ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA

VOL. XL, 6 SECTIO A 1986

Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg
Sektion Mathematik

E. HOY

Über die Approximation Einiger Extremaler Quasikonformer Abbildungen

O aproksymacji pewnych ekstremalnych odwzorowań quasikonforemnych

Об апроксимации некоторых экстремальных квазиконформных отображений

1. Einleitung. Bekanntlich gilt bei einer schlichten Q-quasikonformen Abbildung $f(z)$ von einem Rechteck $R = \{z : z=x+iy ,\ 0<x<1 ,\ 0<y<h\}$ $(h>0)$ auf ein weiteres Rechteck $\mathcal{R} = \{w : w=u+iv ,\ 0<u<1 ,\ 0<v<\mathfrak{h}$ $(\mathfrak{h}>0)$, wobei $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(ih)=i\mathfrak{h}$ und $f(1+ih) = 1+i\mathfrak{h}$ sein möge, stets

$$(1) \qquad \frac{h}{Q} \leqslant \mathfrak{h} \leqslant h\cdot Q \ .$$

Diese Ungleichung (siehe [2]) war ein Ausgangspunkt für die Entwicklung der Theorie der quasikonformen Abbildungen.

(1) läßt auch einige Verallgemeinerungen zu. Sei $p_0(z) \geqslant 1$ eine meßbare beschränkte Funktion. Im folgenden soll eine quasikonforme Abbildung $f(z)$ in einem Gebiet $p_0(z)$-quasikonform genannt werden, wenn dort überall

$$|f_{\bar z}(z)| \leqslant \frac{p_0(z)-1}{p_0(z)+1}\,|f_z(z)|$$

gilt. Desweiteren seien die betrachteten Abbildungen stets schlicht.

Wie zuvor könnte man nach einer unteren bzw. oberen Schranke für $\mathfrak{h}$ fragen, wenn nun $p_0(z)$-quasikonforme Abbildungen von R auf $\mathfrak{R}$ betrachtet werden. Die Lösung solcher Extremalprobleme ist bereits in [11] und [12] angeregt worden. In [4] wurde erstmalig ein solches Extremalproblem gelöst. Dort ist der folgende Satz bewiesen worden.

Satz. Unter allen $p_0(z)$-quasikonformen Abbildungen $f(z)$ von R auf $\mathfrak{R}$ mit $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(ih)=i\mathfrak{h}$ und $f(1+ih)=1+i\mathfrak{h}$ gibt es genau eine, für die die Größe $\mathfrak{h}$ minimal bzw. maximal ausfällt. Im Fall des Minimalwertes für $\mathfrak{h}$ erfüllt die Extremalfunktion die Differentialgleichung

$$w_{\bar z}(z) = \frac{p_0(z)-1}{p_0(z)+1}\,\overline{w_z(z)} \quad , \tag{2}$$

und im Fall des Maximalwertes gilt für die Extremalfunktion

$$w_{\bar z}(z) = -\frac{p_0(z)-1}{p_0(z)+1}\,\overline{w_z(z)} \quad . \tag{2'}$$

Sei im folgenden $\mathfrak{h}^*$ der Maximalwert von $\mathfrak{h}$, wenn $p_0(z)$-quasikonforme Abbildungen $f(z)$ von R auf $\mathfrak{R}$ betrachtet werden, wobei wieder $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(ih)=i\mathfrak{h}$ und $f(1+ih)=1+i\mathfrak{h}$ gelten möge. Für die Größe $\mathfrak{h}^*$ - in [13] auch p_0-Modul von R genannt - soll wie in [13] eine eine Möglichkeit zur Berechnung angegeben werden. Dazu setzt man $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ und beginnt - angeregt durch [6] - mit den Ansätzen

$$u(x,y) = x + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{nm}\sin(n\pi x)\cos(m\pi\tfrac{y}{h}) + r_1(x,y)$$

$$v(x,y) = \frac{\mathfrak{h}^*}{h}y + \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} b_{nm}\cos(n\pi x)\sin(m\pi\tfrac{y}{h}) + r_2(x,y) \quad .$$

Die Größe h^* soll durch Zahlen $\underline{h}_{N,M}$ bzw. $\overline{h}_{N,M}$ von unten bzw. oben angenähert werden. Dazu benutzt man zwei Variationscharakterisierungen für die Lösungen des zu (2') äquivalenten Gleichungssystems

$$
(3)\qquad \begin{aligned} p_0(x,y)\, u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ -p_0(x,y)\, u_y(x,y) &= v_x(x,y) \end{aligned}
$$

(siehe [7] und [13]). Zugleich ergeben sich hierbei auch Näherungslösungen $u_{N,M}(x,y) = u(x,y) - r_1(x,y)$ und $v_{N,M}(x,y) = v(x,y) - r_2(x,y)$ für $u(x,y)$ und $v(x,y)$. Die Lösungen $u(x,y)$ bzw. $v(x,y)$ von (3) (bzw. (2')) lassen sich u. a. als elektrostatische Potentiale deuten. In diesem Zusammenhang sei auf [3] und [5] verwiesen.

2. Berechnung von $u(x,y)$. In diesem Abschnitt soll zunächst die erste der zuvor erwähnten Variationscharakterisierungen genannt werden (siehe [13]).

Sei $\Phi(x,y)$ eine im Abschluß von R stetige Funktion mit $\Phi(0,y) \equiv \Phi(1,y) - 1 \equiv 0$ für $y \in [0,h]$, die über R quadratisch integrierbare Sobolevableitungen besitzt. Das Funktional

$$
\iint_R p_0(x,y)\, \left[\nabla\Phi(x,y)\right]^2 dxdy = \iint_R p_0(x,y) \left[\Phi_x^2(x,y) + \Phi_y^2(x,y)\right] dxdy
$$

erreicht sein Minimum genau dann, wenn

$$
\begin{aligned} p_0(x,y)\, \Phi_x(x,y) &= \Psi_y(x,y) \\ -p_0(x,y)\, \Phi_y(x,y) &= \Psi_x(x,y) \end{aligned}
$$

gilt. Der Minimalwert ist der p_0-Modul von R, d. h. die Größe h^*.

Diese Variationscharakterisierung kann für die Berechnung von $u(x,y)$ aus (3) genutzt werden. Dazu bestimmt man eine Funktion $u_{N,M}(x,y)$ mit

$$(4) \qquad u_{N,M}(x,y) = x + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{nm} \sin(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})$$

derart, daß

$$\iint_R p_o(x,y) \left[\nabla u_{N,M}(x,y)\right]^2 dxdy$$

minimal ausfällt. Damit ergibt sich für die a_{nm} aus (4) ein lineares Gleichungssystem der Form

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{M} c_{klnm}\, a_{nm} + d_{kl} = 0$$

$(k=1,2,\dots,N\ ,\ l=0,1,\dots,M)$ mit

$$c_{klnm} = \pi^2 \iint_R p_o(x,y) \Big[kn\cos(k\pi x)\cos(l\pi \tfrac{y}{h})\cos(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h}) +$$

$$(6) \qquad + \frac{lm}{h^2} \sin(k\pi x)\sin(l\pi \tfrac{y}{h})\sin(n\pi x)\sin(m\pi \tfrac{y}{h})\Big]\, dxdy \quad ,$$

$$d_{kl} = \pi k \iint_R p_o(x,y)\, \cos(k\pi x)\cos(l\pi \tfrac{y}{h})\, dxdy$$

$(k,n=1,2,\dots N\ ,\ l,m=0,1,\dots,M)$.

Eine obere Schranke $E_{N,M}$ für h^* kann nun mittels

$$(7) \qquad E_{N,M} = \iint_R p_o(x,y) \left[\nabla u_{N,M}(x,y)\right]^2 dxdy$$

berechnet werden. Aus (5) folgt daher

$$(7') \qquad E_{N,M} = \iint_R p_o(x,y)dxdy + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{nm}\, d_{nm} \quad .$$

Das lineare Gleichungssystem (5) ist für jedes $N \geqslant 1$ und jedes $M \geqslant 0$ eindeutig lösbar, da die Funktionen $\sin(n\pi x)\cos(m\pi \frac{y}{h})$ $(n=1,2,\dots,N\ ,\ m=0,1,\dots,M)$ in R linear unabhängig sind. Bei dieser Betrachtungsweise ergeben sich zwei Fragen.

1. Konvergiert die Folge der Näherungslösungen $u_{N,M}(x,y)$ aus (4) gegen $u(x,y)$?

2. Strebt $E_{N,M}$ $(N=1,2,\dots\ ,\ M=0,1,\dots)$ gegen $\mathcal{h}^*$?

Diese beiden Fragen werden im folgenden Abschnitt behandelt.

3. Konvergenzbeweise. Im Hinblick auf einige Verallgemeinerungen soll nun ein Hilfssatz bewiesen werden.

Lemma. Sei $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ eine schlichte quasikonforme Abbildung von $R = \{z : z=x+iy\ ,\ 0<x<1\ ,\ 0<y<h\}$ $(h>0)$ auf $\mathcal{R} = \{W : W=U+iV\ ,\ 0<U<1\ ,\ 0<V<\mathcal{h}\}$ $(\mathcal{h}>0)$ mit $W(0)=0$, $W(1)=1$, $W(ih)=i\mathcal{h}$ und $W(1+ih)=1+i\mathcal{h}$. Zu jedem $\varepsilon>0$ existieren natürliche Zahlen N $(\geqslant 1)$, M $(\geqslant 0)$ und reelle Zahlen A_{nm} $(n=1,2,\dots,N\ ,\ m=0,1,\dots,M)$ mit

$$\iint\limits_R \left\{\nabla\left[U(x,y) - x - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M} A_{nm}\sin(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})\right]\right\}^2 dxdy < \varepsilon\ .$$

Beweis. Man geht zuerst von der Fourierreihe für $U(x,y)-x$ aus. Analog wie in [6] gilt

$$(8)\qquad U(x,y) - x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}\sin(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})$$

mit

$$A_{nm} = \frac{4\lambda_m}{h}\iint\limits_R \left[U(x,y)-x\right]\sin(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})\, dxdy\quad ,$$

wobei

$$\lambda_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } m=0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

sei. Die Reihe in (8) konvergiert bekanntlich im $L^2(R)$. Nun soll gezeigt werden, daß die Zahlen A_{nm} in einem engen Zusammenhang mit den Fourierkoeffizienten von $U_x(x,y) - 1$ bzw. $U_y(x,y)$ stehen. Aus (9) folgt mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\frac{4}{h} \iint_R \left[U(x,y)-x\right] \sin(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})\, dxdy =$$

$$= \frac{4}{nh\pi} \iint_R \left[U_x(x,y)-1\right] \cos(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})\, dxdy -$$

$$- \frac{4}{nh\pi} \oint_{\partial R} \left[U(x,y)-x\right] \cos(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})\, dy \quad .$$

Da das Randintegral wegen $U(0,y) \equiv U(1,y)-1 \equiv 0$ verschwindet, ergibt sich für $n \geqslant 1$ und $m \geqslant 0$

$$(10) \qquad A_{nm} = \frac{4\cdot\lambda_m}{nh\pi} \iint_R \left[U_x(x,y)-1\right] \cos(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})\, dxdy \quad .$$

Auf analoge Art folgt für $n,m \geqslant 1$

$$(11) \qquad A_{nm} = - \frac{4\cdot\lambda_m}{m\pi} \iint_R U_y(x,y) \sin(n\pi x)\sin(m\pi \tfrac{y}{h})\, dxdy \quad .$$

Da $U_x(x,y)-1$ und $U_y(x,y)$ über R quadratisch integrierbar sind, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen N ($\geqslant 1$) und M ($\geqslant 0$) mit

$$\iint_R \Big|U_x(x,y)-1-\pi \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{M} nA_{nm} \cos(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})\Big|^2 dxdy < \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$\iint_R \left| U_y(x,y) + \frac{\pi}{h} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{M} mA_{nm} \sin(n\pi x)\sin(m\pi \tfrac{y}{h}) \right|^2 dxdy < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Damit ist gezeigt, daß sich $u(x,y)$ aus (3) durch Linearkombinationen von $\sin(n\pi x)\cos(m\pi y/h)$ beliebig genau approximieren läßt, wobei die Güte der Näherung durch das Dirichletintegral gemessen wird. Aus dem Lemma entnimmt man, daß dann auch (für $U(x,y)=u(x,y)$)

$$(12) \quad \iint_R p_o(x,y)\left\{\nabla\left[u(x,y)-x-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M} A_{nm}\sin(n\pi x)\cos(m\pi\tfrac{y}{h})\right]\right\}^2 dxdy <$$

$$< \varepsilon\cdot\sup_R p_o(x,y)$$

gilt. Da für $\Phi(x,y) = u(x,y)$ das Funktional

$$\iint_R p_o(x,y)\left[\nabla\Phi(x,y)\right]^2 dxdy$$

minimal wird (siehe Abschnitt 2), ergibt sich für das Integral in (12)

$$\iint_R p_o(x,y)\left\{\nabla\left[x + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M} A_{nm}\sin(n\pi x)\cos(m\pi\tfrac{y}{h})\right]\right\}^2 dxdy -$$

$$- \iint_R p_o(x,y)\left[\nabla u(x,y)\right]^2 dxdy$$

(vgl. mit [1], S.128 ff., und [13], Abschnitt 5).

Aus (12) folgt damit für $u_{N,M}(x,y)$ aus (4)

$$(13) \quad \iint_R p_o(x,y)\left[\nabla u_{N,M}(x,y)\right]^2 dxdy - \iint_R p_o(x,y)\left[\nabla u(x,y)\right]^2 dxdy <$$

$$< \varepsilon\cdot\sup_R p_o(x,y) .$$

Formt man die Differenz der Integrale um, so erhält man wieder wegen der Minimaleigenschaft von $u(x,y)$

$$\iint_R p_0(x,y)\left\{\nabla\left[u(x,y)-u_{N,M}(x,y)\right]\right\}^2 dxdy < \varepsilon\cdot\sup_R p_0(x,y) \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{N,M\to\infty} \iint_R \left\{\nabla\left[u(x,y) - u_{N,M}(x,y)\right]\right\}^2 dxdy = 0 \quad .$$

Wegen (13) gilt auch (siehe (7))

$$\lim_{N,M\to\infty} \bar{h}_{N,M} = h^* \quad .$$

Zusammenfassend hat man folgenden Satz.

Satz 1. Sei $u(x,y)+iv(x,y)$ eine schlichte quasikonforme Abbildung von R auf $\mathcal{R}$ mit

$$p_0(x,y)u_x(x,y) = v_y(x,y)$$

$$-p_0(x,y)u_y(x,y) = v_x(x,y)$$

und $u(0,y) \equiv u(1,y)-1 \equiv 0$ $(y\in[0,h])$ bzw. $v(x,0) \equiv v(x,h)-h^* \equiv 0$ $(x\in[0,1])$, so läßt sich $u(x,y)$ durch Funktionen $u_{N,M}(x,y)$ mit

$$u_{N,M}(x,y) = x + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{nm}\sin(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})$$

approximieren, wobei die von N und M abhängigen Zahlen a_{nm} dem linearen Gleichungssystem (5) genügen und

$$\lim_{N,M\to\infty} \iint_R \left\{\nabla\left[u(x,y) - u_{N,M}(x,y)\right]\right\}^2 dxdy = 0$$

gilt. Desweiteren konvergieren die Zahlen $\bar{h}_{N,M}$, gegeben durch

$$E_{N,M} = \iint_R p_o(x,y)\left[\nabla u_{N,M}(x,y)\right]^2 dxdy \ ,$$

monoton fallend gegen den p_o-Modul λ^* von R .

4. Bestimmung von v(x,y). Wie in [13] (vgl. auch [7]) wird nun $v(x,y)/\lambda^*$ aus (3) durch eine Extremaleigenschaft charakterisiert.

Sei $\Psi(x,y)$ eine im Abschluß von R stetige Funktion mit $\Psi(x,0) \equiv \Psi(x,h)-1 \equiv 0$ für $x \in [0,1]$, die über R quadratisch integrierbare Sobolevableitungen besitzt. Das Funktional

$$(14) \qquad \iint_R \frac{1}{p_o(x,y)} \left[\nabla\Psi(x,y)\right]^2 dxdy$$

erreicht sein Minimum genau dann, wenn

$$\frac{1}{p_o(x,y)} \Psi_y(x,y) = \Phi_x(x,y)$$

$$-\frac{1}{p_o(x,y)} \Psi_x(x,y) = \Phi_y(x,y)$$

gilt. Der Minimalwert von (14) ist das Reziproke des p_o-Moduls von R , d.h. $1/\lambda^*$.

Auf diese Art kann man $v(x,y)/\lambda^*$ näherungsweise berechnen und außerdem untere Schranken für λ^* bestimmen. Mit Hilfe des Funktionals in (14) kann man die Extremaleigenschaft von $u(x,y)+iv(x,y)$ aus (3) auf einem anderen Wege beweisen als in [4]. Sei nämlich F(z) eine $p_o(z)$-quasikonforme Abbildung von R auf $\{w : w=u+iv \ , 0 < u < 1/\lambda \ , 0 < v < 1\}$ mit $F(0)=0$, $F(1)=1/\lambda$, $F(hi)=i$ und $F(1+hi)=1/\lambda+i$, so folgt mit $V(x,y) = \mathrm{Im}[F(z)]$

$$(15) \qquad \frac{1}{p_o(x,y)}\left[\nabla V(x,y)\right]^2 = \frac{1}{p_o(x,y)}\left|F_{\bar z}(z) - \overline{F_z(z)}\right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{p_0(x,y)}\left(|F_{\bar z}(z)|+|F_z(z)|\right)^2 \leq |F_z(z)|^2-|F_{\bar z}(z)|^2 \quad .$$

Letzteres ergibt sich aus der p_0-Quasikonformität von $F(z)$. Integriert man (15) über R, so folgt

$$\frac{1}{h^*} \leq \iint_R \frac{1}{p_0(x,y)}\left[\nabla V(x,y)\right]^2 dxdy \leq \iint_R \left[|F_z(z)|^2-|F_{\bar z}(z)|^2\right]dxdy = \frac{1}{h} \, ,$$

d. h. $h \leq h^*$, also die zu beweisende Extremaleigenschaft.

5. Bemerkungen.

1. In [6] ist die Bestimmung von $u(x,y)$ und $v(x,y)$ aus (3) auf die Lösung eines unendlichen linearen Gleichungssystems zurückgeführt worden. Die Funktionen $u(x,y)-x$ und $v(x,y)-h^*y/h$ werden dabei in Fourierreihen entwickelt, wie auch hier in (8) getan wurde. Da in [6] die Berechnung des minimalen Wertes für h dargestellt wird, gibt es kaum Möglichkeiten, die dort und hier erhaltenen linearen Gleichungssysteme zu vergleichen. Eine gewisse Ähnlichkeit der Resultate beider Arbeiten ist für den Fall, daß $p_0(z)$ wenig von einer Konstanten abweicht, zu erkennen. Berechnet man für diesen Fall die Werte $\bar h_{N,M}$ und $\underline{h}_{N,M}$ und führt noch den Grenzübergang $N,M\to\infty$ aus, so folgt

$$\text{(16)} \qquad \lim_{N,M\to\infty} \bar h_{N,M} = p^*h - \frac{\varepsilon^2 h^3}{4p^*}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^2 d^2_{nm}}{\lambda_m(n^2h^2+m^2)} + O(\varepsilon^3)$$

und

$$\text{(17)} \qquad \lim_{N,M\to\infty} \underline{h}_{N,M} = p^*h - \frac{\varepsilon^2 h^3}{4p^*}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^2 d^2_{nm}}{\lambda_m(n^2h^2+m^2)} + O(\varepsilon^3) \quad .$$

Dabei möge

$$p_0(z) = p^* + \varepsilon q(z) \quad , \quad p^* = \frac{1}{h}\iint_R p_0(z)dxdy \quad ,$$

$$d_{nm} = \frac{4\lambda_m}{h} \iint_R q(z)\cos(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})dxdy$$

$(n=1,2,\ldots \;, \; m=0,1,\ldots)$

und

$$\lambda_m = \begin{cases} 1/2 & \text{für } m=0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

gelten. Aus (16) und (17) folgt nun (vgl. mit [6], (19))

$$(18) \qquad \lambda^* = p^* h - \frac{\varepsilon^2 h^3}{4p^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^2 d_{nm}^2}{\lambda_m(n^2h^2+m^2)} + O(\varepsilon^3) \quad .$$

2. Die Variationscharakterisierungen für $u(x,y)$ bzw. $v(x,y)$ sind auch dann noch möglich, wenn das in R gleichmäßig elliptische System

$$(19) \qquad \begin{aligned} v_x(x,y) &= -b(x,y)u_x(x,y) - d(x,y)u_y(x,y) \\ v_y(x,y) &= a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) \end{aligned}$$

mit $ad-b^2 \geq const > 0$ und $a > 0$ in R betrachtet wird. Dabei seien $a(x,y)$, $b(x,y)$ und $d(x,y)$ beschränkte meßbare Funktionen.

Zur Charakterisierung von $u(x,y)$ betrachtet man

$$\iint_R (a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + d\Phi_y^2)\, dxdy$$

und zur Charakterisierung von $v(x,y)$

$$\iint_R (\frac{a}{\Delta}\Psi_x^2 + \frac{2b}{\Delta}\Psi_x\Psi_y + \frac{d}{\Delta}\Psi_y^2)\, dxdy \quad ,$$

wobei $\Delta = ad-b^2$ gesetzt wird. Extremalprobleme, deren Lösungen (19) genügen, treten z. B. dann auf, wenn für die Abbildungen von R auf $\tilde{R}$ in einer Teilmenge von R das Erfülltsein von (19) gefordert wird und sonst $p_0(z)$-Quasikonformität vorliegen möge (siehe z. B. [10], Kap. VI), oder wenn wie in [8] für alle $z \in R$ Dilatationsbeschränkungen der Form

$$\left| \frac{F_{\bar{z}}(z)}{F_z(z)} - \mu(z) \right| \leqslant \varrho(z)$$

mit

$$\mu = \frac{d-a-2ib}{ad-b^2+a+d+1}$$

und

$$\varrho = \frac{ad-b^2-1}{ad-b^2+a+d+1}$$

erhoben werden. Im zweiten Fall muß man noch $ad-b^2 \geqslant 1$ voraussetzen. Für die Anwendung von (19) in der Elektrostatik sei auf [ ], Kap. VI, § 2, verwiesen.

6. Koeffizientenbedingungen für quasikonforme Abbildungen auf ein Rechteck. Ausgehend vom Lemma im Abschnitt 3 sollen nun Bedingungen an die Fourierkoeffizienten (siehe (8)) von $p_0(z)$--quasikonformen Abbildungen hergeleitet werden. Es sei $U(x,y)+$ $+iV(x,y)$ eine stetige Abbildung von R, wobei wieder

$$U(x,y) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \sin(n\pi x)\cos(m\pi \tfrac{y}{h})$$

(20)

$$V(x,y) = ay + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos(n\pi x)\sin(m\pi \tfrac{y}{h})$$

gelten möge und R auf das Rechteck $\tilde{R} = \{w : w=u+iv\ ,\ 0<u<1\ ,\ 0<v<ah\}$ abgebildet wird. Die Zahl a sei positiv und zunächst nicht weiter eingeschränkt. Welche Bedingungen sind nun an a, A_{nm} und B_{nm} $(n,m=0,1,\ldots)$ zu stellen, wenn $U(x,y)+iV(x,y)$ sogar $p_0(z)$-quasikonform ist ? Bekanntlich läßt sich die

$p_o(z)$-Quasikonformität von $U(x,y)+iV(x,y)$ in R auch mittels

(21) $$U_x^2 + U_y^2 + V_x^2 + V_y^2 \leqslant (p_o + \frac{1}{p_o})(U_xV_y - U_yV_x)$$

für alle $(x,y) \in R$ definieren. Integriert man (21) über R, so erhält man für $p_o(z) \equiv Q$ den folgenden Satz.

Satz 2. Für jede Q-quasikonforme Abbildung $F(z) = U(x,y)+$ $+iV(x,y)$ von R auf $\tilde{R}$, für die $U(0,y) \equiv U(1,y)-1 \equiv 0$ $(y \in [0,h])$ und $V(x,0) \equiv V(x,h)-ah \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ gelten möge, ergibt sich aus (20)

(22) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^2 \frac{n^2h^2+m^2}{\lambda_m} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}^2 \frac{n^2h^2+m^2}{\lambda_n} \leqslant \frac{4h^2}{Q\pi^2}\left[(Q^2+1)a-Q(a^2+1)\right]$$

mit

$$\lambda_m = \begin{cases} 1/2 & \text{für } m=0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Das Gleichheitszeichen steht in (22) nur für solche Abbildungen $F(z)$ mit

$$|F_{\bar{z}}(z)| = \frac{Q-1}{Q+1}|F_z(z)|$$

in R.

Aus Satz 2 erhält man leicht die bekannte Ungleichung aus der Einleitung

$$\frac{1}{Q} \leqslant a \leqslant Q .$$

Ist $p_o(z)$ keine Konstante, so folgen aus (21) und

$$(p_oU_x - V_y)^2 + (p_oU_y + V_x)^2 \geqslant 0$$

die Ungleichungen

(23) $$\iint_R \frac{[\nabla V(x,y)]^2}{p_o(x,y)}\,dxdy \leqslant \iint_R p_o(x,y)\,[\nabla U(x,y)]^2\,dxdy$$

und

$$(24)\qquad ah \geqslant \frac{1}{1+\tilde{Q}^2} \iint_R p_0(x,y)\left[\nabla U(x,y)\right]^2 dxdy + \frac{\tilde{Q}^2}{1+\tilde{Q}^2} \iint_R \frac{\left[\nabla V(x,y)\right]^2}{p_0(x,y)} dxdy.$$

Dabei ist $\tilde{Q}$ eine obere Schranke für $p_0(z)$ in R. Das Gleichheitszeichen in (23) und (24) steht für Lösungen von (3). Entwickelt man $U(x,y)$ und $V(x,y)$ – ausgehend von (20) – nach Orthonormalsystemen, so daß die Integrale in (23) und (24) in Summen von Quadraten dieser neuen Koeffizienten übergehen, so erhält man ähnliche Ungleichungen wie die Flächensätze in [9]. Darüber hinaus folgt aus (24) für $\tilde{Q} \to \infty$ (vgl. auch mit (15))

$$(25)\qquad ah \geqslant \iint_R \frac{\left[\nabla V(x,y)\right]^2}{p_0(x,y)} dxdy$$

oder

$$(26)\qquad ah \geqslant \sum_{\vartheta=1}^{\infty} c_\vartheta^2 .$$

Für den Koeffizienten bei y in (20) gilt nun

$$a = \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sigma_\vartheta c_\vartheta$$

mit gewissen festen σ_ϑ $(\vartheta = 1,2,\ldots)$, die quadratisch summierbar sind. Aus (26) ergibt sich daher nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$(27)\qquad h \cdot \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sigma_\vartheta^2 \geqslant a .$$

Das ist eine weitere Möglichkeit zur scharfen Abschätzung von a nach oben.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Gaier, D., Konstruktive Methoden der konformen Abbildung, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.

[2] Grötzsch, H., Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes, Leipz. Ber., Math.-phys. Kl. 80 (1928), 503-507.

[3] Kruschkal, S.L., Kühnau, R., Quasikonforme Abbildungen - neue Methoden und Anwendungen, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 54, Leipzig, 1983.
In russ. Sprache: Nauka, Novosibirsk 1984.

[4] Kühnau, R., Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung, Wiss. Z. d. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe 13(1964), 35-40.

[5] Kühnau, R., Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme in inhomogenen Medien, J. Reine Angew. Math. 231(1968), 101-113.

[6] Kühnau, R., Darstellung quasikonformer Abbildungen durch Fouriersche Reihen, Publ. Math. 18(1971), 119-127.

[7] Kühnau, R., Zur Moduländerung eines Vierecks bei quasikonformer Abbildung, Math. Nachr. 93(1979), 249-258.

[8] Kühnau, R., Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. II, Ann. Polon. Math. (1983), 105-110.

[9] Milin, I.M., Schlichte Funktionen und orthonormierte Systeme, Nauka, Moskva 1971 (Russ.). Engl. Übers.: Univalent Functions and Orthonormal Systems, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1977.

[10] Renelt, H., Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 46, Leipzig 1982.

[11] Teichmüller, O., Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl., Jg. 1939, Nr. 22(1940), 1-197.

[12] Volkovyskiĭ, L.I., Über die konformen Moduln und quasikonforme Abbildungen, in: Einige Probleme der Mathematik und Mechanik, Novosibirsk 1961, hier S. 65-68 (Russ.).

[13] Weisel, J., Numerische Ermittlung quasikonformer Abbildungen mit finiten Elementen, Num. Math. 35(1980), 201-222.

Summary. Quasiconformal mappings from one rectangle to another rectangle can be approximated by using Fourier series. In this way it is possible to approximate solutions of

$$p_o(x,y)u_x(x,y) = v_y(x,y)$$
$$-p_o(x,y)u_y(x,y) = v_x(x,y)$$

and quasiconformal modules of rectangles. Finally, some necessary conditions for the Fourier coefficients of quasiconformal mappings are given.

STRESZCZENIE

Odwzorowania quasikonforemne prostokąta na prostokąt można aproksymować za pomocą szeregów Fouriera. Prowadzi to do przybliżonego rozwiązania układu $p_o u_x = v_y$, $-p_o u_y = v_x$ oraz do oszacowania modułów czworoboków. Podano pewne warunki konieczne na współczynniki Fouriera odwzorowania quasikonforemnego.

РЕЗЮМЕ

Квазиконформные отображения прямоугольника на прямоугольник могут быть апроксимированы через ряды Фурие. Это дает возможность приближенного решения системы $p_o u_x = v_y$, $-p_o u_y = v_x$ или получения оценки модуля четыреугольника. Получены были также конечные условия коэффициенты Фурие квазиконформных отображений.