ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXV, 10 SECTIO A 1971

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania UMCS

ANDRZEJ WESOŁOWSKI

Certains résultats concernant la classe $S^*(\alpha, \beta)$

O pewnych wynikach uzyskanych w klasie $S^*(\alpha, \beta)$.

О некоторых результатах, полученных в классе $S^*(\alpha,\beta)$

1. Notations.

Désignons par S la classe des fonctions $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ holomorphes et univalentes dans K_1, où $K_r = \{z\colon |z| < r\}$. Soit $S_\alpha^* \subset S$ designe la classe des fonctions α — étoilées, c'est — à — dire des fonctions qui remplissent la condition:

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z \in K_1,\ 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{1,1}$$

Dans le cas particulier $\alpha = 0$ la classe S_0^* se confond avec la classe connue des fonctions étoilées par rapport à l'origine.

Désignons par $S_\gamma \subset S$ la classe des fonctions qui vérifient la condition:

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \gamma\cdot\frac{\pi}{2}, \quad z \in K_1,\ 0 < \gamma \leqslant 1. \tag{1, 2}$$

Cette classe a été étudiée entre autre par D. A. Brannan et W. E. Kirwan [1] et par J. Stankiewicz [4].

Il est clair que S_α^* ainsi que la classe S_γ pour chaques des intervalles correspondants se compose de fonctions étoilées par rapport à l'origine.

Désignons par Ω la classe des fonctions $\omega(z)$ holomorphes dans K_1 qui vérifient les hypothèses du lemme de Schwarz: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ pour $z \in K_1$.

Enfin P désigne la classe des fonctions $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \ldots$ holomorphes dans K_1 qui vérifient la condition:

$$\operatorname{Re} p(z) > 0 \quad \text{pour } z \in K_1. \tag{1, 3}$$

2. La classe $S^*(H)$.

Il est à remarquer que dans la définition de la classe S^*_a aussi bien que dans celle de la classe S_γ intervient la notion de subordination en domaine notamment, dans le premier et le deuxième cas on exige que que l'expression $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ soit contenue dans le domaine univalent contenant le point $w = 1$, qui est situé dans le demi-plan droit.

On peut ramener l'étude des sous-classes de la classe S^*_0 des fonctions étoilées à un problème plus général. Désignons dans ce but par $H(z)$ la fonction de la classe P arbitrairement fixée que l'on suppose en outre univalente dans K_1.

Evidemment l'image du cerle K_1 par la transtormation $H(z)$, que nous désignons par $H(K_1)$ contenue dans le demi-plan droit est un domaine univalent et simplement connexe qui contient point $w = 1$.

Désignerons maintenant par $S^*(H)$ la classe desfonctions $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, telles que l'expression $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ appartient au domaine $H(K_1)$.

Si l'on désigne par $\varphi(z) \dashv_1 \Phi(z)$ la subordination en domaine des fonctions $\varphi(z)$ à la majorante $\Phi(z)$ dans le cercle K_1 c'est — àdire que $\varphi(0) = \Phi(0)$ et qu'il existe $\omega(z) \epsilon\, \Omega$ tel que $\varphi(z) = \Phi(\omega(z))$ alors nous pouvons définir la classe $S^*(H)$ de la manière suivante

$$(2,1) \qquad f(z) \epsilon\, S^*(H) \equiv \frac{zf'(z)}{f(z)} \dashv_1 H(z), \quad z \epsilon\, K_1$$

Si nous admettons dans la définition ci — dessus que $H(z)$ est une fonction, qui transforme d'une manière univalente le cercle K_1 sur le demi-plan $\mathrm{Re}\{w\} \geqslant a$ ou sur l'angle $|\arg w| < \gamma \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < 1$ alors la classe $S^*(H)$ se confondra avec la classe S^*_a, ou avec la classe S_γ.

Il résulte de la définition (2,1) qu'il existe $\omega(z) \epsilon\, \Omega$ tel que

$$(2,2) \qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} = H(\omega(z)).$$

Puisque comme on le sait, il existe une fonction $p(z) \epsilon\, P$ telle que

$$(2,3) \qquad \omega(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \quad \text{pour } z \epsilon\, K_1$$

donc on peut écrire (2,2) sous la forme

$$(2,4) \qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} = H\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right), \quad z \epsilon\, K_1$$

De là

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\left[H\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right) - 1\right]$$

donc

$$\ln\frac{f(z)}{z} = \int_0^z \frac{1}{z}\left[H\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right) - 1\right]dz$$

De là nous obtenons la formule structurale pour la classe $S^*(H)$

$$(2,5) \qquad f(z) = z\cdot\exp\left\{\int_0^z \frac{1}{z}\left[H\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right) - 1\right]dz\right\}.$$

Inversement chaque fonction donnée par la formule (2,5) appartient à $S^*(H)$ ce qu'on vérifie immédiatement.

3. Classe $S^*(\alpha, \beta)$

Le cas particulier de la classe définie $S^*(H)$ est une classe $S^*(\alpha, \beta)$ que nous définions de la manière suivante

$$(3,1)\quad S^*(\alpha, \beta) = S^*(H), \quad \text{où} \quad H = H(z, \alpha, \beta) = \left[(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z} + \alpha\right]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

$$z \in K_1, \; 0 \leqslant \alpha < 1, \; 0 < \beta \leqslant \frac{2}{\pi}.$$

L'étude de cette classe, au moins partielle joue un certain rôle, car dans les cas limités cette classe se confond avec les classes des fonctions étudiées dans la litterature mathematique par example:

$$S^*\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = S^*_\alpha, \; S^*\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = S^*_0, \; S^*(0, \beta) = S_\gamma \quad \text{où } \gamma = \frac{2\beta}{\pi}$$

Le cas $\beta = 0$ est trivial, parce qu'alors la classe $S^*(\alpha, \beta)$ se compose d'une fonction $f(z) \equiv z$.

La fonction $H(z, \alpha, \beta)$ est univalente dans K_1 et transforme le cercle K_1 sur le domaine convexe $H(K_1, \alpha, \beta)$ limité par une courve

$$(3,2) \qquad w = \left(\frac{\alpha}{\cos\theta}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot e^{i\frac{2\beta}{\pi}\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \; 0 < \alpha < 1.$$

Dans le cas $\alpha = 0$ il faut remplacer la courve (3, 2) par les equations

$$(3,3) \quad w = \varrho^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot e^{i\beta} \quad \text{et } w = \varrho^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot e^{-i\beta} \quad \text{où } 0 \leqslant \varrho < \infty, \; 0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

qu'il résulte immédiatement de la forme de la fonction H qui est donnée par la formule (3, 1).

La courve (3, 2) a deux assymptotes qui passent par l'origine et inclinées à l'axe positif réel sous l'angle β et sous l'angle $-\beta$ et coupe cet axe dans le point $a^{\frac{2\beta}{\pi}}$.

À la fonction ainsi choisi $H = H(z, a, \beta)$ la formule structurale (2, 5) passe dans la formule structurale pour la classe des fonctions $S^*(a, \beta)$ à la forme

$$(3,4)\qquad f(z) = z\cdot\exp\left\{\int_0^z \frac{[(1-a)p(z)+a]^{\frac{2\beta}{\pi}}-1}{z}\,dz\right\},\quad p(z)\in P.$$

4. Certains problèmes extremaux dans la classe $S^*(a, \beta)$.

Théorème 4.1. *Dans la classe $S^*(a, \beta)$ pour chaque z fixé, $|z| = r$, $r < 1$ le domaine de la variabilité de l'expression $\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\pi}{2\beta}}$ est le cercle fermé*

$$(4, 1)\qquad \left|\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\pi}{2\beta}} - \frac{1+r^2(1-2a)}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2(1-a)r}{1-r^2}.$$

La fonction extremale est la fonction

$$(4, 2)\qquad f(z) = z\cdot\exp\left\{\int_0^z \frac{1}{z}\left[\left(\frac{1+(1-2a)z}{1-z}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1\right]dz\right\}.$$

Démonstration. De la formule structurale (3,4) il résulte que

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = [(1-a)p(z)+a]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

En élevant à une puissance $\frac{\pi}{2\beta}$ réciproquemnt l'égaelité ci-desseus, nous obtenons après la transformation

$$p(z) = \frac{\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\pi}{2\beta}} - a}{1-a}$$

Comme on sait le domaine de la variabilité $p(z)\in P$ pour le z fixé $|z| = r$ est le cercle dont de diametre posé sur l'axe réel a les bouts dans les points $\frac{1-r}{1+r}, \frac{1+r}{1-r}$. Il en résulte immédiatement le thése du théorème 4, 1.

Comme les corollaires du théorème ci-dessus nous obtenons immédiatement les estimations exactes suivantes:

$$(4,3)\qquad \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \leqslant \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}, \qquad |z|=r$$

$$(4,4)\qquad \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \leqslant \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} \leqslant \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}, \qquad |z|=r$$

$$(4,5)\qquad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{2\beta}{\pi}\arcsin\frac{2(1-\alpha)r}{1+r^2(1-2\alpha)}, \qquad |z|=r.$$

Dans les cas limités il y a des estimations exactes dans les classes respectives de fonctions.

Théorème 4.2. *Pour $f(z) \in S^*(\alpha, \beta)$, $|z| = r < 1$ il y a l'estimation exacte*

$$(4,6)\qquad r\cdot\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}-1\right]dr\right\} \leqslant |f(z)|$$
$$\leqslant r\cdot\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}-1\right]dr\right\}$$

$$(4,7)\qquad \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}\cdot\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}-1\right]dr\right\} \leqslant |f'(z)|$$
$$\leqslant \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}\cdot\exp\left\{\int_0^r \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}}-1\right]dr\right\}$$

La fonction extremale est la fonction quiest donnée par la formule (4, 2).

Demonstration.

$$\ln\frac{f(z)}{z} = \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right| + i\arg\frac{f(z)}{z}$$

d'où

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + r\frac{\partial}{\partial r}\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right| + i\cdot r\frac{\partial}{\partial r}\arg\frac{f(z)}{z}, \qquad |z| = r,$$

c'est — à — dire

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + r\frac{\partial}{\partial r}\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|.$$

En profitant de (4,4) nous avons

$$\left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \leqslant r\frac{\partial}{\partial r}\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1$$

D'où après la division des côtés par r et après l'integration de 0 jusqu'à r nous obtenons l'inégalité (4, 6),.

La deuxième partie du théorème resulte directement de (4, 3) et (4, 6).

Dans le cas limité $\beta = \frac{\pi}{2}$ nous obtenons l'estimation comme dans la classe S^*_a ([3])

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-a)}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^{2(1-a)}}$$

$$\frac{1-r(1-2a)}{(1+r)^{3-2a}} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r(1-2a)}{(1-r)^{3-2a}}$$

Dans le cas $a = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ les estimations (4, 6) et (4,7) passent dans les estimations connues dans la classe S^*_0

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)|^3 \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

Dans le cas $a = 0$ les estimations (4, 6) et (4, 7) passent dans les estimations dans la classe S_γ [1].

Théorème 4,3. *Si* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S^*(a, \beta)$ *alors* $|a_2| \leqslant \frac{4\beta}{\pi}(1-a)$. *La fonction extremale est la fonction qui est donnée par la formule* (4, 2).

Demonstration. Soit $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \in P$ et soit

$$f(z) = z \cdot \exp\left\{\int_0^z \frac{1}{z}\left[\left((1-a)p(z)+a\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1\right] dz\right\}.$$

Dosignons par $A(z) = \dfrac{[(1-a)p(z)+a]^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1}{z}$

Alors

$$f''(z) = 2 \cdot \exp\left\{\int_0^z A(z)\cdot dz\right\} A(z) + z \cdot \exp\left\{\int_0^z A(z)\cdot dz\right\} A^2(z) +$$

$$+ z \cdot \exp\left\{\int_0^z A(z) dz\right\} A'(z).$$

Parce que

$$\lim_{z\to 0} A(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{2\beta}{\pi}(1-a)[(1-a)p(z)+a]^{\frac{2\beta}{\pi}-1} p'(z)}{1} = \frac{2\beta}{\pi}(1-a)p_1)$$

à cause de cela $f''(0) = \frac{4\beta}{\pi}(1-\alpha)p_1$

De là

$$|a_2| = \frac{2\beta}{\pi}(1-\alpha)|p_1|$$

Parce que comme on sait $|p_1| \leqslant 2$, or $|a_2| \leqslant \frac{4\beta}{\pi}(1-\alpha)$. Pour la fonction (4, 2) $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ et $p_1 = 2$, ce qui prouve que l'estimation $|a_2|$ est exacte.

5. Le rayon $r(\alpha, \beta)$ de l'étoilement dans la classe S.

Designons par r_0 le plus grand nombre possible tel, que $\frac{1}{r_0}f(r_0 z) \in S^*(\alpha, \beta)$ où $f(z)$ est une fonction quelconque de la classe S.

Théorème 5,1. *Le nombre r_0 est la racine de l'équation*

$$\frac{2\beta}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\alpha} = \frac{t}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

pour t vérifiant la relation

$$\ln\sqrt{\alpha^2+t^2} + \frac{t}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{t} = 0.$$

Demonstration. Pour la fonction $F(z) \in S$ nous avons (regarde par example [2]/l'estimation exacte pour $z \in K_1$

$$\left|\ln\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \ln\frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r. \tag{5, 1}$$

De là

$$\eta_1 = \ln\frac{zF'(z)}{F(z)} = e^{i\varphi}\ln\frac{1+r}{1-r} \tag{5, 2}$$

Soit

$$f(z) = z\cdot\exp\left\{\int_0^z \frac{1}{z}\left[\left(\frac{1+z(1-2\alpha)}{1-z}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1\right]dz\right\}$$

$$H(z, \alpha, \beta) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \left[(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z} + \alpha\right]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

transforme le cercle K_1 sur le domaine $H(K_1, a, \beta)$ limité par la courve (3, 2).

Ensuite nous avons

$$\ln \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{2\beta}{\pi} \ln \left[(1-a)\frac{1+z}{1-z} + a \right] \tag{5, 3}$$

La fonction qui est à droite de (5, 3) sous le signe du logaritme transforme le cercle K_1 sur le demi-plan $\operatorname{Re}\{w\} > a$.

L'équation du contour de ce demi-plan a la forme $\zeta = a+it$, $0 \leqslant a < 1$, $-\infty < t < +\infty$.

À cause de cela l'équation de contour du domaine de la variabilité a la forme

$$\eta = \frac{2\beta}{\pi}\left(\ln\sqrt{a^2+t^2} + i \operatorname{arctg} \frac{t}{a}\right) \tag{5, 4}$$

Soit $\eta = u+iv$, $\eta_1 = u_1+iv_1$.
Alors de (5, 2) et (5, 4) nous avons

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\beta}{\pi}\ln\sqrt{a^2+t^2}, & u_1 &= \cos\varphi \ln\frac{1+r}{1-r} \\ v &= \frac{2\beta}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} & v_1 &= \sin\varphi\ln\frac{1+r}{1-r} \end{aligned} \tag{5, 5}$$

Pour r près de 0, $\ln \dfrac{zF'(z)}{F(z)}$ se trouve dans le domaine limité par la courve (5, 4). Il existe donc r_0 critique, tel que la courve $\eta_1 = u_1+iv_1$ deviendra une tangente inteurieurement à la précedente. Dans les points de contact doit avoir bien simultanement

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(\varphi) \\ v(t) &= v_1(\varphi) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \frac{u'(t)}{v'(t)} = \frac{u_1'(\varphi)}{v_1'(\varphi)} \tag{5, 6}$$

Ensuite de (5, 5) nous avons

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}} & u_1'(\varphi) &= -\sin\varphi\cdot\ln\frac{1+r}{1-r} \\ v'(t) &= \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}} & v_1'(\varphi) &= \cos\varphi\ln\frac{1+r}{1-r} \end{aligned} \tag{5, 7}$$

De (5, 7) nous obtenons

$$\frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{\alpha}{t}, \qquad \frac{v_1'(\varphi)}{u_1'(\varphi)} = -\operatorname{ctg}\varphi \tag{5, 8}$$

En tenant comte de (5, 8), (5, 5) dans (5, 6) nous obtenons le système des équations

$$\frac{\alpha}{t} = -\operatorname{ctg}\varphi$$

$$\frac{2\beta}{\pi}\ln\sqrt{\alpha^2+t^2} = \cos\varphi \ln\frac{1+r}{1-r} \tag{5, 9}$$

$$\frac{2\beta}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} = \sin\varphi \ln\frac{1+r}{1-r}$$

En présentant $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ de la première équation (5, 9) en dependance de α et t et en mettant dans les équations (5, 9) qui restent nous obtenons

$$\frac{2\beta}{\pi}\ln\sqrt{\alpha^2+t^2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

(5, 10)

$$\frac{2\beta}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} = \frac{t}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

En divisant par les côtés les équations (5, 10) nous obtenons la relation

$$\ln\sqrt{\alpha^2+t^2} + \frac{\alpha}{t}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} = 0 \tag{5, 11}$$

À cause de cela le nombre r_0 est la solution d'une des équations (5, 10) par rapport à l'inconnu r pour t unique positif qui vérifie (5, 11).

Dans les cas limités $\beta = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = 0$ nous obtenons respectivement les rayons r_α ou r_γ des cercles pour lequels les fonctions de la classe S sont de fonctions des classes S_α^* ou S_γ.

Dans le cas limité important $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ de (5, 11) nous obtenons $t = 1$. En mettant dans la deuxième équation (5, 10) nous avons

$$\frac{\pi}{2} = \ln\frac{1+r}{1-r} \qquad \text{d'où } r = \operatorname{th}\frac{\pi}{4} = 0{,}6558\ldots$$

C'est un résultat connu de Grunsky (regarde par example [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brannan, D. A., and Kirwan, W. E., *On Some Classes of Bounded Univalent Functions*, J. London Math. Soc., Second series, 1, 3, (1969). 431-445.

[2] *Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1966.

[3] Pinchuk, B., *On Starlike and Convex Functions of Order α*, Duke Math. J., (35) 4, (1968)., 721-734.

[4] Stankiewicz, J., *Some Remarks Concerning Starlike Functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970) 143-146

STRESZCZENIE

W pracy tej zdefiniowano klasę $S^*(\alpha, \beta) \subset S$ i uzyskano korzystając ze wzoru strukturalnego w tej klasie dokładne oszacowania $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\operatorname{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, $\left|\arg\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right|$, $|a_2|$, jak również promień r_0 koła, w którym każda funkcja klasy S należy do klasy $S^*(\alpha, \beta)$.

РЕЗЮМЕ

В этой работе определено класс $S^*(\alpha, \beta) \subset S$ и пользуясь структурной формулой в этом классе получено точные оценки

$$|f(z)|, \ |f'(z)|, \ \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|, \ |a_2|,$$

а также радиус r_0 круга, в котором каждая функция класса S принадлежит классу $S^*(\alpha, \beta)$.

UNIWERSYTET MARII
CURIE-SKŁODOWSKIEJ

*

Nakład 750 egz. Ark. wyd. 10.
Ark. druk. 8,25. Papier druk. sat.
kl. III 80 g. Oddano do składania
29 IV 1972 r. Druk ukończono
w październiku 1973 r.
Zam. nr 177/72

*

WROCŁAWSKA
DRUKARNIA NAUKOWA

ANNALES

UNIVERSITATIS MARIAE CURIE — SKŁODOWSKA

VOL. XXII/XXIII/XXIV SECTIO A 1968/1969/1970

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE
VOL. XXII/XXIII/XXIV SECTIO A

UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTW
LUBLIN Plac Litewski 5 POLAND