ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN-POLONIA
VOL. XXV, 2 SECTIO A 1971

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania UMCS

FRANCISZEK BOGOWSKI et ZOFIA STANKIEWICZ

Généralisation d'un problème relatif à la subordination en module et à la subordination en domaine dans le cas des minorantes de la classe H_0

Uogólnienie zagadnienia związanego z zależnością między podporządkowaniem modułowym a obszarowym w przypadku minorant klasy H_0,

Обобщение проблемы, связанной с зависимостью между подчинением по модулю и по области для минорант из класса H_0

1. Soit T une sous-classe compacte de la classe S des fonctions

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$$

holomorphes et univalentes dans le cercle K_1, où $K_r = \{z : |z| < r\}$. Désignons par H_0 la classe des fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle K_1 et telles que $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ pour $z \in K_1$, par N_0 la clase des fonctions $\omega(z)$ holomorphes dans le cercle K_1 et satisfaisant aux conditions $0 < |\omega(z)| \leqslant 1$. $\omega(0) > 0$ pour $z \in K_1$.

Désignons encore par E_r^0 et $D(r, R, T)$ respectivement les ensembles

$$E_r^0 = \{w : w = \omega(z), |z| \leqslant r, \omega(z) \in N_0\},$$

$$D(r, R, T) = \left\{ w : w = \frac{F(z)}{F(\zeta)}, \quad |z| = r, |\zeta| = R, F(z) \in T \right\}.$$

On dit que la fonction $f(z)$ est subordonnée en module à la fonction $F(z)$ dans le cercle K_1 si

$$|f(z)| \leqslant |F(z)| \text{ pour } z \in K_1 \tag{1.1}$$

et on écrit $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$. La condition (1.1) indique qu'il existe une fonction $\omega(z)$, holomorphe dans K_1, telle que $|\omega(z)| \leqslant 1$ et que

$$f(z) = \omega(z) \cdot F(z).$$

Remarquons que si $f(z) \in H_0$, $F(z) \in T$, la fonction $\omega(z)$ appartient nécessairement à la classe N_0.

D'autre part, si l'on a la relation $f(z) = F(\omega(z))$ pour $z \in K$, où $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < r$, on dit que $f(z)$ est subordonnée en domaine à la fonction $F(z)$ dans le cercle K_r et on écrit

$$(1.2) \qquad f(z) \dashv_r F(z).$$

Si $F(z)$ est une fonction univalente, la condition (1.2) est équivalente à la condition $f(K_r) \subset F(K_r)$.

Dans le travail [3] F. F. Jabłoński a étudié, entre autres, les relations entre l'inégalité des modules et l'inclusion des domaines dans le cas où $f(z)$ appartient à la classe H_0 et la fonction $F(z)$ appartient à différentes sous-classes T de la classe S. Il y a déterminé pour les classes S, S_0^*, $S_{1/2}^*$ les nombres aussi grands que possible $r_0(H_0, S) = 0{,}39\ldots$, $r_0(H_0, S_0^*) = \sqrt{2}-1$, $r_0(H_0, S_{1/2}^*) = 0{,}543\ldots$ tels que l'on ait, indépendamment du choix des fonctions $f(z) \in H_0$ et $F(z) \in T$, l'implication: $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)| \Rightarrow f(K_r) \subset F(K_r)$ pour tout $r \in (0, r_0)$; S_a^* désigne ici une sous-classe de la classe S pour laquelle a lieu l'implication $F(z) \in S_a^* \Rightarrow \operatorname{Re} \dfrac{zF'(z)}{F(z)} > a$ $(a \in \langle 0, 1))$.

Z. Lewandowski et J. Stankiewicz ont étudié dans le travail [1] les relations entre l'inégalité des modules et la subordination en domaine sous une forme plus générale. Ils ont établi, entre autres, une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout $r \in (0, 1\rangle$ il existe un nombre $R_0(r)$ aussi grand que possible tel que l'hypothèse $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$ entraîne la relation $f(K_{R_0(r)}) \subset F(K_r)$, où $R_0(r)$ ne dépend pas du choix particulier des fonctions $f(z)$ et $F(z)$ et ne saurait être remplacé par un nombre plus grand pour $r \in (0, 1\rangle$ fixé. Les auteurs mentionnés ont étudié ce problème pour les fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle K_1 telles que $f(0) = 0$, $f'(0) \geqslant 0$, et pour les fonctions $f(z)$ de la forme $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, $(n \geqslant 2)$, tandis que les fonctions $F(z)$ parcourent différentes sous-classes T de la classe S.

Dans le présent travail nous étudions les relations entre l'inégalité des modules et l'inclusion des domaines sous une forme plus générale dans le cas où $f(z) \in H_0$ et $F(z) \in T$ $(T = S_{1/2}^*,\ T = S_0^* = S^*)$.

2. Théorème 2.1. *Si* $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$ *on a, indépendamment du choix des fonctions* $f(z) \in H_0$, $F(z) \in T$,

$$f(K_{R_0(r)}) \subset F(K_r), \quad r \in (0,1\rangle$$

si et seulement si pour tout $R \in (0, R_0(r))$ *et* $R < r$ *on a*

$$E_R^0 \cap D(r, R, T) = \emptyset.$$

La démonstration du théorème 2.1 peut être omise, car elle est analogue à celle du théorème (2.1) dans le travail [1]. On peut aussi l'énoncer autrement:

Théorème 2.2. *Si* $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, *on a, indépendamment du choix des fonctions* $f(z) \in H_0$, $F(z) \in T$,

$$f(K_{R_0(r)}) \subset F(K_r)$$

pour tout $r \in (0, 1\rangle$, *où* $R_0(r)$ *peut être déterminé comme il suit:*

$$R_0(r) = \sup_{R<r}\{R\colon E_R^0 \cap D(r, R, T) = \emptyset\}$$

ou

$$R_0(r) = \inf_{R<r}\{R\colon E_R^0 \cap D(r, R, T) \neq \emptyset\}.$$

Pour $r \in (0, 1\rangle$ *fixé le nombre* $R_0(r)$ *est le meilleur possible.*

Dans le cas, particulièrement intéressant, où $r \to 1$, on obtient le théorème suivant:

Théorème 2.3. *Si* $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, *on a, indépendamment du choix des fonctions* $f(z) \in H_0$, $F(z) \in T$,

$$f(K_{R_0(1)}) \subset F(K_1),$$

où $R_0(1) = \lim\limits_{r\to 1} R_0(r)$.

3. Nous allons maintenant indiquer une application du théorème 2.2 pour les fonctions $f(z) \in H_0$ et $F(z) \in S^*_{1/2}$.

Théorème 3.1. *Si* $f(z) \in H_0$, $F(z) \in S^*_{1/2}$ *et* $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$ *on a, indépendamment du choix des fonctions* $f(z)$ *et* $F(z)$,

$$f(K_{R_0(r)}) \subset F(K_r)$$

pour tout $r \in (0,1\rangle$, *où*

$R_0(r) = r$ *pour* $r \in (0, r_0\rangle$, r_0 *étant la racine positive unique de l'équation*

$$r^3 + r^2 + r - 1 = 0$$

et $R_0(r)$ *pour* $r \in (r_0, 1\rangle$ *est la racine unique de l'équation* $\varrho_1(\theta_2) = \varrho(\theta_2)$, *où*

$$\varrho_1(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)}\left[1 - rR\cos\theta - \sqrt{(1-rR\cos\theta)^2 - (1-r^2)(1-R^2)}\right]$$

$$\varrho(\theta) = e^{-\frac{1-R^2}{2R}\theta}, \quad \theta \in \langle 0, \pi\rangle$$

et θ_2 *est la plus gramde racine de l'équation*

$$\frac{rR\sin\theta}{\sqrt{(1-rR\cos\theta)^2 - (1-r^2)(1-R^2)}} = \frac{1-R^2}{2R}$$

dans l'intervalle $(0, \pi)$. *Si* $r \in (0, 1\rangle$ *est fixé,* $R_0(r)$ *ne peut être remplacé par un nombre plus grand.*

Démonstration. En vertu du théorème 2.2

$$R_0(r) = \sup_{R<r}\{R\colon E_R^0 \cap D(r, R, S_{1/2}^*) = \emptyset\}$$

Le domaine E_R^0 a été déterminé dans le travail [3]. Le bord de ce domaine est formé d'arcs de spirales logarithmiques d'équations

$$\varrho(\theta) = \begin{cases} e^{-\frac{1-R^2}{2R}\theta} & \theta \in \langle 0, \pi\rangle \\ e^{\frac{1-R^2}{2R}\theta} & \theta \in (-\pi, 0\rangle. \end{cases}$$

Le domaine $D(r, R, S_{1/2}^*)$, déterminé par les auteurs dans le travail [4], est un domaine doublement connexe dont le bord est formé de deux courbes d'équations:

$$\varrho_1(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)}\left[1 - rR\cos\theta - \sqrt{(1-rR\cos\theta)^2 - (1-r^2)(1-R^2)}\right]$$

$$\varrho_2(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)}\left[1 - rR\cos\theta + \sqrt{(1-rR\cos\theta)^2 - (1-r^2)(1-R^2)}\right]$$

où $\varrho_1(\theta) < \varrho_2(\theta)$ pour tout $\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Chacun des domaines E_R^0 et $D(r, R, S_{1/2}^*)$ étant symétrique par rapport à l'axe réel, il suffira de considérer les parties de ces domaines contenues dans le demi-plan supérieur.

Si $r \leqslant r_0$, où $r_0 = 0{,}543\ldots$ est la racine positive unique de l'équation $r^3 + r^2 + r - 1 = 0$, la subordination modulaire des fonctions $f(z) \in H_0$, $F(z) \in S_{1/2}^*$ dans le cercle K_1 implique, comme l'a prouvé F. F. Jabłoński dans le travail [3], la condition $f(K_r) \subset F(K_r)$. Dans ce cas $R_0(r) = r$.

Si $R < r_0$, $r \in (r_0, 1\rangle$, il résulte du théorème 2.1 que les domaines E_R^0 et $D(r, R, S_{1/2}^*)$ sont disjoints, puisque $f(K_R) \subset F(K_R) \subset F(K_r)$. Par contre, si $R = r > r_0$, on a, en vertu du théorème (1.2) [3]

$$E_R^0 \cap D(r, R, S_{1/2}^*) \neq \emptyset.$$

De plus, les domaines E_R^0 et $D(r, R, S_{1/2}^*)$ ont les propriétés suivantes:

a) si R est fixé, $\varrho(\theta)$ est une fonction décroissante de la variable θ; si θ est fixé, elle est une fonction croissante de la variable R,

b) si r et R sont fixés, $\varrho_1(\theta)$ est une fonction décroissante de la variable θ; si r, θ sont fixés elle est une fonction décroissante de la variable R.

Pour tout $r \in (r_0, 1\rangle$ il existe donc un $R_0(r)$ tel que pour $R < R_0(r)$

$$E_R^0 \cap D(r, R, S_{1/2}^*) = \emptyset, \tag{3.2}$$

tandis que pour $R = R_0(r)$ on a

$$E_R^0 \cap D(r, R, S_{1/2}^*) \neq \emptyset .$$

La condition (3.2) est équivalente à l'inégalité $\varrho_1(\theta) < \varrho(\theta)$ ou à l'inégalité

$$\log \frac{\varrho_1(\theta)}{\varrho(\theta)} > 0$$

pour tout $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$.
Considérons la fonction

$$G(\theta) = \log \frac{\varrho_1(\theta)}{\varrho(\theta)}. \tag{3.3}$$

L'équation $G'(\theta) = 0$ est équivalente à la condition

$$\frac{\varrho_1'(\theta)}{\varrho_1(\theta)} = \frac{\varrho'(\theta)}{\varrho(\theta)}. \tag{3.4}$$

Remarquons que l'égalité (3.4) équivaut à ce que les tangentes aux courbes $\varrho(\theta)$ et $\varrho_1(\theta)$ au point sont parallèles.
Après quelques transformations l'équation (3.4) devient

$$\frac{rR\sin\theta}{\sqrt{(1-rR\cos\theta)^2-(1-r^2)(1-R^2)}} = \frac{1-R^2}{2R}. \tag{3.5}$$

Le second membre de l'équation (3.5) ne dépend pas de θ, tandis que le premier admet pour $\theta = \arccos\frac{R}{r}$ un seul maximum local et que ce maximum est égal à $\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$. De plus,

$$\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} > \frac{1-R^2}{2R}$$

pour $R > r_0$, puisque cette inégalité se réduit, après quelques transformations, à l'inégalité $(R^3+R^2+R-1)(R^3-R^2+R+1) > 0$, qui est vérifiée pour $R > r_0 = 0{,}543\ldots$
Par conséquent l'équation (3.5) admet, pour $R > r_0 = 0{,}543\ldots$, exactement deux racines dans l'intervalle $(0, \pi)$. Désignons-les par θ_1 et θ_2, $\theta_1 < \theta_2$. On voit aisément que la fonction $G(\theta)$ admet pour $\theta = \theta_1$ un maximum local positif, pour $\theta = \theta_2$ un minimum local.
Les domaines E_R^0 et $D(r, R, S_{1/2}^*)$ seront disjoints aussi longtemps que

$$G(\theta_2) = \log\frac{\varrho_1(\theta_2)}{\varrho(\theta_2)} > 0.$$

A cause de la propriété (3.1) cette dernière inégalité est vérifiée pour tous les $R < R_0(r)$, où $R_0(r)$ est la racine unique de l'équation

$$\log\frac{\varrho_1(\theta_2)}{\varrho(\theta_2)} = 0. \tag{3.9}$$

L'équation (3.9) est équivalente à l'équation $\varrho_1(\theta_2) = \varrho(\theta_2)$ et la démonstration du théorème est ainsi achevée.

Si $r \in (r_0, 1\rangle$ est quelconque, il serait assez pénible de déterminer θ_2 et $R_0(r)$ dans le théorème 3.1. On y réussit assez facilement dans le cas où $r = 1$. On obtient alors le théorème suivant:

Théorème 3.2. *Si $f(z) \in H_0$, $F(z) \in S^*_{1/2}$ et $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, on a, indépendamment du choix des fonctions $f(z)$ et $F(z)$,*

$$f(K_{R_0}) \subset F(K_1),$$

où $R_0 = 0{,}628\ldots$ est la racine unique de l'équation

$$\log\frac{(1-R^2)(1+R^2)^2}{4R^2\left(2R+\sqrt{R^2(1+R^2)^2-(1-R^2)^2}\right)} + \frac{1-R^2}{2R}\times$$
$$\times\left[2\operatorname{arc\,tg} R + \arccos\frac{1-R^2}{R(1+R^2)}\right] = 0.$$

La constante R_0 ne peut être remplacee par un nombre plus grand.

Démonstration. Si $r = 1$, le bord correspondant du domaine $D(r, R, S^*_{1/2})$ admet l'équation

$$\varrho_1(\theta) = \frac{1-R^2}{2R(1-R\cos\theta)}, \theta \in \langle 0, \pi\rangle$$

et l'équation (3.5) du théorème 3.2 prend la forme

$$\frac{R\sin\theta}{1-R\cos\theta} = \frac{1-R^2}{2R}. \tag{3.10}$$

Après quelques transformations on obtient

$$\frac{2R}{1-R^2}\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{R}. \tag{3.11}$$

En mettant dans (3.11) $\dfrac{2R}{1-R^2} = \operatorname{tg} 2x$, c'est-à-dire $x = \operatorname{arc\,tg} R$, on trouve

$$\cos(\theta - 2x) = \frac{1-R^2}{R(1+R^2)}.$$

Comme $\frac{1-R^2}{R(1+R^2)} \leqslant 1$ pour $R \geqslant r_0$, les solutions de l'équation (3.11) s'exprimeront par les formules:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2\operatorname{arc\,tg} R - \arccos \frac{1-R^2}{R(1+R^2)} \\ \theta_2 &= 2\operatorname{arc\,tg} R + \arccos \frac{1-R^2}{R(1+R^2)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

et appartiendront à l'intervalle $(0, \pi)$, puisque

$$0 < 2\operatorname{arc\,tg} R < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \arccos \frac{1-R^2}{R(1+R^2)} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$2\operatorname{arc\,tg} R > \arccos \frac{1-R^2}{R(1+R^2)}$$

pour tout $R \in (0, 1)$. Par conséquent R_0 est la racine unique de l'équation $\log \frac{\varrho_1(\theta_2)}{\varrho(\theta_2)} = 0$. En posant

$$\theta_2 = 2\operatorname{arc\,tg} R + \arccos \frac{1-R^2}{R(1+R^2)}$$

on obtient l'équation

$$\log \frac{(1-R^2)(1+R^2)^2}{4R^2[2R + \sqrt{R^2(1+R^2)} - (1-R^2)^2]} + \frac{1-R^2}{2R}\left[2\operatorname{arc\,tg} R + \arccos \frac{1-R^2}{R(1+R^2)}\right] = 0. \tag{3.13}$$

Un calcul facile donne $R_0 = 0{,}628\ldots$

4. Théorème 4.1. *Si $f(z) \in H_0$, $F(z) \in S^*$ et $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, on a pour tout $r \in (0, 1\rangle$, indépendamment du choix des fonctions $f(z)$ et $F(z)$,*

$$F(K_{R_0(r)}) \subset F(K_r),$$

où

$R_0(r) = r$ *pour* $r \in (0, r_0\rangle$, r_0 *étant la racine positive de l'équation* $r^2 + 2r - 1 = 0$

et $R_0(r)$ *pour* $r \in (r_0, 1\rangle$ *est la racine unique de l'équation* $\varrho_1(\theta_2) = \varrho(\theta_2)$

$$\varrho_1(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)^2}\Big[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta - \sqrt{[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta]^2 - (1-r^2)^2(1-R^2)^2}\Big]$$

$$\varrho(\theta) = e^{-\frac{1-R^2}{2R}\theta}, \quad \theta \in \langle 0, \pi\rangle$$

et θ_2 est la plus grande racine de l'équation:

$$\frac{4rR\sin\theta}{\sqrt{[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta]^2 - (1-r^2)^2(1-R^2)^2}} = \frac{1-R^2}{2R}$$

dans l'intervalle $(0, \pi)$. *Si* $r \in (0, 1\rangle$ *est fixé,* $R_0(r)$ *ne peut être remplacé par un nombre plus grand.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 3.1.

Le domaine $D(r, R, S^*)$, déterminé dans le travail [4], est un domaine doublement connexe, dont le bord est formé de deux courbes d'équations:

$$\varrho_1(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)^2}\Big[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta - \sqrt{[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta]^2 - (1-r^2)^2(1-R^2)^2}\Big]$$

$$\varrho_2(\theta) = \frac{r}{R(1-r^2)^2}\Big[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta + \sqrt{[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta]^2 - (1-r^2)^2(1-R^2)^2}\Big]$$

$\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$, où $\varrho_1(\theta) < \varrho_2(\theta)$ pour tout $\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Il suffit de considérer les bords des domaines E_R^0 et $D(r, R, S^*)$ constenus dans le demi-plan supérieur.

Si $r \leqslant r_0$, r_0 étant la racine positive de l'équation $r^2 + 2r - 1 = 0$ on a $R_0(r) = r$, car on a alors $f(K_r) \subset F(K_r)$, ce qui a été établi dansle, travail [3].

Si $r \in (r_0, 1\rangle$, on considère la fonction $G(\theta) = \log\dfrac{\varrho_1(\theta)}{\varrho(\theta)}$ et on constate que l'équation $G'(\theta) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{4rR\sin\theta}{\sqrt{[(1+r^2)(1+R^2) - 4rR\cos\theta]^2 - (1-r^2)^2(1-R^2)^2}} = \frac{1-R^2}{2R} \tag{4.1}$$

admet exactement deux racines dans l'intervalle $\langle 0, \pi \rangle$. Cela résulte de ce que le second membre de l'équation (4.1) est indépendant de θ, tandis que le premier admet pour $\theta = \arccos \dfrac{R(1+r^2)}{r(1+R^2)}$ un seul extremu local dans l' intervalle $\langle 0, \pi \rangle$, soit un maximum égal à $\dfrac{2R}{1-R^2}$ et que, de plus,

$$\frac{2R}{1-R^2} > \frac{1-R^2}{2R} \quad \text{pour } R \geqslant r_0 = \sqrt{2}-1.$$

Désignons par θ_1 et θ_2, $\theta_1 < \theta_2$, les racines de l'équation (4.1). La fonction $G(\theta)$ admet pour $\theta = \theta_1$ un maximum local positif, tandis que pour $\theta = \theta_2$ elle a un minimum local. La condition $E_R^0 \cap D(r, R, S^*) = \emptyset$ mène à l'inégalité

$$\log \frac{\varrho_1(\theta_2)}{\varrho(\theta_2)} > 0$$

$R_0(r)$ est donc la racine unique de l'équation $\log \dfrac{\varrho_1(\theta_2)}{\varrho(\theta_2)} = 0$ ou encore de l'équation $\varrho_1(\theta_2) = \varrho(\theta_2)$.

Si $r \epsilon (r_0, 1\rangle$ est quelconque, l'équation $\varrho_1(\theta_2) = \varrho(\theta_2)$ admet une forme très compliquée. Si $r = 1$, dans le théorème 4.1 la valeur de θ_2 se détermine sans peine et on obtient alors le

Théorème 4.2. *Si $f(z) \epsilon H_0$, $F(z) \epsilon S^*$ et $|f(z)| \leqslant_1 |F(z)|$, on a, indépendamment du choix des fonctions $f(z)$ et $F(z)$*

$$f(K_{R_0}) \subset F(K_1),$$

où $R_0 = 0{,}466\ldots$ est la racine unique de l'équation

$$(4.2) \quad \log \frac{(1-R^2)^2(1+R^2)}{8R^2[2R+\sqrt{4R^2-(1-R^2)^2}]} + \frac{1-R^2}{2R} \times \left[2\operatorname{arctg} R + \arccos \frac{1-R^2}{2R}\right] = 0.$$

La constante R_0 ne peut être remplecee par un nombre plus grand.

Démonstration. Si $r = 1$, le bord correspondant du domaine $D(r, R, S^*)$ admet l'équation

$$\varrho_1(\theta) = \frac{(1-R^2)^2}{4R(1+R^2-2R\cos\theta)}$$

et l'équation (4.1) devient, après quelques transformations,

$$(4.3) \quad \frac{2R}{1-R^2}\sin\theta + \cos\theta = \frac{1+R^2}{2R}.$$

En mettant dans (4.3) $\frac{2R}{1-R^2} = \operatorname{tg} 2x$, c'est-à-dire $x = \operatorname{arctg} R$, on obtient

$$\cos(\theta - 2x) = \frac{1-R^2}{2R}.$$

Comme $\frac{1-R^2}{2R} \leqslant 1$ pour $R \geqslant r_0 = \sqrt{2}-1$, les solutions de l'équation (4.3) s'expriment par les formules:

$$\theta_1 = 2\operatorname{arctg} R - \arccos\frac{1-R^2}{2R}$$

$$\theta_2 = 2\operatorname{arctg} R + \arccos\frac{1-R^2}{2R}$$

et, de plus, elles appartiennent à l'intervalle $\langle 0, \pi\rangle$. Par conséquent R_0 est la racine unique de l'équation $\log\frac{\varrho_1(\theta_2)}{\varrho(\theta_2)} = 0$ qui prend alors la forme (4.2).

RÉFÉRENCES

[1] F. Bogowski, Z. Stankiewicz, *Sur la majoration modulaire des fonctions et l'inclusion des domaines dans la classe $S^*_{1/2}$*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, [ouvrage précédent dans cet numéro]

[2] F. F. Jabłoński,, *Sur la subordination en module et en domaine des fonctions holomorphes*, Bull. Acasd. Polon. Sci., 7 (1971), 569-576.

[3] Z. Lewandowski, J. Stankiewicz, *Majoratione modulaire des fonctions et inclusion des domaines*, Bull. Acad. Polon. Sci., 10, (1971), 917-922.

[4] —„—, ——, *Les majorantes modulaires étoilées et l'inclusion des domaines*, Bull. Acad. Polon. Sci. 10, (1971), 923-929

STRESZCZENIE

W tej pracy podajemy metodę wyznaczenia dla każdego $r \in (0, 1\rangle$ możliwie największej liczby $R_0(r)$, takiej, aby z założenia $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ dla $|z| < 1$ wynikała relacja $f(K_{R_0(r)}) \subset F(K_r)$ gdzie $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 \geqslant 0$, jest funkcją holomorficzną, $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ dla $|z| < 1$, zaś $F(z)$ należy do klas $S^*_{1/2}$ lub S^*. Stała $R_0(r)$ nie zależy od szczególnego doboru funkcji $f(z)$ i $F(z)$ i dla ustalonego r nie może być zastąpiona liczbą większą.

Dowodzimy następnie, że jeżeli $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ dla $|z| < 1$ to $f(K_{R_0}) \subset F(K_1)$
gdzie liczby $R_0 = 0{,}628 \ldots$ gdy $F(z) \in S^*_{\frac{1}{2}}$
$R_0 = 0{,}466 \ldots$ gdy $F(z) \in S^*$
są odpowiednio pierwiastkami równań (3.13) i (4.2).

РЕЗЮМЕ

В работе представлен метод установления для каждого $r \in (0, 1\rangle$ как большего числа $R_0(r)$ такого, чтобы из предположения

$$|f(z)| \leqslant |F(z)| \quad \text{для } |z| < 1$$

вытекало соотношение

$$f(K_{R_0(r)}) \subset F(K_r)$$

где $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 \geqslant 0$ есть голоморфная функция, $f(z)/z \neq 0$ для $|z| < 1$, а $F(z)$ относится к классам $S^*_{1/2}$ или S^*. Постоянная $R_0(r)$ не зависит от специального подбора функций $f(z)$ и $F(z)$ и для установленного r не может быть заменена большим числом.

Дальше доказывается, что, если $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ для $|z| < 1$, то $f(K_{R_0}) \subset F(K_1)$, где числа

$$R_0 = 0{,}628 \ldots, \quad \text{если } F(z) \in S^*_{1/2}$$

$$R_0 = 0{,}466 \ldots, \quad \text{если } F(z) \in S^*$$

соответственно являются корнями уравнений (3. 13) и (4.2).