ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXVII, 13 SECTIO A 1973

Zespół Matematyki, Wyższa Szkoła Inżynierska, Lublin

JÓZEF ZDERKIEWICZ

Sur la courbure des lignes de niveau dans la classe des fonctions convexes d'ordre α.

O krzywiźnie poziomic w klasie funkcji wypukłych rzędu α

О кривизне линий уровня в классе выпуклых функций порядка α

1. Introduction. Désignons par S la classe des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ holomorphes et univalentes dans le cercle $K = \{z: |z| < 1\}$ et soit S_α^c, $0 \leqslant \alpha < 1$, une sous-classe de fonctions convexes d'ordre α; $f(z) \in S_\alpha^c$ si et seulement si

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha \text{ pour } z \in K \tag{1.1}$$

En posant $\alpha = 0$, on obtient la famille $S_0^c = S^c$ des fonctions convexes qui représentent le cercle K sur des domaines convexes. Dans ce travail [théor.1, formule (2.13)] nous trouvons les limitations exactes, inférieure et supérieure, de la courbure K_r des images de la circonférence $|z| = r$, $0 < r < 1$, dans la transformation $w = f(z)$, $f(z) \in S_\alpha^c$. Cette limitation généralise un résultat obtenu en 1952 par Zmorovič [2], qui ne l'a etablie que pour $\alpha = 0$. Elle généralise aussi le résultat établi en 1970 par Eenigenburg [1], qui a obtenu une limitation inférieure (2.13) dans la sous-classe de la famille S_α^c des fonctions $f(z)$ satysfaisant a la condition:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{z_0 \in K} \mathrm{Re}\left[1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right] \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

De nombreuses et importantes sous-classes de la famille S peuvent être définies par des formules structurales de la forme

$$f(z) = \Phi\big(z, \mu(\theta)\big), \tag{1.2}$$

où $\mu(\theta)\in M$, M étant la famille des fonctions non décroissantes dans l'intervalle $\langle -\pi, \pi\rangle$ normée:

$$\mu(-\pi) = \mu(-\pi+0),\ \mu(\pi) = 1$$

et Φ une fonctionnelle définie sur la famille M et où z est considéré comme un paramétre de cette fonctionnelle.

La famille (1.2) étant ainsi représentée, toute fonctionnelle $\mathcal{J}(f(z))$ définie sur cette famille peut être remplacée par une fonctionnelle $\mathcal{J}(\mu)$, $\mu\in M$.

Dans l'étude des problèmes extrémaux de certaines fonctionnelles réelles $\mathcal{J}(\mu)$ on applique la méthode suivante, due à Zmorovič [2].

Supposons que la fonctionnelle $\mathcal{J}(\mu)$, $\mu\in \mathcal{M}$, jouisse de la propriété suivante:

$$\mathcal{J}(\mu+\varepsilon\eta) = \mathcal{J}(\mu)+\varepsilon A(\mu,\eta)+\varepsilon^2 B(\mu,\eta;\varepsilon),$$

où ε est un nombre réel, $\eta = \eta(\theta)$ est une fonction à variation bornée dans l'intervalle $\langle -\pi, \pi\rangle$, $A(\mu,\eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_\mu(\theta)d\eta(\theta)$, où $F_\mu(\theta)$ est une fonction continue et strictement monotone dans un voisinage suffisamment petit gauche ou droit de tout point $\theta\in\langle -\pi, \pi\rangle$, enfin $|B(\mu,\eta:\varepsilon)| < B_0$ pour $|\varepsilon|$ et Var $\eta(\theta) - \pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ suffisamment petits.

Alors la fonction extrémale $\mu_0(\theta)$ de la fonctionnelle $\mathcal{J}(\mu)$ est une fonction en escalier dont le nombre de sauts est au plus égal au nombre des points extrémaux de la fonction $F_\mu(\theta)$, $\theta\in(-\pi,\pi\rangle$. Dans ce qui précède, on entend par extrémum toujours un maximum ou minimum.

2. Limitation de la courbure K_r dans la classe des fonctions S_a^c. La condition (1.1) permet aisément de constater que $f(z)\in S_a^c$ si et seulement si

$$1+\frac{zf''(z)}{(1-a)f'(z)} = p(z),\ p(z)\in P. \tag{2.1}$$

P est la famille des fonctions $p(z)$ holomorphes dans le cercle K et telles que $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour $z\in K$. Pour la famille P on connait la formule structurale

$$p(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t),\ \mu\in M.$$

De là et de (2.1) on tire la formule structurale de la famille S_a^c:

$$f(z) = \int\limits_0^z e^{-2(1-a)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(1-\zeta e^{-i\theta})d\mu(t)}\,d\zeta,\ \mu\in M. \tag{2.2}$$

On sait que la courbure $K_r(\vartheta)$ de l'image de la circonférence $|z| = r$, $0 < r < 1$, au point $w = f(re^{i\vartheta}), f(z) \in S_a^c$, est donneé par la formule

$$K_r(\vartheta) = \frac{\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]}{|z| \cdot |f'(z)|}, \quad z = re^{i\vartheta}.$$

Sans nuire à la généralité des raisonnements on peut admettre que $\vartheta = 0$, car si $f(z) \in S_a^c$, on a aussi $e^{i\gamma}f(e^{-i\gamma}z) \in S_a^c$ pour tout γ réel. En posant donc $K_r(0) = K_r$ on aura

$$K_r = \frac{\operatorname{Re}\left[1 + \frac{rf''(r)}{f'(r)}\right]}{r|f'(r)|}. \tag{2.3}$$

En vertu des formules (2.2) et (2.3) on a

$$rK_r = \mathcal{J}(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t) \cdot \exp\left[(1-a) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t)\, d\mu(t)\right],$$

où

$$\begin{aligned} P(t) &= 1 - 2ra\cos t + (2a-1)r^2, \\ F(t) &= 1 - 2r \cdot \cos t + r^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En appliquant la méthode de Zmorovič à la fonctionnelle (2.4) on obtient:

$$F_\mu(t) = \left[(1-a) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t) \log F(t) + \frac{P(t)}{F(t)}\right] \exp\left[(1-a) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t) d\mu(t)\right]$$

Lemme 1. *La fonction $F_\mu(t), -\pi < t \leqslant \pi$, admet un minimum aux Les points $t = \pm\theta$, un maximum aux points $t = 0$ et $t = \pi$. Les points $t = \pm\theta$, sont racines de l'équation.*

$$A_\mu - N(t) = 0 \tag{2.6}$$

$$\text{où } A_\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t), \; N(t) = \frac{1-r^2}{F(t)}.$$

Démonstration. Dérivant la fonction $F_\mu(t)$ par rapport à t on obtient

$$F'_\mu(t) = \frac{2r(1-a)\sin t}{F(t)} [A_\mu - N(t)] \cdot \exp\left[(1-a) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t)\, d\mu(t)\right]. \tag{2.7}$$

D'où $F'_\mu(t) = 0$ si $t = 0$, $t = \pi$ ou t est racine de l'équation (2.6).
Soit

$$g(x) = \frac{1-2rax+(2a-1)r^2}{1-2rx+r^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Comme $g(x)$ est une fonction croissante, il vient $g(-1) \leqslant A_\mu \leqslant g(1)$, donc

$$A_\mu - N(0) \leqslant g(1) - N(0) = -\frac{2ar}{1-r} \leqslant 0$$

et

$$A_\mu - N(\pi) \geqslant g(-1) - N(\pi) = \frac{2ar}{1+r} \geqslant 0.$$

De là on conclut, en tenant compte de (2.7), que la fonction $E_\mu(t)$ admet un maximum aux points $t = 0$ et $t = \pi$. L'équation (2.6) a exactement deux racines dans l'intervalle $(-\pi, \pi\rangle$. En effet, la fonction $N(t)$ est strictement décroissante dans l'intervalle $\langle 0, \pi\rangle$, donc il s'ensuit de l'inégalité $N(\pi) \leqslant A_\mu \leqslant N(0)$ que l'équation (2.6) admet exactement une racine $t = \theta$, $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$. La fonction $N(t)$ étant paire, $t = -\theta$ est aussi racine de cette équation. Par conséquent il résulte de (2.7) que la fonction $F_\mu(t)$ admet un minimum aux points $t = \pm\theta$, c.q.f.d.

Du lemme 1 et de la méthode appliquée il résulte que les fonctions extrémales de la fonctionnelle considérée $\mathscr{J}(\mu)$ sont en escalier avec deux sauts au plus.

Nous allons maintenant déterminer le maximum de la fonctionnelle $\mathscr{J}(\mu)$. Soit $\mu_0(t)$ une fonction en escalier avec les sauts λ et $1-\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ aux points $t = 0$ et $t = \pi$. Alors, à cause de (2.4) on a:

$\mathscr{J}(\mu_0) = \mathscr{J}(r, a, \lambda) =$

$$= \left[\frac{4(1-a)r}{1-r^2}\lambda + \frac{1+2ar+(2a-1)r^2}{(1+r)^2}\right]\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{2(1-a)\lambda} \cdot (1+r)^{2(1-a)}. \tag{2.8}$$

Afin de trouver le maximum de la fonctionnelle $\mathscr{J}(\mu)$ il suffit de trouver le maximum de la fonction $\mathscr{J}(r, a, \lambda)$ dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ pour r et a fixés, $0 < r < 1$, $0 \leqslant a < 1$.

Lemme 2. *Soit*

$$A(r, a) = \frac{4(1-a)r}{1-r}\log\frac{1-r}{1+r},$$

$$B(r, a) = \frac{2r}{1-r} + [1+(2a-1)r]\log\frac{1-r}{1+r}, \tag{2.9}$$

$$\varphi(r,a) = -\frac{B(r,a)}{A(r,a)} = -$$

$$-\frac{1}{4(1-a)}\left[\frac{1}{r}+2a+(2a-1)r\right]\frac{1-r}{1+r}-\frac{1}{2(1-a)\log\frac{1-r}{1+r}}.$$

Alors

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\mathscr{J}(r,a,\lambda) = \begin{cases}\mathscr{J}(r,a,\varphi(r,a)) & \text{si } \varphi(r,a)<1.\\ \mathscr{J}(r,a,1) & \text{si } \varphi(r,a)\geqslant 1.\end{cases}$$

Démonstration. En derivant la fonction $\mathscr{J}(r, a, \lambda)$ par rapport à λ on obtient

$$\mathscr{J}'_\lambda(r,a,\lambda) = 2(1-a)(1+r)^{1-2a}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{2(1-a)\lambda}\cdot[\lambda A(r,a)+B(r,a)].$$

On voit aisément que $A(r,a)<0$ pour $0<r<1, 0\leqslant a<1$. Nous allons montrer que $B(r,a)>0$ pour $0<r<1, 0\leqslant a<1$.
En effet, comme

$$B'_r(r,a) = \frac{2r}{1-r}\cdot\frac{3-2a+(2a-1)r}{1-r^2}+(2a-1)\log\frac{1-r}{1+r}$$

et

$$B''_{rr}(r,a) = 8\cdot\frac{1-a+ar+r^2}{(1-r)(1-r^2)^2}>0,$$

on a $B(r,a)>0$, puisque $B'_r(0,a)=0$. De là, en tenant compte de ce que $\operatorname{sgn}\mathscr{J}'_\lambda(r,a,\lambda) = \operatorname{sgn}[\lambda A(r,a)+B(r,a)]$, on tire la conclusion du lemme 2.

Lemme 3. *Si $\varphi(r,a)$ est défini par la formule* (2.9) *et si $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, on a $0<\varphi(r,a)<\frac{1}{2}$, $0<r<1$.*

Démonstration. Admettons $t=\log\frac{1+r}{1-r}$, $0<r<1$. En tirant de là r et mettant dans (2.9) on obtient

$$\varphi(r,a) = \psi(t,a) = \frac{\frac{1}{2t}-\frac{1}{e^{2t}-1}-\frac{a}{e^t+1}}{1-a},\ 0<t<\infty,\ 0\leqslant a\leqslant\tfrac{1}{2}.$$

Nous allons montrer que $0<\psi(t,a)<\frac{1}{2}$.

Soit $U(t) = \dfrac{k(t)}{2t^2(e^t+e^{-t}-2)}$, où $k(t) = t^2+2-e^t-e^{-t}$.

En dérivant la fonction $\psi(t, a)$ par rapport à t on aura

$$(1-a)\psi_t'(t, a) = -\frac{1}{2t^2}+\frac{2e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2}+\frac{ae^t}{(e^t+1)^2}\leqslant U(t).$$

Comme $k'(t) = 2t-e^t+e^{-t}$, $k''(t) = 2-e^t-e^{-t}<0$ et $k'(0) = k(0) = 0$, on a $U(t)<0$. Par conséquent la fonction $\psi(t, a)$ est strictement décroissante par rapport à la variable t, $0<t<\infty$, de plus on a $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t, a) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t, a) = 0$, d'où résulte la conclusion du lemme 3.

Lemme 4. *Soit $\varphi(r, a)$ definie par la formule* (2.9) *et*

$$a(r) = \frac{1+r}{2r}-\frac{1}{(1+r)\log\frac{1+r}{1-r}},\quad 0<r<1. \tag{2.10}$$

Alors

$$\varphi(r, a)<1 \text{ si } 0\leqslant a<a(r),$$

$$\varphi(r, a)\geqslant 1 \text{ si } a(r)\leqslant a<1.$$

Démonstration. Observons d'abord que $\varphi(r, a)$ est une fonction croissante de la variable a, $0\leqslant a<1$. Puisque $\varphi(r, 1) = \infty$ et $\varphi(r, 0)<\frac{1}{2}$ (lemme 3), il existe exactement une solution $a = a(r)$ de l'équation $\varphi(r, a) = 1$, ce qui achève la démostration du lemme 4.

Les lemmes 2 et 4 donnent

$$\max_{\mu\in M}\mathscr{J}(\mu) = \max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\mathscr{J}(r, a\lambda, \lambda) = \begin{cases}\mathscr{J}\big(r, a, \varphi(r, a)\big) \text{ si } 0\leqslant a<a(r)\\ \mathscr{J}(r, a, 1) \text{ si } a(r)\leqslant a<1\end{cases} \tag{2.11}$$

où $\mathscr{J}(r, a, \lambda)$, $\varphi(r, a)$, $a(r)$ sont donnés par les formules (2.8), (2.9), (2. 10).

D'une façon analogue on constate que la fonction $\mu_0(t)$, qui réalise le minimum de la fonctionnelle (2.4) est en escalier avec les sauts λ et $1-\lambda$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ aux points $t = -\theta$ et $t = \theta$. Donc (2.4) entraîne

$$\mathscr{J}(\mu_0) = \frac{P(\theta)}{[F(\theta)]^a}.$$

Comme $\theta = \arccos r$ est une racine de l'équation (2.6) pour $\mu(t) = \mu_0(t)$, (2.5) entraîne

$$\min_{\mu\in M}\mathscr{J}(\mu) = (1-r^2)^{1-a} \tag{2.12}$$

Théorème 1. *Soient $\varphi(r, a)$ et $a(r)$ définies par les formules* (2.9) *et* (2,10) *et soit S_a^c, $0\leqslant a<1$, la famille des fonctions $f(z)$ de la forme* (2.2). *Désignons encore par $K_r(\vartheta)$ la courbure de l'image de la circonférence*

$z = re^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 < r < 1$, dans la représentation $w = f(z)$. Alors

$$\frac{(1-r^2)^{1-a}}{r} \leqslant Kr(\vartheta) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{(1-r^2)^a \log\dfrac{1+r}{1-r}} \left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)^{\left[\frac{1+(1-2a)r^2}{2r} - \frac{1}{\log\frac{1+r}{1-r}}\right]} & \text{si } 0 \leqslant a < a(r), \\ \dfrac{1-(2a-1)r}{r(1-r)^{2a-1}} & \text{si } a(r) \leqslant a < 1. \end{cases}$$

Ces limitations sont exactes. L'égalité pour la limitation inférieure au point $z = re^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, a lieu pour la fonction

$$f_*(z) = e^{i\theta} f(ze^{-i\theta}), \tag{2.14}$$

où $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{d\zeta}{[(1-\zeta e^{i\theta}(1-\zeta e^{-i\theta})^{1-\lambda}]^{2(1-a)}}$.

et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\theta = \arccos r$.

Pour la limitation supérieure, les fonctions extrémales sont de la forme

$$f_k^*(z) = e^{i\vartheta} f_k(e^{-i\vartheta} z),\ k = 1, 2, \tag{2.15}$$

où

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{[(1-\zeta)^{\varphi(r,a)}(1+\zeta)^{1-\varphi(r,a)}]^{2(1-a)}},$$

$$f_2(z) = \frac{1-(1-z)^{2a-1}}{2a-1}.$$

Démonstration. En faisant dans (2.11) quelques simples transformations, on tire l'inégalité (2.13) directement de (2.4) et (2.12). Les fonctions extrémales (2.14) et (2.15) s'obtiennent de la formule (2.2) pour les fonctions $\mu_0(t)$ qui réalisent respectivement le minimum et le maximum de la fonctionnelle (2.4). La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

RÉFÉRENCES

[1] Eenigenburg P., *On the radius of curvature for convex analytic functions*. Canad. J. Math., 23 (1970), 486-491.

[2] Zmorovič V.A. (*В. А Зморович*), *О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций*. Ukrainian. Math. J., 4 (1952), 276-298.

STRESZCZENIE

Przedmiotem pracy jest uzyskanie dokładnych oszacowań (2.13) krzywizny obrazów okręgu $|z| = r$, $0 < r < 1$, przy odwzorowaniu funkcjami wypukłymi rzędu a, $0 \leqslant a < 1$, określonymi wzorem (2.2).

РЕЗЮМЕ

Целью работы является получение точных оценок (2.13) кривизны образов окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$ при отображении выпуклыми функциями порядка a, $0 \leqslant a < 1$ определяемыми формулой (2.2).

V

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE
VOL. XXVI SECTIO A

1. A. Bucki; A. Miernowski: Geometric Inter[
Interpretacja geometryczna π-[

2. R. J. Libera: Some Inequalities for Bounde[
O pewnych nierównościach dla funkcji jednolistnych ograniczonych

3. J. Miazga: The Radius of Convexity for a Class of Regular Functions.
Promień wypukłości pewnej klasy funkcji regularnych.

4. Z. Rychlik: On some Problems Concerning the Inflated Binomial Distribution.
O pewnych problemach dotyczących „rozdętego" rozkładu dwumianowego.

5. A. Szynal, J. Szynal, J. Zygmunt: On the Coefficients of Functions whose Real Part is Bounded.
O współczynnikach funkcji, których część rzeczywista jest ograniczona.

6. A. Wójcik: Über eine bestimmte Gleichung abstrakter Funktionen in lokal konvexen Räumen.
O pewnym równaniu dla abstrakcyjnych funkcji w przestrzeniach lokalnie wypukłych.

7. R. Zawadzki: On the Radius of Convexity of some Class of Analytic k-Symmetrical Functions.
O promieniu wypukłości pewnej klasy funkcji analitycznych k-symetrycznych.

8. W. Zygmunt: On the Full Solution of the Paratingent Equations.
O pełnym rozwiązaniu równania paratyngensowego.

9. A. Żmurek: Sur la torsion intégrale du type I.
O skręceniu integralnym typu I.

UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTW
LUBLIN Plac Litewski 5 POLAND