

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania UMCS

ANDRZEJ WESOŁOWSKI

Certains résultats concernant la classe $S^*(\alpha, \beta)$

O pewnych wynikach uzyskanych w klasie $S^*(\alpha, \beta)$.

O некоторых результатах, полученных в классе $S^*(\alpha, \beta)$

1. Notations.

Désignons par S la classe des fonctions $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ holomorphes et univalentes dans K_1 , où $K_r = \{z: |z| < r\}$. Soit $S_\alpha^* \subset S$ désigne la classe des fonctions α — étoilées, c'est — à — dire des fonctions qui remplissent la condition:

$$(1,1) \quad \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z \in K_1, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Dans le cas particulier $\alpha = 0$ la classe S_0^* se confond avec la classe connue des fonctions étoilées par rapport à l'origine.

Désignons par $S_\gamma \subset S$ la classe des fonctions qui vérifient la condition:

$$(1,2) \quad \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \gamma \cdot \frac{\pi}{2}, \quad z \in K_1, \quad 0 < \gamma \leq 1.$$

Cette classe a été étudiée entre autre par D. A. Brannan et W. E. Kirwan [1] et par J. Stankiewicz [4].

Il est clair que S_α^* ainsi que la classe S_γ pour chaque des intervalles correspondants se compose de fonctions étoilées par rapport à l'origine.

Désignons par Ω la classe des fonctions $\omega(z)$ holomorphes dans K_1 qui vérifient les hypothèses du lemme de Schwarz: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ pour $z \in K_1$.

Enfin P désigne la classe des fonctions $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$ holomorphes dans K_1 qui vérifient la condition:

$$(1,3) \quad \operatorname{Re} p(z) > 0 \quad \text{pour } z \in K_1.$$

2. La classe $S^*(H)$.

Il est à remarquer que dans la définition de la classe S_a^* aussi bien que dans celle de la classe S_γ , intervient la notion de subordination en domaine notamment, dans le premier et le deuxième cas on exige que l'expression $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ soit contenue dans le domaine univalent contenant le point $w = 1$, qui est situé dans le demi-plan droit.

On peut ramener l'étude des sous-classes de la classe S_0^* des fonctions étoilées à un problème plus général. Désignons dans ce but par $H(z)$ la fonction de la classe P arbitrairement fixée que l'on suppose en outre univalente dans K_1 .

Evidemment l'image du cercle K_1 par la transformation $H(z)$, que nous désignons par $H(K_1)$ contenue dans le demi-plan droit est un domaine univalent et simplement connexe qui contient point $w = 1$.

Désignerons maintenant par $S^*(H)$ la classe des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, telles que l'expression $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ appartient au domaine $H(K_1)$.

Si l'on désigne par $\varphi(z) \rightarrow_1 \Phi(z)$ la subordination en domaine des fonctions $\varphi(z)$ à la majorante $\Phi(z)$ dans le cercle K_1 c'est — à dire que $\varphi(0) = \Phi(0)$ et qu'il existe $\omega(z) \in \Omega$ tel que $\varphi(z) = \Phi(\omega(z))$ alors nous pouvons définir la classe $S^*(H)$ de la manière suivante

$$(2,1) \quad f(z) \in S^*(H) \equiv \frac{zf'(z)}{f(z)} \rightarrow_1 H(z), \quad z \in K_1$$

Si nous admettons dans la définition ci — dessus que $H(z)$ est une fonction, qui transforme d'une manière univalente le cercle K_1 sur le demi-plan $\operatorname{Re}\{w\} \geq a$ ou sur l'angle $|\arg w| < \gamma \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < 1$ alors la classe $S^*(H)$ se confondra avec la classe S_a^* , ou avec la classe S_γ .

Il résulte de la définition (2,1) qu'il existe $\omega(z) \in \Omega$ tel que

$$(2,2) \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} = H(\omega(z)).$$

Puisque comme on le sait, il existe une fonction $p(z) \in P$ telle que

$$(2,3) \quad \omega(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \quad \text{pour } z \in K_1$$

donc on peut écrire (2,2) sous la forme

$$(2,4) \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} = H\left(\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}\right), \quad z \in K_1$$

De là

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \left[H \left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1} \right) - 1 \right]$$

donc

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \int_0^z \frac{1}{z} \left[H \left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1} \right) - 1 \right] dz$$

De là nous obtenons la formule structurale pour la classe $S^*(H)$

$$(2,5) \quad f(z) = z \cdot \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[H \left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1} \right) - 1 \right] dz \right\}.$$

Inversement chaque fonction donnée par la formule (2,5) appartient à $S^*(H)$ ce qu'on vérifie immédiatement.

3. Classe $S^*(\alpha, \beta)$

Le cas particulier de la classe définie $S^*(H)$ est une classe $S^*(\alpha, \beta)$ que nous définissons de la manière suivante

$$(3,1) \quad S^*(\alpha, \beta) = S^*(H), \quad \text{où} \quad H = H(z, \alpha, \beta) = \left[(1-\alpha) \frac{1+z}{1-z} + \alpha \right]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

$$z \in K_1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 < \beta \leq \frac{2}{\pi}.$$

L'étude de cette classe, au moins partielle joue un certain rôle, car dans les cas limités cette classe se confond avec les classes des fonctions étudiées dans la littérature mathématique par exemple:

$$S^* \left(\alpha, \frac{\pi}{2} \right) = S_\alpha^*, \quad S^* \left(0, \frac{\pi}{2} \right) = S_0^*, \quad S^*(0, \beta) = S_\gamma, \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{2\beta}{\pi}$$

Le cas $\beta = 0$ est trivial, parce qu'alors la classe $S^*(\alpha, \beta)$ se compose d'une fonction $f(z) \equiv z$.

La fonction $H(z, \alpha, \beta)$ est univalente dans K_1 et transforme le cercle K_1 sur le domaine convexe $H(K_1, \alpha, \beta)$ limité par une courbe

$$(3,2) \quad w = \left(\frac{\alpha}{\cos \theta} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot e^{i \frac{2\beta}{\pi} \theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Dans le cas $\alpha = 0$ il faut remplacer la courbe (3,2) par les équations

$$(3,3) \quad w = \varrho^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot e^{i\beta} \quad \text{et} \quad w = \varrho^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot e^{-i\beta} \quad \text{où} \quad 0 \leq \varrho < \infty, \quad 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

qu'il résulte immédiatement de la forme de la fonction H qui est donnée par la formule (3, 1).

La courbe (3, 2) a deux asymptotes qui passent par l'origine et inclinées à l'axe positif réel sous l'angle β et sous l'angle $-\beta$ et coupe cet axe dans le point $a^{\frac{2\beta}{\pi}}$.

À la fonction ainsi choisie $H = H(z, \alpha, \beta)$ la formule structurale (2, 5) passe dans la formule structurale pour la classe des fonctions $S^*(\alpha, \beta)$ à la forme

$$(3,4) \quad f(z) = z \cdot \exp \left\{ \int_0^z \frac{[(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1}{z} dz \right\}, \quad p(z) \in P.$$

4. Certains problèmes extrémaux dans la classe $S^*(\alpha, \beta)$.

Théorème 4.1. Dans la classe $S^*(\alpha, \beta)$ pour chaque z fixé, $|z| = r$, $r < 1$ le domaine de la variabilité de l'expression $\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\pi}{2\beta}}$ est le cercle fermé

$$(4, 1) \quad \left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\pi}{2\beta}} - \frac{1+r^2(1-2\alpha)}{1-r^2} \right| \leq \frac{2(1-\alpha)r}{1-r^2}.$$

La fonction extrémale est la fonction

$$(4, 2) \quad f(z) = z \cdot \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \right] dz \right\}.$$

Démonstration. De la formule structurale (3,4) il résulte que

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = [(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

En élevant à une puissance $\frac{\pi}{2\beta}$ réciproquement l'égalité ci-dessus, nous obtenons après la transformation

$$p(z) = \frac{\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{\pi}{2\beta}} - \alpha}{1-\alpha}$$

Comme on sait le domaine de la variabilité $p(z) \in P$ pour le z fixé $|z| = r$ est le cercle dont de diamètre posé sur l'axe réel a les bouts dans les points $\frac{1-r}{1+r}, \frac{1+r}{1-r}$. Il en résulte immédiatement le théorème 4, 1.

Comme les corollaires du théorème ci-dessus nous obtenons immédiatement les estimations exactes suivantes :

$$(4, 3) \quad \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}}, \quad |z| = r$$

$$(4, 4) \quad \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \leq \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \leq \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}}, \quad |z| = r$$

$$(4, 5) \quad \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{2\beta}{\pi} \arcsin \frac{2(1-\alpha)r}{1+r^2(1-2\alpha)}, \quad |z| = r.$$

Dans les cas limités il y a des estimations exactes dans les classes respectives de fonctions.

Théorème 4.2. Pour $f(z) \in S^*(\alpha, \beta)$, $|z| = r < 1$ il y a l'estimation exacte

$$(4, 6) \quad r \cdot \exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \right] dr \right\} \leq |f(z)|$$

$$\leq r \cdot \exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \right] dr \right\}$$

$$(4, 7) \quad \left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot \exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \right] dr \right\} \leq |f'(z)|$$

$$\leq \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot \exp \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \right] dr \right\}$$

La fonction extrémale est la fonction qui est donnée par la formule (4, 2).

Démonstration.

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right| + i \arg \frac{f(z)}{z}$$

d'où

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right| + i \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \arg \frac{f(z)}{z}, \quad |z| = r,$$

c'est - à - dire

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|.$$

En profitant de (4,4) nous avons

$$\left(\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \leq r \frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \left(\frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1$$

D'où après la division des côtés par r et après l'intégration de 0 jusqu'à r nous obtenons l'inégalité (4, 6),.

La deuxième partie du théorème résulte directement de (4, 3) et (4, 6).

Dans le cas limité $\beta = \frac{\pi}{2}$ nous obtenons l'estimation comme dans la classe S_a^* ([3])

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-a)}} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^{2(1-a)}} \\ \frac{1-r(1-2a)}{(1+r)^{3-2a}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r(1-2a)}{(1-r)^{3-2a}}$$

Dans le cas $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ les estimations (4, 6) et (4,7) passent dans les estimations connues dans la classe S_0^*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \\ \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

Dans le cas $\alpha = 0$ les estimations (4, 6) et (4, 7) passent dans les estimations dans la classe S_ν [1].

Théorème 4.3. Si $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in S^*(\alpha, \beta)$ alors $|a_2| \leq \frac{4\beta}{\pi}(1-\alpha)$.

La fonction extrémale est la fonction qui est donnée par la formule (4, 2).

Démonstration. Soit $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \in P$ et soit

$$f(z) = z \cdot \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[\left((1-\alpha)p(z) + \alpha \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \right] dz \right\}.$$

Designons par $A(z) = \frac{[(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1}{z}$

Alors

$$f''(z) = 2 \cdot \exp \left\{ \int_0^z A(z) \cdot dz \right\} A(z) + z \cdot \exp \left\{ \int_0^z A(z) \cdot dz \right\} A^2(z) + \\ + z \cdot \exp \left\{ \int_0^z A(z) dz \right\} A'(z).$$

Parce que

$$\lim_{z \rightarrow 0} A(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{2\beta}{\pi} (1-\alpha) [(1-\alpha)p(z) + \alpha]^{\frac{2\beta}{\pi} - 1} p'(z)}{1} = \frac{2\beta}{\pi} (1-\alpha) p_1$$

à cause de cela $f''(0) = \frac{4\beta}{\pi}(1-\alpha)p_1$

De là

$$|a_2| = \frac{2\beta}{\pi}(1-\alpha)|p_1|$$

Parce que comme on sait $|p_1| \leq 2$, or $|a_2| \leq \frac{4\beta}{\pi}(1-\alpha)$. Pour la fonction

(4, 2) $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ et $p_1 = 2$, ce qui prouve que l'estimation $|a_2|$ est exacte.

5. Le rayon $r(\alpha, \beta)$ de l'étoilement dans la classe S .

Designons par r_0 le plus grand nombre possible tel, que $\frac{1}{r_0}f(r_0z) \in S^*(\alpha, \beta)$ où $f(z)$ est une fonction quelconque de la classe S .

Théorème 5,1. *Le nombre r_0 est la racine de l'équation*

$$\frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} = \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

pour t vérifiant la relation

$$\ln \sqrt{\alpha^2 + t^2} + \frac{t}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{t} = 0.$$

Démonstration. Pour la fonction $F(z) \in S$ nous avons (regarde par exemple [2]) l'estimation exacte pour $z \in K_1$

$$(5, 1) \quad \left| \ln \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leq \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r.$$

De là

$$(5, 2) \quad \eta_1 = \ln \frac{zF'(z)}{F(z)} = e^{i\varphi} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Soit

$$f(z) = z \cdot \exp \left\{ \int_0^z \frac{1}{z} \left[\left(\frac{1+z(1-2\alpha)}{1-z} \right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1 \right] dz \right\}$$

$$H(z, \alpha, \beta) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \left[(1-\alpha) \frac{1+z}{1-z} + \alpha \right]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

transforme le cercle K_1 sur le domaine $H(K_1, \alpha, \beta)$ limité par la courbe (3, 2).

Ensuite nous avons

$$(5, 3) \quad \ln \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{2\beta}{\pi} \ln \left[(1-\alpha) \frac{1+z}{1-z} + \alpha \right]$$

La fonction qui est à droite de (5, 3) sous le signe du logarithme transforme le cercle K_1 sur le demi-plan $\operatorname{Re}\{w\} > \alpha$.

L'équation du contour de ce demi-plan a la forme $\zeta = \alpha + it$, $0 \leq \alpha < 1$, $-\infty < t < +\infty$.

À cause de cela l'équation de contour du domaine de la variabilité a la forme

$$(5, 4) \quad \eta = \frac{2\beta}{\pi} \left(\ln \sqrt{\alpha^2 + t^2} + i \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \right)$$

Soit $\eta = u + iv$, $\eta_1 = u_1 + iv_1$.

Alors de (5, 2) et (5, 4) nous avons

$$(5, 5) \quad u = \frac{2\beta}{\pi} \ln \sqrt{\alpha^2 + t^2}, \quad u_1 = \cos \varphi \ln \frac{1+r}{1-r}$$

$$v = \frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \quad v_1 = \sin \varphi \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Pour r près de 0, $\ln \frac{zF'(z)}{F(z)}$ se trouve dans le domaine limité par la

courbe (5, 4). Il existe donc r_0 critique, tel que la courbe $\eta_1 = u_1 + iv_1$ deviendra une tangente intérieure à la précédente. Dans les points de contact doit avoir bien simultanément

$$(5, 6) \quad \begin{aligned} u(t) &= u_1(\varphi) & \text{et} & \quad \frac{u'(t)}{v'(t)} = \frac{u'_1(\varphi)}{v'_1(\varphi)} \\ v(t) &= v_1(\varphi) \end{aligned}$$

Ensuite de (5, 5) nous avons

$$(5, 7) \quad \begin{aligned} u'(t) &= \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} & u'_1(\varphi) &= -\sin \varphi \cdot \ln \frac{1+r}{1-r} \\ v'(t) &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} & v'_1(\varphi) &= \cos \varphi \ln \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

De (5, 7) nous obtenons

$$(5, 8) \quad \frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{\alpha}{t}, \quad \frac{v_1'(\varphi)}{u_1'(\varphi)} = -\operatorname{ctg} \varphi$$

En tenant compte de (5, 8), (5, 5) dans (5, 6) nous obtenons le système des équations

$$(5, 9) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha}{t} &= -\operatorname{ctg} \varphi \\ \frac{2\beta}{\pi} \ln \sqrt{\alpha^2 + t^2} &= \cos \varphi \ln \frac{1+r}{1-r} \\ \frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} &= \sin \varphi \ln \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

En présentant $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ de la première équation (5, 9) en dépendance de α et t et en mettant dans les équations (5, 9) qui restent nous obtenons

$$(5, 10) \quad \begin{aligned} \frac{2\beta}{\pi} \ln \sqrt{\alpha^2 + t^2} &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} \ln \frac{1+r}{1-r} \\ \frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} &= \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} \ln \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

En divisant par les côtés les équations (5, 10) nous obtenons la relation

$$(5, 11) \quad \ln \sqrt{\alpha^2 + t^2} + \frac{\alpha}{t} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} = 0$$

À cause de cela le nombre r_0 est la solution d'une des équations (5, 10) par rapport à l'inconnu r pour t unique positif qui vérifie (5, 11).

Dans les cas limités $\beta = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = 0$ nous obtenons respectivement les rayons r_α ou r_γ des cercles pour lesquels les fonctions de la classe S sont de fonctions des classes S_α^* ou S_γ .

Dans le cas limité important $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ de (5, 11) nous obtenons $t = 1$. En mettant dans la deuxième équation (5, 10) nous avons

$$\frac{\pi}{2} = \ln \frac{1+r}{1-r} \quad \text{d'où } r = \operatorname{th} \frac{\pi}{4} = 0,6558 \dots$$

C'est un résultat connu de Grunsky (regarde par exemple [2]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Brannan, D. A., and Kirwan, W. E., *On Some Classes of Bounded Univalent Functions*, J. London Math. Soc., Second series, 1, 3, (1969). 431-445.
- [2] Голузин, Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1966.
- [3] Pinchuk, B., *On Starlike and Convex Functions of Order α* , Duke Math. J., (35) 4, (1968)., 721-734.
- [4] Stankiewicz, J., *Some Remarks Concerning Starlike Functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970) 143-146

STRESZCZENIE

W pracy tej zdefiniowano klasę $S^*(\alpha, \beta) \subset S$ i uzyskano korzystając ze wzoru strukturalnego w tej klasie dokładne oszacowania $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$, $\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|$, $|a_2|$, jak również promień r_0 koła, w którym każda funkcja klasy S należy do klasy $S^*(\alpha, \beta)$.

РЕЗЮМЕ

В этой работе определено класс $S^*(\alpha, \beta) \subset S$ и пользуясь структурной формулой в этом классе получено точные оценки

$$|f(z)|, |f'(z)|, \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}, \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|, |a_2|,$$

а также радиус r_0 круга, в котором каждая функция класса S принадлежит классу $S^*(\alpha, \beta)$.

UNIWERSYTET MARI
CURIE-SKŁODOWSKIEJ

*

Nakład 750 egz. Ark. wyd. 10.
Ark. druk. 8,25. Papier druk. sat.
kl. III 80 g. Oddano do składania
29 IV 1972 r. Druk ukończono
w październiku 1973 r.
Zam. nr 177/72

*

WROCLAWSKA
DRUKARNIA NAUKOWA

12. R. Komin: Power Series in z and \bar{z} .
Szeregi potęgowe względem z i \bar{z}
13. Ф. Г. Кравченко: Области абсолютной сходимости рядов, представляющих K функции многих параметров.
Obszary zbieżności absolutnej szeregów przedstawiających K — funkcje wielu parametrów.
Domains of Absolute Convergence for Series Expressing K — functions of Several Parameters..
14. J. Krzyż: An Extremal Length Problem.
O długości ekstremalnej pewnej rodziny krzywych.
15. R. Kühnau: Koeffizientenbedingungen bei quasikonformen Abbildungen.
Warunki na współczynniki dla odwzorowań quasikonforemnych.
16. J. Ławrynowicz and W. Waliszewski: Conformality and Pseudo-reimannian Manifolds.
Konforemność i rozmaitości pseudoriemannowskie.
17. V. P. Mićić: On the Boundary Correspondence under Quasiconformal Mappings in Space.
O odpowiedniości punktów brzegowych przy odwzorowaniach quasikonforemnych w przestrzeni.
18. P. T. Mocanu: An Extremal Problem for Univalent Functions Associated with the Darboux Formula.
Pewien problem ekstremalny dla funkcji jednolistnych.
19. J. Pałka: Sharp Estimates of $|P(w)|$, $\text{Arg}[P(w)/w]$, $[P'(w)]$, $\text{Arg}P'(w)$ in a Class of Univalent Polynomials.
Ostre oszacowania $|P(w)|$, $\text{Arg}[P(w)/w]$, $P'(w)$, $\text{Arg}P'(w)$ w klasie wielomianów jednolistnych.
20. W. Pleśniak: Quasianalytic Functions of Several Variables.
Funkcje quasianalityczne wielu zmiennych.
21. M. O. Reade and E. J. Złotkiewicz: On the Equation $f(a) = pf(a)$ in Certain Classes of Analytic Functions.
O równaniu $f(z) = pf(a)$ dla pewnych klas funkcji analitycznych.
22. H. Renelt: Über quasikonforme Abbildungen mehrfach zusammenhängender Gebiete durch Lösungen elliptischer Differentialgleichungssysteme.
O odwzorowaniach quasikonforemnych obszarów wielospójnych przy pomocy rozwiązań układów eliptycznych równań różniczkowych.

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE
VOL. XXII/XXIII/XXIV SECTIO A

Biblioteka Uniwersytetu
MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
w Lublinie

4050 25

CZASOPISMA

1971

23. W. C. Royster and T. J. Suffridge: Typical
Wielomiany typowo rzeczywiste.
24. J. Siciak: Analytic Functions in Topological Vector Spaces
Funkcje analityczne w przestrzeni topologicznej wektorowej.
25. L. Siewierski and H. Śmiałkówna: On the Coefficients of Meromorphic Quasi-convex Functions.
O współczynnikach funkcji meromorficznych quasi-wypukłych.
26. M. Skwarczyński: A Class of Domains Determined by an Invariant Property of the Bergman Function.
Klasa obszarów określona przez niezmienniczą własność funkcji Bergmana.
27. J. Stankiewicz: On a Family of Starlike Functions.
O pewnej rodzinie funkcji gwiaździstych.
28. W. Tutschke: Stammfunktionen komplexwertiger Funktionen als Lösungen spezieller komplexer Differentialgleichungen.
Całki pewnych specjalnych równań różniczkowych w dziedzinie zespolonej.
29. T. Winiarski: Approximation and Interpolation Methods in the Theory of Entire Functions of Several Variables.
Metoda aproksymacji i interpolacji w teorii funkcji całkowitych wielu zmiennych.
30. A. Wesołowski: Communiqué des formules variationnelles et des certains résultats reçus dans les sous-classes des fonctions étoilées.
Komunikat o wzorach wariacyjnych i o pewnych wynikach uzyskanych w podklasach funkcji gwiaździstych.
31. E. Złotkiewicz: The Region of Variability of the Ratio $f(b)/f(c)$ within the Class of Meromorphic and Univalent Functions in the Unit Disc.
Obszar zmienności stosunku $f(b)/f(c)$ w klasie funkcji meromorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym.

UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ

BIURO WYDAWNICTW

LUBLIN

Plac Litewski 5

POLAND