ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXVIII, 6 SECTIO A 1974

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin
Zespół Matematyki, Wyższa Szkoła Inżynierska, Kielce

ZDZISŁAW LEWANDOWSKI, STANISŁAW WAJLER

# Sur les fonctions typiquement réelles bornées

## O funkcjach typowo-rzeczywistych ograniczonych

## О типично-вещественных ограниченных функциях

**1.** Désignons par $T_M(M>1)$ la classe des fonctions $f$ de la forme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

holomorphes dans le cercle $K_1 = \{z\colon |z|<1\}$ et définies par l'intégrale de Stieltjes

$$f(z) = \int_{-1}^{1} s_M(z,t)\,d\mu(t), \tag{2}$$

où $\mu$ est une fonction quelconque non décroissante dans l'intervalle $[-1,1]$, $\mu(1)-\mu(-1)=1$,

$$s_M(z,t) = \frac{2z}{\sqrt{\left[1-2tz\left(1-\frac{1}{M}\right)+z^2\right]^2-\frac{4z^2}{M^2}}+\left[1-2tz\left(1-\frac{1}{M}\right)+z^2\right]}, \tag{3}$$

et $M$ est un nombre fixé, $M>1$.

Remarquons que $T_\infty = T$, où $T$ est la classe bien connue des fonctions typiquement réelles ([1], [3], [4], [5], [6]).

Dans cette note, nous étudions quelques problèmes extrémaux dans la classe $T_M$. En particulier, nous y déterminons le domaine de variation de $f(z)$ pour $z$ fixé, $z\in K_1$, $f\in T_M$, ainsi que les limitations qui en résultent. Nous déterminons encore les points extrémaux de la classe $T_M$ et trouvons les limitations pour les coefficients des fonctions de cette classe. On verra que toute fonction $f\in T_M$ est typiquement réelle et bornée par $M$, c'est-à-

-dire que $|f(z)| < M$, $z \in K_1$. Des résultats obtenus on tire, dans le cas limite $M = \infty$, les résultats bien connus pour la classe des fonctions typiquement réelles. On peut démontrer que la classe $T_M$ n'est pas identique à toute la classe des fonctions typiquement réelles et bornées par $M$.

**2.** On montre aisément que pour la fonction $w = s_M(z, t)$ on a le théorème suivant:

**Théorème 1.** *La fonction $w = s_M(z, t)$, $t \in [-1, 1]$, représente le cercle $K_1$ sur un cercle de rayon $M$, entaillé suivant les segments de droite $[-M, a(t)]$ et $[b(t), M]$, où*

$$a(t) = -\left\{\sqrt{\left[1+t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]^2 - \frac{1}{M^2}} + \left[1+t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]\right\}^{-1} \tag{4}$$

$$b(t) = \left\{\sqrt{\left[1-t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]^2 - \frac{1}{M^2}} + \left[1-t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]\right\}^{-1}, \quad t \in [-1, 1]. \tag{5}$$

**Théorème 2.** *Le domaine de variation de la fonctionnelle $f(z)$ pour $z$ fixé, $z \in K_1$, et $f$ variant dans la classe $T_M$ est le domaine limité par le arc de la courbe $w = s_M(z, t)$, $t \in [-1, 1]$, et par le segment de droite joignant les extrémités de cette courbe.*

*Si $\operatorname{Im} z = 0$, le domaine de variation de $f(z)$, $f \in T_M$, quand $z$ est un point fixé du cercle $K_1$, est le segment de l'axe réel*

$$\left[\frac{4z}{\left[\sqrt{(1-z)^2 - \frac{4z}{M}} + (1-z)\right]^2}, \frac{4z}{\left[\sqrt{(1-z)^2 + \frac{4z}{M}} + (1-z)\right]^2}\right]. \tag{6}$$

**Démonstration.** En vertu du théorème 2 du travail [1], le domain de variation de $f(z)$ lorsque $z$ est fixé, $z \in K_1$, et $f$ varie dans la classe $T_M$ est l'enveloppe convexe de la courbe (3) $w = s_M(z, t)$, $t \in [-1, 1]$. Nou allons montrer que la courbe $w = s_M(z, t)$, $t \in [-1, 1]$, est convexe. Poson

$$\zeta = z + \frac{1}{z}, \quad m = 1 - \frac{1}{M}.$$

On obtient:

$$w = \frac{1}{2(1-m)^2}\left[(\zeta - 2tm) - \sqrt{(\zeta - 2tm)^2 - 4(1-m)^2}\right], \quad t \in [-1, 1]. \tag{7}$$

Posant $\zeta = x + iy$, $w(t) = u(t) + iv(t) = u + iv$, on déduit de (7), après quelques transformations, l'équation de la courbe $w = s_M(z, t)$ sous forme implicite:

$$u^2 + v^2 = \frac{v}{av - y}, \quad \text{où } a = (1-m)^2, \tag{8}$$

donc

$$F(u,v) = avu^2 + av^3 - yu^2 - yv^2 - v = 0. \tag{9}$$

En étudiant l'expression qui caractérise la convexité

$$K = F_{uu}F_v^2 - 2F_{uv}F_uF_v + F_{vv}F_u^2,$$

on constate facilement que la courbe (9) admet un sens de convexité fixe (pour $v < 0$ et $v < 0$). De la forme (7) il s'ensuit que $v > 0$ si $\mathrm{Im}\, z > 0$, tandis que $v < 0$ si $\mathrm{Im}\, z < 0$, ce qui prouve que la fonction $f \epsilon T_M$ est une fonction typiquement réelle. Comme $w = s_M(z, t)$ est la courbe fermée de Jordan (pour $\mathrm{Im}\, z > 0$ et $\mathrm{Im}\, z > 0$) et sa les extrémités $w_1 = s_M(z, 1)$, $w_2 = s_M(z, -1)$ appartiennent en même temps au demi-plan supérieur ou au demi-plan inférieur, le domaine de variation est bien celui qui est annoncé dans le théorème. Le cas $\mathrm{Im}\, z = 0$ est évident.

L'interprétation géométrique du théorème 2 implique les limitations suivantes:

**Théorème 3.** *Si $f \epsilon T_M$, on a, pour tout $z$ fixé, $z \epsilon K_1$:*

$$|s_M(z, +1)| \leqslant |f(z)| \leqslant |s_M(z, -1)| \text{ si } \mathrm{Re}\, s_M(z, -1) \leqslant 0, \tag{11}$$

$$|s_M(z, -1)| \leqslant |f(z)| \leqslant |s_M(z, 1)| \text{ si } \mathrm{Re}\, s_M(z, 1) \geqslant 0. \tag{12}$$

*Si* $\mathrm{Re}\, s_M(z, -1) \geqslant 0$ et $\mathrm{Re}\, s_M(z, 1) \leqslant 0$, *on a*

$$|f(z)| \leqslant \frac{2}{\left|\sqrt{\left[\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^2 + 4a} - \mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|},$$

$$|f(z)| \geqslant \begin{cases} d & \text{si } |s_M(z, -1)|^2 - \mathrm{Re}\, s_M(z, 1)\overline{s_M(z, -1)} \geqslant 0 \\ & \text{et } \mathrm{Im}\, s_M(z, 1) \geqslant \mathrm{Im}\, s_M(z, -1); \\ |s_M(z, -1)| & \text{si } |s_M(z, -1)|^2 - \mathrm{Re}\, s_M(z, 1)\overline{s_M(z, -1)} \leqslant 0 \\ & \text{et } \mathrm{Im}\, s_M(z, 1) \geqslant \mathrm{Im}\, s_M(z, -1); \end{cases}$$

(13)

$$|f(z)| \geqslant \begin{cases} d & \text{si } |s_M(z, 1)|^2 - \mathrm{Re}\, s_M(z, -1)\overline{s_M(z, 1)} \geqslant 0 \\ & \text{et } \mathrm{Im}\, s_M(z, 1) \leqslant \mathrm{Im}\, s_M(z, -1); \\ |s_M(z, 1)| & \text{si } |s_M(z, 1)|^2 - \mathrm{Re}\, s_M(z, -1)\overline{s_M(z, 1)} \leqslant 0 \\ & \text{et } \mathrm{Im}\, s_M(z, 1) \leqslant \mathrm{Im}\, s_M(z, -1), \end{cases}$$

où

$$d = \left|\mathrm{Im}\, \frac{s_M(z, -1)}{s_M(z, 1) - s_M(z, -1)}\right| \cdot |s_M(z, 1) - s_M(z, -1)|.$$

Les limitations (11) – (13) sont exactes. Les fonctions extrémales dans (11) et (12) sont les fonctions $f(z) = s_M(z, \pm 1)$. Dans la limitation supérieure (13) la fonction extrémale est la fonction $f(z) = s_M(z, t_0)$, où $t_0 = \frac{1}{2m}\operatorname{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $m = 1-\frac{1}{M}$. Les fonctions extrémales dans la limitation inférieure (13) sont les fonctions $s_M(z, \pm 1)$ et la fonction $f(z) = \lambda s_M(z, 1)+(1-\lambda)s_M(z, -1)$ ùo $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ satisfait l' équation

$$\left|\operatorname{Im}\frac{s_M(z, -1)}{s_M(z, 1)-s_M(z, -1)}\right| |s_M(z, 1)-s_M(z, -1)| = |\lambda s_M(z, 1)+(1-\lambda)s_M(z, -1)|.$$

**Théorème 4.** *Si $f \in T_M$, on a, pour $z$ fixé, $z \in K_1$,*

(14) $$\arg s_M(z, -1) \leqslant \arg f(z) \leqslant \arg s_M(z, 1) \quad si \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

(15) $$\arg s_M(z, 1) \leqslant \arg f(z) \leqslant \arg s_M(z, -1) \quad si \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

*Les fonctions extrémales dans (14) et (15) sont les fonctions $f(z) = s_M(z, \pm 1)$.*

**Théorème 5.** *Si $f \in T_M$, on a, pour tout $z \in K_1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$,*

(16) $$|\operatorname{Im} s_M(z, -1)| = |\operatorname{Im} f(z)| \leqslant |\operatorname{Im} s_M(z, 1)| \quad si \quad \operatorname{Re} s_M(z, 1) \geqslant 0,$$

(17) $$|\operatorname{Im} s_M(z, 1)| \leqslant |\operatorname{Im} f(z)| \leqslant |\operatorname{Im} s_M(z, -1)| \quad si \quad \operatorname{Re} s_M(z, -1) \leqslant 0,$$

(18) $$|\operatorname{Im} f(z)| \leqslant \frac{2}{\left|\sqrt{\left[\operatorname{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^2+4a}-\operatorname{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|},$$

*si* $\operatorname{Re} s_M(z, -1) \geqslant 0$ *et* $\operatorname{Re} s_M(z, 1) \leqslant 0$,

(19)
$$|\operatorname{Im} f(z)| \geqslant \begin{cases} |\operatorname{Im} s_M(z, 1)| & si\ \operatorname{Re} s_M(z, -1) \geqslant 0\ et\ \operatorname{Re} s_M(z, 1) \leqslant 0 \\ & et\ |s_M(z, -1)| \geqslant |s_M(z, 1)|; \\ |\operatorname{Im} s_M(z, -1)| & si\ \operatorname{Re} s_M(z, -1) \geqslant 0\ et\ \operatorname{Re} s_M(z, 1) \leqslant 0 \\ & et\ |s_M(z, -1)| \leqslant |s_M(z, 1)|. \end{cases}$$

En mettant, dans les théorèmes 2 – 5, $M = \infty$, on retrouve les résultats établis dans les travaux [1], [3] et [4].

**3.** En appliquant le théorème 1 du travail [2] on obtient le

**Théorème 6.** *La classe $T_M$ est une classe compacte et elle constitue l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions $f(z) = s_M(z, t)$, $t \in [-1, 1]$.*

*La correspondance* $\mu \leftrightarrow f$ (dans la formule 2) *est biunivoque et les seuls points extrémaux sont les fonctions* $f(z) = s_M(z, t)$, $t \in [-1, 1]$.

Soit $\mathcal{J}$ une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Frechet de tous les fonctions holomorphes dans le cercle $K_1$. De même que dans [2] on trouve:

(20) $\max\{\mathrm{Re}\mathcal{J}(f): f \in T_M\} = \max\{\mathrm{Re}\mathcal{J}(f): f \in$ enveloppe convexe de la classe $T_M\} = \sup\{\mathrm{Re}\mathcal{J}(f): f \in$ ensemble des points extrémaux de l'enveloppe convexe de $T_M\} = \sup\{\mathrm{Re}\mathcal{J}(f): f \in$ ensemble des points extrémaux de la classe $T_M\}$.

En tenant compte de (20) et du théorème 6 on obtient le

**Théorème 7.** *Si* $f \in T_M$, *on a*

$$\min_{t \in [-1,1]} A_n(t) \leqslant a_n \leqslant \max_{t \in [-1,1]} A_n(t), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{21}$$

où

$$s_M(z, t) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(t) z^n. \tag{22}$$

*En particulier,*

$$\begin{gathered} |a_2| \leqslant 2m \\ |a_3| \leqslant \begin{cases} 2m - m^2 & si \ m \in [0, 2/3], \\ 5m^2 - 2m & si \ m \in [2/3, 1]. \end{cases} \end{gathered} \tag{23}$$

*L'égalité dans* (21) *et* (23) *a lieu pour les fonctions* $f(z) = s_M(z, t)$ *où* $t$ *est convenablement choisi dans* $[-1, 1]$. Enfin, en posant $M = \infty$, on obtient $|a_n| \leqslant n$, $n = 2, 3, \ldots$ (v. p. ex. [3]).

## RÉFÉRENCES


[1] Ашневиц И. Я., Улина Г. В., Об областях значений аналитических функций представимых интегралом Стильтеса, Вест. Лен. Унив., 11 (1955), 31-42.

[2] Brickman L., MacGregor T. H., Wilken D. R., *Convex Hulls of Some Classical Families of Univalent Functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 156 (1971), 91-107.

[3] Голузин Г. М., *О типично-вещественных функциях*, Мат. Сб. 27 (69),(1950), 201-218.

[4] Ремизова М. П., *Экстремальные задачи в классе типично-вещественных функций*, Изв. Выш. Учеб. Зав., Математика, 32 (1963), 135-144.

[5] Robertson M. S., *On the Coefficients of Typic-Real Functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 41 (1935), 565-572.

[6] Rogosinski W., *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen*, Math. Zeitschr., 35 (1932), 93-121.

## STRESZCZENIE

W pracy tej autorzy zajmują się problemami ekstremalnymi w klasie $T_M (M > 1)$ funkcji holomorficznych w kole jednostkowym, danym wzorem (2), która jest podklasą klasy funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych. Wyznaczono obszar zmienności $f(z)$ przy ustalonym $z \in K_1$, gdzie $f \in T_M$, a także podano kilka oszacowań wynikających z oszacowania obszaru zmienności $f(z)$. Ponadto podano oszacowania na współczynniki funkcji $f \in T_M$. W przypadku granicznym $M = \infty$ otrzymano twierdzenia odpowiadają wynikom z prac [1], [3] i [4].



## РЕЗЮМЕ

Авторы занимаются экстремальными проблемами для класса $T_M (M > 1)$ голоморфных функций в единичном круге, данных формулой (2). Класс $T_M$ является подклассом класса типично-вещественных и ограниченных функций. Дается область изменения $f(z)$ для фиксированного $z \in K_1$ где $f \in T_M$, а также даются некоторые отсюда вытекающие оценки коэффициентов для функций $f \in T_M$. В граничном случае $M = \infty$ получаем теоремы из [1], [3] и [4].