ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXIX, 1 SECTIO A 1975

Instytut Organizacji i Zarządzania
Wyższa Szkoła Inżynierska, Lublin

MARIA BOJARSKA, MARIA WESOŁOWSKA

Les dépendances entre la subordination et l'inégalité des modules dans le cas des majorantes appartenantes aux classes $S^*_{(\alpha,\beta)}$, $S^*_{(\alpha,\beta)}$

Zależności między podporządkowaniem i nierównością modułów w przypadku majorant należących do klas $S^*_{(\alpha,\beta)}$, $S^*_{(\alpha,-\beta)}$.

Зависимости между подчинением и неравенством модулей в случае мажорант принадлежащих к классам $S^*_{(\alpha,\beta)}$ $S^*_{(\alpha,-\beta)}$.

1. Supposons que les fonctions complexes

$$f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots,\ a_1 \geqslant 0 \tag{1.1}$$

$$F(z) = z + A_2z^2 + \ldots \tag{1.2}$$

sont holomorphes dans $K_\varrho = \{z\colon |z| < \varrho\}$.

La fonction $F(z)$ nous appelons la majorante de domaine de la fonction $f(z)$ dans K_ϱ et nous la désignons (f, F, ϱ), s'il existe une fonction $\omega(z)$ holomorphe dans K_ϱ, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < \varrho$ pour $z \in K_\varrho$ telle, que

$$f(z) = F\big(\omega(z)\big) \text{ pour } z \in K_\varrho. \tag{1.3}$$

La fonction $F(z)$ nous appelons la majorante de module de la fonction $f(z)$ dans K_ϱ et nous la désignons $|f, F, \varrho|$ si

$$|f(z)| \leqslant |F(z)| \text{ pour } z \in K_\varrho. \tag{1.4}$$

Avec les dépendances entre les deux types des majorizations s'occupaient différents auteurs.

Dans le travail present nous examinons la dépendance entre la subordination et l'inégalité des modules quand les majorantes appartiennent à la classe $S^*_{(\alpha,\beta)}$, $S^*_{(\alpha,-\beta)}$, où ces classes furent déterminées d'une manière suivante dans [4] et [2]: $S^*_{(\alpha,\beta)} \subset S$ désigne la classe des fonctions satisfaisant à la condition:

$$(1.5)\qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec_1 \left[(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}+\alpha\right]^{\frac{2\beta}{\pi}}, z\in K_1,\ 0\leqslant \alpha<1,\ 0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$S^*_{(\alpha,-\beta)}$ désigne la classe des fonctions $f(z) = z+a_2z^2+\ldots$ telle, que

$$(1.6)\qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec_1 \left[(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}+\alpha\right]^{-\frac{2\beta}{\pi}}, z\in K_1,\ \alpha\in\langle 0,1),\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

2. Théorème 2.1. *Si* $F(z) = z+A_2z^2+\ldots$, $F(z)\in S^*(\alpha,\beta)$ *Ou* $F(z) \in S^*_{(\alpha,-\beta)}$ *et si* $f(z) = a_1z+a_2z^2+\ldots, a_1>0$ *est une fonction holomorphe dans* K_1 *et aussi* $\frac{f(z)}{z}\neq 0$ *pour* $z\in K_1$ *et si* $(f, F, 1)$ *cela* $|f, F, r_0|$ *où* r_0 *est la moindre racine positive de l'équation*

$$(2.1)\qquad \frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2r(1-\alpha)}{1+r^2(1-2\alpha)}+2\operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2}.$$

Le nombre r_0 *ne peut pas etre remplacé par le nombre plus grand.*

Démonstration. Dans les travaux [4] et [2] on a démontré les estimations exactes suivantes

$$(2.2)\qquad \left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2r(1-\alpha)}{1+r^2(1-2\alpha)},\ |z| = r,$$

pour $F(z)\in S^*_{(\alpha,\beta)}$ ou $F(z)\in S^*_{(\alpha,-\beta)}$.

De l'hypothèse $(f, F, 1)$ résulte l'existence de la fonction $\omega(z) = b_1z+ +b_2z^2+\ldots$, $b_1 = a_1>0$, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)|<1$ telle, que $f(z) = F(\omega(z))$ dans K_1. Évidemment $\omega(z) = z\varphi(z)$, où $\varphi(z) = b_1+b_2z+\ldots$, $\varphi(z)\neq 0$ aussi $|\varphi(z)|<1$.

A cause de cela $\frac{1}{\varphi(z)}$ est une fonction holomorphe dans K_1 et $\left|\frac{1}{\varphi(z)}\right|>1$. De là, à la base de l'estimation connue pour la fonction à la partie réelle positive nous obtenons

$$(2.3)\qquad \left|\arg\ln\frac{1}{\varphi(z)}\right| \leqslant 2\operatorname{arctg} r,\ |z| = r<1.$$

Nous introduisons la homotopie

$$(2.4)\qquad \Psi(z,t) = z(\varphi(z))^{1-t} = z\exp\{(1-t)\ln\varphi(z)\} \text{ pour } z\in K_1,\ t\in\langle 0,1\rangle$$

et ainsi nous choisissons cette branche du logarithme pour laquelle $\ln\varphi(0) = \ln b_1<0$. La fonction $\Psi(z,t)$ est holomorphe dans K_1 pour toutes les t fixés, $t\in\langle 0,1\rangle$ et $|\Psi(z,t)|\leqslant|z|$.

Désignons par

$$\Phi(z,t) = F\big(\Psi(z,t)\big). \tag{2.5}$$

De là $\Phi_t(z,t)$

$$\left|\arg\frac{\Phi_t(z,t)}{\Phi(z,t)}\right| \leqslant \left|\arg\frac{\Psi(z,t)F'\big(\Psi(z,t)\big)}{F\big(\Psi(z,t)\big)}\right| + \left|\arg\ln\frac{1}{\varphi(z)}\right|$$

c'est à dire $\Phi\ (z,t)$

$$\left|\arg\frac{\Phi_t'(t,t)}{\Phi(z,t)}\right| \leqslant \frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2(1-a)r}{1+r^2(1-2a)} + 2\operatorname{arctg} r. \tag{2.6}$$

Le côté droit de l'inégalité (2.6) est croissant par rapport à r or si $0 \leqslant r \leqslant r_0 < 1$, où r_0 est la racine de l'équation

$$\frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2(1-a)r}{1+(1-2a)r^2} + 2\operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2},$$

alors de (2.6) nous obtenons la relation

$$\left|\arg\frac{\Phi_t'(z,t)}{\Phi(z,t)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2},\ |z| = r,\ t\in\langle 0,1\rangle.$$

La dernière l'inégalité est une condition nécessaire et suffisant pour que la homothophie $\Phi(z,t)$ fût croissante d'une manière module par rapport à t dans le cercle K_r, comme ont démontré A. Bielecki et Z. Lewandowski dans le travail [1].

Or, pour $r \leqslant r_0$ nous obtenons

$$|f(z)| = |\Phi(z,0)| \leqslant |\Phi(z,1)| = |F(z)|.$$

Théorème 2.2. *Supposons que* $F(z) = z + A_2z^2 + \ldots, f(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots$, $a_1 > 0$, $F(z)\in S^*_{(a,\beta)}$ *et* $\frac{f(z)}{a_1}\in S^*_{(a,\beta)}$ *ou* $F(z)\in S^*_{(a,-\beta)}$ *et* $\frac{f(z)}{a_1}\in S^*_{(a,\beta)}$, $z\in K_1$. *Si* $|f,F,1|$ *alors* (f,F,r_0) *où* r_0 *est la moindre racine de l'équation*

$$\frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2r(1-a)}{1+(1-2a)r^2} + 2\operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2}. \tag{2.7}$$

Démonstration. Faisons la homotopie

$$G(z,t) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1-t}\left(\frac{F(z)}{z}\right)^{t} \tag{2.8}$$

telle, que $G(z,0) = f(z)$, $G(z,1) = F(z)$ pour $z \in K_1$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Évidemment $G(z,t) \in S^*_{(\alpha,\beta)}$ ou $G(z,t) \in S^*_{(\alpha,-\beta)}$ car

$$\frac{zG'_z(z,t)}{G(z,t)} = (1-t)\frac{zf'(z)}{f(z)} + t\frac{zF'(z)}{F(z)}, \quad t \in \langle 0,1\rangle,$$

et le domaine de la variabilité du fonctional $\dfrac{zh'(z)}{h(z)}$ pour $h \in S^*_{(\alpha,\beta)}$ ou $h \in S^*_{(\alpha,-\beta)}$ est le domaine convex, or homotopie $G(z,t)$ pour t changeant de 0 jusqu'à 1 appartient aux classes $S^*_{(\alpha,\beta)}$ ou $S^*_{(\alpha,-\beta)}$. Au surplus $G(z,t)$ pour chaque t fixé, $t \in \langle 0,1\rangle$ est une fonction holomorphe et univalente dans K_1 aussi pour $t \in \langle 0,1\rangle$ et $z \in K_1$ nous avons

$$\operatorname{Re}\frac{zG'_z(z,t)}{G(z,t)} = \operatorname{Re}\left[(1-t)\frac{zf'(z)}{f(z)} + t\frac{zF'(z)}{F(z)}\right] > 0.$$

De l'hypothése $|f, F, 1|$ il en rèsulte que $|G(z,t)|$ est une fonction croissante du paramètre $t \in \langle 0,1\rangle$ et $z \in K_1$, car

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| > 1 \ \text{ et } \ \operatorname{Re}\frac{G'_t(z,t)}{G(z,t)} = \operatorname{Re}\ln\frac{F(z)}{f(z)} > 0.$$

Ainsi, comme cela était auparavant nous obtenons

$$\left|\arg\ln\frac{F(z)}{f(z)}\right| \leqslant 2\operatorname{arctg} r, \quad |z| = r, \ \text{car} \ \left|\ln\frac{F(z)}{f(z)}\right| > 0.$$

Parce que $G(z,t) \in S^*_{(\alpha,\beta)}$ ou $G(z,t) \in S^*_{(\alpha,-\beta)}$ pour $z \in K_1$, $t \in \langle 0,1\rangle$ or

$$\left|\arg\frac{zG'_z(z,t)}{G(z,t)}\right| \leqslant \frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2r(1-\alpha)}{1+r^2(1-2\alpha)} \tag{2.9}$$

et

$$\left|\arg\frac{G'_t(z,t)}{zG'_z(z,t)}\right| \leqslant \left|\arg\frac{G'_t(z,t)}{G(z,t)}\right| + \left|\arg\frac{zG'_z(z,t)}{G(z,t)}\right|$$
$$\leqslant 2\operatorname{arctg} r + \frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2r(1-\alpha)}{1+r^2(1-2\alpha)}.$$

Une condition nécessaire et suffisant pour qu'une homotopie $G(z,t)$ fût croissant en domaine est pour que

$$\left|\arg\frac{G'_t(z,t)}{zG'_z(z,t)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

ce qui est démontré dans le travail [1]. Or, comme dans démonstration du théorème 2.1, pour $0 \leqslant r \leqslant r_0 < 1$ où r_0 est la racine de l'équation

$$\frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2(1-\alpha)r}{1+(1-2\alpha)r^2} + 2\operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2}$$

nous obtenons

$$|f(z)| = |G(z,0)| \leqslant |G(z,1)| = |F(z)|.$$

Théorème 2.3. *Si* $F(z)\in S^*_{(a,\beta)}$ *ou* $F(z)\in S^*_{(a,-\beta)}, f(z) = az+a_2z^2+\ldots$ $0\leqslant a<1$ *est une fonction holomorphe dans* K_1 *et* $|f, F, 1|$ *cela* $|f', F', r(a)|$ *où* $r(a)$ *est la moindre racine positive de l'équation*

$$\text{(2.10a)}\quad \left(\frac{1+r}{1-r(1-2a)}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - \frac{(1-r)(1+ar)}{r(1+a)} = 0 \ \textit{quand}\ F\in S^*_{(a,\beta\gamma)}$$

ou l'équation

$$\text{(2.10b)}\quad \left(\frac{1+r(1-2a)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - \frac{(1-r)(1+ar)}{r(1+a)} = 0 \ \textit{quand}\ F\in S^*_{(a,-\beta)}$$

Le nombre $r(a)$ *ne peut pas être remplacé par le nombre plus grand.*

Démonstration. De l'hypothèse $if, F, 1i$ il en résulte qu'il existe une fonction $\omega(z)$, $\omega(0) = a$, $|\omega(z)|<1$ pour $z\in K_1$ telle que

$$f(z) = F(z)\omega(z),\ 0\leqslant a<1$$

Alors

$$f'(z) = F'(z)\omega(z)+F(z)\omega'(z)$$

or

$$|f'(z)| \leqslant |F'(z)|\,|\omega(z)|+|F(z)|\,|\omega'(z)|$$

De là

$$\text{(2.11)}\quad \left|\frac{f'(z)}{F'(z)}\right| \leqslant |\omega(z)| + \left|\frac{F(z)}{F'(z)}\right| |\omega'(z)|.$$

L'inégalité $\left|\frac{f'(z)}{F'(z)}\right| < 1$ a lieu, s'il y a lieu l'inégalité

$$\text{(2.12)}\quad \left|\frac{F(z)}{zF'(z)}\right| < \frac{1}{|z|}\,\frac{1-|\omega(z)|}{|\omega'(z)|}.$$

Parce que $F(z)\in S^*_{(a,\beta)}$ ou $F(z)\in S^*_{(a,-\beta)}$ or pour $z\in K_r$ nous avons

$$\text{(2.13)}\quad \left|\frac{F(z)}{zF'(z)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r(1-2a)}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

ou

$$\text{(2.13')}\quad \left|\frac{F(z)}{zF'(z)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r(1-2a)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

(regarde [2] ou [4]).

En exigeant maintenant que les côtés droits des inégalités (2.13) et (2.13') ne fussent pas plus grands que le côté droit de l'inégalité (2.12) et considérant les estimations connues sur $|\omega(z)|$ et $|\omega'(z)|$ [3] p. 366 sur le cercle $|z| = r$ nous avons

$$\left(\frac{1+r}{1-r(1-2a)}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \leqslant \frac{(1-r)(1+ar)}{r(1+a)}$$

ou

$$\left(\frac{1+r(1-2a)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \leqslant \frac{(1-r)(1+ar)}{r(r+a)}$$

Les dernières conditions donnent l'estimation des rayons des cercles correspondants dans lesquels a lieu (2.12) c'est-à-dire $|f', F', r_0|$. De là nous obtenons les équations (2.10a) et (2.10b). Le résultat est exact, car pour la fonction extrémale

$$F_0(z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{1}{t}\left[\left(\frac{1-t(1-2a)}{1+t}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} -1\right]dt\right\}$$

dans la classe $S^*_{(a,\beta)}$ et dans la classe $S^*_{(a,-\beta)}$

$$F_0(z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{1}{t}\left[\left(\frac{1-t}{1+(1-2a)t}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} -1\right]dt\right\}$$

et pour la fonction $\omega_0(z) = \dfrac{z-a}{az-1}$, nous avons $|f_0(-1)| = |F_0(-r)|$ où $f_0(z) = F_0(z)\omega_0(z)$ et $r = r(a)$.

RÉFÉRENCES

[1] Bielecki A., Lewandowski Z., *Sur certaines familles de fonctions α-étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A, 15, (1961), 45-55.

[2] Bojarska M., Wesołowska M., *O pewnej klasie funkcji sprzężonej z klasą Wesołowskiego*, Zeszyt Naukowo-Techniczny WSInż w Lublinie, 1974, 8-14.

[3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва 1966.

[4] Wesołowski A., *Certains résultats concernant la classe* $S^*_{(a,\beta)}$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 25 (1971), 121-130.

STRESZCZENIE

W zdefiniowanych klasach funkcji $S^*_{(a,\beta)}$, i $S^*_{(a,-\beta)}$ wyznaczono dokładną wartość promienia koła $r_0 \in (0, 1)$ daną równaniem (2, 1) w którym zachodzi: $|f, F, r_0|$ przy założeniu $(f, F, 1)$ (tw. 2,1) i (f, F, r_0) przy założeniu $|f, F, 1|$ (tw. 2.2) oraz wartość $r(a)$ daną równaniami (2,10a) lub (2.10b) promienia koła, w którym $|f', F', r(a)|$ przy założeniu $|f, F, 1|$.

РЕЗЮМЕ

В сформулированных классах функций $S^*_{(\alpha,\beta)}$ и $S^*_{(\alpha-,\beta)}$ определено точное значение радиуса круга $r_0 \in (0, 1)$ представленное уравнением (2, 1), в котором выполняется $|f, F, r_0|$ если $|f, F, 1|$ и $|f, F, r_0|$ если $|f, F, 1|$, а также радиус $r(a)$ представлены уравнениями (2.10а) или (2.10в) круга, в котором $|f', F', r(a)|$ если $|f, F, 1|$.