wskazanych zostało wiele potencjalnych zastosowań teorii równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha. Jednakże w późniejszych pracach rzadko rozwijano te zastosowania, co było głównie spowodowane trudnościami związanymi z posługiwaniem się narzędziami i techniką miar niezwartości, które odgrywają kluczową rolę we wspomnianych wyżej zastosowaniach.
Jednym z takich możliwych zastosowań wskazanych w [16] były nieskończone układy równań różniczkowych zwyczajnych. Układy takie pojawiają się w naturalny sposób jako równania różniczkowe w ciągowych przestrzeniach Banacha a ponadto otrzymujemy je rozważając pewne problemy w teorii procesów gałązkowych, przy mode-

lowaniu niektórych zjawisk w teorii sieci neuronowych oraz w dysocjacji polimerów [14, 16, 25, 35, 51]. Warto również zwrócić uwagę na fakt, że pewne problemy rozważane w mechanice prowadzą do nieskończonych układów równań różniczkowych [41, 49, 51, 52].
Nieskończone układy równań różniczkowych zwyczajnych pojawiają się również przy stosowaniu metod numerycznych w rozwiązywaniu niektórych równań różniczkowych cząstkowych takich jak równania typu parabolicznego [16]. Dla przykładu stosując proces semidyskretyzacji dla równań różniczkowych cząstkowych typu parabolicznego otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych [16, 48, 49].

Nie sposób tutaj nie wspomnieć o tym, że prekursorem teorii nieskończonych układów równań różniczkowych był kazachski matematyk K. P. Persidskii, który zapoczątkował badanie takich układów zanim jeszcze zaczęto intensywnie rozwijać teorię równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha (por. [40, 41, 42]). Jednakże później te dwa podejścia do teorii nieskończonych układów równań różniczkowych zaczęły się ze sobą wzajemnie przeplatać.

Rzeczywiście, jak już wspomnieliśmy, nieskończone układy równań różniczkowych zwyczajnych mogą być traktowane jako szczególny przypadek równań różniczkowych w (ciągowych) przestrzeniach Banacha i dlatego rozważając takie układy można wykorzystać rezultaty otrzymane w ogólnej teorii równań różniczkowych w tych przestrzeniach (por. [5, 6, 10, 13, 16, 17, 23, 31, 32, 34, 43, 44]). Oczywiście tego typu podejście wymaga dobrego opanowania warsztatu miar niezwartości, którym w takiej sytuacji się posługujemy. Do tej pory ukazało się niewiele prac realizujących ten kierunek badań [5, 10, 13, 16, 33, 34].

Z drugiej strony nieskończone układy równań różniczkowych wymagają stosowania pewnych specjalnych metod badawczych, które nawiązują do specyfiki tychże układów. Ten kierunek badań został m.in. zainicjowany pracą [10] a otrzymane wyniki zostały omówione w monografii [13].

Przedstawiona rozprawa doktorska stanowi kontynuację wspomnianych wyżej badań dotyczących nieskończonych układów równań różniczkowych. Podstawą tej rozprawy są trzy prace [7, 8, 9] poświęcone całkowicie teorii nieskończonych układów równań różniczkowych z użyciem narzędzi teorii miar niezwartości.

Praca składa się z sześciu rozdziałów.

W pierwszym rozdziale wprowadzamy oznaczenia oraz przytaczamy podstawowe definicje i fakty wykorzystywane w dalszej części pracy.

Drugi rozdział zawiera pewne wiadomości dotyczące klasycznych ciągowych przestrzeni Banacha oraz przestrzeni ciągów temperowanych. Przypomniane zostały definicję, własności i przykłady przestrzeni słabo zwarcie generowanych oraz pewne fakty dotyczące teorii równań różniczkowych.

Trzeci rozdział poświęcony jest miarom niezwartości. Omówione zostały definicje i własności miar niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa oraz aksjomatyczna definicja miary niezwartości. Zajmujemy się przede wszystkim miarami niezwartości w klasycznych przestrzeniach ciągowych oraz w przestrzeniach ciągów temperowanych.

Czwarty rozdział ma charakter pomocniczy i zawiera kilka wyników z teorii równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha ze szczególnym uwzględnieniem ośrodkowych przestrzeni Banacha.

W piątym rozdziale podajemy twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych w klasycznych przestrzeniach Banacha. W szczególności, omawiamy twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_∞, których nieliniowe zaburzenia zależą od zmniejszającej się lub powiększającej liczby zmiennych.

Szósty rozdział zawiera twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeniach ciągów temperowanych.

Główne wyniki pracy zostały przedstawione w podrozdziałach 2.2. i 3.3 oraz w rozdziałach 5 i 6. Podawane w pracy twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych są ilustrowane odpowiednimi przykładami.

1 Oznaczenia, definicje i pewne fakty pomocnicze

W rozdziale tym przedstawimy pewne podstawowe definicje i oznaczenia, które będziemy wykorzystywali w całej pracy. Oznaczenia te pochodzą głównie z książek i monografii [5, 6, 13].

Na początku ustalimy podstawowe oznaczenia używane w rozprawie. I tak, przez $\mathbb{R}$ będziemy oznaczać zbiór liczb rzeczywistych, natomiast przez $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych. Ponadto $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Niech X będzie dowolnym, niepustym zbiorem, wówczas przez (X, d) oznaczymy przestrzeń metryczną z funkcją odległości d. Następnie, niech E będzie przestrzenią liniową nad ciałem K liczb rzeczywistych lub zespolonych oraz niech będzie w niej określona norma $\|\cdot\|$. Wówczas przez $(E, \|\cdot\|)$ oznaczać będziemy przestrzeń unormowaną nad ciałem K z elementem zerowym θ.

Dla $x \in E$ oraz $r > 0$ wprowadzamy oznaczenia:

$$B(x_0, r) := \{x \in E : \ \|x - x_0\| < r\},$$

$$\bar{B}(x_0, r) := \{x \in E : \ \|x - x_0\| \leqslant r\},$$

$$B_1 = \bar{B}(\theta, 1) := \{x \in E : \ \|x\| \leqslant 1\}.$$

Symbole te oznaczają odpowiednio kulę otwartą, kulę domkniętą i kulę jednostkową w przestrzeni E.

Dla dowolnego niepustego podzbioru A przestrzeni unormowanej E i dla $r > 0$ symbolem $B(A, r)$ oznaczać będziemy kulę (otwartą) o środku w zbiorze A i promieniu r, zdefiniowaną następująco:

$$B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r) = \{y \in E : \mathrm{dist}(y, A) < r\}.$$

Niech X będzie podzbiorem przestrzeni unormowanej E, wówczas symbolami: $\bar{X}$, $\mathrm{conv}X$ i $\mathrm{Conv}X$ oznaczamy odpowiednio domknięcie zbioru X, wypukłą powłokę zbioru X oraz wypukłą domkniętą powłokę zbioru X. Co więcej, przez $\mathrm{diam}\, X$ oznaczamy średnicę zbioru X pod warunkiem, że X jest ograniczonym podzbiorem E.

Norma $\|\cdot\|$ dla niepustego i ograniczonego podzbioru X przestrzeni E wyrażona jest wzorem:

$$\|X\| = \sup\{\|x\| : x \in X\}.$$

Na dowolnych zbiorach X, Y w przestrzeni E definiujemy podstawowe operacje algebraiczne w następujący sposób:

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\},$$

$$\alpha X = \{\alpha x : x \in X\}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni E oznaczamy symbolem $\mathfrak{M}_E$, natomiast podrodzinę rodziny $\mathfrak{M}_E$ złożoną ze wszystkich zbiorów relatywnie zwartych oznaczamy symbolem $\mathfrak{N}_E$.

Niech $X, Y \in \mathfrak{M}_E$. Niesymetryczną odległością Hausdorffa między zbiorami X i Y nazywamy liczbę:

$$d(X, Y) = \inf\{r : X \subset K(Y, r)\},$$

natomiast odległością Hausdorffa między zbiorami X i Y liczbę:

$$D(X, Y) = \max\{d(X, Y), d(Y, X)\}.$$

Warto zwrócić uwagę na to, że odległość Hausdorffa D jest pseudometryką w rodzinie $\mathfrak{M}_E$. Nie jest to metryka, ponieważ nie jest na ogół spełniona implikacja:

$$D(X, Y) = 0 \Rightarrow X = Y.$$

Z drugiej strony, odległość Hausdorffa D jest metryką w rodzinie $\mathfrak{M}_E^c$ złożonej ze wszystkich zbiorów domkniętych należących do rodziny $\mathfrak{M}_E$. Przestrzeń metryczna $(\mathfrak{M}_E^c, D)$ jest zupełna jeżeli E jest przestrzenią Banacha [30].

Wprowadzimy jeszcze pewne oznaczenia dotyczące najczęściej używanych przestrzeni funkcyjnych. I tak, symbolem $C([a, b])$ oznaczać będziemy przestrzeń funkcji rzeczywistych, określonych i ciągłych na przedziale $[a, b]$. Przestrzeń tę normujemy w standardowy sposób przy pomocy normy supremum, tzn. dla funkcji $x \in C([a, b])$ przyjmujemy, że

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Jeżeli E jest zadaną przestrzenią Banacha z normą $\| \cdot \|_E$, to symbolem $C([a, b], E)$ oznaczamy przestrzeń złożoną ze wszystkich funkcji $x : [a, b] \to E$, które są ciągłe na przedziale $[a, b]$. Normę w tej przestrzeni definiujemy równością:

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|_E : t \in [a, b]\}.$$

Tak unormowana przestrzeń $C([a, b], E)$ jest przestrzenią Banacha.

2 Wiadomości wstępne

W rozdziale tym zamieszczone zostały podstawowe fakty dotyczące klasycznych ciągowych przestrzeni Banacha oraz uogólnień tych przestrzeni zwanych przestrzeniami ciągów temperowanych. Przedstawimy również podstawowe wiadomości dotyczące przestrzeni Banacha słabo zwarcie generowanych a także przypomnimy wybrane fakty dotyczące klasycznej teorii równań różniczkowych zarówno w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jak i w przestrzeni Banacha.

2.1 Klasyczne ciągowe przestrzenie Banacha

Przypomnimy teraz definicje niektórych ciągowych przestrzeni Banacha oraz omówimy ich pewne własności.

Przez c_0 oznaczamy przestrzeń ciągów zbieżnych do zera. Elementami tej przestrzeni są ciągi liczb rzeczywistych lub zespolonych $x = (x_n)$ zbieżne do zera z klasyczną normą supremum (lub maksimum):

$$\|x\|_{c_0} = \|(x_n)\|_{c_0} = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\} = \max\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Jest to nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa przestrzeń Banacha.

Następnie, symbolem c oznaczamy przestrzeń wszystkich ciągów $x = (x_n)$ zbieżnych do skończonej granicy, z normą:

$$\|x\|_c = \|(x_n)\|_c = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Przestrzeń c z normą $\|\cdot\|_c$ jest nieskończenie wymiarową, ośrodkową przestrzenią Banacha. Ponadto przestrzeń c_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni c.

Jeśli ustalimy dowolną liczbę p, $p \geqslant 1$, wtedy przez l_p oznaczamy przestrzeń złożoną ze wszystkich ciągów $x = (x_n)$ takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

Przestrzeń ta jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha z normą zadaną wzorem:

$$\|x\|_{l_p} = \|(x_n)\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

W szczególności gdy $p = 1$, symbolem l_1 oznaczamy przestrzeń Banacha złożoną ze wszystkich rzeczywistych ciągów $x = (x_n)$ takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ i wyposażoną w normę:

$$\|x\|_{l_1} = \|(x_n)\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Ostatecznie, symbolem l_∞ oznaczamy przestrzeń wszystkich ograniczonych ciągów $x = (x_n)$ z normą supremum:

$$\|x\|_{l_\infty} = \|(x_n)\|_{l_\infty} = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Jest to nieskończenie wymiarowa i nieośrodkowa przestrzeń Banacha.

W przestrzeni unormowanej, nieskończenie wymiarowej można definiować pojęcie bazy Schaudera.

Definicja 2.1. Ciąg (e_n) elementów przestrzeni unormowanej X (nieskończenie wymiarowej) nazywamy bazą Schaudera w X, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów (k_n) taki, że

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} k_i e_i\| \to 0 \ \text{ przy } \ n \to \infty,$$

czyli $x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i e_i$.

Przykład 2.2. Jeśli oznaczymy $e_0 = (1, 1, 1, ...)$, $e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}, ...)$ dla $i = 1, 2, 3...$, to układ wektorów $e_1, e_2, e_3, ...$ stanowi bazę przestrzeni l_p i c_0, zaś układ $e_0, e_1, e_2, e_3, ...$ stanowi bazę przestrzeni c.

Twierdzenie 2.3. *Przestrzeń unormowana X z bazą Schaudera (e_n) jest przestrzenią ośrodkową.*

Ośrodkowość przestrzeni unormowanej jest więc warunkiem koniecznym na istnienie bazy Schaudera. Na problem postawiony przez Banacha i Mazura czy jest to warunek wystarczający, tzn. czy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha posiada bazę, w 1973 roku odpowiedział P. Enflö. Skonstruował on pewną podprzestrzeń przestrzeni $C[(a, b)]$ (z normą supremum), dla której nie istnieje baza. Oznacza to, że nie każda przestrzeń ośrodkowa posiada bazę Schaudera.

2.2 Przestrzenie ciągów temperowanych

Z pewnych przyczyn, o których szczegółowo powiemy później (por. podrozdział 6.1), klasyczne przestrzenie ciągowe nie są wystarczające dla naszych przyszłych rozważań. Dlatego poszerzymy te przestrzenie i zdefiniujemy tzw. przestrzenie ciągów temperowanych.

Weźmy dowolny rzeczywisty ciąg $\beta = (\beta_n)$ taki, że β_n jest dodatni dla $n = 1, 2, \dots$ i ciąg (β_n) jest nierosnący. Ciąg β nazywamy ciągiem temperującym.

Następnie, rozważmy zbiór X złożony ze wszystkich rzeczywistych (albo zespolonych) ciągów $x = (x_n)$ takich, że $\beta_n x_n \to 0$ gdy $n \to \infty$. Można wykazać, że X

kreuje przestrzeń liniową na ciałem liczb rzeczywistych (lub zespolonych). Oznaczamy tę przestrzeń symbolem c_0^β.

Przestrzeń c_0^β jest przestrzenią Banacha z normą zadaną wzorem:

$$\|x\|_{c_0^\beta} = \|(x_n)\|_{c_0^\beta} = \sup\{\beta_n|x_n| : n = 1, 2, \dots\} = \max\{\beta_n|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

W podobny sposób możemy rozważyć przestrzeń ciągów temperowanych c^β złożoną ze wszystkich rzeczywistych (lub zespolonych) ciągów (x_n) takich, że ciąg $(\beta_n x_n)$ jest zbieżny do skończonej granicy. Oczywiście c^β kreuje przestrzeń liniową i jest przestrzenią Banacha z normą określoną równością:

$$\|x\|_{c^\beta} = \|(x_n)\|_{c^\beta} = \sup\{\beta_n|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Podobnie, rozważmy przestrzeń ciągów temperowanych l_p^β składającą się ze wszystkich ciągów (x_n) (rzeczywistych lub zespolonych) takich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n x_n|^p < \infty$. Przestrzeń l_p^β jest przestrzenią Banacha z normą:

$$\|x\|_{l_p^\beta} = \|(x_n)\|_{l_p^\beta} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n|x_n|^p\Big)^{1/p}.$$

Analogicznie, możemy rozważać przestrzeń ciągów temperowanych l_∞^β składającą się ze wszystkich ciągów (x_n) (rzeczywistych lub zespolonych) takich, że ciąg $(\beta_n x_n)$ jest ograniczony. Przestrzeń l_∞^β jest przestrzenią Banacha z normą zadaną wzorem:

$$\|x\|_{l_\infty^\beta} = \|(x_n)\|_{l_\infty^\beta} = \sup\{\beta_n|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że biorąc $\beta_n = 1$ dla $n = 1, 2, \dots$ otrzymujemy przestrzenie $c_0^\beta = c_0$, $c^\beta = c$, $l_p^\beta = l_p$ i $l_\infty^\beta = l_\infty$. Podobnie, jeżeli ciąg (β_n) jest ograniczony z dołu przez dodatnią stałą m tzn. jeśli $\beta_n \geqslant m > 0$ dla $n = 1, 2, \dots$, wtedy normy w przestrzeni ciągów temperowanych c_0^β, c^β i l_∞^β są równoważne klasycznej normie supremum w każdej z przestrzeni c_0, c i l_∞ a norma w przestrzeni ciągów temperowanych l_p^β jest równoważna normie z przestrzeni l_p. A zatem, żeby uzyskać istotne powiększenie przestrzeni ciągowych c_0, c, l_p i l_∞ powinniśmy założyć, że ciąg temperujący (β_n) jest zbieżny do zera. W dalszej części rozprawy będziemy narzucali ten warunek na ciąg temperujący.

Bardzo ważnym faktem w naszych rozważaniach jest stwierdzenie, że pary przestrzeni (c_0, c_0^β), (c, c^β), (l_p, l_p^β) i $(l_\infty, l_\infty^\beta)$ są izometryczne. Dla przykładu rozważmy przestrzenie l_∞ i l_∞^β. Następnie, weźmy odwzorowanie $J : l_\infty^\beta \to l_\infty$ zdefiniowane w następujący sposób:

$$J(x) = J((x_n)) = (\beta_n x_n).$$

Wtedy, dla dowolnie ustalonych $x, y \in l_\infty^\beta$ mamy:

$$\begin{aligned}
\|J(x) - J(y)\|_{l_\infty} &= \|J((x_n)) - J((y_n))\|_{l_\infty} \\
&= \|(\beta_n x_n) - (\beta_n y_n)\|_{l_\infty} \\
&= \sup\{|\beta_n x_n - \beta_n y_n| : n = 1, 2, \dots\} \\
&= \sup\{\beta_n |x_n - y_n| : n = 1, 2, \dots\} = \|x - y\|_{l_\infty^\beta}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

To pokazuje, że odwzorowanie J jest izometrią pomiędzy przestrzeniami l_∞^β i l_∞. Oczywiście, to samo odwzorowanie ustala izometrię pomiędzy przestrzeniami l_p^β i l_p, c^β i c oraz przestrzeniami c_0^β i c_0, odpowiednio.

2.3 Przestrzenie słabo zwarcie generowalne

Badanie przestrzeni Banacha słabo zwarcie generowalnej (w skrócie WCG od anielskiego weakly compactly generated) zostało zainicjowane w 1968 roku przez D. Amira i J. Lindenstraussa [3]. Definicja jest następująca:

Definicja 2.4. Przestrzeń Banacha E nazywamy przestrzenią WCG, jeśli istnieje słabo zwarty zbiór $K \subset E$ taki, że liniowa powłoka zbioru K jest gęsta w E, czyli $E = \overline{\text{span} K}$, gdzie symbol span$K$ oznacza liniową powłokę zbioru K.

Podamy teraz przykłady przestrzeni WCG (por. [26]).

Przykład 2.5. Każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest przestrzenią WCG.

Dowód. Niech E będzie ośrodkową przestrzenią Banacha oraz niech $\{x_n\} \subset E$ będzie gęstym podzbiorem jej kuli jednostkowej. Weźmy ciąg $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|} : n \in \mathbb{N}\right\}$ a następnie połóżmy $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} : n = 1, 2, 3, \dots$. Rozważmy zbiór $K = \left\{\frac{1}{n} z_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ i oznaczmy $y_n = \frac{1}{n} z_n$.
Mamy:

$$\|y_n - \theta\| = \|y_n\| = \frac{1}{n}\|z_n\| = \frac{1}{n},$$

czyli ciąg y_n jest zbieżny do zera przy $n \to \infty$. Zatem każdy jego podciąg jest zbieżny do zera a stąd wynika, że zbiór K jest relatywnie zwarty.
Ponadto $\overline{\text{span} K} = E$, czyli E jest zwarcie generowana i stąd wynika, że E jest przestrzenią WCG.

□

Przykład 2.6. Każda refleksywna przestrzeń Banacha jest przestrzenią WCG.

Dowód. Wiemy, że przestrzeń Banacha E jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy kula jednostkowa jest zbiorem słabo zwartym w E.

A zatem w przestrzeni refleksywnej E wybierzmy kulę jednostkową $B_1 \subset E$, jest ona zbiorem słabo zwartym w E. Ponieważ $\overline{\text{span} B_1} = E$ to każda przestrzeń refleksywna jest WCG. $\square$

Pojęcie przestrzeni WCG jest uogólnieniem pojęć przestrzeni ośrodkowej i refleksywnej. Klasa przestrzeni WCG jest istotnie szersza, istnieją bowiem przestrzenie, które są WCG ale nie są ośrodkowe i refleksywne. Dla przykładu jeżeli I jest zbiorem nieprzeliczalnym a K jest ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych to przestrzeń $c_0(I)$ zdefiniowana w następujący sposób:

$$c_0(I) = \{x : I \to K; \forall_{\varepsilon > 0} \operatorname{card}\{i \in I : |x(i)| \geqslant \varepsilon\} < \aleph_0\}$$

z klasyczną normą supremum jest przestrzenią WCG ale nie jest ani ośrodkowa, ani refleksywna (zob. [19]).

Warto tutaj wspomnieć jeszcze o jednym ciekawym fakcie. Wiemy, że jeżeli X jest przestrzenią Banacha oraz X^* jest przestrzenią ośrodkową to również przestrzeń X jest ośrodkowa. Podobnie jest z przestrzeniami refleksywnymi tzn., jeżeli X jest przestrzenią Banacha oraz X^* jest przestrzenią refleksywną to również przestrzeń X jest refleksywna. Pojawia się pytanie czy podobnie dzieje się dla przestrzeni WCG. Takie pytanie sformułował Lindenstrauss w 1967 roku. Siedem lat później Johnson i Lindenstrauss [26] skonstruowali przestrzeń Banacha, tzw. przestrzeń Johnson-Lindenstrauss, która pokazuje, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna.

2.4 Pewne fakty dotyczące teorii równań różniczkowych zwyczajnych

W podrozdziale tym zaprezentujemy pewne fakty związane z teorią równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha [15, 16, 17, 22, 24, 27, 38, 39, 49]. A zatem rozważmy równanie różniczkowe:

$$x' = f(t, x) \tag{2.2}$$

z warunkiem początkowym:

$$x(0) = x_0. \tag{2.3}$$

Zakładamy tutaj, że $f = f(t, x)$ jest daną funkcją taką, że $f : [0, T] \times B(x_0, r) \to E$, gdzie x_0 jest punktem w przestrzeni Banacha E a $B(x_0, r)$ jest kulą w E. Co więcej, ustalamy że $[0, T]$ jest określonym rzeczywistym przedziałem, dla wygody będziemy pisali $I = [0, T]$.

W klasycznej teorii równań różniczkowych rozważane są trzy podstawowe problemy. Są one sformułowane dla zagadnienia Cauchy'ego (2.2)–(2.3). Pierwszy z nich dotyczy istnienia rozwiązania problemu Cauchy'ego (2.2)–(2.3). Dokładniej, należy sformułować warunki, które nałożone na funkcję $f = f(t, x)$ zagwarantują, że problem Cauchy'ego (2.2)–(2.3) ma lokalne rozwiązanie tzn., że istnieje przedział $[0, \delta] \subset I$ i istnieje funkcja $x = x(t)$ działająca z przedziału $[0, \delta]$ w E takie, że równanie (2.2) jest spełnione, tzn. $x'(t) = f(t, x(t))$ dla $t \in [0, \delta]$ wspólnie z warunkiem początkowym (2.3). Drugi to problem istnienia globalnych rozwiązań równań różniczkowych, zwany inaczej problemem przedłużania rozwiązań. Gdy założymy, że problem Cauchy'ego (2.2)–(2.3) ma rozwiązanie na przedziale $[0, \delta] \subset I$ rodzi się pytanie, jak daleko (w obie strony) można przedłużać to rozwiązanie. Trzeci problem dotyczy jednoznaczności. Polega on na ustaleniu założeń gwarantujących, że zagadnienie Cauchy'ego (2.2)–(2.3) ma dokładnie jedno rozwiązanie (bardziej precyzyjnie: ma co najwyżej jedno rozwiązanie).

Przypomnijmy, że w przypadku gdy E jest skończenie wymiarową przestrzenią Banacha, na podstawie twierdzenia Peano wiemy, że ciągłość funkcji f na zbiorze $I \times B(x_0, r)$ gwarantuje istnienie rozwiązania (lokalnego) zagadnienia Cauchy'ego (2.2)–(2.3) (por. [15, 22]). Na początku lat pięćdziesiątych Dieudonné [18] udowodnił, że twierdzenie Peano nie jest prawdziwe w przypadku przestrzeni Banacha nieskończenie wymiarowej. Wynik Dieudonné zapoczątkował poszukiwania dodatkowych warunków, niezależnych od ciągłości funkcji f, które zapewnią że problem (2.2)–(2.3) ma co najmniej jedno lokalne rozwiązanie.

Okazuje się, że istnieją pewne warunki wymaganego typu, wyrażone głównie za pomocą funkcji porównawczej Kamkego albo warunków dyssypatywnych. Pierwsze wyniki uzyskali Kisiński, Olech i Ważewski [28, 36, 50], było to przeniesienie warunku Kamkego na przypadek dowolnej przestrzeni Banacha. Autorzy Ci zakładali, że funkcja $f = f(t, x)$, występująca w (2.2) spełniająca warunek typu:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant \omega(t, \|x - y\|), \tag{2.4}$$

dla $t \in I$, gdzie $\omega : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jest tak zwaną funkcją porównawczą Kamkego (por. [22, 27, 49]). Ten wynik zapewnia, że problem (2.2)–(2.3) ma dokładnie lokalne rozwiązanie. Z tego punktu widzenia, rezultat ten nie jest wystarczająco dobry ponieważ gwarantuje on istnienie i jednoznaczność. Był to początek poszukiwań warunków zapewniających tylko istnienie rozwiązań problemu (2.2)–(2.3). Pierwsze wyniki takiego typu, z wykorzystaniem miar niezwartości, uzyskali jednocześnie Ambrosetti, Szufla, Goebel i Rzymowski, Sadowski i inni [2, 20, 44, 45, 47]. W dalszej części pracy przedstawimy niektóre z tych rezultatów, teraz zwróćmy uwagę na jeszcze jeden istotny w naszych rozważaniach fakt.

Równanie różniczkowe (2.2) jest równaniem rzędu pierwszego. Rozważmy teraz równanie rzędu n:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \tag{2.5}$$

Problem Cauchy'ego dla równania (2.5) polega na znalezieniu takiego rozwiązania $x = x(t)$ równania (2.5), że dla zadanego punktu $(t_0, x_0, x_1, \ldots, y_{n-1})$ spełnione są równości:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ x''(t_0) = x_2 \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \end{cases} \tag{2.6}$$

zwane warunkami początkowymi dla równania (2.5).

Okazuje się, że równanie różniczkowe $n-$rzędu (2.5) z warunkami początkowymi (2.6) może być traktowane jako szczególny przypadek układu równań różniczkowych rzędu pierwszego postaci:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{2.7}$$

gdzie $t \in I$ oraz $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ są funkcjami szukanymi oraz $f_1, f_2, \ldots, f_n(t) : I \times B(x_0, r) \to E$.

Problem Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych (2.7) formułuje się następująco:
Znaleźć funkcje $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ spełniające układ równań (2.7) na pewnym przedziale $[0, \delta] \subset I$ i takie, że

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_{n0}, \end{cases} \tag{2.8}$$

gdzie $t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ są dowolnie ustalonymi liczbami takimi, że $t_0 \in I$ oraz $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0} \in B(x_0, r)$.

3 Miary niezwartości

Stopień niezwartości zbioru mierzy się za pomocą funkcji zwanych miarami niezwartości. W tym rozdziale przypomnimy definicje dwóch najbardziej znanych i najczęściej używanych miar, zajmiemy się podejściem aksjomatycznym a także przedstawimy formuły i własności miar niezwartości w niektórych ciągowych przestrzeniach Banacha oraz na bazie tych miar skonstruujemy także nowe miary niezwartości w przestrzeniach złożonych z ciągów temperowanych. Wiadomości tutaj przedstawiane pochodzą głównie z monografii [6] oraz książek i prac [1, 4, 7, 8, 11, 21, 29, 43].

Pierwsza miara niezwartości, funkcja α, została zdefiniowana przy okazji badań pewnych zagadnień z topologii ogólnej w 1930 roku przez K. Kuratowskiego. Zaskakujące jest to, że dopiero kiedy nastąpił dynamiczny rozwój teorii punktu stałego, ponownie wykorzystano tę miarę niezwartości. W 1955 roku G. Darbo użył miarę α do uogólnienia twierdzenia Schaudera o punkcie stałym. Jego pomysł polegał na zdefiniowaniu nowej klasy operatorów, szerszej niż pełnociągłe lub zwarte, odwzorowujące zbiory ograniczone w zbiory "bardziej zwarte". Miara niezwartości Hausdorffa χ została wprowadzona przez L. S. Goldenšteina, I. T. Gohberga i A. S. Markusa w 1957 roku a później była badana przez L. S. Goldenšteina i A. S. Markusa (por. [6]). W latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego stulecia wprowadzono jeszcze wiele innych miar niezwartości. Jednak ze względu na to, że w wielu przestrzeniach Banacha nie znamy wygodnych formuł wyrażających te miary, są one problematyczne w zastosowaniu. Z tego właśnie względu zaproponowano podejście aksjomatyczne do koncepcji miary niezwartości. Pierwszym, który wprowadził taką definicję był B. N. Sadovskii. Jednak jedną z najważniejszych jest aksjomatyka podana przez J. Banasia i K. Goebla. Dopuszcza ona wiele naturalnych realizacji, dzięki którym można otrzymać różne miary niezwartości, które są wygodne w zastosowaniach [6, 10, 13].

Miary niezwartości są narzędziem powszechnie stosowanym w teorii punktu stałego, równań różniczkowych, równań funkcyjnych, całkowych, całkowo - różniczkowych i innych [4, 5, 12, 13, 16, 17, 20, 34, 35, 44, 47]. W ostatnich latach miary niezwartości są także używane do definiowania geometrycznych własności Banacha a także w charakteryzowaniu operatorów zwartych pomiędzy przestrzeniami ciągowymi.

3.1 Pojęcie miary niezwartości i operatora kondensującego

Nasze rozważania na temat miar niezwartości zaczniemy od przypomnienia definicji i własności miary niezwartości zdefiniowanej przez K. Kuratowskiego [29].

Definicja 3.1. Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną oraz X będzie niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni M. Miarę niezwartości Kuratowskiego zbioru X oznaczamy przez $\alpha(X)$ i definiujemy jako infimum zbioru tych wszystkich liczb $\varepsilon > 0$ takich, że zbiór X może być pokryty skończoną liczbą zbiorów o średnicy mniejszej niż ε tzn.:

$$\alpha(X) = \inf \Big\{ \varepsilon > 0 : X \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i,\ S_i \subset M,\ \mathrm{diam}(S_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Oczywiście:

$$\alpha(X) \leqslant \mathrm{diam}(X)$$

dla każdego ograniczonego podzbioru X przestrzeni M.

Miara niezwartości Kuratowskiego α posiada następujące własności [6]:

1. $\alpha(X) = 0 \Leftrightarrow \bar{X}$ jest zwarty.
2. $\alpha(X) = \alpha(\bar{X})$.
3. $X \subset Y \Leftarrow \alpha(X) \leqslant \alpha(Y)$.
4. $\alpha(X \cup Y) = \max\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$.
5. $\alpha(X \cap Y) \leqslant \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$.
6. Jeżeli (X_n) jest ciągiem zstępującym (czyli $X_{n+1} \subset X_n$) domkniętych, niepustych i ograniczonych ciągów przestrzeni M oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(X_n) = 0$ to zbiór $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty i zwarty.

Jeżeli założymy, że M jest przestrzenią Banacha, wówczas miara α ma dodatkowo własności związane ze strukturą przestrzeni wektorowej:

7. $\alpha(X + Y) \leqslant \alpha(X) + \alpha(Y)$.
8. $\alpha(\lambda X) = |\lambda| \alpha(X)$.
9. $\alpha(\mathrm{conv} X) = X$.

Wyznaczenie wartości $\alpha(X)$ jest trudne dlatego w wielu przypadkach wygodniejsza w zastosowaniach jest miara Hausdorffa, której definicję teraz przypomnimy [21].

Definicja 3.2. Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz X niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni M. Miarę niezwartości Hausdorffa zbioru X oznaczamy przez $\chi(X)$ i definiujemy jako infimum zbioru tych wszystkich liczb $\varepsilon > 0$ takich, że zbiór X może być pokryty skończoną liczbą kul o promieniu równym ε tzn.:

$$\chi(X) = \inf \Big\{ \varepsilon > 0 : X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon),\ x_i \in M,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N} \Big\}. \tag{3.1}$$

Zwróćmy uwagę na to, że w definicji miary niezwartości Hausdorffa zbioru X nie jest zakładane, że środki kul, którymi pokrywamy zbiór X należą do X. Zatem, definicja (3.1) może być równoważnie zapisana następująco [43]:

$$\chi(X) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : X \text{ ma skończoną } \varepsilon\text{-sieć w } M\Big\}. \tag{3.2}$$

Miarę niezwartości Hausdorffa możemy również zdefiniować za pomocą odległości Hausdorffa.
Niech (M, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną oraz $\mathfrak{N}_M^c$ będzie zbiorem wszystkich niepustych i zwartych jej podzbiorów. Wtedy dla $X \in \mathfrak{M}_E$ zachodzi równość:

$$\chi(X) = \operatorname{dist}\{\bar{X}, \mathfrak{N}_M^c\}.$$

Miary niezwartości α i χ są różne, chociaż mają ze sobą wiele wspólnego. Zauważmy, że wyżej wspomniane właściwości miary Kuratowskiego α (1.–9.) są również prawdziwe dla miary Hausdorffa χ.
Przytoczymy teraz twierdzenie, które pokazuje że funkcje α i χ są w pewnym sensie równoważne.

Twierdzenie 3.3. *Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz X niepustym i ograniczonym podzbiorem M. Wówczas*

$$\chi(X) \leqslant \alpha(X) \leqslant 2\chi(X).$$

W przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych nierówności w powyższym twierdzeniu mogą być ostre.

Zachodzi również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.4. *Niech B_1 będzie kulą jednostkową w przestrzeni Banacha E. Wtedy:*

- $\alpha(B_1) = \chi(B_1) = 0$ *jeżeli E jest przestrzenią skończenie wymiarową,*
- $\alpha(B_1) = 2$ *i* $\chi(B_1) = 1$ *jeżeli E jest przestrzenią nieskończenie wymiarową.*

Jednak, dla dowolnego zbioru w przestrzeni Banacha wyznaczenie konkretnej wartości miary Kuratowskiego jest dość trudne ponieważ nie znamy żadnej formuły wyrażającą tę miarę w jakiejkolwiek przestrzeni Banacha. Łatwiejsze jest to w przypadku miary niezwartości Hausdorffa ale tylko w niektórych przestrzeniach Banacha, w których można podać formuły wyrażające tę miarę. Związane jest to ze znajomością warunku koniecznego i wystarczającego relatywnej zwartość zbioru, który nawiązuje do struktury rozważanej przestrzeni. Okazuje się bowiem, że w niektórych przestrzeniach Banacha nie znamy takich warunków.

Z tego właśnie względu zaproponowano podejście aksjomatyczne do koncepcji miary niezwartości. Pojawiło się wiele takich definicji, które zawierały różne, niekoniecznie równoważne aksjomaty. Jednak cytując J. Banasia i K. Goebla [6]: *zbiór aksjomatów powinien spełniać dwa warunki: po pierwsze mieć naturalną realizację a po drugie być użytecznym narzędziem w zastosowaniach*. Dlatego przytoczymy właśnie aksjomatykę podaną w 1980 roku przez J. Banasia i K. Goebla [6]. Ma ona szerokie zastosowania w teorii równań różniczkowych i całkowych oraz dopuszcza wiele naturalnych realizacji, przez co w szczególnym przypadku można otrzymać wiele klasycznych miar niezwartości.

A zatem przyjmujemy następującą aksjomatyczną definicję miary niezwartości [6].

Definicja 3.5. Funkcję $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy miarą niezwartości, jeśli spełnione są następujące warunki:

(i) Rodzina $\ker \mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ jest niepusta i $\ker \mu \subset \mathfrak{N}_E$;

(ii) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leqslant \mu(Y)$;

(iii) $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$;

(iv) $\mu(\operatorname{Conv} X) = \mu(X)$;

(v) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ dla $\lambda \in [0,1]$;

(vi) Jeśli (X_n) jest ciągiem zbiorów domkniętych z $\mathfrak{M}_E$ takich, że $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, ...$ oraz $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, to wtedy zbiór $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty.

Rodzinę $\ker \mu$ z aksjomatu (i) nazywamy *jądrem miary μ*.

Następnie zauważmy, że z aksjomatu (vi) wynika, że $\mu(X_\infty) \leqslant \mu(X_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ a to oznacza, że $\mu(X_\infty) = 0$. Stąd wnioskujemy, że podzbiór zbioru X_∞ należy do jądra $\ker \mu$. Ten prosty fakt jest bardzo ważny w dalszych rozważaniach.

Miara niezwartości w sensie tej aksjomatyki jest pewną funkcją określoną na rodzinie wszystkich niepustych i ograniczonych zbiorów w przestrzeni Banacha E i zerująca się na pewnej podrodzinie wszystkich niepustych i relatywnie zwartych zbiorów w tej przestrzeni.

Dzięki takiemu podejściu do definicji miary niezwartości możemy tworzyć wygodne formuły tych miar w przestrzeniach, w których nie znamy warunków koniecznych i wystarczających relatywnej zwartości zbioru. Dodatkowo, dobierając odpowiednio jądro miary niezwartości możemy skonstruować takie miary, których stosowanie umożliwia nam scharakteryzowanie rozwiązań badanych równań.

Będziemy rozważali także miary niezwartości, posiadające pewne dodatkowe własności. Miara μ jest nazywana *subliniową* jeśli spełnia następujące warunki:

(vii) $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(viii) $\mu(X + Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$.

Mówimy, że miara niezwartości ma *własność maksimum* jeśli:

(ix) $\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$.

Miarę μ nazywamy *pełną* jeśli:

(x) $\ker \mu = \mathfrak{N}_E$.

Ostatecznie, miarę niezwartości μ nazywamy *regularną* jeśli jest subliniowa, pełna oraz ma własność maksimum.

Przykładami regularnych miar niezwartości są miary Kuratowskiego i Hausdorffa, natomiast nieregularnych funkcje: $\mu_1(X) = \operatorname{diam}(X)$ oraz $\mu_2(X) = \|X\|$, ponieważ jądro miary μ_1 to rodzina zbiorów jednoelementowych a jądro miary μ_2 złożone jest tylko ze zbioru $\{\emptyset\}$.

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, najbardziej znaną regularną miarą niezwartości jest miara Hausdorffa χ. Można pokazać, że ta miara ma także inne interesujące własności (por. [1, 4, 6, 11]).

Użyteczność miary niezwartości Hausdorffa χ prowadzi do postawienia pytania czy każda regularna miara niezwartości μ jest równoważna mierze Hausdorffa χ. W [12] zostało pokazane, że ogólnie odpowiedz jest negatywna. Niemniej jednak poniższe twierdzenie pokazuje, że każda regularna miara niezwartości jest jednostronnie porównywalna z miarą Hausdorffa (por. [6]).

Twierdzenie 3.6. *Jeśli μ jest regularną miarą niezwartości to wtedy*

$$\mu(X) \leqslant \mu(B_1)\chi(X)$$

dla każdego zbioru $X \in \mathfrak{M}_E$.

Jak już wspomnieliśmy pierwszym, który wykorzystał pojęcie miary niezwartości był Darbo, który uogólnił twierdzenie Schaudera dla operatorów niezwartych. Mianowicie, używając miarę niezwartości Kuratowskiego sformułował on twierdzenie o punkcie stałym. Twierdzenie to umożliwia zakładanie mniej restrykcyjnych warunków niż w twierdzeniu Schaudera. Dodatkowo, można pokazać, że miara Kuratowskiego może być zastąpiona inną dowolną miarą niezwartości. Przedstawimy teraz definicję operatora kondensującego a następnie zapowiedziane twierdzenie Darbo o punkcie stałym.

Definicja 3.7. Niech $X \subset E$, $X \neq \emptyset$ i niech $T : X \to E$ będzie ciągłym operatorem przekształcającym zbiory ograniczone na ograniczone. Mówimy, że T spełnia warunek Darbo względem miary niezwartości μ ze stałą $k > 0$, jeżeli dla dowolnego ograniczonego podzbioru $Q \subset X$ zachodzi nierówność:

$$\mu(T(Q)) \leqslant k\mu(Q).$$

Gdy $k < 1$, wtedy operator T nazywamy kontrakcją ze względu na miarę μ (a dokładniej μ-kontrakcją).

Twierdzenie 3.8. *Niech E będzie przestrzenią Banacha i niech $M \subset E$ będzie niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha E oraz $T : M \to M$ będzie $\mu-$kontrakcją. Wtedy T ma przynajmniej jeden punkt stały w M. Ponadto zbiór wszystkich punktów stałych operatora T na zbiorze M należy do jądra miary μ, gdzie μ jest dowolną miarą niezwartości na przestrzeni E.*

3.2 Miary niezwartości w klasycznych przestrzeniach ciągowych

W podrozdziale tym zaprezentujemy znane fakty dotyczące miar niezwartości w klasycznych przestrzeniach ciągowych [6, 8, 13].

W przypadku przestrzeni ciągowych c_0, c i l_p sytuacja dotycząca miar niezwartości wydaje się być dość klarowna. Rzeczywiście, w przestrzeniach c_0 i l_p znamy wygodnie wzory nawiązujące do struktury tych przestrzeni i pozwalające wyrazić miarę niezwartości Hausdorffa χ.

Aby przedstawić te formuły rozważmy najpierw przestrzeń c_0 i weźmy dowolny, niepusty i ograniczony podzbiór przestrzeni c_0 tzn. weźmy zbiór $X \in \mathfrak{M}_{c_0}$. Wtedy mamy [6]:

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sup_{(x_n)\in X} \Big\{ \sup\{|x_i| : i \geqslant n\} \Big\}\Big\}.$$

Następnie, jeżeli weźmiemy dowolną liczbę p, $p \geqslant 1$, wtedy dla $X \in \mathfrak{M}_{l_p}$ mamy [6, 13]:

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sup \Big\{ \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} : x = (x_i) \in X \Big\}\Big\}.$$

W szczególności, jeśli $p = 1$ to dla $X \in \mathfrak{M}_{l_1}$ mamy [6, 13]:

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sup \Big\{ \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| : x = (x_i) \in X \Big\}\Big\}.$$

W przypadku przestrzeni ciągowej c sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana. Mianowicie, nie znamy wzoru na miarę niezwartości Hausdorffa χ w przestrzeni c ale znamy dobre oszacowanie χ. Dla $X \in \mathfrak{M}_c$ zdefiniujmy miarę $\mu(X)$ wyrażoną wzorem:

$$\mu(X) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ \sup_{(x_k)\in X} \Big\{ \sup\{|x_i - \lim_{k\to\infty} x_k| : i \geqslant n\} \Big\}\Big\}. \tag{3.3}$$

Wtedy z [6] mamy oszacowanie:

$$\frac{1}{2}\mu(X) \leqslant \chi(X) \leqslant \mu(X). \tag{3.4}$$

Miara (3.3) jest regularna. Niemniej jednak, zwróćmy uwagę na to, że miara μ ma tylko teoretyczne znaczenie, ponieważ używanie wzoru (3.3) wymaga znajomości granic ciągów należących do X. Dlatego, aby uzyskać wygodniejszą formułę, możemy użyć klasycznego warunku Cauchy'ego związanego z granicą ciągu, ponieważ takie podejście nie wymaga użycia granicy ciągu. Tak więc, dla $X \in \mathfrak{M}_c$ definiujemy wielkość:

$$\mu_c(X) = \lim_{k\to\infty}\left\{\sup_{(x_i)\in X}\left\{\sup\{|x_n - x_m| : n, m \geqslant k\}\right\}\right\}. \tag{3.5}$$

Warto wspomnieć, że w kilku pracach i monografiach ([6, 10, 13], dla przykładu) możemy spotkać wyniki potwierdzające, że miara μ_c wyrażona wzorem (3.5) jest regularna i równoważna mierze Hausdorffa χ w przestrzeni c. Z drugiej strony nie ma dowodu tego faktu. Dlatego, aby wypełnić tę lukę, poniżej przedstawiamy pełny dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.9. *Wielkość μ_c zdefiniowana wzorem* (3.5) *jest regularną miarą niezwartości w przestrzeni c. Co więcej, spełnione są następujące nierówności:*

$$\chi(X) \leqslant \mu_c(X) \leqslant 2\chi(X) \tag{3.6}$$

dla $X \in \mathfrak{M}_c$

Dowód. Na początku zauważmy, że biorąc pod uwagę wzór (3.5) możemy sprawdzić, że wielkość μ_c spełnia założenia (ii)–(v) i (vii)–(ix) z definicji regularnej miary niezwartości (por. Definicja 3.5).

Następnie, ustalmy dowolnie zbiór $X \in \mathfrak{M}_c$ i wybierzmy ciąg $x = (x_i) \in X$. Ustalmy naturalną liczbę k. Wtedy dla dowolnego $n, m \geqslant k$ mamy:

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - \lim_{i\to\infty} x_i| + |x_m - \lim_{i\to\infty} x_i|.$$

Stąd mamy oszacowanie:

$$\mu_c(X) \leqslant 2\mu(X), \tag{3.7}$$

gdzie μ jest miarą niezwartości definiowaną wzorem (3.3). Łącząc (3.4) i (3.7) otrzymujemy:

$$\mu_c(X) \leqslant 4\chi(X) \tag{3.8}$$

dla $X \in \mathfrak{M}_c$.

Oznaczmy $r = \mu_c(X)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i znajdźmy naturalną liczbę k_0 taką, że

$$|x_n - x_m| \leqslant r + \varepsilon \tag{3.9}$$

dla każdego $x = (x_i) \in X$ i $n, m \geqslant k_0$. Rozważmy zbiór: $X_{k_o} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}) : x = (x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}, x_{k_0+1}, \ldots) \in X\}$. Oczywiście X_{k_0} jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^{k_0}$. A zatem istnienie skończona ε-sieć zbioru X_{k_0} utworzona przez pewne elementy $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m$, gdzie $\tilde{y}_p = (y_1^p, y_2^p, \ldots, y_{k_0}^p)$ dla $p = 1, 2, \ldots, m$.

Następnie, rozważmy ciąg y_p $(p = 1, 2, \ldots, m)$ definiowany jako:

$$y_p = (y_1^p, y_2^p, \ldots, y_{k_0}^p, y_{k_0}^p, y_{k_0}^p, \ldots).$$

Pokażemy, że zbiór $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ tworzy $r + 2\varepsilon$-sieć zbioru X w przestrzeni c. Następnie, weźmy dowolny ciąg $x = (x_i) \in X$. Wtedy możemy znaleźć indeks k_0 taki, że dla $\tilde{y}_p = (y_1^p, y_2^p, \ldots, y_{k_0}^p)$ $(1 \leqslant p \leqslant m)$

$$|x_i - y_i^p| \leqslant \varepsilon \tag{3.10}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k_0$. Następnie dla $i \geqslant k_0$, otrzymujemy:

$$|x_i - y_i^p| \leqslant |x_i - x_{k_0}| + |x_{k_0} - y_i^p| = |x_i - x_{k_0}| + |x_{k_0} - y_{k_0}^p|.$$

Stąd i z (3.9) oraz (3.10) mamy:

$$|x_i - y_i^p| \leqslant r + \varepsilon + \varepsilon = r + 2\varepsilon. \tag{3.11}$$

Łącząc (3.10) i (3.11) wnioskujemy, że zbiór $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ tworzy $r + 2\varepsilon$-sieć zbioru X w przestrzeni c. Co więcej, na podstawie dowolności ε mamy, że

$$\chi(X) \leqslant r,$$

co prowadzi do nierówności:

$$\chi(X) \leqslant \mu_c(X). \tag{3.12}$$

Łącząc oszacowania (3.8) i (3.12) wnioskujemy, że prawdziwe są następujące nierówności:

$$\chi(X) \leqslant \mu_c(X) \leqslant 4\chi(X), \tag{3.13}$$

które są spełnione dla $X \in \mathfrak{M}_c$.

Zauważmy teraz, że z nierówności (3.13) otrzymujemy, że wielkość μ_c spełnia założenia (i) i (vi) Definicji 3.5. A zatem, μ_c jest subliniową miarą niezwartości z własnością maksimum w przestrzeni c. Ponownie stosując (3.13) wnioskujemy, że μ_c jest regularną miarą niezwartości równoważną mierze Hausdorffa χ.

W dalszej części zauważmy, że oszacowanie (3.8) można polepszyć. Ponieważ μ_c jest regularną miarą niezwartości to na podstawie Twierdzenia 3.6 mamy:

$$\mu_c(X) \leqslant \mu_c(B_1)\chi(X) \tag{3.14}$$

dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_c$ (symbol B_1 oznacza kulę jednostkową w c). Z drugiej strony można przeliczyć, że $\mu_c(B_1) = 2$. A zatem, z (3.14) otrzymujemy:

$$\mu_c(X) \leqslant 2\chi(X). \tag{3.15}$$

Ostatecznie, łącząc (3.12) i (3.15) otrzymujemy żądane oszacowanie (3.6), co kończy dowód. □

Teraz zajmiemy się miarami niezwartości w przestrzeni l_∞. Po pierwsze zauważmy, że w tej przestrzeni nie znamy wzoru wyrażającego miarę niezwartości Hausdorffa χ. Co więcej, nie znamy wzoru dla regularnej miary niezwartości w l_∞ [1, 6, 13]. Zatem, jedynie w sposób aksjomatyczny, możemy zdefiniować miarę niezwartości (por. Definicja 3.5). Warto wspomnieć że pewne wygodne formuły miar niezwartości w przestrzeni l_∞ są znane i używane [6, 13]. Niestety w literaturze nie ma dowodów na ich poprawność tzn. nie ma dowodów, że te formuły wyrażają miary niezwartości w l_∞. W niniejszej rozprawie uzupełnimy tę lukę.

W celu zaprezentowania wspomnianych wzorów ustalmy zbiór $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty}$. Zdefiniujemy teraz trzy wielkości:

$$\mu_1^\infty(X) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{(x_i)\in X}\left\{\sup\{|x_i| : i \geqslant n\}\right\}\right\}, \tag{3.16}$$

$$\mu_2^\infty(X) = \lim_{k\to\infty}\left\{\sup_{(x_i)\in X}\left\{\sup\{|x_n - x_m| : n, m \geqslant k\}\right\}\right\}, \tag{3.17}$$

$$\mu_3^\infty(X) = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n, \tag{3.18}$$

gdzie $X_n = \{x_n : x = (x_i) \in X\}$ i $\operatorname{diam} X_n = \sup\left\{|x_n - y_n| : x = (x_i), y = (y_i) \in X\right\}$. Zauważmy, że formuła wyrażająca miarę μ_1^∞ jest taka sama, jak wzór dla miary niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c_0 a wzór (3.17) dla wielkości μ_2^∞ odpowiada wzorowi (3.5) dla miary μ_c w ciągowej przestrzeni c.

Twierdzenie 3.10. *Wielkości $\mu_i^\infty (i = 1, 2, 3)$ są subliniowymi miarami niezwartości w przestrzeni l_∞. Dodatkowo, miary μ_1^∞ i μ_2^∞ mają własność maksimum. Co więcej, dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty}$ zachodzą następujące nierówności:*

$$\chi(X) \leqslant \mu_2^\infty(X), \tag{3.19}$$

$$\chi(X) \leqslant \mu_3^\infty(X), \tag{3.20}$$

$$\mu_2^\infty(X) \leqslant 2\mu_1^\infty(X), \tag{3.21}$$

$$\mu_3^\infty(X) \leqslant 2\mu_1^\infty(X). \tag{3.22}$$

Dowód. Dowód (3.19) może być przeprowadzony w podobny sposób jak dowód (3.12). Wynika to z faktu, że przestrzeń c jest podprzestrzenią przestrzeni l_∞.

Aby udowodnić (3.20) ustalmy $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty}$ i położmy $r = \mu_3^\infty(X)$. Następnie weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Wtedy, na podstawie definicji (3.18) możemy znaleźć naturalną liczbę n_0 taką, że $\mathrm{diam} X_n \leqslant r + \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Stąd wnioskujemy, że dla dowolnych elementów $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ zbioru X mamy:

$$|x_n - y_n| \leqslant r + \varepsilon \tag{3.23}$$

dla $n \geqslant n_0$.

Ponadto rozważamy zbiór: $\bar{X}_{n_0} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}) : (x_i) \in X\}$. Ten zbiór jest relatywnie zwartym podzbiorem przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^{n_0}$. Tak więc istnieje skończona ε-sieć zbioru $\bar{X}_{n_0}$ złożonego z elementów $\tilde{y}_1 = (y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{n_0}^1)$, $\tilde{y}_2 = (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{n_0}^2)$, $\tilde{y}_m = (y_1^m, y_2^m, \ldots, y_{n_0}^m)$.

Następnie ustalmy dowolny element $y = (y_i) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_0}, y_{n_0+1}, \ldots)$ zbioru X i rozważmy skończony podzbiór $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ przestrzeni l_∞ taki, że

$$y_i = (y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{n_0}^i, y_{n_0+1}, y_{n_0+2}, \ldots)$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Pokażemy, że Y tworzy skończoną $r+\varepsilon$-sieć zbioru X. W tym celu weźmy dowolny element $x = (x_i) \in X$ i rozważmy element $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0})$. Wtedy możemy znaleźć elementy $\tilde{y}_k \in \bar{X}_{n_0}$, $\tilde{y}_k = (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_{n_0}^k)$ takie, że

$$|x_i - y_i^k| \leqslant \varepsilon \tag{3.24}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n_0$.

Weźmy teraz element $y_k = (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_{n_0}^k, y_{n_0+1}, y_{n_0+2}, \ldots) \in Y$. Wtedy z (3.23) i (3.24) mamy:

$$|x_n - y_n| \leqslant r + \varepsilon$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. To oznacza, że $\|x - y_k\|_{l_\infty} \leqslant r + \varepsilon$. Tak więc zbiór Y tworzy skończoną $r+\varepsilon$-sieć zbioru X. Stąd mamy, że $\chi(X) \leqslant r + \varepsilon$. Ze względu na dowolność ε otrzymujemy nierówność (3.20). Co więcej, zauważmy że oszacowania (3.21) i (3.22) są prostą konsekwencją nierówności trójkąta dla wartości bezwzględnej.

Następnie, z (3.19) i (3.21) (albo z (3.20) i (3.22)) otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\frac{1}{2}\chi(X) \leqslant \mu_1^\infty(X). \tag{3.25}$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę nierówności (3.19), (3.20) i (3.25) wnioskujemy, że wielkość μ_i^∞ $(i = 1, 2, 3)$ spełnia założenia (i) i (vi) Definicji 3.5. Fakt, że są spełnione inne warunki (ii)–(v) i (vii), (viii) dla wszystkich wielkości μ_i^∞ $(i = 1, 2, 3)$ oraz warunek (ix) dla μ_1^∞ i μ_2^∞ jest łatwy do udowodnienia. Oznacza to, że dowód jest skończony. $\square$

3.3 Miary niezwartości w przestrzeniach ciągów temperowanych

Dzięki stwierdzeniu z podrozdziału 2.2, że pary przestrzeni (c_0, c_0^β), (c, c^β), (l_p, l_p^β) i $(l_\infty, l_\infty^\beta)$ są izometryczne możemy zdefiniować miary niezwartości w przestrzeniach ciągów temperowanych c_0^β, c^β, l_p^β i l_∞^β.

Miara niezwartości Hausdorffa $\chi(X)$ dla $X \in \mathfrak{M}_{c_0^\beta}$ może być wyrażona w następujący sposób (por. podrozdział 3.2):

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{(x_i)\in X} \left\{ \sup \left\{ \beta_i |x_i| : i \geqslant n \right\} \right\} \right\}. \tag{3.26}$$

Następnie, jeżeli weźmiemy dowolną liczbę p, $p \geqslant 1$, wtedy dla $X \in \mathfrak{M}_{l_p^\beta}$ mamy:

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup \left\{ \left(\sum_{k=n}^{\infty} \beta_k |x_k|^p \right)^{1/p} : x = (x_i) \in X \right\} \right\}.$$

Analogicznie do miary niezwartości μ_c wyrażonej wzorem (3.5), miara w przestrzeni ciągów temperowanych c^β może być wyrażona wzorem:

$$\mu_{c^\beta}(X) = \lim_{k\to\infty} \left\{ \sup_{(x_i)\in X} \left\{ \sup\{|\beta_n x_n - \beta_m x_m| : n, m \geqslant k\} \right\} \right\}, \tag{3.27}$$

gdzie $X \in \mathfrak{M}_{c^\beta}$.

Wykorzystując fakt, że przestrzenie c i c^β są izometryczne, na podstawie Twierdzenia 3.9 mamy następujące oszacowania:

$$\chi(X) \leqslant \mu_{c^\beta}(X) \leqslant 2\chi(X)$$

dla każdego $X \in \mathfrak{M}_{c^\beta}$, gdzie χ oznacza miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c^β.

Weźmy teraz pod uwagę przestrzeń ciągów temperowanych l_∞^β. Pamiętając o wzorach (3.16) - (3.18) wyrażających miary niezwartości w przestrzeni l_∞, otrzymujemy następujące wzory dla odpowiedników tych miar w przestrzeni l_∞^β:

$$\mu_1^\beta(X) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{(x_i)\in X} \left\{ \sup \left\{ \beta_i |x_i| : i \geqslant n \right\} \right\} \right\}, \tag{3.28}$$

$$\mu_2^\beta(X) = \lim_{k\to\infty} \left\{ \sup_{(x_i)\in X} \left\{ \sup\{|\beta_n x_n - \beta_m x_m| : n, m \geqslant k\} \right\} \right\}, \tag{3.29}$$

$$\mu_3^\beta(X) = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n^\beta, \tag{3.30}$$

gdzie $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty^\beta}$. Co więcej, X_n^β w (3.30) jest rozumiany w następujący sposób

$$X_n^\beta = \{x_n \beta_n : (x_i) \in X\}.$$

Niezależnie od tego $\operatorname{diam} X_n^\beta = \sup \left\{ \beta_n |x_n - y_n| : (x_i), (y_i) \in X \right\}$.

Biorąc pod uwagę Twierdzenie 3.10 otrzymujemy następujące nierówności

$$\chi(X) \leqslant \mu_2^\beta(X), \tag{3.31}$$

$$\chi(X) \leqslant \mu_3^\beta(X), \tag{3.32}$$

$$\mu_2^\beta(X) \leqslant 2\mu_1^\beta(X), \tag{3.33}$$

$$\mu_3^\beta(X) \leqslant 2\mu_1^\beta(X), \tag{3.34}$$

gdzie $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty^\beta}$ i symbol χ oznacza miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni l_∞^β.

Na podstawie nierówności (3.31)–(3.34) widzimy, że jądro $\ker \mu_1^\beta$ składa się ze wszystkich zbiorów X należących do rodziny $\mathfrak{M}_{l_\infty^\beta}$ takich, że ciąg $(\beta_n x_n)$ dąży jednostajnie do zera ze względu na zbiór X tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje naturalna liczba n_0 taka, że $\beta_n|x_n| \leqslant \varepsilon$ dla wszystkich $(x_i) \in X$ i dla $n \geqslant n_0$.

Podobnie, jądro $\ker \mu_2^\beta$ składa się ze wszystkich zbiorów $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty^\beta}$ takich, że ciąg $(\beta_n x_n)$ dąży jednostajnie do skończonej granicy na zbiorze X. Inaczej można powiedzieć, że ciąg $(\beta_n x_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego jednostajnie ze względu na X.

W końcu zauważmy, że jądro $\ker \mu_3^\beta$ składa się ze wszystkich zbiorów X należących do rodziny $\mathfrak{M}_{l_\infty^\beta}$ których grubość wiązki utworzonej przez ciąg $(\beta_n x_n)$, gdzie $(x_i) \in X$, dąży do zera w nieskończoności.

Zaznaczmy tutaj również, że miary niezwartości μ_1^β, μ_2^β, μ_3^β nie są regularne w przestrzeni l_∞^β.

4 Twierdzenia o istnieniu rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha z użyciem miary niezwartości

W naszych rozważaniach będziemy wykorzystywali pewne wyniki znane w teorii równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha, w których obowiązują ogólne twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych z użyciem miar niezwartości i z wykorzystaniem funkcji Kamkego.

W rozdziale tym przedstawimy twierdzenie typu Kamkego o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych. W literaturze można spotkać również inne tego typu twierdzenia (por. [49]), jednak wspomniane twierdzenie typu Kamkego należy do najbardziej ogólnych i wydaje się być najbardziej wygodnym w zastosowaniach.

W podrozdziale 4.1 omówimy twierdzenie Kamkego a w podrozdziale 4.2 zajmiemy się szczególnymi przypadkami tego twierdzenia, które będziemy wykorzystywali w dalszych rozważaniach (por. [6]).

4.1 Twierdzenie egzystencjalne z użyciem miary niezwartości i ogólnej funkcji Kamkego

Twierdzenie o jednoznaczności, które przedstawimy, zostało udowodnione w 1930 roku przez niemieckiego matematyka E. Kamkego [27]. Dotyczy ono jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych pierwszego rzędu w postaci wektorowej (2.2) – (2.3) i obejmuje również równania różniczkowe $n-$tego rzędu (w postaci rozwikłanej względem pochodnej $n-$tego rzędu) oraz układy równań różniczkowych.

W prezentowanym twierdzeniu Kamkego o jednoznaczności będziemy zakładać, że norma $\|\cdot\|$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest normą euklidesową jednak może być ona zastąpiona przez dowolną inną normę.

Twierdzenie 4.1. *Niech* $P = \{(x,y) : x \in [x_0, x_0+a],\ y \in \mathbb{R}^n,\ \|y-y_0\| \leqslant b\}$, $P_0 = \{(x,y) : x \in (x_0, x_0+a],\ y \in \mathbb{R}^n,\ \|y-y_0\| \leqslant b\}$, *gdzie* $x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}^n$ *są ustalone oraz* a, b *są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Zakładamy dalej, że dana jest funkcja* $f(x,y) = f :\ P \to \mathbb{R}^n$, *która jest ciągła na* P_0. *Niech* $\omega = \omega(x,u)$ *będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, która jest ciągła i określona na zbiorze:*

$$R_0 = \{(x,y) : x \in (x_0, x_0+a],\ 0 \leqslant u \leqslant 2b)\}$$

i taką, że $\omega(x,0)=0$ oraz o tej własności, że jedynym rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$u' = \omega(x,u)$$

na dowolnym przedziale $(x_0, x_0+\varepsilon]$, które spełnia warunki:

$$u(x) \to 0 \ \text{ oraz } \ \frac{u(x)}{x-x_0} \to 0 \ \text{ przy } \ x \to x_0^+$$

jest funkcja $u(x) \equiv 0$.
Zakładamy dalej, że dla dowolnych $(x,y_1),\ (x,y_2) \in P_0$ spełniona jest nierówność:

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leqslant \omega(x, \|y_1 - y_2\|).$$

Wtedy problem Cauchy'ego:

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

ma conajwyżej jedno rozwiązanie na dowolnym przedziale $[x_0, x_0+\varepsilon]$.

4.2 Twierdzenia egzystencjalne z użyciem miary niezwartości w pewnych przypadkach szczególnych

W podrozdziale tym przypomnimy wynik dotyczący problemu (2.2)–(2.3), który nie jest nazbyt ogólny ale bardzo istotny dla naszych dalszych rozważań (por. [6]).
W tym celu oznaczmy przez E_μ tzn. zbiór jądrowy miary niezwartości μ określony następująco:

$$E_\mu = \{x \in E : \{x\} \in \ker \mu\}$$

(por. [10, 13]).

Jądro E_μ jest domkniętym, zwartym podzbiorem E. Co więcej, jeżeli μ jest miarą subliniową, wtedy E_μ jest liniową domkniętą podprzestrzenią E. Warto tutaj zaznaczyć, że koncepcja zbioru jądrowego miary jest bardzo ważna w teorii równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha.

Twierdzenie 4.2. *Załóżmy, że funkcja f jest jednostajnie ciągła na $I \times B(x_0, r)$ i $\|f(t,x)\| \leqslant A$, gdzie $AT \leqslant r$ oraz $I = [0,T]$. Następnie, niech μ będzie subliniową miarą niezwartości w E taką, że $\{x_0\} \in \ker \mu$. Zakładamy, że dla każdego niepustego zbioru $X \subset B(x_0, r)$ i dla prawie wszystkich $t \in I$ zachodzi następująca nierówność*

$$\mu(f(t,X)) \leqslant p(t)\mu(X), \tag{4.1}$$

gdzie $p(t)$ jest funkcją całkowalną na przedziale I. Wtedy problem początkowy (2.2)–(2.3) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x = x(t)$ na przedziale I takie, że $x(t) \in E_\mu$ dla $t \in I$.

Poniższe twierdzenie jest nieznacznie zmodyfikowaną wersją rezutlatu zawartego w Twierdzeniu 4.2, dzięki czemu jest wygodniejsze do zastosowania w naszych dalszych rozważaniach (por. [10, 13]).

Twierdzenie 4.3. *Załóżmy, że f jest funkcją zdefiniowaną na $[0,T]\times E$ o wartościach w E taką, że*

$$\|f(t,x)\| \leqslant P + A\|x\| \tag{4.2}$$

dla każdego $t \in [0,T]$ i $x \in E$, gdzie P i A są nieujemnymi stałymi. Następnie załóżmy, że f jest jednostajnie ciągła na $[0,T_1] \times B(x_0,r)$, gdzie $AT_1 < 1$ i $r = \frac{(P+A)T_1\|x_0\|}{1-AT_1}$. Co więcej, zakładamy że f spełnia warunek (4.1) *z subliniową miarą niezwartości μ taką, że $x_0 \in E_\mu$. Wtedy problem* (2.2)–(2.3) *ma rozwiązanie $x = x(t)$ na przedziale $[0,T_1]$ takie, że $x(t) \in E_\mu$ dla $t \in [0,T_1]$.*

4.3 Przypadek ośrodkowej przestrzeni Banacha

Znane twierdzenia, które zostały przestawione w poprzednim podrozdziale, tzn. Twierdzenie 4.2 i Twierdzenie 4.3 mają pewną wadę, mianowicie zakładamy w nich, że funkcja f jest jednostajnie ciągła. Okazuje się, że na podstawie twierdzenia udowodnionego w 1982 roku przez H. Möncha i G.F von Hartena [32] w przypadku gdy rozważania prowadzimy w przestrzeni Banacha WCG (por. podrozdział 2.3), miara $\mu = \chi$ (jest miarą niezwartości Hausdorffa) a funkcja ω jest funkcją Kamkego odpowiedniej klasy, to założenie o jednostajnej ciągłości funkcji f może być zastąpione słabszym założeniem ciągłości [32]. To samo stwierdzenie jest również prawdziwe, gdy μ jest regularną miarą niezwartości równoważną mierze Hausdorffa [11, 32] ponieważ, jak łatwo sprawdzić, wszystkie rozumowania przeprowadzone w pracy [32] przenoszą się wtedy łatwo na przypadek tutaj wskazany (tzn., gdy E jest przestrzenią Banacha WCG oraz μ jest regularną miarą niezwartości równoważną mierze Hausdorffa χ).

W praktyce z tego twierdzenia będziemy głównie korzystać w sytuacji, gdy μ jest regularną miarą niezwartości równoważną mierze Hausdorffa, natomiast E jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Wtedy, jak ustaliliśmy w podrozdziale 2.3, przestrzeń E jest słabo zwarcie generowalna, tzn. E jest przestrzenią WCG. Zatem, w nawiązaniu do Twierdzenia 4.3, w takiej sytuacji wystarczy założyć, że f jest funkcją ciągłą na iloczynie kartezjańskim $[0,T_1] \times B(x_0,r)$.

5 Twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych w klasycznych przestrzeniach Banacha

Jeżeli jako przestrzeń Banacha weźmiemy przestrzeń ciągową, wtedy równanie różniczkowe jest równoważne nieskończonemu układowi równań różniczkowych. Stwarza to możliwość bardziej subtelnych rozważań dotyczących rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych, gdzie w założeniach istnienia rozwiązań wykorzystujemy strukturę danej przestrzeni.

W rozdziale tym przedstawimy wyniki dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_1 w podrozdziale 5.1 oraz w przestrzeni ciągów ograniczonych w podrozdziałach 5.2 i 5.3.

5.1 Twierdzenie egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_1

Nasze rozważania na temat rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych na początku ulokujemy w ciągowej przestrzeni Banacha l_1, omówionej szczegółowo w podrozdziale 2.1. Głównym narzędziem wykorzystywanym w naszych badaniach będzie miara niezwartości Hausdorffa wyrażona w przestrzeni l_1 za pomocą wzoru:

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| : x = (x_i) \in X \right\} \right\},$$

dla $X \in \mathfrak{M}_{l_1}$ (por. podrozdział 3.2).

Rozważmy zatem nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots) \tag{5.1}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{5.2}$$

dla $n = 1, 2, \dots$.

Interesuje nas istnienie rozwiązania $x = x(t) = (x_n(t))$ problemu (5.1)–(5.2), które jest zdefiniowane na przedziale $I = [0, T]$ i takie, że $x(t) \in l_1$ dla każdego $t \in I$.

Problem Cauchy'ego (5.1)–(5.2) będziemy rozważali pod następującymi założeniami:

(i) $x_0 = (x_n^0) \in l_1$.

(ii) Funkcja $f : I \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ odwzorowuje w sposób ciągły zbiór $I \times l_1$ w l_1.

(iii) Istnieją nieujemne funkcje $p_n(t)$ i $a_n(t)$ zdefiniowane na I takie, że

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant p_n(t) + a_n(t)|x|$$

dla $t \in I$, $x = (x_n) \in l_1$ i dla $n = 1, 2 \dots$.

(iv) Funkcje $p_n(t)$ są ciągłe na I i szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n(t)$ jest zbieżny na przedziale I.

(v) Ciąg $(a_n(t))$ jest wspólnie ograniczony na przedziale I i funkcja

$$a(t) = \limsup_{n\to\infty} a_n(t)$$

jest całkowalna na przedziale I.

Możemy teraz przedstawić zapowiadane twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. *Pod powyżej sformułowanymi założeniami* (i) – (v) *problem* (5.1)–(5.2) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ zdefiniowane na przedziale I, jeśli $AT < 1$, gdzie A jest liczbą zdefiniowaną jako:*

$$A = \sup\{a_n(t) : t \in I, n = 1, 2, \dots\}.$$

Co więcej, $x(t) \in l_1$ dla każdego $t \in I$.

Dowód. Weźmy dowolnie $x = (x_n) \in l_1$ i $t \in I$. Wtedy na podstawie założeń mamy:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|_{l_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (p_n(t) + a_n(t)|x_n|) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (p_n(t) + \sup\{a_n(t) : n = 1, 2, \dots\} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &\leqslant P + A \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \end{aligned}$$

gdzie:

$$P = \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) : t \in I \Big\}.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\|f(t,x)\|_{l_1} \leqslant P + A\|x\|_{l_1}$$

co oznacza, że spełniony jest warunek (4.2) z Twierdzenia 4.3.
Następnie, weźmy liczbę r zdefiniowaną w Twierdzeniu 4.3, tzn. niech $r = \frac{(P+A)T\|x_0\|}{1-AT}$.

Rozważmy operator $f = (f_n)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$. Na podstawie faktów opisanych w podrozdziale 2.3 wystarczy sprawdzić, że operator f spełnia warunek (4.1) z Twierdzenia 4.3. A zatem weźmy zbiór X taki, że $X \in \mathfrak{M}_{l_1}$. Wtedy, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\chi(f(t,X)) &= \lim_{i\to\infty}\Big\{\sup_{x=(x_n)\in X}\sum_{k=i}^{\infty}|f_k(t,x_1,x_2,\dots)|\Big\} \\
&\leqslant \lim_{i\to\infty}\Big\{\sup\Big\{\sum_{k=i}^{\infty}(p_k(t)+a_k(t)|x_k|) : x=(x_n)\in X\Big\}\Big\} \\
&\leqslant \lim_{i\to\infty}\Big\{\sum_{k=i}^{\infty}(p_k(t)+\sup\{a_k(t) : k\geqslant i\}\sum_{k=i}^{\infty}|x_k|\Big\}.
\end{aligned}$$

Na podstawie założeń (iv) i (v) wnioskujemy, że zachodzi następujące oszacowanie:

$$\chi(f(t,X) \leqslant a(t)\chi(X).$$

Ponieważ przestrzeń l_1 jest ośrodkowa, więc na podstawie faktów zawartych w podrozdziale 4.3 wnioskujemy, że spełnione są wszystkie założenia Twierdzenia 4.3.
Tym samym możemy uznać, że dowód naszego twierdzenia został zakończony.

□

5.2 Twierdzenie egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_∞

Rozważmy następujący semiliniowy, nieskończony układ równań różniczkowych mający postać:

$$x_n' = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t,x_1,x_2,\dots) \tag{5.3}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{5.4}$$

dla $n = 1, 2, \dots$ oraz $t \in I$.

Powyżej opisany problem (5.3) – (5.4) będziemy rozważali w przestrzeni Banacha l_∞ pod następującymi założeniami:

(i) $x_0 = (x_n^0) \in l_\infty$.

(ii) Funkcja $f = (f_1, f_2, \dots)$ odwzorowuje zbiór $I \times l_\infty$ w l_∞ oraz jest ciągła jednostajnie na $I \times l_\infty$, gdzie $I = [0, T]$.

(iii) Istnieje ciąg (p_n) zbieżny do zera taki, że $|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant p_n$ dla $t \in I$, $x = (x_n) \in l_\infty$ i dla $n = 1, 2 \dots$.

(iv) Dla wszystkich naturalnych liczb n, j funkcje $a_{nj}(t) = a_{nj} : I \to \mathbb{R}_+$ są niemalejące na przedziale I.

(v) Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ szereg funkcyjny $\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale I.

Biorąc pod uwagę założenia (iv) i (v) dla dowolnie ustalonego $n = 1, 2, \ldots$ możemy rozważyć funkcje $A_n(t), \bar{A}_n(t), \bar{\bar{A}}_n(t)$ zdefiniowane na przedziale I w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
A_n(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t), \\
\bar{A}_n(t) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t), \\
\bar{\bar{A}}_n(t) &= \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t).
\end{aligned}
$$

Oczywiście powyższy wzór definiuje $\bar{A}_n(t)$ dla $n \geqslant 2$. Możemy rozszerzyć tę definicję kładąc $\bar{A}_1(t) = 0$ dla $t \in I$.

Co więcej zauważmy, że funkcje $A_n(t), \bar{A}_n(t), \bar{\bar{A}}_n(t)$ są nieujemne i niemalejące w przedziale I.

W dalszej części będziemy dodatkowo nakładać następujące założenia:

(vi) Ciąg $(\bar{A}_n(t))$ jest jednostajnie zbieżny do zera na przedziale I.

(vii) Ciąg $(A_n(t))$ jest jednakowo ciągły i wspólnie ograniczony na przedziale I.

Uwaga 5.2. Zwróćmy uwagę, że w założeniu (ii) wystarczy wymagać, żeby funkcja $f = (f_1, f_2, \ldots)$ była jednostajnie ciągła na zbiorze $I \times B(x_0, r)$ dla dowolnie ustalonego $r > 0$. Wynika to z Twierdzenia 4.3 i jest używane w dowodzie poniżej przedstawionego wyniku.

Dla naszych dalszych rozważań zdefiniujmy następujące stałe:

$$A = \sup\{A_n(t) : t \in I, n = 1, 2, \ldots\},$$

$$P = \sup\{p_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Zauważmy, że na podstawie narzuconych założeń mamy, że $A < \infty$ i $P < \infty$.

Teraz możemy sformułować nasz wynik.

Twierdzenie 5.3. *Załóżmy, że spełnione są warunki* (i) - (vii) *i niech* $AT < 1$. *Wtedy problem* (5.3) – (5.4) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *zdefiniowane na przedziale* I *takie, że* $x(t) \in l_\infty$ *dla* $t \in I$.

Dowód. Dla dowolnie ustalonego $x = (x_n) \in l_\infty$ i $t \in I$ oznaczmy

$$g_n(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t, x_1, x_2, \dots),$$
$$g(t,x) = (g_1(t,x),\ g_2(t,x), ...) = (g_n(t,x)).$$

Następnie ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, stosując narzucone założenia, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|g_n(t,x)| &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(x)|x_j| + |f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)\right) \sup\{|x_j| :\ j = 1, 2, \dots\} + p_n \leqslant A_n(t)\|x\| + p_n.\end{aligned}$$

Daje to następujące oszacowanie:

$$||g(t,x)|| \leqslant P + A||x|| \ , \tag{5.5}$$

gdzie symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni l_∞. Z powyższego oszacowania wnioskujemy, że operator $g = g(t,x)$ odwzorowuje zbiór $I \times l_\infty$ w l_∞.

Następnie, weźmy liczbę $r = \frac{(P+A)T_1\|x_0\|}{1-AT_1}$ (por. Twierdzenie 4.3). Rozważmy operator g na zbiorze $I \times B(x_0, r)$.

Ustalmy teraz $t, s \in I$ i $x, y \in B(x_0, r)$. Nie tracąc ogólności możemy założyć, że $s < t$ (por. założenie (iv)). Wtedy, na podstawie naszych założeń, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t, x_1, x_2, ...) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)y_j - f_n(s, y_1, y_2, ...)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)y_j\right| + |f_n(t, x_1, x_2, ...) - f_n(s, y_1, y_2, ...)| \\ &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)x_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)y_j\right| \\ &+\ |f_n(t, x_1, x_2, ...) - f_n(s, y_1, y_2, ...)| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{\infty}[a_{nj}(t) - a_{nj}(s)]x_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)(x_j - y_j)\right| \\ &+\ |f_n(t, x_1, x_2, ...) - f_n(s, y_1, y_2, ...)| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}[a_{nj}(t) - a_{nj}(s)]|x_j| + \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)|x_j - y_j| \\ &+\ |f_n(t,x) - f_n(s,y)| \\ &\leqslant ||x|| \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)\right] + ||x - y|| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \ |f_n(t,x) - f_n(s,y)| \\
&\leqslant ||x|||A_n(t) - A_n(s)| + A||x-y|| + ||f(t,x) - f(s,y)|| \\
&\leqslant (||x_0|| + r)\sup\{|A_n(t) - A_n(s)| : \ n = 1,2,...\} + A||x-y|| \\
&+ \ ||f(t,x) - f(s,y)||
\end{aligned}
$$

Stąd, mając na uwadze założenia (ii) i (vii) wnioskujemy, że operator $g(t,x)$ jest jednostajnie ciągły na zbiorze $I \times B(x_0, r)$.

Następnie, weźmy niepusty podzbiór X kuli $B(x_0,r)$ i ustalmy $x, y \in X$, $t \in I$. Wtedy, dla dowolnie ustalonej naturalnej liczby n, $n \geqslant 2$, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
|g_n(t,x) - g_n(t,y)| &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)y_j\right| \\
&+ \ |f_n(t,x_1,x_2,...) - f_n(t,y_1,y_2,...)| \\
&\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)x_j + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)y_j - \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)y_j\right| \\
&+ \ |f_n(t,x_1,x_2,...)| + |f_n(t,y_1,y_2,...)| \\
&\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)(x_j - y_j)\right| + \left|\sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)(x_j - y_j)\right| + 2p_n \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)|x_j - y_j| + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)|x_j - y_j| + 2p_n \\
&\leqslant ||x-y|| \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) + \left(\sum_{j=i}^{\infty} a_{nj}(t)\right) \sup\{|x_j - y_j| : \ j \geqslant n\} + 2p_n \\
&\leqslant \bar{A}_n(t)\mathrm{diam}X + \bar{\bar{A}}_n(t)\sup\{\mathrm{diam}X_j : \ j \geqslant n\} + 2p_n \ .
\end{aligned}
$$

Z powyższego oszacowania otrzymujemy następującą nierówność:

$$
\mathrm{diam} g_n(t,X) \leqslant \bar{A}_n(t)\mathrm{diam}X + \bar{\bar{A}}_n(t)\sup\{\mathrm{diam}X_j : \ j \geqslant n\} + 2p_n \ ,
$$

która zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd dostajemy:

$$
\begin{aligned}
\sup\{\mathrm{diam} g_j(t,X) : \ j \geqslant n\} &\leqslant \sup\{\bar{A}_j(t) : j \geqslant n\}\mathrm{diam}X \\
&+ [\sup\{\bar{\bar{A}}_j(t) : \ j \geqslant n] \sup\{\mathrm{diam}X_j : \ j \geqslant n\} \\
&+ 2\sup\{p_j : \ j \geqslant n\} \ .
\end{aligned}
$$

Powyższe oszacowania i założenia (iii) i (v)–(vii) pozwalają nam wywnioskować następującą nierówność:

$$
\mu(g(t,X)) \leqslant b(t)\mu(X) \ , \tag{5.6}
$$

gdzie funkcja $b(t)$ jest zdefiniowana na przedziale I w następujący sposób:

$$b(t) = \limsup_{n\to\infty} \bar{\bar{A}}_n(t) \ .$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę (5.5), (5.6) i inne fakty ustalone w powyżej przeprowadzonym rozumowaniu, na podstawie Twierdzenia 4.3 wnioskujemy, że istnieje rozwiązanie $x(t) = (x_i(t))$ problemu (5.3)–(5.4) takie, że $x(t) \in l_\infty$ dla każdego $t \in I$. Dowód jest zakończony. □

Uwaga 5.4. Zauważmy, że na podstawie Twierdzenia 4.3 można pokazać (zob. [6]), że wszystkie rozwiązania $x = x(t) = x_n(t)$ problemu (5.3)–(5.4) należące do kuli $B(x_0, r)$, tzn. $x(t) \in B(x_0, r)$ dla $t \in I$ są takie, że $x(t) \in \ker \mu$ dla $t \in I$, gdzie μ jest miarą niezwartości w przestrzeni l_∞ wyrażoną wzorem (3.18).

Przedstawimy teraz przykład, ilustrujący wynik uzyskany w Twierdzeniu 5.3.

Przykład 5.5. Rozważmy semiliniowy nieskończony układ równań różniczkowych postaci (5.3), gdzie funkcje: a_{nj} oraz $f_n(t, x_1, x_2, ...)$ są zdefiniowane w następujący sposób:

$$a_{nj} = \frac{t^j}{nj},$$

$$f_n(t, x_1, x_2, ...) = \frac{t \operatorname{arc\,tg}(x_n + x_{n+1})}{n + x_n^2 + x_{n+1}^2},$$

gdzie $n, j = 1, 2, ...$ i $t \in I$ oraz $T < 1$. Ponadto załóżmy, że podany wyżej nieskończony układ równań różniczkowych jest rozważany z warunkami początkowymi (5.4).

Używając klasycznych metod analizy matematycznej można pokazać, że funkcje $a_{nj}(t)$ spełniają założenia (iv) i (v).

Co więcej, dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n mamy:

$$A_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j} = -\frac{1}{n}\ln(1-t), \tag{5.7}$$

dla $t \in I$. Z tego wynika, że ciąg $\bar{A}_n(t)$ występujący w założeniu (vi) jest jednostajnie zbieżny do zera na przedziale I. Rzeczywiście, na podstawie nierówności:

$$\bar{A}_n(t) \leqslant A_n(t) \leqslant -\frac{1}{n}\ln(1-T).$$

wnioskujemy o prawdziwości naszego stwierdzenia.

Zauważmy, że na podstawie (5.7) otrzymujemy, że spełnione jest założenie (vii). Co więcej, mamy:

$$A = \sup\{A_n(t) : t \in I, n = 1, 2, ...\} = -\ln(1-T). \tag{5.8}$$

Następnie, zwróćmy uwagę na to, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dla $x = (x_n) \in l_\infty$ zachodzi następująca nierówność:

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \frac{\frac{T\pi}{2}}{n + x_n^2 + x_{n+1}^2} \leqslant \frac{T\pi}{2n}.$$

A to oznacza, że spełnione jest założenie (iii) z $p_n = \frac{T\pi}{2n}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Oczywiście założenie (i) jest spełnione, jeżeli zażądamy, że $x_0 = (x_n^0) \in l_\infty$.

W końcu, ustalmy dowolną liczbę $r > 0$ i rozważmy kulę $B(x_0, r)$ w przestrzeni l_∞. Funkcja $f_n(t, x_1, x_2, \dots)$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze $I \times B(x_0, r)$. To stwierdzenie jest konsekwencją faktu, że odwzorowanie $f_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots)$ ma największy moduł ciągłości pośród funkcji f_n $(n = 1, 2, \dots)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$. Z drugiej strony wszystkie funkcje f_n są jednostajnie ciągłe na zbiorze $I \times B(x_0, r)$ ponieważ funkcja $f_n(t, x_1, x_2, \dots)$ zależy tylko od trzech zmiennych. A zatem, korzystając z Uwagi 5.2 dostajemy, że spełnione jest założenie (ii) Twierdzenia 5.3.

Otrzymujemy zatem, że rozważany tutaj semiliniowy nieskończony układ równań różniczkowych ma co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ zdefiniowane na przedziale $I = [0, T]$, gdzie $T > 0$ i T spełnia nierówność:

$$-T \ln(1 - T) < 1.$$

Niezależnie od tego mamy, że $(x_n(t)) \in l_\infty$.

5.3 Twierdzenie egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_∞ z zanikającym lub powiększającym się zaburzeniem

W podrozdziale tym przedstawimy specjalny przypadek badanego poprzednio semiliniowego nieskończonego układu równań różniczkowy (5.3) z warunkami początkowymi (5.4). Bardziej dokładnie, będziemy rozważali pewien szczególny przypadek wyrazu zaburzonego $f = f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), ...)$ występującego w nieskończonym układzie (5.3).

Na początku weźmy pod uwagę nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x_n' = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t) x_j + f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...) \tag{5.9}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{5.10}$$

dla $n = 1, 2, ...$ i dla $t \in I = [0, T]$.

Będziemy rozważali problem (5.9)–(5.10) przy założeniach (i), (iv)–(vii) Twierdzenia 5.3. Co więcej, założenia (ii), (iii) zastąpimy następującymi:

(ii') Funkcja $t \to f(t,x)$ działająca ze zbioru $I \times l_\infty$ w przestrzeń l_∞ jest jednostajnie ciągła na I ze względu na x należący do dowolnej kuli $B(x_0, r)$ w przestrzeni l_∞.

(iii') Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje nieujemna stała k_n taka, że dla wszystkich $x, y \in l_\infty$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, spełniona jest następująca nierówność:

$$|f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...) - f_n(t, y_n, y_{n+1}, ...)| \leqslant k_n \sup\{|x_j - y_j| : \ j \geqslant n\} \ .$$

(iii") Ciąg stałych (k_n) występujący w założeniu (iii') jest ograniczony.

Zauważmy, że biorąc pod uwagę założenia (ii'), (iii') i (iii") możemy zdefiniować następujące skończone stałe:

$$F = \sup\{|f_n(t, 0, 0, ...)| : \ t \in I, \ n = 1, 2, ...\} \ ,$$

$$k = \sup\{k_n : \ n = 1, 2, ...\} \ .$$

Dalej zauważmy, że z założeń (iii'), (iii") wynika, że funkcja $f = f(t,x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą k ze względu na zmienną x. Rzeczywiście, dla dowolnie ustalonych $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_\infty$ i dla każdego ustalonego $t \in I$ mamy:

$$\begin{aligned} ||f(t,x) - f(t,y)|| &= \sup\{|f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...) - f_n(t, y_n, y_{n+1}, ...)| : \ n = 1, 2, ...\} \\ &\leqslant \sup\{k_n \sup\{|x_j - y_j| : \ j \geqslant n\} \ i = 1, 2, ...\} \\ &\leqslant \sup\{k_n ||x - y|| : \ n = 1, 2, ...\} \leqslant k||x - y|| \ . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Oprócz tego zauważmy, że funkcja $f = f(t,x)$ jest jednostajnie zbieżna na zbiorze $I \times B(x_0, r)$, gdzie $r > 0$ jest dowolnie ustalone.
W celu udowodnienia tego stwierdzenia ustalmy dowolnie $t_1, t_2 \in I$ oraz $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$. Wtedy, na podstawie (5.11) mamy:

$$\begin{aligned} ||f(t_2, x_2) - f(t_1, x_1)|| &\leqslant ||f(t_2, x_2) - f(t_2, x_1)|| + ||f(t_2, x_1) - f(t_1, x_1)|| \\ &\leqslant k||x_2 - x_1|| + ||f(t_2, x_1) - f(t_1, x_1)|| \ . \end{aligned}$$

Stąd, w świetle założenia (ii') uzyskujemy żądaną jednostają ciągłość.

Teraz możemy przedstawić wynik dotyczący problemu (5.9)–(5.10).

Twierdzenie 5.6. *Załóżmy, że założenia* (i), (ii'), (iii'), (iii") *i* (iv)-(vii) *są spełnione oraz $T(A + k) < 1$. Wtedy problem* (5.9)–(5.10) *ma co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ zdefiniowane na przedziale $I = [0, T]$ i takie, że $x(t) \in l_\infty$ dla $t \in I$.*

Dowód. Będziemy postępowali podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 5.3. Tak więc ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, dla dowolnie ustalonych $x = (x_n) \in l_\infty$ i $t \in I$, na podstawie założeń i faktów ustalonych powyżej, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |g_n(t,x)| &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)|x_j| + |f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...)| \\ &\leqslant A_n(t)||x|| + |f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...) - f_n(t, 0, 0, ...)| + |f_n(t, 0, 0, ...)| \\ &\leqslant A_n(t)||x|| + k_n \sup\{|x_j| : \ j \geqslant n\} + F \leqslant A||x|| + k_n||x|| + F \ , \end{aligned}$$

gdzie, podobnie jak w poprzednich rozważaniach, oznaczyliśmy:

$$g_n(t,x) = g_n(t, x_1, x_2, ...) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...)$$

dla $n = 1, 2, ...$. Daje to następujące oszacowanie:

$$||g(t,x)|| \leqslant (A+k)||x|| + F \ .$$

Z powyższego oszacowania wynika, że operator $g = g(t,x)$ odwzorowuje zbiór $I \times l_\infty$ w l_∞.

Następnie, weźmy liczbę:

$$r = (FT + (A+k)T||x_0||)/(1 - (A+k)T) \ .$$

Rozważmy operator $g(t,x)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$. W związku z wcześniej ustaloną jednostajną ciągłością operatora $f = f(t,x)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$ i zgodnie z rozumowaniem przeprowadzonym w dowodzie Twierdzenia 5.3 wnioskujemy, że operator $g(t,x)$ jest jednostajnie ciągły na zbiorze $I \times B(x_0, r)$.

Ustalmy teraz niepusty podzbiór X kuli $B(x_0, r)$ i weźmy dowolne $x, y \in X$ i $t \in I$. Wtedy, dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |g_n(t,x) - g_n(t,y)| &\leqslant \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)y_j \right| + |f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...) - f_n(t, y_n, y_{n+1}, ...)| \\ &\leqslant \left| \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)x_j + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)y_j - \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)y_j \right| \\ &+ k_n \sup\{|x_j - y_j| : \ j \geqslant n\} \\ &\leqslant \left| \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)(x_j - y_j) \right| + \left| \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)(x_j - y_j) \right| + k_n \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)|x_j - y_j| + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)|x_j - y_j| + k \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\} \\ &\leqslant ||x - y|| \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) + \left(\sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t) \right) \sup\{|x_j - y_j| : j \geqslant n\} \end{aligned}$$

$$+ k \sup\{\mathrm{diam} X_j : \; j \geqslant n\}$$
$$\leqslant \bar{A}_n(t) \mathrm{diam} X + \bar{\bar{A}}_n(t) \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\} + k \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\}.$$

Z powyższego oszacowania wynika następująca nierówność:

$$\mathrm{diam} g_n(t, X) \leqslant \bar{A}_n(t) \mathrm{diam} X + \bar{\bar{A}}_n(t) \sup\{\mathrm{diam} X_j : \; j \geqslant n\}$$
$$+ k \sup\{\mathrm{diam} X_j : \; j \geqslant n\} \; , \tag{5.12}$$

która zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Teraz analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 5.3 definiujemy funkcję $b : I \to \mathbb{R}_+$ w następujący sposób:

$$b(t) = \limsup_{n \to \infty} \bar{\bar{A}}_n(t) \; .$$

Wtedy, z oszacowania (5.12) wnioskujemy, że ma miejsce następującą nierówność:

$$\mu(g(t, X)) \leqslant (b(t) + k) \mu(X) \; ,$$

gdzie μ jest miarą niezwartości zdefiniowaną w podozdziale 3.2 za pomocą wzoru (3.18). Ostatecznie, zbierając wszystkie ustalone fakty i wykorzystując Twierdzenie 5.3 kończymy dowód.

□

Teraz zwróćmy uwagę na drugi szczególny przypadek semiliniowego, nieskończonego układu równań różniczkowych (5.3), który ma postać:

$$x'_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t) x_j + f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \; , \tag{5.13}$$

dla $n = 1, 2, ...$ i dla $t \in I$. Oczywiście układ (5.13) będzie rozważany z warunkami początkowymi (5.4) tzn.:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{5.14}$$

$(n = 1, 2, ...)$. Tak samo, jak wcześniej, szukamy rozwiązań problemu (5.13)–(5.14) w przestrzeni l_∞ przy czym głównym narzędziem używanym w naszych rozważaniach jest miara niezwartości μ wyrażona wzorem (3.18).

Będziemy zakładali teraz, że spełnione są założenia (i), (iv)–(vii) sformułowane wcześniej, podczas gdy założenia (ii), (iii) będą zastąpione następującymi:

($\bar{\text{ii}}$) Dla każdej ustalonej liczny naturalnej n funkcja $f_n : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła i dla każdej liczby naturalnej j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ istnieje nieujemna stała k_j^n taka, że dla dowolnych $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_\infty$ i dla każdego $t \in I$ zachodzi następująca nierówność:

$$|g_n(t, x_1, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_n) - g_n(t, x_1, ..., x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, ..., x_n)| \\ \leqslant k_j^n |x_j - y_j| \ .$$

($\bar{\text{iii}}$) Dla każdej naturalnej liczny n mamy, że $k_n = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j^n < 1$. Co więcej, $k < 1$, gdzie $k = \sup\{k_n : \ n = 1, 2, ...\}$.

Teraz możemy zaprezentować nasze twierdzenie egzystencjalne.

Twierdzenie 5.7. *Załóżmy, że spełnione są założenia* (i), ($\bar{\text{ii}}$), ($\bar{\text{iii}}$), (iv)–(vii), *jeśli dodatkowo* $T(A + k) < 1$, *to problem* (5.13)–(5.14) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *zdefiniowane na przedziale* I *i takie, że* $x(t) \in l_\infty$ *dla każdego* $t \in I$.

Dowód tego twierdzenia może być przeprowadzony podobnie, jak dowód Twierdzenia 5.6. dlatego zostanie pominięty.

6 Twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni ciągów temperowanych

6.1 Wprowadzenie

Na początku pokażemy, że nawet w prostych sytuacjach klasyczne przestrzenie ciągowe nie są wystarczające do ulokowania naszych rozważań.

Przykład 6.1. Rozważmy liniowy, diagonalny nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x_n' = x_n \tag{6.1}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = n, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \, . \tag{6.2}$$

Rozważmy problem (6.1)–(6.2) na przedziale $I = [0, T]$.

Łatwo jest zobaczyć, że rozwiązanie problemu (6.1)–(6.2) ma postać:

$$x(t) = (x_n(t)) = (ne^t) = (e^t, 2e^t, 3e^t, \dots),$$

a to oznacza, że $x(t) \notin l_\infty$ dla każdego $t \in I$. Zatem przestrzeń l_∞ nie jest wystarczająca dla rozważania rozwiązań problemu (6.1)–(6.2) w tej przestrzeni. Oczywiście, taka sytuacja wydaje się być naturalna ponieważ punkt początkowy $(x_n^o) = (n)$ nie jest elementem przestrzeni l_∞.

Przykład 6.2. Rozważmy nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x_n' = n\frac{\sqrt{|x_n|}}{\sqrt{|x_n|} + 1} \tag{6.3}$$

dla $n = 1, 2, \dots$, razem z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = 0, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \, . \tag{6.4}$$

Ustalmy dowolną naturalną liczbę n. Wtedy, możemy przeliczyć, że rozwiązanie problemu (6.3)–(6.4) jest postaci:

$$x_n(t) = \frac{n^2t^2}{2 + nt + 2\sqrt{1 + nt}}$$

dla $t \in I$. Stąd otrzymujemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} x_n(t) &\geqslant \frac{n^2t^2}{2+nt+2\sqrt{1+2nt+n^2t^2}} \\ &= \frac{n^2t^2}{2+nt+2(1+nt)} \geqslant \frac{n^2t^2}{4+4nt} = \frac{1}{4}\Big(nt-1+\frac{1}{nt+1}\Big) \end{aligned} \tag{6.5}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz dla $t \in I$.

Następnie, przedstawmy rozwiązanie problemu (6.3)–(6.4) w postaci $x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t), x_2(t), \ldots)$. Wtedy z oszacowania (6.5) wnioskujemy, że $x(t) \notin l_\infty$ dla każdego $t > 0$. Z drugiej strony zauważmy, że prawa strona równania (6.3) nie jest ograniczona. Rzeczywiście, mamy

$$\frac{n\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \to n, \quad \text{gdy } x \to \infty.$$

Powyższe przykłady pokazują, że musimy powiększyć przestrzenie w których prowadzimy nasze rozważania aby mieć pewność, że rozwiązania nieskończonych układów równań należą do rozważanej przestrzeni. Okazuje się, że naturalnym sposobem na uzyskanie istotnego powiększenia jest ulokowanie rozwiązań w tak zwanych przestrzeniach ciągów temperowanych, które zostały wprowadzone w podrozdziale 2.2.

Warto wspomnieć, że takie podejście pozwala nam badać większą klasę nieskończonych układów równań różniczkowych w porównaniu z klasycznym podejściem.

W pracy omówimy niektóre klasy nieskończonych układów równań różniczkowych, które mają rozwiązania we wspomnianych przestrzeniach ciągów temperowanych. Przedstawione wyniki uogólniają kilka wyników uzyskanych dotychczas w klasycznych przestrzeniach ciągowych ([7, 10, 13, 16, 17, 34]).

6.2 Nieskończony układ równań różniczkowych w przestrzeni ciągów temperowanych c_0^β

Rozważania prowadzone w tym rozdziale będą ulokowane w przestrzeni ciągów temperowanych c_o^β opisanej w podrozdziale 2.2. A zatem załóżmy, że $\beta = (\beta_n)$ jest ciągiem o dodatnich wyrazach, który jest nierosnący. Przypomnijmy, że przestrzeń c_o^β składa się ze wszystkich ciągów (x_n) takich, że ciąg $(\beta_n x_n)$ jest zbieżny do zera. Będziemy rozważali tylko ciągi liczb rzeczywistych (x_n). Norma w przestrzeni c_o^β jest zdefiniowana wzorem:

$$\|x\|_{c_0^\beta} = \|(x_n)\|_{c_0^\beta} = \sup\{\beta_n |x_n| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Aby uprościć zapis będziemy używali symbolu $\|\cdot\|$ zamiast $\|\cdot\|_{c_0^\beta}$.

6.2.1 Semiliniowy, dolnie przekątniowy, nieskończony układ równań różniczkowych

Przedmiotem naszych badań w tym rozdziale na początku będzie semiliniowy, dolnie przekątniowy, nieskończony układ równań różniczkowych mający postać:

$$x_n' = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i} + f_n(t, x_1, x_2, \dots) \tag{6.6}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_0^n, \quad \text{dla } \ x = 1, 2, \dots \ . \tag{6.7}$$

Zakładamy, że dla każdej ustalonej liczny naturalnej n ciąg $(n_1, n_2, ..., n_{k_n})$ jest taki, że $1 \leqslant n_1 < n_2 < ... < n_{k_n} \leqslant n$. Co więcej, ciąg (n_1) dąży do nieskończoności gdy $n \to \infty$. Ponadto zakładamy, że istnieje naturalna liczba K taka, że $k_n \leqslant K$ dla wszystkich $n = 1, 2, ...$.
To oznacza, że każda "część liniowa" układu (6.6) składa się tylko ze skończonej ilości niezerowych liczb a ich ilość nie przekracza K. Nieskończony układ (6.6) spełniający powyższy warunek będzie nazywany nieskończonym układem równań różniczkowych z *częścią liniową o stałej szerokości.*

Poza warunkiem dotyczącym części liniowej o stałej szerokości nakładamy dodatkowe założenia dla problemu (6.6)–(6.7):

(i) Funkcje $a_{nn_i} = a_{nn_i}(t)$ są jednakowo ciągłe na przedziale I dla $n = 1, 2, ...$ oraz dla $i = 1, 2, \dots, k_n$;

(ii) Funkcje $a_{nn_i}(t)$ są wspólnie ograniczone na przedziale I przez dodatnią stałą A tzn. $|a_{nn_i}(t)| \leqslant A$ dla $t \in I$ oraz dla $n = 1, 2 \dots$ oraz dla $i = 1, 2, \dots, k_n$;

(iii) Ciąg (x_0^n) należy do przestrzeni c_0^β;

(iv) Dla każdego ustalonego n funkcje $f_n(t, x_1, x_2, \dots) = f_n(t, x)$ działają ze zbioru $I \times \mathbb{R}^\infty$ w $\mathbb{R}$. Co więcej, funkcja $f_n : I \times c_0^\beta \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $I \times c_0^\beta$;

(v) Istnieje ciąg (p_n) o nieujemnych wyrazach, o tej własności, że $\beta_n p_n \to 0$ gdy, $n \to \infty$ i taki, że $|f_n(t, x)| \leqslant p_n$ dla $t \in I$, $x \in c_0^\beta$ i dla $n = 1, 2 \dots$.

Teraz możemy sformułować nasz rezultat egzystencjalny.

Twierdzenie 6.3. *Załóżmy, że funkcje występujące w układzie równań różniczkowych* (6.6) *mające elementy liniowe o stałej szerokości K, spełniają założenia* (i)–(v). *Wtedy problem* (6.6)–(6.7) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t)) = ((x_1(t), x_2(t), \dots)$ w przestrzeni ciągowej c_0^β na przedziale I.*

Dowód. Dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy:

$$g_n(t,x) = g_n(t,x_1,x_2,\dots) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)x_{n_i} + f_n(t,x_1,x_2,\dots),$$

gdzie $t \in I$ i $x = (x_n) \in c_0^\beta$. Wtedy, na podstawie założeń, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\beta_n|g_n(t,x_1,x_2,\dots)| &\leqslant \beta_n \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)||x_{n_i}| + \beta_n|f_n(t,x_1,x_2,\dots)| \\
&\leqslant \beta_n A \sum_{i=1}^{k_n} |x_{n_i}| + \beta_n p_n = A\sum_{i=1}^{k_n} \beta_n|x_{n_i}| + \beta_n p_n \\
&\leqslant A\sum_{i=1}^{k_n} \beta_{n_i}|x_{n_i}| + \beta_n p_n \\
&\leqslant AK \max\{\beta_{n_i}|x_{n_i}| : i = 1,2,\dots,k_n\} + \beta_n p_n \\
&\leqslant AK \sup\{\beta_j|x_j| : j \geqslant n_1\} + \beta_n p_n.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że zastępując n przez j oraz j przez i, możemy przedstawić powyższą nierówność w postaci:

$$\beta_j|g_j(t,x_1,x_2,\dots)| \leqslant AK\sup\{\beta_i|x_i| : i \geqslant j_1\} + \beta_j p_j. \tag{6.8}$$

Następnie, zwróćmy uwagę na to, że z oszacowania (6.8) wynika następująca nierówność:

$$\begin{aligned}
\|g(t,x)\| &= \sup\{\beta_j|g_j(t,x_1,x_2,\dots)| : j = 1,2,\dots\} \\
&\leqslant AK \sup_{j\in\mathbb{N}} \Big\{ \sup\{\beta_i|x_i| : i \geqslant j_1\}\Big\} + \sup\{\beta_j p_j : j = 1,2,\dots\} \qquad (6.9)\\
&= AK\|x\| + P,
\end{aligned}$$

gdzie operator $g = g(t,x)$ jest zdefiniowany na zbiorze $I \times c_0^\beta$ w następujący sposób:

$$g(t,x) = (g_1(t,x), g_2(t,x),\dots).$$

Na podstawie oszacowania (6.9) widzimy, że g odwzorowuje zbiór $I \times c_0^\beta$ w przestrzeń c_0^β.

Teraz, pokażemy że operator g jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$. W tym celu rozdzielimy operator g na dwa składniki:

$$g(t,x) = (Lx)(t) + f(t,x),$$

przy czym operatory L i f są zdefiniowane w następujący sposób:

$$(Lx)(t) = ((L_1x)(t), (L_2x)(t),\dots),$$

gdzie:

$$(L_n x)(t) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i}$$

$(n = 1, 2, \dots)$, oraz

$$f(t, x) = (f(t_1, x), f(t_2, x), \dots).$$

Na początku pokażemy, że operator f jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$. W tym celu ustalmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ oraz liczbę $t_0 \in I$ i punkt $x \in c_0^\beta$. Na podstawie założenia (v) możemy wybrać liczbę naturalną n_0 taką, że

$$\beta_n p_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.10}$$

dla $n \geqslant n_0$.

Następnie, na podstawie założenia (iv) możemy znaleźć liczbę δ_i $(i = 1, 2, \dots, n_0)$ taką, że dla każdych $t \in I$ oraz $y \in c_0^\beta$ takich, że $|t - t_0| \leqslant \delta_i$ oraz $\|y - x\| \leqslant \delta_i$ mamy:

$$|f_i(t, y) - f_i(t_0, x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta_1}.$$

Weźmy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_0}\}$. Wtedy, dla dowolnego $t \in I$ takiego, że $|t - t_0| \leqslant \delta$ i dla dowolnego $y \in c_0^\beta$ takiego, że $\|y - x\| \leqslant \delta$ mamy:

$$|f_i(t, y) - f_i(t_0, x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta_1}. \tag{6.11}$$

Łącząc (6.10) i (6.11), dla $t \in I$ oraz $y \in c_0^\beta$ takich, że $|t - t_0| \leqslant \delta$, $\|y - x\| \leqslant \delta$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\|f(t, y) - f(t_0, x)\| &= \sup\{\beta_n |f_n(t, y) - f_n(t_0, x)| : n = 1, 2, \dots\} \\
&= \max\Big\{ \max\Big\{\beta_n |f_n(t, y) - f_n(t_0, x)| : n = 1, 2, \dots, n_0\Big\}, \\
&\qquad \sup\Big\{\beta_n |f_n(t, y) - f_n(t_0, x)| : n > n_0\Big\}\Big\} \\
&\leqslant \max\Big\{ \max\Big\{\beta_1 |f_n(t, y) - f_n(t_0, x)| : n = 1, 2, \dots, n_0\Big\}, \\
&\qquad \sup\{\beta_n \Big[|f_n(t, y)| + |f_n(t_0, x)|\Big] : n > n_0\}\Big\} \\
&\leqslant \max\Big\{\beta_1 \Big(\frac{\varepsilon}{\beta_1}\Big), \sup\Big\{2\beta_n p_n : n > n_0\Big\}\Big\} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że operator f jest ciągły w dowolnym punkcie $(t_0, x) \in I \times c_0^\beta$.

Teraz pokażemy, że operator L jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$. W tym celu weźmy dowolnie ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$ i wybierzmy dwa dowolne punkty (s, x), $(t, y) \in I \times c_0^\beta$ takie, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$ oraz $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$ Wtedy, dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n, korzystając z definicji operatora L otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\beta_n|(L_ny)(t)-(L_nx)(s))| &= \beta_n\Big|\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)y_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)x_{n_i}\Big| \\
&\leqslant \beta_n\Big|\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)y_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)y_{n_i}\Big| \\
&+ \beta_n\Big|\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)y_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)x_{n_i}\Big| \\
&\leqslant \beta_n\sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)-a_{nn_i}(s)||y_{n_i}| + \beta_n\sum_{i=1}^{k_n}|a_{nn_i}(s)||y_{n_i}-x_{n_i}| \\
&\leqslant \beta_n\sum_{i=1}^{k_n} \omega(\varepsilon)|y_{n_i}| + \beta_n\sum_{i=1}^{k_n}|a_{nn_i}(s)||y_{n_i}-x_{n_i}| \\
&\leqslant \omega(\varepsilon)\sum_{i=1}^{k_n} \beta_n|y_{n_i}| + \sum_{i=1}^{k_n}|a_{nn_i}(s)|\beta_n|y_{n_i}-x_{n_i}| \\
&= \omega(\varepsilon)\sum_{i=1}^{k_n} \frac{\beta_n}{\beta_{n_i}}\beta_{n_i}|y_{n_i}| + \sum_{i=1}^{k_n}|a_{nn_i}(s)|\frac{\beta_n}{\beta_{n_i}}\beta_{n_i}|y_{n_i}-x_{n_i}| \\
&\leqslant \omega(\varepsilon)\sum_{i=1}^{k_n} \beta_{n_i}|y_{n_i}| + \sum_{i=1}^{k_n}|a_{nn_i}(s)|\beta_{n_i}|y_{n_i}-x_{n_i}|,
\end{aligned}
$$

gdzie $\omega(\varepsilon)$ oznacza wspólny moduł ciągłości funkcji $a_{nn_i}(t)$ na przedziale I (por. założenie (i)).

Ponadto w powyższym oszacowaniu wykorzystaliśmy również to, że ciąg β_n jest nierosnący oraz $n_i \leqslant n$ dla $i = 1, 2, \ldots, k_n$.

Dalej, z wyżej wskazanego oszacowania otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\beta_n|(L_ny)(t)-(L_nx)(s))| &\leqslant \omega(\varepsilon)K\max\{\beta_{n_i}|y_{n_i}| : i=1,2,\ldots,k_n\} \\
&\quad + A\max\{\beta_{n_i}|y_{n_i}-x_{n_i}| : i=1,2,\ldots,k_n\} \\
&\leqslant K\omega(\varepsilon)\|y\| + A\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Stąd otrzymujemy zapowiadaną ciągłość operatora L na zbiorze $I \times c_0^\beta$. Łącząc ten fakt z wykazaną wcześniej ciągłością operatora f na zbiorze $I \times c_0^\beta$ otrzymujemy ciągłość operatora g na zbiorze $I \times c_0^\beta$.

Następnie, wybierzmy liczbę T_1 taką, że $T_1 < T$ i $AKT_1 < 1$. Zgodnie z założeniami naszego twierdzenia weźmy liczbę $r = \frac{(P+AK)T_1\|x_0\|}{1-AKT_1}$ i rozważmy kulę $B(x_0, r)$. Następnie, wybierzmy dowolny podzbiór X kuli $B(x_0, r)$. Wtedy, dla $x \in X$ i $t \in [0, T_1]$, na podstawie oszacowania (6.8), dla dowolnie ustalonej naturalnej liczby n, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&\sup\{\beta_j|g_j(t,x_1,x_2,\ldots)| : j \geqslant n\} \\
&\leqslant \sup\Big\{AK\sup\{\beta_i|x_i| : i \geqslant j_1\} : j \geqslant n\Big\} + \sup\Big\{\beta_j p_j : j \geqslant n\Big\} \\
&\leqslant AK\sup\Big\{\sup\{\beta_i|x_i| : i \geqslant n_1\}, \sup\{\beta_i|x_i| : i \geqslant (n+1)_1\}, \\
&\qquad \sup\{\beta_i|x_i| : i \geqslant (n+2)_1\}, \ldots\Big\} + \sup\Big\{\beta_j p_j : j \geqslant n\Big\}.
\end{aligned}
$$

Stąd dostajemy:

$$\sup_{x\in X}\Big\{\sup\{\beta_j|g_j(t,x_1,x_2,\dots)|:j\geqslant n\}\Big\}$$
$$\leqslant AK\sup_{x\in X}\Big\{\sup\{\sup\{\beta_i|x_i|:i\geqslant j_i\}:j\geqslant n\}+\sup\{\beta_j p_j:j\geqslant n\}\Big\}.$$

Przechodząc z $n\to\infty$ w powyższym oszacowaniu i biorąc pod uwagę, że $j_1\to\infty$ gdy $j\to\infty$, otrzymujemy:

$$\chi(g(t,X))\leqslant AK\chi(X),$$

gdzie χ oznacza miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c_0^β wyrażoną wzorem (3.26). Ostatecznie, na podstawie wyżej ustalonych faktów i Twierdzenia 4.3 kończymy dowód. □

Podamy teraz przykład, który ilustruje wynik Twierdzenia 6.3.

Przykład 6.4. Rozważmy nieskończony układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} x_1'=x_1+\frac{\sqrt{|x_1|}}{\sqrt{|x_1|+1}},\\ x_2'=x_1+x_2+2\frac{\sqrt{|x_2|}}{\sqrt{|x_2|+1}},\\ x_3'=x_2+x_3+3\frac{\sqrt{|x_3|}}{\sqrt{|x_3|+1}},\\ \dots\\ x_n'=x_{n-1}+x_n+n\frac{\sqrt{|x_n|}}{\sqrt{|x_n|+1}},\\ \dots \end{cases}\tag{6.12}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0)=n\quad \text{dla } n=1,2,\dots.\tag{6.13}$$

Zauważmy, że układ (6.12) jest semiliniowym, dolnie przekątniowym, nieskończonym układem równań różniczkowych z częścią liniową o stałej szerokości $K=2$. Co więcej, układ (6.12) jest szczególnym przypadkiem układu (6.7) jeśli weźmiemy $a_{nn_i}(t)=1$ dla $t\in I$, $I=[0,T_1]$, gdzie $T_1>0$ jest liczbą wybraną według założeń Twierdzenia 4.3. Dodatkowo, $n=1,2\dots$ oraz $i=1,2$ dla $n\geqslant 2$. Oczywistym jest, że spełnione jest założenie (i) Twierdzenia 6.3.

Następnie, mamy że $|a_{nn_i}(t)|\leqslant 1$ dla $t\in I$ i $n=1,2,\dots$, $i=1,2$. To oznacza, że funkcje $a_{nn_i}(t)$ spełniają założenie (ii).

Teraz weźmy ciąg $\beta_n=\frac{1}{n^2}$ dla $n=1,2\dots$. Mamy, że $x_0=(x_0^n)=(n)\in c_0^\beta$, gdzie $\beta=(\beta_n)=(\frac{1}{n^2})$. A zatem spełnione jest założenie (iii). Z postaci układu (6.12) widzimy, że możemy przyjąć:

$$f_n(t,x_1,x_2,\dots)=n\frac{\sqrt{|x_n|}}{\sqrt{|x_n|+1}}$$

dla $n = 1, 2 \ldots$. Oczywiście, funkcja $f_n = f_n(t,x)$ jest ciągła na zbiorze $I \times c_0^\beta$. Co więcej, mamy:

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant n \quad \text{dla } n = 1, 2 \ldots .$$

Stąd wnioskujemy, że funkcje f_n spełniają założenia (iv) i (v) z $p_n = n$ dla $n = 1, 2 \ldots$.

Ostatecznie, na podstawie Twierdzenia 6.3 udowodniliśmy, że istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ problemu (6.12)–(6.13) zdefiniowane na pewnym przedziale $I = [0, T_1]$ takie, że dla każdego $t \in I$ ciąg $(x_n(t))$ należy do przestrzeni c_0^β z $\beta = (\frac{1}{n^2})$. To oznacza, że $x_n(t) = o(n^2)$ gdy $n \to \infty$ dla każdego ustalonego $t \in [0, T_1]$.

W dalszej części będziemy rozważali także semiliniowy, nieskończony układ równań różniczkowych postaci (6.6) tzn.

$$x_n' = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i} + f_n(t, x_1, x_2, \ldots) \tag{6.14}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0, \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots . \tag{6.15}$$

Teraz zrezygnujemy z założenia dotyczącego posiadania przez układ (6.14) części liniowej o stałej szerokości. Zastąpimy ten warunek, a także założenie (ii), przez następujące założenia:

(ii') Ciąg (n_1) dąży do nieskończoności gdy $n \to \infty$;

(ii") Ciąg $\left(\sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)| \right)$ jest wspólnie ograniczony na przedziale $I = [0, T_1]$, to znaczy, że istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$\sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)| \leqslant A$$

dla każdego $t \in I$ i dla $n = 1, 2, \ldots$.

Teraz możemy przedstawić kolejny wynik.

Twierdzenie 6.5. *Załóżmy, że spełnione są założenia* (i), (iii)–(v) *z Twierdzenia 6.3 oraz* (ii'), (ii"). *Wtedy problem* (6.14)–(6.15) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie* $x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni ciągowej* c_0^β *zdefiniowane na przedziale* $I = [0, T_1]$, *gdzie* T_1 *jest liczbą wybraną według Twierdzenia 4.3.*

Dowód. Podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 6.3, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy:

$$g_n(t, x) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i} + f_n(t, x),$$

$$(L_n x)(t) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i},$$

gdzie $t \in I$ i $x = (x_n) = (x_1, x_2, \dots) \in c_0^\beta$. Następnie, kładziemy:

$$g(t,x) = (g_1(t,x), g_2(t,x), \dots),$$
$$(Lx)(t) = ((L_1x)(t), (L_2x)(t), \dots),$$
$$f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), \dots).$$

Na podstawie założeń mamy:

$$\begin{aligned}
\beta_n|g_n(t,x_1,x_2,\dots)| &\leqslant \beta_n \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)||x_{n_i}| + \beta_n|f_n(t,x_1,x_2,\dots)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)|\beta_{n_i}|x_{n_i}| + \beta_n p_n \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}| \max\Big\{\beta_{n_i}|x_{n_i}| : i = 1,2,\dots,k_n\Big\} + \beta_n p_n \\
&\leqslant A \sup\{\beta_j|x_j| : j \geqslant n_1\} + \beta_n p_n.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Dalej, z powyższego oszacowania, uzyskujemy:

$$\|g(t,x)\| = \sup\{\beta_n|g_n(t,x_1,x_2,\dots)|\} \leqslant A\|x\| + P, \tag{6.17}$$

gdzie $P = \sup\{\beta_n p_n : n = 1,2,\dots\}$. Oczywiście $P < \infty$ ponieważ $\beta_n p_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Z oszacowania (6.17) wynika, że operator g odwzorowuje zbiór $I \times c_0^\beta$ w c_0^β.

Następnie, dzięki odpowiedniej części dowodu Twierdzenia 6.3 wnioskujemy, że f jest ciągła na zbiorze $I \times c_0^\beta$. A zatem, żeby pokazać ciągłość operatora g na zbiorze $I \times c_0^\beta$ wystarczy pokazać, że operator L jest ciągły na tym zbiorze. W tym celu ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ i weźmy dowolne punkty $(t,y), (s,x) \in I \times c_0^\beta$ takie, że $|t-s| \leqslant \varepsilon$ oraz $\|x-y\| \leqslant \varepsilon$. Wtedy, rozumując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.3, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\beta_n|(L_ny)(t) - (L_nx)(s)| &\leqslant \beta_n \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t) - a_{nn_i}(s)||y_{n_i}| + \beta_n \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)||y_{n_i} - x_{n_i}| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \beta_{n_i}\omega(\varepsilon)|y_{n_i}| + \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)|\beta_{n_i}|y_{n_i} - x_{n_i}| \\
&\leqslant K\omega(\varepsilon)\sup\{\beta_{n_i}|y_{n_i}| : i = 1,2,\dots,k_n\} \\
&\qquad + A\sup\{\beta_{n_i}|y_{n_i} - x_{n_i}| : i = 1,2,\dots,k_n\} \\
&\leqslant K\omega(\varepsilon)\|y\| + A\|x-y\| \leqslant K\omega(\varepsilon)\|y\| + A\varepsilon,
\end{aligned}$$

gdzie znaczenie symbolu $\omega(\varepsilon)$ zostało wyjaśnione w dowodzie Twierdzenia 6.3. Stąd wynika, że operator L jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$. W konsekwencji uzyskujemy ciągłość operatora g na $I \times c_0^\beta$.

Teraz wybierzmy liczbę T_1, $T_1 < T$ taką, że $AT_1 < 1$. Następnie weźmy liczbę $r = (P+A)T_1\|x_o\|/(1-AT_1)$ i załóżmy, że Xjest niepustym podzbiorem kuli $B(x_0, r)$.

Argumentując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.3 i wykorzystując oszacowanie (6.16) dostajemy:

$$\chi(g(t,X)) \leqslant A\chi(X),$$

gdzie χ jest miarą niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c_0^β opisaną wzorem (3.26). Stąd, stosując Twierdzenie 4.3 kończymy dowód. □

Podamy teraz przykład ilustrujący zastosowanie Twierdzenia 6.5.

Przykład 6.6. Rozważmy semiliniowy, nieskończony układ równań różniczkowych. Aby zaprezentować ten układ w przejrzysty sposób załóżmy, że n jest pewną parzystą liczbą naturalną, powiedzmy $n = 2k$. Wtedy, możemy przedstawić zapowiedziany układ w postaci:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{x_1}{1+x_1^2}, \\ x_2' = x_1 + tx_2 + 2\frac{x_1+x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \\ x_3' = \frac{t^2}{2!}x_3 + 3\frac{x_2+x_3}{1+x_2^2+x_3^2}, \\ x_4' = \frac{t^2}{2!}x_3 + \frac{t^3}{3!}x_4 + 4\frac{x_3+x_4}{1+x_3^2+x_4^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}'(=x_{2k-1}') = \frac{t^k}{k!}x_{k+1} + \dots + \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}x_{2k-1} \\ \qquad +(2k-1)\frac{x_{2k-2}+x_{2k-1}}{1+x_{2k-2}^2+x_{2k-1}^2}, \\ x_n'(=x_{2k}') = \frac{t^k}{k!}x_{k+1} + \dots + \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}x_{2k-1} + \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}x_{2k} \\ \qquad +2k\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{1+x_{2k-1}^2+x_{2k}^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ . \end{cases} \tag{6.18}$$

Zakładamy także, że spełnione są następujące warunki początkowe:

$$x_n(0) = n^2 \tag{6.19}$$

dla $n = 1, 2, \dots$.

Zauważmy że problem (6.18)–(6.19) jest szczególnym przypadkiem problemu (6.14)–(6.15). Aby uzasadnić to stwierdzenie pokazujemy, że spełnione są założenia Twierdzenia 6.5. Na początku zauważmy, że funkcje $a_{nn_i}(t)$ występujące w nieskończonym układzie (6.18) mają postać:

$$a_{nn_i}(t) = \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}$$

dla $n_i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n$ (jeśli n jest parzyste) lub $n_i = [\frac{n}{2}]+2, [\frac{n}{2}]+3, \dots, n$ (jeśli n jest nieparzyste). Oczywiście funkcje $a_{nn_i}(t)$ są jednakowo ciągłe na każdym przedziale postaci $[0,T]$. A zatem spełnione jest założenie (i).

Ponieważ $n_1 = \frac{n}{2}+1$ dla n parzystego lub $n_1 = [\frac{n}{2}]+2$ dla n nieparzystego widzimy, że założenie (ii') jest spełnione. Aby sprawdzić założenie (ii") zwróćmy uwagę, że mamy:

$$\sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)| = \sum_{i=1}^{n} |a_{nn_i}(t)| \leqslant 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \leqslant e^t$$

dla $t \in [0, T]$. Stąd dostajemy, że założenie (ii") jest spełnione z $A = e^T$.

Następnie, weźmy ciąg temperujący $\beta = (\beta_n) = (\frac{1}{n^3})$. Wtedy ciąg $(x_0^n) = (n^2)$ jest elementem przestrzeni ciągów temperowanych c_0^β , zatem założenie (iii) jest spełnione. Podobnie, nie jest trudno pokazać, że funkcje f_n, gdzie:

$$f_n(t, x) = f_n(t, x_1, x_2, \dots) = n\frac{x_{n-1} + x_n}{1 + x_{n-1}^2 + x_n^2}$$

$(n = 2, 3 \dots)$ są ciągłe na zbiorze $I \times c_0^\beta$. Co więcej, dla każdego ustalonego n mamy:

$$|f_n(t, x)| \leqslant n\frac{|x_{n-1}| + |x_n|}{1 + x_{n-1}^2 + x_n^2} \leqslant n.$$

A zatem, możemy przyjąć $p_n = n$ w założeniu (v). Oczywiście, mamy że $\beta_n p_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, gdy $n \to \infty$. Czyli założenie (v) jest spełnione.

Stąd, na podstawie Twierdzenia 6.5, problem (6.18)–(6.19) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ należące do przestrzeni ciągów temperowanych c_0^β i zdefiniowane dla $t \in I = [0, T_1]$, gdzie T_1 spełnia nierówność $T_1 A = T_1 e^{T_1} < 1$. Możemy obliczyć, że $T_1 \leqslant 0.568\dots$.

Uwaga 6.7. Zauważmy, że w Przykładzie 6.6 zamiast $\beta = (\beta_n) = (1/n^3)$ możemy wziąć ciąg temperujący postaci $\beta_n = 1/n^{2+\delta}$, gdzie δ jest dowolną dodatnią liczbą. Podobnie, w Przykładzie 6.4 możemy wziąć ciąg temperujący postaci $\beta_n = 1/n^{1+\delta}$, gdzie $\delta > 0$ jest dowolną liczbą i $n = 1, 2\dots$.

6.2.2 Semiliniowy, górnie przekątniowy, nieskończony układ równań różniczkowych

W tej części będziemy rozważali semiliniowy, górnie przekątniowy, nieskończony układ równań różniczkowych mający postać:

$$x_n' = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i} + f_n(t, x_1, x_2, ...) \tag{6.20}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_0^n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, ... \tag{6.21}$$

Zakładamy, że dla każdej ustalonej liczny naturalnej n $(n \in \mathbb{N})$ ciąg $(n_1, n_2, ..., n_{k_n})$ spełnia nierówność $n \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_{k_n}$.
W przeciwieństwie do podrozdziału wcześniejszego, nieskończony układ równań różniczkowych (6.20) reprezentuje semiliniowy, górnie przekątniowy układ, ponieważ wszystkie wyrazy części liniowej równania występującego w (6.20) są ulokowane ponad główną

przekątną macierzy (a_{nn_i}). Warto wspomnieć, że we wcześniejszym podrozdziale rozważaliśmy także nieskończony układ (6.20) ale zakładaliśmy, że $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_{k_n} \leqslant n$. Oczywiście w takim przypadku nieskończony układ (6.20) reprezentuje dolnie przekątniowy układ.

Podobnie, jak w poprzednim podrozdziale zakładamy, że istnieje naturalna liczba K taka, że $k_n \leqslant K$ dla $n = 1, 2, \ldots$. To oznacza, że każda "część liniowa" układu (6.20) składa się tylko ze skończonej ilości niezerowych liczb i ich ilość nie przekracza K. Nieskończony układ (6.20) spełniający powyższy warunek będzie nazywany nieskończonym układem równań różniczkowych z *częścią liniową o stałej szerokości*.

W dalszych rozważaniach problemu (6.20)–(6.21), oprócz założenia dotyczącego części liniowej o stałej szerokości w (6.20) nakładamy dodatkowe założenia:

(i) Funkcje $a_{nn_i} = a_{nn_i}(t)$ są jednakowo ciągłe na przedziale $I = [0, T]$ dla $n = 1, 2, ...$ oraz dla $i = 1, 2, ..., k_n$.

(ii) Funkcje $a_{nn_i}(t)$ są wspólnie ograniczone na przedziale I przez dodatnią stałą A tzn. $|a_{nn_i}(t)| \leqslant A$ dla $t \in I$ oraz dla $n = 1, 2, ..., i = 1, 2, ..., k_n$.

(iii) Ciąg (x_0^n) jest elementem przestrzeni c_0^β.

(iv) Dla każdego ustalonego naturalnego n funkcja $f_n(t, x_1, x_2, ...) = f_n(t, x)$ działa ze zbioru $I \times \mathbb{R}^\infty$ w $\mathbb{R}$. Co więcej, funkcja $f_n : I \times c_0^\beta \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $I \times c_0^\beta$.

(v) Istnieje ciąg (p_n) o nieujemnych wyrazach, o tej własności że $\beta_n p_n \to 0$, gdy $n \to \infty$ i taki, że $|f_n(t, x)| \leqslant p_n$ dla $t \in I$, $x \in c_0^\beta$ i dla $n = 1, 2, \ldots$.

(vi) Istnieje dodatnia stała M taka, że $\frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}} \leqslant M$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$.

Teraz możemy zaprezentować nasz wynik egzystencjalny dotyczący problemu (6.20)–(6.21).

Twierdzenie 6.8. *Załóżmy, że* (6.20) *jest nieskończonym układem równań różniczkowych z częścią liniową o stałej szerokości K, spełniającym założenia* (i)–(vi). *Wtedy, problem* (6.20)–(6.21) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t), x_2(t), ...)$ *w przestrzeni ciągowej c_0^β na przedziale $I_1 = [0, T_1]$, gdzie $T_1 \leqslant T$ i $T_1 < \frac{1}{AKM}$.*

Dowód. W celu uproszczenia dowodu, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy:

$$g_n(t, x) = g_n(t, x_1, x_2, ...) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i} + f_n(t, x_1, x_2, ...),$$

gdzie $t \in I$ i $x = (x_n) \in c_0^\beta$. Wtedy, na podstawie przyjętych założeń, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\beta_n|g_n(t,x_1,x_2,...)| \leqslant & \beta_n \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)||x_{n_i}| + \beta_n|f_n(t,x_1,x_2,...)| \\
\leqslant & \beta_n A \sum_{i=1}^{k_n} |x_{n_i}| + \beta_n p_n = \beta_n A \left[|x_{n_1}| + |x_{n_2}| + \cdots + |x_{n_{k_n}}|\right] + \beta_n p_n \\
= & A \left[\frac{\beta_n}{\beta_{n_1}}\beta_{n_1}|x_{n_1}| + \frac{\beta_n}{\beta_{n_2}}\beta_{n_2}|x_{n_2}| + \cdots + \frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}}\beta_{n_{k_n}}|x_{n_{k_n}}|\right] + \beta_n p_n \\
\leqslant & A\frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}}\left[\beta_{n_1}|x_{n_1}| + \beta_{n_2}|x_{n_2}| + \cdots + \beta_{n_{k_n}}|x_{n_{k_n}}|\right] + \beta_n p_n \\
\leqslant & AM\left[\beta_{n_1}|x_{n_1}| + \beta_{n_2}|x_{n_2}| + \cdots + \beta_{n_{k_n}}|x_{n_{k_n}}|\right] + \beta_n p_n \\
\leqslant & AMK \max\{\beta_{n_i}|x_{n_i}| : \quad i = 1,2,...,k_n\} + \beta_n p_n \\
\leqslant & AMK \sup\{\beta_j|x_j| : \quad j \geqslant n_1\} + \beta_n p_n.
\end{aligned}$$

Następnie, zastępując n przez j oraz j przez i, możemy przedstawić powyższą nierówność w postaci:

$$\beta_j|g_j(t,x_1,x_2,...)| \leqslant AKM \sup\{\beta_i|x_i| : \quad i \geqslant j_1\} + \beta_j p_j. \tag{6.22}$$

Następnie, zwróćmy uwagę, że z oszacowania (6.22) wynika następująca nierówność:

$$\begin{aligned}
||g(t,x)|| = & \sup\{\beta_j|g_j(t,x_1,x_2,...)| : \ j = 1,2,...\} \\
\leqslant AKM \sup_j & \{\sup\{\beta_i|x_i| : \quad i \geqslant j_1\}\} + \sup\{\beta_j p_j : \quad j = 1,2,...\} \\
\leqslant & AKM||x|| + P,
\end{aligned} \tag{6.23}$$

gdzie operator $g = g(t,x)$ jest zdefiniowany na zbiorze $I \times c_0^\beta$ w następujący sposób:

$$g(t,x) = (g_1(t,x), \ g_2(t,x), ...).$$

Co więcej, stała P jest zdefiniowana jako:

$$P = \sup\{\beta_n p_n : \quad n = 1,2,...\}.$$

Oczywiście, $P < \infty$ na podstawie założenia (v).

Następnie, pokażemy że operator g jest ciągły i działa ze zbioru $I \times c_0^\beta$ w przestrzeń c_0^β. W tym celu przedstawimy operator g w następujący sposób:

$$g(t,x) = (Lx)(t) + f(t,x),$$

gdzie operatory L i f są zdefiniowane następująco:

$$(Lx)(t) = ((L_1x)(t), (L_2x)(t), ...),$$

przy czym:

$$(L_n x)(t) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i}$$

$(n = 1, 2, ...)$ oraz

$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), ...).$$

Na początku pokażemy, że funkcja f jest ciągła na zbiorze $I \times c_0^\beta$.

W tym celu ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i punkt $x \in c_0^\beta$, $t \in I$. Wtedy, na podstawie założenia (v) możemy znaleźć naturalną liczbę n_0 taką, że

$$\beta_n p_n < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.24}$$

dla $n \geqslant n_0$.

Następnie, na podstawie założenia (iv) możemy znaleźć liczbę δ_i $(i = 1, 2, ..., n_0)$ taką, że dla każdego $y \in c_0^\beta$ takiego, że $||x - y|| \leqslant \delta_i$ i dla $s \in I$ takiego, że $|t - s| \leqslant \delta_i$ mamy:

$$|f_i(t, x) - f_i(s, y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta_1}.$$

Weźmy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Wtedy dla dowolnego $y \in c_0^\beta$ takiego, że $||x - y|| \leqslant \delta$ i dla $s \in I$ takiego, że $|t - s| \leqslant \delta$, otrzymujemy:

$$|f_i(t, x) - f_i(s, y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta_1}. \tag{6.25}$$

Łącząc (6.24) i (6.25), dla $y \in c_0^\beta$ takiego, że $||x - y|| \leqslant \delta$ i dla $s \in I$ takiego, że $|t - s| \leqslant \delta$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
||f(t, x) - f(s, y)|| &= \sup\{\beta_n |f_n(t, x) - f_n(s, y)| : \quad n = 1, 2, ...\} \\
&= \max\{\max\{\beta_n |f_n(t, x) - f_n(s, y)| : \quad n = 1, 2, ..., n_0\}, \\
&\quad \sup\{\beta_n |f_n(t, x) - f_n(s, y)| : \quad n > n_0\}\} \\
&\leqslant \max\{\max\{\beta_n |f_n(t, x) - f_n(s, y)| : \quad n = 1, 2, ..., n_0\}, \\
&\quad \sup\{\beta_n [|f_n(t, x)| + |f_n(s, y)| : \quad n > n_0]\}\} \\
&\leqslant \max\left\{\beta_n \frac{\varepsilon}{\beta_1}, \sup\{2\beta_n p_n : \quad n > n_0\}\right\} \\
&\leqslant \max\left\{\beta_1 \frac{\varepsilon}{\beta_1}, \sup\{2\beta_n p_n : \quad n > n_0\}\right\} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

To pokazuje, że operator f jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$.

Teraz pokażemy, że operator L jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$. Podobnie jak poprzednio, ustalmy dowolnie $x \in c_0^\beta$, $t \in I$ i liczbę $\varepsilon > 0$. Wtedy, dla $y \in c_0^\beta$ takiego, że $||x - y|| \leqslant \varepsilon$, dla $s \in I$ takiego, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$ i dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n, na postawie założeń otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\beta_n|(L_nx)(t)-(L_ny)(s)| =&\beta_n\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)x_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)y_{n_i}\right| \\
\leqslant&\beta_n\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)x_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)x_{n_i}\right| \\
+&\beta_n\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)x_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s)y_{n_i}\right| \\
\leqslant&\beta_n\sum_{i=1}^{k_n}|a_{nn_i}(t)-a_{nn_i}(s)||x_{n_i}| + \beta_n\sum_{i=1}^{k_n}|a_{nn_i}(s)||x_{n_i}-y_{n_i}| \\
\leqslant&\beta_n\sum_{i=1}^{k_n}\omega(|t-s|)|x_{n_i}| + \beta_n A\sum_{i=1}^{k_n}|x_{n_i}-y_{n_i}| \\
\leqslant&\omega(\varepsilon)\sum_{i=1}^{k_n}\beta_n|x_{n_i}| + A\sum_{i=1}^{k_n}\beta_n|x_{n_i}-y_{n_i}|,
\end{aligned}
$$

gdzie symbol $\omega = \omega(\varepsilon)$ oznacza moduł ciągłości funkcji $a_{nn_i}(t)$ na przedziale I. Taki moduł istnieje w świetle założenia (i). Ponadto, mając na uwadze założenie (vi), otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\beta_n|(L_nx)(t)-(L_ny)(s)| \leqslant&\omega(\varepsilon)\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\beta_n}{\beta_{n_i}}\beta_{n_i}|x_{n_i}| + A\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\beta_n}{\beta_{n_i}}\beta_{n_i}|x_{n_i}-y_{n_i}| \\
\leqslant&\omega(\varepsilon)\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}}\beta_{n_i}|x_{n_i}| + A\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}}\beta_{n_i}|x_{n_i}-y_{n_i}| \\
\leqslant&M\omega(\varepsilon)\sum_{i=1}^{k_n}\beta_{n_i}|x_{n_i}| + AM\sum_{i=1}^{k_n}\beta_{n_i}|x_{n_i}-y_{n_i}| \\
\leqslant&KM\omega(\varepsilon)||x|| + AM||x-y|| \leqslant KM||x||\omega(\varepsilon) + AM\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Na podstawie powyższego oszacowania wnioskujemy, że operator L jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$. Łącząc ten fakt z ciągłością operatora f ustaloną wcześniej wnioskujemy, że operator g jest ciągły na zbiorze $I \times c_0^\beta$.

Następnie, weźmy dodatnią liczbę T_1 taką, że $T_1 \leqslant T$ i $AKMT_1 < 1$. Oznaczmy $I_1 = [0, T_1]$. Mając na uwadze powyższe ustalone fakty i Twierdzenie 4.3, weźmy liczbę

$$
r = \frac{(P + AKM)T_1||x_0||}{1 - AKMT_1}.
$$

Rozważmy kulę $B(x_0, r)$ i wybierzmy dowolny, niepusty podzbiór X kuli $B(x_0, r)$. Wtedy, dla ustalonego elementu $x \in X$ i dla dowolnej liczby $t \in I_1$, na podstawie oszacowań (6.22) i (6.23), dla dowolnie ustalonej naturalnej liczby n, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&\sup\{\beta_j|g_j(t, x_1, x_2, ...)| : \quad j \geqslant n\} \\
&\qquad\leqslant \sup\left\{AKM \sup\left\{\beta_i|x_i| : \quad i \geqslant j_1\right\} : \quad j \geqslant n\right\} + \sup\left\{\beta_j p_j : \quad j \geqslant n\right\} \\
&\qquad\leqslant AKM \sup\{\sup\left\{\beta_i|x_i| : \quad i \geqslant n_1\right\}, \quad \sup\left\{\beta_i|x_i| : \quad i \geqslant (n+1)_1\right\}, \\
&\qquad\quad \sup\{\beta_i|x_i| : \quad i \geqslant (n+2)_1\}, ...\} + \sup\{\beta_j p_j : \quad j \geqslant n\}.
\end{aligned}
$$

W związku z tym dochodzimy do następującego oszacowania:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in X}\{\sup\{\beta_j|g_j(t,x_1,x_2,...)|:\quad j\geqslant n\}\}\\
\leqslant &AKM\sup_{x\in X}\{\sup\{\sup\{\beta_i|x_i|:\quad i\geqslant j_1\}:\quad j\geqslant n\}\}\\
+&\sup\{\beta_j p_j:\quad j\geqslant n\}.
\end{aligned}$$

Teraz, przechodząc z $n\to\infty$ i mając to na uwadze to, że $j_1\to\infty$ gdy $j\to\infty$, na podstawie wzoru (3.26) wyrażającego miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c_0^β, otrzymujemy następującą nierówność:

$$\chi(g(t,X))\leqslant AKM\chi(X).$$

Na koniec, zbierając wszystkie powyższe fakty, na podstawie Twierdzenia 4.3 kończymy dowód. □

Aby zilustrować wynik zawarty w Twierdzeniu 6.8 rozważmy następujący przykład.

Przykład 6.9. Weźmy pod uwagę następujący nieskończony układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases}
x_1'=x_1+\frac{t}{1+t}x_2+\frac{x_1}{1+x_1^2},\\
x_2'=x_2+\frac{t}{2+t}x_3+\frac{t}{4+t}x_4+\frac{2x_2}{1+x_2^2},\\
x_3'=x_3+\frac{t}{3+t}x_4+\frac{t}{6+t}x_6+\frac{3x}{1+x_3^2},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n'=x_n+\frac{t}{n+t}x_{n+1}+\frac{t}{2n+t}x_{2n}+\frac{nx_n}{1+x_n^2},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{cases}\tag{6.26}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0)=2n+1\quad \text{dla}\quad n=1,2,...\,.\tag{6.27}$$

Zauważmy, że (6.26) jest semiliniowym, górnie przekątniowym nieskończonym układem równań różniczkowych z częścią liniową o stałej szerokości $K=3$. Poza tym łatwo zauważyć, ze ten układ (6.26) jest szczególnym przypadkiem układu (6.20) jeśli weźmiemy $a_{nn}(t)=1$ dla $n\in\mathbb{N}$ i dla $t\in I_1=[0,T_1]$, gdzie $T_1\leqslant T$ jest liczbą wybraną zgodnie z Twierdzeniem 4.3. Co więcej, $a_{nn_i}(t)=\frac{t}{n_i+t}$ dla $i=2$ i $n_2=n+1$ podczas, gdy dla $i=3$ mamy, że $n_3=2n$. Oczywiście $|a_{nn_i}(t)|\leqslant 1$ dla $t\in I_1$ i $n=1,2,...$, $i=1,2,3$. To implikuje, że funkcje $a_{nn_i}(t)$ spełniają założenie (ii) Twierdzenia 6.8.

Z drugiej strony łatwo jest sprawdzić, że funkcje $a_{nn_i}(t)$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą 1 dla $n=1,2,...$ oraz $i=1,2,3$. Stąd widzimy, że spełnione jest założenie (i) naszego twierdzenia.

W dalszej części rozważań przyjmijmy ciąg temperujący $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Oczywiście mamy, że $x_0 = (x_0^n) = (2n+1) \in c_0^\beta$, gdzie $\beta = (\beta_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pokazuje to, że założenie (iii) jest spełnione w przestrzeni c_0^β dla β ustalonego powyżej.

Co więcej zauważmy, że z postaci układu (6.26) wynika, że

$$f_n(t, x_1, x_2, \dots) = \frac{nx_n}{1 + x_n^2}$$

dla $n = 1, 2, \dots$. Jasne jest, że funkcja $f_n = f_n(t, x)$ jest ciągła na zbiorze $I \times c_0^\beta$. Oprócz tego mamy:

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \frac{1}{2}n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots .$$

Powyżej ustalone fakty pozwalają nam twierdzić, że funkcje f_n spełniają założenia (iv) i (v) z $p_n = \frac{1}{2}n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Z drugiej strony mamy, że

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}} = \frac{\beta_n}{\beta_{2n}} = 4.$$

Widzimy więc, że założenie (vi) jest spełnione z $M = 4$.

Ostatecznie, na podstawie Twierdzenia 6.8 wnioskujemy, że istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ problemu (6.26)–(6.27) zdefiniowane na pewnym przedziale $I_1 = [0, T_1]$ takie, że dla każdego $t \in I_1$ ciąg $(x_n(t))$ należy do przestrzeni c_0^β z $\beta = \left(\frac{1}{n^2}\right)$. Oczywiście, można wyliczyć że $T_1 < \min\{T, 1/12\}$.

Poniżej podamy analogiczny wynik do sformułowanego wcześniej w Twierdzeniu 6.5 dla nieskończonego, semiliniowego, górnie przekątniowego układu równań różniczkowych.

Mianowicie, rozważymy problem (6.20) – (6.21) dla nieskończonego, semiliniowego, górnie przekątniowego układu równań różniczkowych i zrezygnujemy z założenia, że układ (6.20) ma część liniową o stałej szerokości.

Dokładniej, zastąpmy ten warunek i założenie (ii) następującymi założeniami:

(ii') Ciąg $\left(\sum\limits_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)|\right)$ jest wspólnie ograniczony na przedziale $I_1 = [0, T_1]$, gdzie T_1 jest wybrane zgodnie z Twierdzeniem 4.3. To oznacza, że istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$\sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)| \leqslant A$$

dla każdego $n = 1, 2, \dots$ i dla $t \in I_1$.

(ii") Funkcje $a_{nn_i}(t)$ są niemalejące na przedziale I_1 dla $n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, k_n$ oraz ciąg $\left(\sum\limits_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)\right)$ jest jednakowo ciągły na przedziale I_1.

Teraz przedstawimy zapowiedziany wcześniej wynik.

Twierdzenie 6.10. *Załóżmy, że spełnione są warunki* (i), (iii)–(vi) *Twierdzenia 6.8 oraz* (ii'), (ii"). *Wtedy problem* (6.20)–(6.21) *dla nieskończonego, semiliniowego, górnie przekątniowego układu równań różniczkowych ma co najmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ w przestrzeni ciągowej c_0^β określone na przedziale $I_1 = [0, T_1]$.*

Dowód. W ten sam sposób, jak w dowodzie Twierdzenia 6.8, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy:

$$g_n(t,x) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)x_{n_i} + f_n(t,x),$$

$$(L_n x)(t) = \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)x_{n_i},$$

gdzie $t \in I_1$ i $x = (x_n) \in c_0^\beta$. Następnie, kładziemy:

$$g(t,x) = (g_1(t,x), g_2(t,x), ...),$$

$$(Lx)(t) = ((L_1x)(t), (L_2x)(t), ...),$$

$$f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), ...).$$

Na podstawie przyjętych założeń otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\beta_n|g_n(t,x_1,x_2...)| \leqslant & \beta_n \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)||x_{n_i}| + \beta_n|f_n(t,x_1,x_2,...)| \\
\leqslant & \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\beta_n}{\beta_{n_i}} \beta_{n_i}|a_{nn_i}(t)||x_{n_i}| + \beta_n p_n \\
\leqslant & \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}} \beta_{n_i}|a_{nn_i}(t)||x_{n_i}| + \beta_n p_n \\
\leqslant & M \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)| \max\{\beta_{n_i}|x_{n_i}| : \quad i = 1,2,...,k_n\} + \beta_n p_n \\
\leqslant & MA \sup\{\beta_j|x_j| : \quad j \geqslant n\} + \beta_n p_n.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Stąd otrzymujemy:

$$||g(t,x)|| = \sup\{\beta_n|g_n(t,x_1,x_2,...)| : \quad n \in \mathbb{N}\} \leqslant AM||x|| + P, \tag{6.29}$$

gdzie oznaczamy $P = \sup\{\beta_n p_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$. Oczywiście $P < \infty$. Oszacowanie (6.29) pokazuje, że operator g odwzorowuje zbiór $I_1 \times c_0^\beta$ w c_0^β. Co więcej, oszacowanie to pokrywa się z oszacowaniem (4.2), które jest potrzebne do zastosowania Twierdzenia 4.3.

W dalszej części pokażemy, że operator g jest ciągły na zbiorze $I_1 \times c_0^\beta$. W tym celu zauważmy, że dowód ciągłości operatora f przebiega dokładnie tak samo, jak w odpowiedniej części dowodu Twierdzenia 6.8. Dlatego wystarczy udowodnić ciągłość operatora L na zbiorze $I_1 \times c_0^\beta$. Aby przeprowadzić ten dowód, ustalmy dowolnie $x \in c_0^\beta$, $t \in I_1$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Następnie weźmy dowolny element $y \in c_0^\beta$ taki, że $||x-y|| \leqslant \varepsilon$ i liczbę $s \in I_1$ taką, że $|t-s| \leqslant \varepsilon$. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $s < t$. Następnie dla dowolnej liczby naturalnej n mamy:

$$\begin{aligned}
\beta_n|(L_n x)(t) - (L_n y)(s)| \leqslant \beta_n & \left| \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) x_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s) x_{n_i} \right| \\
& + \beta_n \left| \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s) x_{n_i} - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s) y_{n_i} \right| \\
& \leqslant \beta_n \left| \sum_{i=1}^{k_n} [a_{nn_i}(t) - a_{nn_i}(s)] x_{n_i} \right| \\
& + \beta_n \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)||x_{n_i} - y_{n_i}| \\
& \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} [a_{nn_i}(t) - a_{nn_i}(s)] \beta_n |x_{n_i}| \\
& + \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)| \beta_n |x_{n_i} - y_{n_i}| \\
& = \sum_{i=1}^{k_n} [a_{nn_i}(t) - a_{nn_i}(s)] \frac{\beta_n}{\beta_{n_i}} \beta_{n_i} |x_{n_i}| \\
& + \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)| \frac{\beta_n}{\beta_{n_i}} \beta_{n_i} |x_{n_i} - y_{n_i}| \\
& \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} [a_{nn_i}(t) - a_{nn_i}(s)] \frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}} \beta_{n_i} |x_{n_i}| \\
& + \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)| \frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}} \beta_{n_i} |x_{n_i} - y_{n_i}| \\
& \leqslant M \sum_{i=1}^{k_n} [a_{nn_i}(t) - a_{nn_i}(s)] \sup\{\beta_{n_i}|x_{n_i}| : \quad i = 1, 2, ..., k_n\} \\
& + M \sum_{i=1}^{k_n} [a_{nn_i}(s)] \sup\{\beta_{n_i}|x_{n_i} - y_{n_i}| : \quad i = 1, 2, ..., k_n\} \\
& \leqslant M \sum_{i=1}^{k_n} [a_{nn_i}(t) - a_{nn_i}(s)] \sup\{\beta_j|x_j| : \quad j = 1, 2, ...\} \\
& + M \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)| \sup\{\beta_j|x_j - y_j| : \quad j = 1, 2, ...\} \\
& \leqslant M||x|| \left| \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) - \sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(s) \right| \\
& + M||x-y|| \sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(s)|
\end{aligned}$$

Z powyższego oszacowania dochodzimy do:

$$||(Lx)(t) - (Ly)(s)|| \leqslant M||x||\overline{\omega}(\varepsilon) + AM\varepsilon,$$

gdzie symbol $\overline{\omega} = \overline{\omega}(\varepsilon)$ oznacza moduł ciągłości ciągu $\left(\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)\right)$ na przedziale I_1. Stąd wyciągamy wniosek, że operator L jest ciągły na zbiorze $I_1 \times c_0^\beta$. Bezpośrednią konsekwencją jest konkluzja, że operator g jest ciągły na zbiorze $I_1 \times c_0^\beta$.

Teraz, wybierzmy liczbę r w taki sam sposób jak w dowodzie Twierdzenia 6.8. Ponadto, weźmy niepusty podzbiór X kuli $B(x_0, r)$. Następnie argumentując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.8 i stosując oszacowanie (6.28), otrzymujemy:

$$\chi(g(t, X)) \leqslant MA\chi(X),$$

gdzie χ jest miarą niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c_0^β wyrażoną wzorem (3.26). Na koniec, stosując Twierdzenie 4.3, kończymy dowód. □

Uwaga 6.11. Zauważmy, że dowód Twierdzenia 6.10 pozostanie niezmieniony, jeśli w założeniu (ii") zamiast wymogu, że funkcje $a_{nn_i}(t)$ są niemalejące na przedziale I_1 zażądamy, żeby funkcje $a_{nn_i}(t)$ były nierosnące na I_1.

Podany poniżej przykład ilustruje wynik zawarty w Twierdzeniu 6.10.

Przykład 6.12. Rozważmy nieskończony, semiliniowy, górnie przekątniowy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{x_1}{1+x_1^2}, \\ x_2' = tx_2 + 2\frac{x_1+x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \\ x_3' = \frac{t^2}{2!}x_3 + \frac{t^3}{3!}x_4 + 3\frac{x_2+x_3}{1+x_2^2+x_3^2}, \\ x_4' = \frac{t^3}{3!}x_4 + \frac{t^4}{4!}x_5 + 4\frac{x_3+x_4}{1+x_3^2+x_4^2}, \\ x_5' = \frac{t^4}{4!}x_5 + \frac{t^5}{5!}x_6 + \frac{t^6}{6!}x_7 + 5\frac{x_4+x_5}{1+x_4^2+x_5^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}'(= x_{2k-1}') = \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}x_{2k-1} + \cdots + \frac{t^{3k-3}}{(3k-3)!}x_{3k-3} \\ \qquad\qquad +(2k-1)\frac{x_{2k-2}+x_{2k-1}}{1+x_{2k-2}^2+x_{2k-1}^2}, \\ x_n'(= x_{2k}') = \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}x_{2k} + \cdots + \frac{t^{3k-2}}{(3k-2)!}x_{3k-1} \\ \qquad\qquad +2k\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{1+x_{2k-1}^2+x_{2k}^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \end{cases} \tag{6.30}$$

Ponadto przyjmiemy również, że spełnione są następujące warunki początkowe:

$$x_n(0) = n^2 \tag{6.31}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$.

Zauważmy, że problem (6.30)–(6.31) jest szczególnym przypadkiem problemu (6.20)–(6.21) rozważanego w Twierdzeniu 6.10. W istocie, nieskończony układ równań różniczkowych (6.30) jest górnie przekątniowy a funkcje $a_{nn_i}(t)$ występujące w (6.30) są postaci:

$$a_{nn_i}(t) = \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}$$

dla $n_i = n, n+1, ..., \frac{3}{2}n - 1$ (jeśli n jest parzyste) lub $n_i = n, n+1, ..., 3\left[\frac{n}{2}\right]$ (jeśli n jest nieparzyste). Zauważmy, że funkcje $a_{nn_i}(t)$ są jednakowo ciągłe na przedziale $I_1 = [0, T_1]$ ponieważ mamy:

$$a'_{nn_i}(t) = \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \leqslant e^{T_1}$$

dla $n = 1, 2, ..., i = 1, 2, ..., k_n$ i $t \in I_1$. W efekcie spełnione jest założenie (i).

Ponadto, zauważmy że

$$\sum_{i=1}^{k_n} |a_{nn_i}(t)| \leqslant 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \leqslant e^t$$

dla $t \in I_1$. To oznacza, że założenie (ii') jest spełnione z $A = e^{T_1}$.
Co więcej, jest oczywiste, że funkcje $a_{nn_i}(t)$ są niemalejące na przedziale I_1. Ponadto, dla każdego ustalonego n mamy:

$$\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{k_n-1}}{(k_n-1)!}.$$

To implikuje, że

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)\right)' \leqslant e^{T_1}.$$

Stąd mamy, że funkcje $\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą $L = e^{T_1}$. Na podstawie tego otrzymujemy, że ciąg $\left(\sum_{i=1}^{k_n} a_{nn_i}(t)\right)$ jest jednakowo ciągły na przedziale I_1. A zatem spełnione jest założenie (ii").

W dalszej części weźmy ciąg temperujący postaci $\beta = (\beta_n) = \left(\frac{1}{n^3}\right)$. Wtedy ciąg początkowy $(x_0^n) = (n^2)$ należy do przestrzeni c_0^β i to stwierdzenie pokazuje, że spełnione jest założenie (iii).
Podobnie jak w podrozdziale wcześniejszym, nie jest trudno sprawdzić że funkcje:

$$f_n(t, x) = f_n(t, x_1, x_2, ...) = n\frac{x_{n-1} + x_n}{1 + x_{n-1}^2 + x_n^2}$$

$(n = 2, 3, ...)$ są ciągłe na zbiorze $I_1 \times c_0^\beta$. Dodatkowo, mamy że $|f_n(t, x)| \leqslant n$. A zatem wnioskujemy, że spełnione są założenia (iv) i (v), gdzie $p_n = n$, ponieważ $\beta_n p_n = \frac{1}{n^2} \to 0$.

Biorąc pod uwagę to, że $n_{k_n} = \frac{3}{2}n - 1$ dla n parzystych i $n_{k_n} = 3\left[\frac{n}{2}\right]$ dla n nieparzystych, otrzymujemy:

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}} = \left(\frac{\frac{3}{2}n - 1}{n}\right)^3 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n}\right)^3 \leqslant \frac{27}{8}$$

jeśli n jest parzyste. Z drugiej strony, dla n nieparzystych, mamy:

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n_{k_n}}} = \left(\frac{3\left[\frac{n}{2}\right]}{n}\right)^3 \leqslant \left(\frac{\frac{3}{2}n}{n}\right)^3 = \frac{27}{8}.$$

Widzimy więc, że spełnione jest założenie (vi) z $M = 27/8$.

Z powyższego argumentowania i Twierdzenia 6.10 otrzymujemy, że problem (6.30)–(6.31) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ w przestrzeni c_0^β określone na odpowiednim przedziale I_1.

6.3 Twierdzenie egzystencjalne dla zaburzonego układu przekątniowego w przestrzeni ciągów temperowanych c^β

W tym podrozdziale będziemy zajmowali się istnieniem rozwiązań nieskończonego, zaburzonego, przekątniowego układu równań różniczkowych w przestrzeni ciągów temperowanych c^β.
Rozważmy zatem nieskończony, zaburzony przekątniowy układ równań różniczkowych mającym postać:

$$x_n' = a_n(t)x_n + g_n(t, x_1, x_2, \dots) \tag{6.32}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0, \tag{6.33}$$

dla $n = 1, 2, \dots$ i $t \in I = [0, T]$. Problem (6.32)–(6.33) będzie rozważany w przestrzeni ciągowej c^β, gdzie $\beta = (\beta_n)$ jest ciągiem temperującym, tzn. ciąg (β_n) jest nierosnący i ma dodatnie wyrazy.

Nieskończony układ równań różniczkowych (6.32)–(6.33) zawiera, jako szczególny przypadek, układy rozważane w teorii zbiorów neuronowych (por. [16, str. 86-87] i [35]). Wspomnijmy także, że układ (6.32)–(6.33) był badany w [10]. Wynik dotyczący istnienia rozwiązania problemu (6.32)–(6.33), który zaprezentujemy tutaj, uogólnia zasadniczo wyniki uzyskane w wyżej cytowanych pracach, tj. w [10, 35] i w monografii [16]. W naszych rozważaniach będziemy wykorzystywali miarę niezwartości μ_2^β w przestrzeni c^β zdefiniowaną wzorem (3.27).

Problem (6.32)–(6.33) będzie badany przy następujących założeniach:

(i) $x_0 = (x_n^0) \in c^\beta$;

(ii) Odwzorowanie $g = (g_1, g_2, \dots)$ działa ze zbioru $I \times c^\beta$ w c^β i jest ciągłe na $I \times c^\beta$;

(iii) Istnieje ciąg (p_n) taki, że $\beta_n p_n \to 0$ gdy $n \to \infty$ oraz taki, że

$$|g_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant p_n$$

dla $t \in I$, $x = (x_n) \in c^\beta$ oraz dla $n = 1, 2, \dots$.

(iv) Funkcje $a_n(t)$ są ciągłe na I i ciąg $(a_n(t))$ jednostajnie zbieżny na I (do funkcji $a = a(t)$).

Zauważmy, że na podstawie narzuconych założeń ciąg $(a_n(t))$ jest wspólnie ograniczony na I. Stąd wynika, że stała:

$$A = \sup\{a_n(t) : t \in I, n = 1, 2, \dots\}$$

jest skończona.

Teraz możemy sformułować nasz wynik.

Twierdzenie 6.13. *Niech będą spełnione założenia* (i)–(iv). *Jeśli $AT < 1$, to wtedy problem* (6.32)–(6.33) *ma rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ na przedziale I takie, że $x(t) \in c^\beta$ dla każdego $t \in I$.*

Dowód. Na początku, dla $t \in I$ i $x = (x_n) \in c^\beta$ oznaczmy:

$$f_n(t, x) = a_n(t)x_n + g_n(t, x),$$
$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots),$$

gdzie n jest dowolnie ustaloną, naturalną liczbą. Następnie, ustalmy dowolnie naturalne liczby m, n. Nie tracąc ogólności możemy założyć, że $m < n$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned}
&|\beta_n f_n(t, x) - \beta_m f_m(t, x)| \\
&\quad \leqslant |\beta_n a_n(t)x_n - \beta_m a_m(t)x_m| + |\beta_n g_n(t, x) - \beta_m g_m(t, x)| \\
&\quad \leqslant |\beta_n a_n(t)x_n - \beta_m a_n(t)x_m| + |\beta_m a_n(t)x_m - \beta_m a_m(t)x_m| \\
&\qquad + \beta_n|g_n(t, x)| + \beta_m|g_m(t, x)| \\
&\quad \leqslant |a_n(t)||\beta_n x_n - \beta_m x_m| + \beta_m|x_m||a_n(t) - a_m(t)| + \beta_n p_n + \beta_m p_m.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Na podstawie nałożonych założeń wnioskujemy, że $(\beta_k x_k)$ jest ciągiem Cauchy'ego. To samo stwierdzenie jest również prawdziwe dla ciągu funkcyjnego $(a_k(t))$.

Co więcej mamy, że $\beta_n p_n \to 0$ gdy $n \to \infty$. Biorąc pod uwagę wyżej ustalone fakty, z oszacowania (6.34) wnioskujemy, że $(\beta_n f_n(t, x))$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z tego wynika, że $(f_n(t, x)) \in c^\beta$.

Następnie zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}, t \in I$ i dla ustalonego $x \in c^\beta$, mamy:

$$\begin{aligned} |\beta_n f_n(t,x)| &\leqslant |\beta_n a_n(t) x_n| + |\beta_n g_n(t,x)| \\ &\leqslant |a_n(t)|\beta_n|x_n| + \beta_n p_n \leqslant A\|x\| + P, \end{aligned} \tag{6.35}$$

gdzie $P = \sup\{\beta_n p_n : n = 1, 2 \dots\}$ i symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni c^β (por. podrozdział 3.3.). Oczywiście $P < \infty$. Na podstawie oszacowania (6.35) mamy:

$$\|f(t,x)\| \leqslant A\|x\| + P. \tag{6.36}$$

Teraz, rozważmy odwzorowanie $f(t,x)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$, gdzie r jest wzięte zgodnie z Twierdzeniem 4.3, tzn.

$$r = \frac{(A+P)T\|x_0\|}{1 - AT}.$$

W celu udowodnienia ciągłości odwzorowania $f(t,x)$ ustalmy dowolne $t \in I$ i $x \in B(x_0, r)$. Następnie, wybierzmy dowolne $s \in I$ i $y \in B(x_0, r)$. Wtedy, na podstawie przyjętych założeń, mamy:

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(s,y)\| &= \sup\Big\{|\beta_n f_n(t,x) - \beta_n f_n(s,y)| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\beta_n |a_n(t) x_n - a_n(s) y_n| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\quad + \sup\Big\{\beta_n |g_n(t,x) - g_n(s,y)| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\beta_n \Big[|a_n(t) x_n - a_n(s) x_n| + |a_n(s) x_n - a_n(s) y_n|\Big] : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\quad + \sup\Big\{\beta_n |g_n(t,x) - g_n(s,y)| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\beta_n |x_n||a_n(t) - a_n(s)| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\quad + \sup\Big\{|a_n(s)|\beta_n |x_n - y_n| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\quad + \sup\Big\{\beta_n |g_n(t,x) - g_n(s,y)| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\leqslant (\|x_0\| + r) \sup\Big\{|a_n(t) - a_n(s)| : n = 1, 2, \dots\Big\} \\ &\quad + A\|x - y\| + \|g(t,x) - g(s,y)\|. \end{aligned}$$

Stąd, biorąc pod uwagę fakt, że funkcje ciągu $(a_n(t))$ są jednakowo ciągłe na przedziale I i odwzorowanie g jest ciągłe w punkcie (t,x) wnioskujemy, że odwzorowanie f jest ciągłe w (t,x). Na podstawie dowolności t i x mamy, że f jest ciągła na zbiorze $I \times B(x_0, r)$.

Teraz, weźmy niepusty podzbiór X kuli $B(x_0, r)$. Ustalmy $t \in I$ i $x = (x_n) \in X$. Wtedy, na podstawie (6.34), dla dowolnie ustalonych liczb naturalnych m, n otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &|\beta_n f_n(t,x) - \beta_m f_m(t,x)| \\ &\qquad \leqslant |a_n(t)||\beta_n x_n - \beta_m x_m| + \|x\||a_n(t) - a_m(t)| + \beta_n p_n + \beta_m p_m. \end{aligned}$$

Stąd, biorąc pod uwagę założenia, otrzymujemy oszacowanie:

$$\mu_2^\beta(f(t,X)) \leqslant a(t)\mu_2^\beta(X), \tag{6.37}$$

gdzie (jak wspomnieliśmy już wcześniej) μ_2^β jest miarą niezwartości w przestrzeni c^β zdefiniowaną przez wzór (3.27). Ostatecznie, łącząc oszacowania (6.36) i (6.37), na podstawie Twierdzenia 4.3 wnioskujemy, że problem (6.32)–(6.33) ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni c^β. Dowód jest zakończony. □

Teraz przedstawimy przykład ilustrujący nasze rozważania.

Przykład 6.14. Rozważmy nieskończony, zaburzony przekątniowy układ równań różniczkowych:

$$x_n' = \Big(n\sin\frac{t}{n}\Big)x_n + \operatorname{arc\,tg}(x_n + x_{n+1}) \tag{6.38}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = n+1 \tag{6.39}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ i dla $t \in I = [0, T]$, gdzie T jest ustaloną dodatnią liczbą taką, że $T \leqslant \frac{\pi}{2}$. Wartość T zostanie później oszacowana precyzyjnie.

Zauważmy, że problem (6.38)–(6.39) jest szczególnym przypadkiem problemu (6.32) - (6.33) jeśli położymy $a_n(t) = n\sin\frac{t}{n}$, $g_n(t, x_1, x_2, \ldots) = \operatorname{arc\,tg}(x_n + x_{n+1})$ i jeśli przyjmiemy ciąg temperujący $\beta = (\beta_n) = (\frac{1}{n})$.

Pokażemy, że spełnione są założenia Twierdzenia 6.13. W tym celu zauważmy, że ciąg funkcyjny $(a_n(t))$ składa się z funkcji ciągłych na przedziale I i jest jednostajnie zbieżny na I do funkcji $a(t) = t,\ t \in I$. A zatem ciąg $(a_n(t))$ spełnia założenie (iv).

Następnie, mamy:

$$|g_n(t, x_1, x_2, \ldots)| = |\operatorname{arc\,tg}(x_n + x_{n+1})| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

dla $n = 1, 2 \ldots$. Stąd, przyjmując $p_n = \frac{\pi}{2}$ widzimy, że założenie (iii) jest spełnione. Podobnie dowodzimy, że jest spełnione założenie (i).

Aby sprawdzić założenie (ii) ustalmy dowolne $x, y \in c^\beta$, $x = (x_k)$, $y = (y_k)$. Wtedy, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\beta_n|g_n(t, x_1, x_2, \ldots) - g_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \\
&\quad = \frac{1}{n}|\operatorname{arc\,tg}(x_n + x_{n+1}) - \operatorname{arc\,tg}(y_n + y_{n+1})| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{n}|x_n + x_{n+1} - y_n - y_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n}|x_n - y_n| + \frac{1}{n}|x_{n+1} - y_{n+1}| \\
&\quad \leqslant \frac{n+1}{n}\Big(\frac{1}{n+1}|x_n - y_n| + \frac{1}{n+1}|x_{n+1} - y_{n+1}|\Big) \\
&\quad \leqslant 2\Big(\frac{1}{n}|x_n - y_n| + \frac{1}{n+1}|x_{n+1} - y_{n+1}|\Big).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Następnie, na podstawie (6.40), dla dowolnie ustalonych $t, s \in I$ i $x, y \in c^\beta$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\|g(t,x) - g(s,y)\| &= \sup\left\{\frac{1}{n}|g_n(t,x) - g_n(s,y)| : n = 1,2,\dots\right\} \\
&\leqslant \sup\left\{2\Big(\frac{1}{n}|x_n - y_n| + \frac{1}{n+1}|x_{n+1} - y_{n+1}|\Big) : n = 1,2\dots\right\} \\
&\leqslant 2\sup\left\{\frac{1}{n}|x_n - y_n| : n = 1,2\dots\right\} + 2\sup\left\{\frac{1}{n+1}|x_{n+1} - y_{n+1}| : n = 1,2\dots\right\} \\
&\leqslant 4\|x - y\|,
\end{aligned}$$

gdzie symbol $\|\cdot\|$oznacza normę w przestrzeni c^β. W ten sposób pokazaliśmy, że odwzorowanie g jest ciągłe na zbiorze $I \times c^\beta$ (a nawet spełnia warunek Lipschitza). To oznacza, że odwzorowanie g spełnia założenia (ii).

Ostatecznie, stosując standardowe metody analizy matematycznej, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
A &= \sup\left\{|a_n(t)| : t \in [0,T], n = 1,2,\dots\right\} \\
&= \sup\left\{n \sin\frac{t}{n} : t \in [0,T], n = 1,2,\dots\right\} \leqslant \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Stąd, jeśli weźmiemy $T < \frac{2}{\pi}$, to stosując Twierdzenie 6.13 wnioskujemy, że problem (6.38)–(6.39) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ takie, że $(x_n(t)) \in c^\beta$ dla każdego $t \in [0,T]$.

6.4 Twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonego układów równań różniczkowych w przestrzeni ciągów temperowanych l_∞^β

Teraz będziemy prowadzili rozważania w przestrzeni l_∞^β opisanej szczegółowo w podrozdziale 3.3. Zakładamy, że ciąg temperujący $\beta = (\beta_n)$ składa się tylko z dodatnich wyrazów i jest nierosnący. Będziemy korzystali z miary niezwartości μ_3^β zdefiniowanej na rodzinie $\mathfrak{M}_{l_\infty^\beta}$ wzorem (3.30). Dla uproszczenia oznaczeń, oznaczymy ją tutaj symbolem μ. Przypomnijmy, że dla $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty^\beta}$ mamy:

$$\mu(X) = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n^\beta,$$

gdzie $X_n^\beta = \{\beta_n x_n : x = (x_i) \in X\}$. Równoważnie, wzór ten może być zapisany w bardziej wygodny sposób:

$$\mu(X) = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} \beta_n X_n, \tag{6.41}$$

gdzie $X_n = \{x_n : x = (x_i) \in X\}$. Własności miary μ szczegółowo opisaliśmy w podrozdziale 3.3

A zatem, rozważmy zaburzony semiliniowy dolnie przekątniowy nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x'_n = \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)x_j + g_n(t, x_1, x_2, \dots) \tag{6.42}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{6.43}$$

dla $n = 1, 2\dots$ i dla $t \in I = [0, T]$.
W tym podrozdziale przyjmiemy, że ciąg (k_n) pojawiający się w (6.42) jest taki, że $1 \leqslant k_n \leqslant n$ dla $n = 1, 2, \dots$ i $k_n \to \infty$ gdy $n \to \infty$.

Warto tutaj wspomnieć, że nieskończony układ równań różniczkowych postaci (6.42) do tej pory był badany bardzo rzadko. (por. [7, 13]).

Dla naszych przyszłych rozważań oznaczmy przez $f = f(t, x)$ odwzorowanie zdefiniowane na zbiorze $I \times l_\infty^\beta$ w następujący sposób:

$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots),$$

gdzie:

$$f_n(t, x) = f_n(t, x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)x_j + g_n(t, x_1, x_2, \dots)$$

dla $n = 1, 2, \dots$. Co więcej, zdefiniujmy odwzorowanie $g(t, x)$ na zbiorze $I \times l_\infty^\beta$ w następujący sposób :

$$g(t, x) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \dots).$$

Teraz sformujemy założenia, pod którymi będzie badany problem (6.42)–(6.43).

(i) $x_0 = (x_n^0) \in l_\infty^\beta$;

(ii) Odwzorowanie g działa ze zbioru $I \times l_\infty^\beta$ w l_∞^β oraz jest jednostajnie ciągłe na $I \times l_\infty^\beta$;

(iii) Istnieje ciąg (p_n) o tej własności, że $\beta_n p_n \to 0$ gdy $n \to \infty$ i taki, że

$$|g_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant p_n$$

dla $t \in I, x = (x_n) \in l_\infty^\beta$ oraz $n = 1, 2\dots$;

(iv) Funkcje $a_{nj} : I \to \mathbb{R}$ $(j = k_n, k_n + 1, \dots, n,\ n = 1, 2\dots)$ są ciągłe i niemalejące na I. Co więcej, zakładamy że ciąg funkcyjny $(A_n(t))$ jest jednakowo ciągły na przedziale I i ciąg $(\bar{A}_n(t))$ jest wspólnie ograniczony na I, gdzie

$$A_n(t) = \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t), \quad \bar{A}_n(t) = \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)|$$

dla $n = 1, 2, \dots$.

Pamiętając o założeniu (iv), dla naszych przyszłych celów, definiujemy stałą:

$$A = \sup\{\bar{A}_n(t) : t \in I, n = 1, 2, \dots\}.$$

Na podstawie założenia (iv) otrzymujemy, że $A < \infty$.

Teraz możemy sformułować następujący rezultat dotyczący problemu (6.42)–(6.43).

Twierdzenie 6.15. *Załóżmy, że spełnione są założenia* (i)–(iv) *i* $AT < 1$. *Wtedy problem* (6.42)–(6.43) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie* $x(t) = (x_k(t))$ *na przedziale* $I = [0, T]$ *takie, że* $x(t) \in l_\infty^\beta$ *dla* $t \in I$.

Dowód. Weźmy dowolny element $x = (x_k) \in l_\infty^\beta$. Następnie ustalmy $t \in I$ i $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, na podstawie narzuconych założeń, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\beta_n f_n(t,x)| &\leqslant \beta_n \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)||x_j| + \beta_n |g_n(t,x)| \\ &\leqslant \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)|\beta_j|x_j| + \beta_n p_n \\ &\leqslant \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)| \max\{\beta_j|x_j| : j = k_n, k_n+1, \dots, n\} + \beta_n p_n \\ &\leqslant \bar{A}_n(t) \sup\{\beta_j|x_j| : j = 1, 2, \dots\} + \beta_n p_n \leqslant A\|x\| + P, \end{aligned} \tag{6.44}$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni l_∞^β i $P = \sup\{\beta_n p_n : n = 1, 2 \dots\}$. Oczywiście $P < \infty$ na podstawie założenia (iii). Stąd wnioskujemy, że f odwzorowuje zbiór $I \times l_\infty^\beta$ w l_∞^β.

Następnie rozważmy odwzorowanie $f(t,x)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$, gdzie r jest wybrane zgodnie z Twierdzeniem 4.3, tzn. $r = \frac{(A+P)T\|x_0\|}{1-AT}$. Na początku pokażemy, że f jest jednostajnie ciągła na $I \times B(x_0, r)$. Na podstawie założenia (ii) wystarczy pokazać, że operator liniowy L zdefiniowany równością:

$$(Lx)(t) = ((L_1x)(t), (L_2x)(t), \dots),$$

gdzie

$$(L_nx)(t) = \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)x_j$$

dla $n = 1, 2, \dots$, jest ciągły na zbiorze $I \times l_\infty^\beta$. W tym celu ustalmy dowolne $x, y \in l_\infty^\beta$, $t, s \in I$ i $n \in \mathbb{N}$. Nie tracąc ogólności możemy przyjąć, że $s < t$. Wtedy, pamiętając o przyjętych założeniach, dostajemy:

$$
\begin{aligned}
\beta_n|(L_nx)(t)-(L_ny)(s)| &= \beta_n\Big|\sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(s)y_j\Big| \\
&\leqslant \beta_n\Big|\sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)y_j\Big| + \beta_n\Big|\sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)y_j - \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(s)y_j\Big| \\
&\leqslant \beta_n \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)||x_j-y_j| + \beta_n \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)-a_{nj}(s)||y_j| \\
&\leqslant \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)|\beta_j|x_j-y_j| + \sum_{j=k_n}^{n} \big(a_{nj}(t)-a_{nj}(s)\big)\beta_j|y_j| \\
&\leqslant \bar{A}_n(t)\sup\Big\{\beta_j|x_j-y_j| : j=1,2,\dots\Big\} \\
&\quad + \sum_{j=k_n}^{n} \big(a_{nj}(t)-a_{nj}(s)\big)\sup\{\beta_j|y_j| : j=1,2,\dots\} \\
&\leqslant A\|x-y\| + \Big(\sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t) - \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(s)\Big)\|y\| \\
&\leqslant A\|x-y\| + \big(A_n(t)-A_n(s)\big)\|y\|.
\end{aligned}
$$

Stąd otrzymujemy oszacowanie:

$$
\|(Lx)(t)-(Ly)(s)\| \leqslant A\|x-y\| + \sup\Big\{A_n(t)-A_n(s) : n=1,2\dots\Big\}\|y\|.
$$

Z tego oszacowania i z założenia (iv) wnioskujemy, że operator L jest ciągły na zbiorze $I\times l_\infty^\beta$. Oczywiście L jest operatorem liniowym, zatem jest jednostajnie ciągły.

Następnie, weźmy niepusty podzbiór X kuli $B(x_0,r)$. Ustalmy dowolnie $x,y\in X$ i $t\in I$. Wtedy, rozumując podobnie jak wcześniej, dla ustalonego n naturalnego, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\beta_n|f_n(t,x)-f_n(t,y)| &\leqslant \beta_n\Big|\sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)y_j\Big| + \beta_n|g_n(t,x)-g_n(t,y)| \\
&\leqslant \beta_n\Big|\sum_{j=k_n}^{n} a_{nj}(t)(x_j-y_j)\Big| + \beta_n|g_n(t,x)| + \beta_n|g_n(t,y)| \\
&\leqslant \beta_n\sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)||x_j-y_j)| + 2\beta_np_n \\
&\leqslant \sum_{j=k_n}^{n} |a_{nj}(t)|\beta_j|x_j-y_j)| + 2\beta_np_n \\
&\leqslant \bar{A}_n(t)\sup\Big\{\beta_j|x_j-y_j| : j=k_n,k_n+1,\dots\Big\} + 2\beta_np_n \\
&\leqslant \bar{A}_n(t)\sup\Big\{\beta_j \operatorname{diam} X_j : j=k_n,k_n+1,\dots\Big\} + 2\beta_np_n.
\end{aligned}
$$

Stąd otrzymujemy oszacowanie:

$$
\operatorname{diam}\beta_nf_n(t,X) \leqslant \bar{A}_n(t)\sup\Big\{\beta_j\operatorname{diam}X_j : j\geqslant k_n\Big\} + 2\beta_np_n.
$$

Z powyższego oszacowania, na podstawie założeń (iii) i (iv) mamy:

$$\mu(f(t,X)) \leqslant A\mu(X), \tag{6.45}$$

gdzie μ jest miarą niezwartości, zdefiniowaną przez (6.41). Ostatecznie, łącząc (6.44) i (6.45), na podstawie Twierdzenia 4.3, kończymy dowód. □

Uwaga 6.16. Zauważmy, że zamiast założenia, że funkcje a_{nj} ($j = k_n, k_n + 1, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) są niemalejące na I narzuconego w (iv) możemy założyć, że te funkcje są nierosnące na I.

Teraz zaprezentujemy przykład pokazujący zastosowanie Twierdzenia 6.15.

Przykład 6.17. Rozważmy zaburzony semiliniowy dolnie przekątniowy nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x_n' = \sum_{j=k_n}^{n} t^{n+j} x_j + \sin(x_n + x_{n+1} + x_{n+2}) \tag{6.46}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = n, \tag{6.47}$$

dla $n = 1, 2 \dots$ i dla $t \in I = [0, T]$, gdzie $T < 1$. Co więcej, załóżmy że (k_n) jest niemalejącym ciągiem liczb naturalnych takim, że $1 \leqslant k_n \leqslant n$ i $k_n \to \infty$ gdy $n \to \infty$.

Zauważmy, że problem (6.46)–(6.47) jest szczególnym przypadkiem problemu (6.42)–(6.43), gdzie $a_{nj}(t) = t^{n+j}$ dla $j = k_n, k_n + 1, \dots, n$ i dla $n = 1, 2, \dots$. Oprócz tego, funkcja g_n jest postaci:

$$g_n(t, x_1, x_2, \dots) = \sin(x_n + x_{n+1} + x_{n+2})$$

dla $n = 1, 2, \dots$. Nieskończony układ (6.46) z warunkiem początkowym (6.47) spełnia założenia Twierdzenia 6.15, jeśli weźmiemy ciąg temperujący (β_n) postaci $\beta_n = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Rzeczywiście, mamy że $(x_0^n) = (n) \in l_\infty^\beta$. To oznacza, że założenie (i) jest spełnione.

Teraz, weźmy dowolny element $x = (x_k) \in l_\infty^\beta$ i liczbę $t \in I$. Wtedy, dla ustalonej liczby naturalnej n mamy:

$$\begin{aligned}
\beta_n |g_n(t, x_1, x_2, \dots)| &= \frac{1}{n} |\sin(x_n + x_{n+1} + x_{n+2})| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\Big(|x_n| + |x_{n+1}| + |x_{n+2}|\Big) \\
&= \frac{n+2}{n}\Big(\frac{1}{n+2}|x_n| + \frac{1}{n+2}|x_{n+1}| + \frac{1}{n+2}|x_{n+2}|\Big) \\
&\leqslant 3\Big(\frac{1}{n}|x_n| + \frac{1}{n+1}|x_{n+1}| + \frac{1}{n+2}|x_{n+2}|\Big) \leqslant 3\|x\|,
\end{aligned}$$

gdzie symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni l_∞^β. Stąd otrzymujemy:

$$\|g(t,x)\| \leqslant 3\|x\|,$$

co pokazuje, że g działa ze zbioru $I \times l_\infty^\beta$ w l_∞^β.

Następnie, ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_\infty^\beta, y = (y_1, y_2, \dots) \in l_\infty^\beta$ i $t, s \in I$. Wtedy otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\beta_n|g_n(t,x_1,x_2,\dots) - g_n(s,y_1,y_2,\dots)| \\
&= \frac{1}{n}|\sin(x_n + x_{n+1} + x_{n+2}) - \sin(y_n + y_{n+1} + y_{n+2})| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\Big(|x_n - y_n| + |x_{n+1} - y_{n+1}| + |x_{n+2} - y_{n+2}|\Big) \\
&= \frac{n+2}{n}\Big(\frac{1}{n+2}|x_n - y_n| + \frac{1}{n+2}|x_{n+1} - y_{n+1}| + \frac{1}{n+2}|x_{n+2} - y_{n+2}|\Big) \\
&\leqslant 3\Big(\frac{1}{n}|x_n - y_n| + \frac{1}{n+1}|x_{n+1} - y_{n+1}| + \frac{1}{n+2}|x_{n+2} - y_{n+2}|\Big) \\
&\leqslant 3\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Stąd mamy oszacowanie:

$$\|g(t,x) - g(s,y)\| \leqslant 3\|x - y\|,$$

co pokazuje, że odwzorowanie g jest jednostajnie ciągłe na zbiorze $I \times l_\infty^\beta$. A zatem odwzorowanie g spełnia założenie (ii) Twierdzenia 6.15.

Dalej, dostajemy:

$$|g_n(t,x_1,x_2,\dots)| = |\sin(x_n + x_{n+1} + x_{n+2})| \leqslant 1,$$

co pokazuje, że spełnione jest założenie (iii) z $p_n = 1$ dla $n = 1, 2 \dots$. Aby pokazać, że spełnione jest założenie (iv) zauważmy, że

$$A_n(t) = \bar{A}_n(t) = t^{n+k_n}\frac{1 - t^{n-k_n+1}}{1-t}$$

dla $t \in I = [0, T]$ i dla $n = 1, 2, \dots$. Używając standardowych metod analizy, można pokazać, że ciąg $(A_n(t))$ jest jednakowo ciągły na I. Co więcej, mamy:

$$A_n(t) = \bar{A}_n(t) \leqslant A \leqslant \frac{1}{1-T}$$

dla każdego $t \in I$. Podsumowując, widzimy, że spełnione są założenia Twierdzenia 6.15. Dlatego nieskończony układ (6.46) z warunkiem początkowym (6.47) ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni l_∞^β.

Literatura

[1] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Operator Theory: Advances and Applications 55, Birkhäuser, Basel 1992.

[2] A. Ambrosetti, *Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 39 (1967), 349–361.

[3] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math. , 88 (1968) pp. 35–46

[4] J. M. Ayerbe Tolendo, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory,* Birkhäuser, Basel 1997.

[5] J. Banaś, *Applications of measures of noncompactness to various problems*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1987.

[6] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.

[7] J. Banaś, M. Krajewska, *On solutions of semilinear infinite systems of differential equations*, Dyn. Syst. Appl. 22 (2013) 301–316.

[8] J. Banaś, M. Krajewska, *Existence of solutions for infinite systems of differential equations in spaces of tempered sequences*, Electronic J. Differential Equations 2017 (2017) 1–28.

[9] J. Banaś, M. Krajewska, *On solutions of semilinear upper diagonal infinite systems of differential equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, Volume 12, Number 2, (2019), 189—202.

[10] J. Banaś, M. Lecko, *Solvability of infinite systems of differential equations in Banach sequence spaces*, J. Comput. Appl. Math. 137 (2001) 363–375.

[11] J. Banaś, A. Martinon, *Some properties of the Hausdorff distance in metric spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 42 (1990) 511–516.

[12] J. Banaś, A. Martinon, *Measures of noncompactness in Banach sequence spaces*, Math. Slovaca 42 (1992) 497–503.

[13] J. Banaś, M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi 2014.

[14] R. Bellman, *Methods in Nonlinear Analysis II*, Academic Press, New York 1973.

[15] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw–Hill, New York 1955.

[16] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Lect. Notes in Math. 596, Springer, Berlin 1977.

[17] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin 1985.

[18] J. Dieudonné, *Deux exemples singuliérs d'équations différentielles*, Acta Sci. Math. Szeged 12 (1950), 38–40 (Leopoldo Fejér et Frederico Riesz LXX annus natis dedicatus, pars B).

[19] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory*, Springer, Berlin 2011.

[20] K. Goebel, W. Rzymowski, *An existance theorem for the equation $x' = f(t, x)$ in Banach space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 367–370.

[21] L. S. Goldenštein, I. T. Gohberg i A. S. Markus, *Investigation of some properties of bounded linear operators in connection with their q-norms*, Učen. Zap. Kishinevsk, Un-ta 29 (1957), 29–36.

[22] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, J. Wiley and Sons, (1964).

[23] H. P. Heinz, *On the behaviour of measures of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector valued functions*, Nonlin. Anal. 7 (1983) 1351–1371.

[24] G. Herzog, *On Lipschitz conditions for ordinary differential equations in Fréchet spaces*, Czech. Math. J. 48 (1998) 95–103.

[25] E. Hille, *Pathology of infinite systems of linear first order differential equations with constant coefficients*, Ann. Mat. Pura. Appl. 55 (1961) 135–144.

[26] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces*, Israel J. Math. 17 (1974), 219—230.

[27] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, (1930).

[28] J. Kisyński, *Sur les équations différentielles dans les espaces de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), 381–385.

[29] K. Kuratowski; *Sur les espaces completes*, Fund. Math. 15 (1930) 301–309.

[30] K. Kuratowski; *Topology I*, Academic Press – PWN. New York, London, Warszawa 1966.

[31] R. Lemmert, *On ordinary differential equations in locally convex spaces*, Nonlin. Anal. 10 (1986) 1385–1390.

[32] H. Mönch, G.F. von Harten, *On the Cauchy problem for ordinary differential equations in Banach spaces*, Arch. Math. 39 (1982) 153–160.

[33] M. Mursaleen, *Application of meqsure of noncompactness to infinite system of differential equation*, Can. Math. Bull 56 (2013), 388–394.

[34] M. Mursaleen, A. Alotaibi, *Infinite systems of differential equations in some BK spaces*, Abstr. Appl. Anal., vol. 2012, Article ID 863484, 20 pages.

[35] M. N. Oguztöreli, *On the neural equations of Cowan and Stein*, Utilitas Math. 2 (1972) 305-315.

[36] C. Olech, *On the existence and uniqueness of solutions of an ordinary differential equation in the case of Banach space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci Math. Astrono. Phys. 8 (1960), 301–305.

[37] D. O'Regan, M. Meehan, *Existence Theory for Nonlinear Integral and Integro-differential Equations*, Mathematics and its Applications 445, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.

[38] A. Pelczar, *Wstęp do Teorii Równań Różniczkowych część II: Elementy Jakościowej Teorii Równań Różniczkowych*, PWN, Warszawa 1989.

[39] A. Pelczar, J. Szarski, *Wstęp do Teorii Równań Różniczkowych, część I: Wstęp do Teorii Równań Zwyczajnych i Równań Cząstkowych Pierwszego Rzędu*, PWN, Warszawa 1987.

[40] K. P. Persidskii, *Countable Systems of Differential Equations and Stability of Their Solutions*, Izv. Akad. Nauk. Kazach. SSR 7 (1959) 52–71.

[41] K. P. Persidskii, *Countable Systems of Differential Equations and Stability of Their Solutions III: Fundamental Theorems on Stability of Solutions of Countable Many Differential Equations*, Izv. Akad. Nauk. Kazach. SSR 9 (1961), 11–34.

[42] K. P. Persidskii, *Infinite Systems of Differential Equations*, Izdat. Nauka Kazach. SSR, Alma–Ata, Siffer. Equat. Nonlinear Spaces, 1976.

[43] V. Rakočević, *Measures of noncompactness and some applications*, Filomat (Niš), 12:2, (1998), 87 – 120.

[44] W. Rzymowski, *On the existance of solution of the equation $x' = f(t, x)$ in a Banach space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), 295–299.

[45] B. N. Sadovskii, *Differential equations with uniformly continuous right hand side*, Voronezh Gos. Univ, Trudy Nauchn.-Issled, Inst. Mat. VGU Vyp, 1 (1970), 128–136.

[46] S. Szufla, *Measures of non-compactness and ordinary differentinl equations in Bnnach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), 831–835.

[47] S. Szufla, *On the existence of solutions of differential equations in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. 30 (1982) 507–515.

[48] A. Voigt, *Line method approximations to the Cauchy problem for nonlinear parabolic differential equations*, Numer. Math. 23 (1974) 23–36.

[49] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*, Springer, Berlin 1970.

[50] T. Ważewski, *Sur l'existence et l'unicité des intégrales des équations différentielles ordinaires au cas de l'espace de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 301–305.

[51] O. A. Zautykov, *Countable systems of differential equations and their applications*, Diff. Uravn. 1 (1965) 162–170.

[52] O. A. Zautykov, K. G. Valeev, *Infinite Systems of Differential Equations*, Izdat. "Nauka" Kazach. SSR, Alma - Ata 1974.