ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN–POLONIA
VOL. XXXIV, 3 SECTIO A 1980

Instytut Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej

Halina FELIŃSKA

Sur quelques problèmes d'invariance

O niektórych problemach niezmienniczości

О некоторых проблемах инварянтности

Dans ce travail nous allons prendre en considération le problème d'invariance du champ invariant des produits scalaires élevé et ensuite nous construirons la connexion invariante sur une certain espace homogène.

1. Soit (G, M, τ) l'espace homogène, où $\tau: G \times M \to M$, $\dim M = n$. Sur cet space est donné le champ invariant g des produits scalaires, c'est-à-dire le champ satisfaisant la condition:

$$g(j^1_{t|0}\alpha(t), j^1_{t|0}\beta(t)) = g(j^1_{t|0}\tau(a, \alpha(t)), j^1_{t|0}\tau(a, \beta(t))),$$

pour chaque $a \in G$, où α et β sont des parametrisations des courbes sur la variété M, tels que $\alpha(0) = \beta(0)$.

Soit T_xM l'espace vectoriel tangence à M dans le point x. Désignons par $TM := \bigcup_{x \in M} T_xM$ et considerons l'espace homogène (G, TM, κ), où $\kappa: G \times TM \to TM$ definit une action du G sur TM, à savoir : si $\gamma: R \to M$ est une parametrisation d'une courbe telle que $v = j^1_0\,\gamma$, nous avons $\kappa(a, v) := j^1_{t|0}\tau(a, \gamma(t))$. Sur cet espace est donné le champ h des produits pseudoscalaires qui est l'élévation complète du champ g, défini de la façon suivante :

Prenons dans TM des courbes aux descriptions Φ et Ψ et soit $\Phi(0) = \Psi(0)$. Parce que $\Phi(t), \Psi(t) \in TM$, alors

$$\Phi(t) = j^1_{s|0}\,\phi(s, t)$$

$$\Psi(t) = j^1_{s|0}\,\psi(s, t)$$

où, pour chaque t dans un certain voisinage de 0, $s \to \phi(s, t)$ et $s \to \psi(s, t)$ sont des parametrisations des courbes sur la variété M, tels que $\phi(s, 0) = \psi(s, 0)$. Acceptons

$$h(j^1_{t|0}\Phi(t), j^1_{t|0}\Psi(t)) := (\frac{d}{dt}|_0 g(j^1_{s|0}\phi(s, t), j^1_{s|0}\psi(s, t))).$$

Le champ g ayant donné dans une carte locale, nous pouvons écrire les coordonnées matricielles locales du tenseur h :

$$[h_{AB}(x, y)] = \begin{bmatrix} y^k \partial_k g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{où } y \in T_x M \quad \begin{matrix} A, B = 1, \dots, 2n \\ i, j, k = 1, \dots, n \end{matrix}$$

regarde [2].

Théorème 1 : *Si g est un champ invariante des produits scalaires sur l'espace homogène (G, M, τ), alors l'élévation complète h du champ g est un champ invariante des produits pseudoscalaires sur l'espace homogène (G, TM, κ).*

Démonstration. Soient ξ et η des courbes dans le groupe G, tels que $\xi(0) = \eta(0) = 1_G$. Prenons les vecteurs $j^1_0\xi$ et $j^1_0\eta$. Ils génératent sur M les champs vectoriels

$$p \to j^1_{s|0}\tau(\xi(s), p)$$

$$p \to j^1_{s|0}\tau(\eta(s), p).$$

Les aplications

$$j^1_0\xi \to j^1_{s|0}\tau(\xi(s), p)$$

$$j^1_0\eta \to j^1_{s|0}\tau(\eta(s), p)$$

sont les homomorphismes de l'algèbre Lie du groupe G à l'algèbre Lie de champs vectoriels sur M.

Après, fixons le vecteur $j^1_0\alpha = v \in TM$, où α est le parametrisation de la courbe sur la variété M, $\alpha(0) = p$. Prenons les courbes sur TM qui ont les parametrisations respectivement ϕ et ψ :

$$t \to \phi(t) = j^1_{s|0}\tau(\xi(s), \alpha(t))$$

$$t \to \psi(t) = j^1_{s|0}\tau(\eta(s), \alpha(t))$$

Par conséquence à nos hypothèses, nous avons

$$\frac{d}{dt}|_0\,(g(j^1_s|_0\,\tau(\xi(s),\alpha(t)),j^1_s|_0\,\tau(\eta(s),\alpha(t))))=$$

$$=\frac{d}{dt}|_0\,(g(j^1_s|_0\,\tau(a\xi(s),\alpha(t)),j^1_s|_0\,\tau(a\eta(s),\alpha(t))))$$

pour $a\in G$ arbitraire.

Exprimons cela dans le système locale des coordonnées et utilisons le résultat dans la deuxième partie de la démonstration. Comptons

$$\frac{d}{dt}|_0\,(g_{|\alpha(t)}(j^1_s|_0\,\tau(\xi(s),\alpha(t)),j^1_s|_0\,\tau(\eta(s),\alpha(t)))=$$

$$=\frac{d}{dt}|_0\,(g_{ij}\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(\xi(s),\alpha(t))\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(\eta(s),\alpha(t)))=$$

$$=(\partial_v g_{ij})\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(\xi(s),\alpha(t))\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(\eta(s),\alpha(t))+$$

$$+g_{ij}\frac{d}{dt}|_0\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(\xi(s),\alpha(t))\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(\eta(s),\alpha(t))+$$

$$+g_{ij}\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(\xi(s),\alpha(t))\frac{d}{dt}|_0\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(\eta(s),\alpha(t))$$

et nous avons

$$(\frac{d}{dt}|_0(g_{|\alpha(t)}(\phi(t),\psi(t))))_{|m}=(\partial_v g_{ij})(\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(\xi(s),m))(\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(\eta(s),m))+$$

$$+g_{ij}\frac{d}{dt}|_0\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(\xi(s),\alpha(t))\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(\eta(s),m)+\tag{1}$$

$$+g_{ij}\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(\xi(s),m)\frac{d}{dt}|_0\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(\eta(s),\alpha(t)).$$

Par un calcul nous obtenirons encore

$$(\frac{d}{dt}|_0(g(j^1_s|_0\,\tau(a\xi(s),\alpha(t)),\ j^1_s|_0\,\tau(a\eta(s),\alpha(t)))))_{|\tau(a,\,m)}=$$

$$=(\partial_w g_{ij})(\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(a\xi(s),m))(\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(a\eta(s),m))+\tag{2}$$

$$+g_{ij}\frac{d}{dt}|_0\frac{d}{ds}|_0\,\tau^i(a\xi(s),\alpha(t))\frac{d}{ds}|_0\,\tau^j(a\eta(s),m)+$$

$$+ g_{ij}\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^i(a\xi(s), m)\frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^j(a\eta(s), \alpha(t))$$

où $w = j^1_t{}_{|0}\,\tau(a, \alpha(t))$.

Nous avons obtenu alors que des droites termes de (1) et (2) sont égales. Passons maintenant à la partie capitale de la démonstration. Prenons les courbes aux parametrisations $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\psi}$ sur TM:

$$s \to \widetilde{\phi}(s) = j^1_t{}_{|0}\,\tau(\xi(s), \alpha(t))$$

$$s \to \widetilde{\psi}(s) = j^1_t{}_{|0}\,\tau(\eta(s), \alpha(t)), \quad \widetilde{\phi}(0) = \widetilde{\psi}(0) = v.$$

où, comme précédemment,

$$\xi, \eta : R \to G \ \text{ et } \ \xi(0) = \eta(0) = 1_G$$

$$\alpha : R \to M \ \text{ et } \ \alpha(0) = m$$

Comptons

$$h_{|v}(j^1_s{}_{|0}\,\widetilde{\phi}(s), j^1_s{}_{|0}\,\widetilde{\psi}(s)) = (\partial_v g_{ij})\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^i(\xi(s), m)\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^j(\eta(s), m) +$$

$$+ g_{ij}\frac{d}{ds}\Big|_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 \tau^i(\xi(s), \alpha(t))\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^j(\eta(s), m) +$$

$$+ g_{ij}\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^i(\xi(s), m)\frac{d}{ds}\Big|_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 \tau^j(\eta(s), \alpha(t)).$$

Remarquons que

$$h_{|\kappa(a,\, v)}(j^1_s{}_{|0}\,\kappa(a, \widetilde{\phi}(s)), j^1_s{}_{|0}\,\kappa(a, \widetilde{\psi}(s))) =$$

$$= h_{|\kappa(a,\, v)}(j^1_s{}_{|0}\, j^1_t{}_{|0}\,\tau(a\xi(s), \alpha(t)), j^1_s{}_{|0}\, j^1_t{}_{|0}\,\tau(a\eta(s), \alpha(t))) =$$

$$= (\partial_w g_{ij})\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^i(a\xi(s), m)\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^j(a\eta(s), m) +$$

$$+ g_{ij}\frac{d}{ds}\Big|_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 \tau^i(a\xi(s), \alpha(t))\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^j(a\eta(s), m) +$$

$$+ g_{ij}\frac{d}{ds}\Big|_0 \tau^i(a\xi(s), m)\frac{d}{ds}\Big|_0 \frac{d}{dt}\Big|_0 \tau^j(a\eta(s), \alpha(t)).$$

Utilisant le résultat de la première partie de la démonstration, nous obtenons

$$h_{|v}(j^1_{s\,|0}\tilde{\phi}(s),\ j^1_{s\,|0}\tilde{\psi}(s)) = h_{|\kappa(a,\,v)}(j^1_{s\,|0}\kappa(a,\tilde{\phi}(s)),\ j^1_{s\,|0}\kappa(a,\tilde{\psi}(s))),$$

ce que signifie que le champ h est invariant.

2. Jusqu'à à présent nous avons consideré l'élévation complète du champ g. Prenons maintenant en considération le champ déformé h des produits pseudoscalaires. Acceptons maintenant

$$h(j^1_{t\,|0}\Phi(t),\ j^1_{t\,|0}\Psi(t)) = \frac{d}{ds}_{|0}\, g(j^1_{t\,|0}\phi(s,t),\ j^1_{t\,|0}\psi(s,t)) + b(j^1_{t\,|0}\phi(0,t),\ j^1_{t\,|0}\psi(0,t)),$$

où b est un certain champ tensoriel, symétrique sur (G, M, τ). La question intéressante pour nous sera: quelles déformations b admet-on pour que le champ déforme h soit invariante?

En profitant de ce que l'élévation complète g est invariante, nous obtenons l'égalité:

$$b(j^1_{t\,|0}\phi(0,t),\ j^1_{t\,|0}\psi(0,t)) = b(j^1_{t\,|0}\tau(a,\phi(0,t)),\ j^1_{t\,|0}\tau(a,\psi(0,t)))$$

pour $a \in G$ arbitraire. C'est équivalent à l'invariance du champ b sur (G, M, τ).

Nous obtenons alors:

Théorème 2. *Soit g un champ invariant des produits scalaires sur M et soit b le champ tensoriel invariant et symétrique sur l'espace homogène (G, M, τ). Alors le champ déformé h des produits pseudoscalaires étant l'élévation complète du champ g est invariant sur l'espace homogène (G, TM, κ).*

3. Nous allons nous occuper maintenant de la construction de la connexion invariante sur l'espace homogène (G, TM, κ), sur laquelle est donné le champ invariant h de produits pseudoscalaires que nous avons traîté dans la partie 1 et 2.

Soit $A : p \to A_p$ le champ des tensours d'ordre $\binom{1}{2}$ sur la variété TM. Nous avons localement:

$$A_p(-,-) = A_{(p)ij}{}^k e_k \oplus e^i_* \oplus e^j_*, \quad i, j, k = 1, .., 2n$$

où e_i, $i = 1, .., 2n$, est le champ locale des repères dans un certain voisinage U du point $p \in TM$ et e^i_*, $i = 1, .., 2n$, est un système des corepères conjugué avec e_i. Dans ces

$$A(v, w) = A_{(-)ij}{}^k v^i w^j e_k$$

notation ce que dand la suite du travail nous écrirons:

$$A(v, w) = A^k_{ij} v^i w^j e_k.$$

Fixons un champ v et prenons l'aplication linéaire

$$A(v, -) : w \to A(v, w)$$

$$A(v, -) := A^k_{ij} v^i e_k \oplus e^j_*,$$

où $A_{ij}^{k} v^{i}$ sont les coordonnées de cette aplication. L'aplication susmentionnée est équivalement définie par les fonctions matricielles

$$A_j^k(-) := A_{ij}^k \, e^i_{\bullet}$$

qui prennent des valeurs à l'algèbre Lie du groupe linéaire $GL(2n)$. Nous pouvons maintenant formuler:

Théorème 3. *Si h est un champ invariant des produits pseudoscalaires sur l'espace homogène (G, TM, κ), alors à chaque connexion linéaire compatible à ce produit existe un champ tensoriel A d'ordre $\binom{1}{2}$ sur TM, tels que les coefficients Γ_{qi}^{s} de cette connexion ont la forme:*

$$\Gamma_{qi}^{s} = \frac{1}{2}[h^{sj} \partial_q h_{ji} - h_{bi} h^{sk} A_{qk}^{b} + A_{qi}^{s}] \tag{3}$$

Démonstration. Nous trouverons tout d'abord la forme générale de coordonnées ω_i^s de la forme de connexion. La connexion que nous cherchons est équivalente au produit pseudoscalaire. Cette condition, par écrit aux coordonnées et par la transition aux formes a la forme

$$dh_{ij} = h_{is}\,\omega_j^s + h_{sj}\,\omega_i^s .$$

En multipliant cette identité par $\frac{1}{2} h^{lr}$ et en sommant à l'égard de i, nous obtenons

$$\frac{1}{2}(\delta_j^i \delta_s^r + h_{js} h^{ir})\omega_i^s = \frac{1}{2} h^{ri} dh_{ij} .$$

Nous régardons cette égalité que l'équation par rapport à ω_i^s. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution de cette équation est remplie parce que

$$\frac{1}{4}(\delta_p^j \delta_r^s - h_{pr} h^{js})(h^{ri} dh_{ij}) = 0 .$$

En vertu de théorème Obata [1], la solution générale a alors la forme

$$\omega_i^s = \frac{1}{2}[h^{sj} dh_{ji} + (\delta_b^s \delta_i^k - h_{bi} h^{sk}) A_k^b]$$

où le A_k^b est un quelconque forme linéaire prennant des valeurs à l'algèbre Lie du groupe linéaire $GL(2n)$. Alors les coefficients Γ_{qi}^{s} de telle connexion ont la forme:

$$\Gamma_{qi}^{s} = \frac{1}{2}[h^{sj} \partial_q h_{ji} + (\delta_b^s \delta_i^k - h_{bi} h^{sk}) A_{qk}^b] .$$

Les connexions que nous obtenons ne sont pas, en générale, invariantes.

Nous posons maintenant le problème suivant: quelles conditions faut-il remplir, pour que la connexion déterminée par (3) soit invariante? Avant de passer à la solution de se problème, occupons – nous de l'invariance du champ tensoriel A sur l'espace homogène (G, TM, κ). La condition de l'invariance du champ A en coordonnées a la forme.

$$(\kappa^s_{kc}(a, p) A^c_{kl}(p) = A^s_{ij}(\kappa(a, p))\, \kappa^i_{k}(a, p)\, \kappa^j_{l}(a, p) \tag{4}$$

pour chaque $a \in G$ et $p \in TM$ et $s, c, k, l, i, j = 1, \ldots, 2n$. Remarquons que par example le champ A égale zéro est invariant. Nous pouvons maintenant passer à la reponse à la question posée. Solution de cette question donne:

Théorème 4. *Si les coordonnees A^k_{ij} du champ tensoriel A satisfaisent la condition* (4), *alors la connexion déterminée par* (3) *est la connexion linéaire invariante, compatible au donné champ invariant des produits pseudoscalaires h.*

Démonstration. En vertu de (3) il resulte

$$2\Gamma^s_{qi} h_{ks} = \partial_q h_{ki} + h_{ks} A^s_{qi} - h_{bi} A^b_{qk} \, .$$

En utilisant cela nous obtenons

$$2h(\nabla_u v, w) = \partial_u h(v, w) + h(w, A(u, v)) - h(v, A(u, w)) \, ,$$

pour chaque champ des vecteurs u, v, w.

Ensuite nous avons

$$h(\nabla_u v, w) - h(v, \nabla_u w) = h(w, A(u, v) - h(v, A(u, w)) \, .$$

En se rappellant nos hypothéses nous voyons que le champ $\nabla_u v$ s'exprime par les operations invariantes et alors il est le champ invariant.

Remarque. La connexion que nous considérons est la connexion avec une torsion. Les coordonnées du tenseur de torsion dans le champ holonomique de répèrs s'expriment d'une façon suivante:

$$T^s_{qi} = \frac{1}{4}[h^{sj}\partial_q h_{ji} + A^s_{qi} - h_{bi} A^b_{qk} h^{sk} - h^{sj}\partial_i h_{jq} - A^s_{iq} + h_{bq} h^{sk} A^b_{ik}] \, .$$

REFERENCES

[1] Obata, M., *Hermitian Manifolds with Quaternion Structure*, Tohôku Math. J. V 10 (1958) 57–78.
[2] Yano, K., Ishihara, S., *Tangent and Cotangent Bundles*, Differential Geometry, Marcel Dekker, Inc. New York (1973) 33–40.

STRESZCZENIE

W pracy rozważany jest problem niezmienniczości podniesionego pola niezmienniczego iloczynów skalarnych a następnie podana jest konstrukcja koneksji niezmienniczej na pewnej przestrzeni jednorodnej.

РЕЗЮМЕ

В работе решается проблема инварянтности поднятого инварянтного поля скалярных произведений, а потом подается конструкция инварянтной связности на одном однородном пространстве.