ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXII/XXIII/XXIV, 30 SECTIO A 1968/1969/1970

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

ANDRZEJ WESOŁOWSKI

Communiqué des formules variationnelles et des certains résultats reçus dans les sous-classes des fonctions étoilées

Komunikat o wzorach wariacyjnych i o pewnych wynikach uzyskanych w podklasach funkcji gwiaździstych

Коммюнике о вариационных формулах и некоторых результатах, полученных в подклассах звездообразных функций

1. Désignons par S la classe des fonctions $f(z) = z+a_2z^2+\dots$ holomorphes et univalentes dans K_1, où $K_1 = \{z: |z| < 1\}$. Soit $S_\alpha^* \subset S$ désigne la classe des fonctions α-étoilées, c'est-à-dire des fonctions qui remplissent la condition:

$$(1,1)\qquad \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha,\ z\in K_1,\ 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Dans le cas particulier $\alpha = 0$ la classe S_0^* se confond avec la classe connue des fonctions étoilées par rapport à l'origine.

Désignons par $S_\gamma \subset S$ la classe des fonctions qui vérifient la condition:

$$(1,2)\qquad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \gamma\frac{\pi}{2},\quad z\in K_1,\quad 0 < \gamma \leqslant 1.$$

Cette classe a été étudiée entre autres par D. A. Brannan et W. E. Kirwan [1] et par J. Stankiewicz [5].

Désignons par Ω la classe des fonctions $\omega(z)$ holomorphes dans K_1 qui vérifient les hypothèses du lemme de Schwarz: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ pour $z\in K_1$.

Soit enfin P désigne la classe des fonctions $p(z) = 1+p_1z+p_2z^2+\dots$ holomorphes dans K_1 qui vérifient la condition:

$$(1,3)\qquad \operatorname{Re}p(z) > 0 \quad \text{pour } z\in K_1.$$

2. Il est à remarquer que dans la définition de la classe S_α^* aussi bien que dans celle de la classe S_γ intervient la notion de subordination en domaine, notamment, on exige que l'expression $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ soit contenue dans le domaine univalent contenant le point $w = 1$, qui est situé dans le demiplan droit.

On peut ramener l'étude des sous-classes de la classe S_0^* des fonctions étoilées à un problème plus général. Désignons dans ce but par $H(z)$ la fonction de la classe P arbitrarement fixée que l'on suppose en outre univalente dans K_1.

Evidemment l'image du cercle K_1 par la transformation $H(z)$, que nous désignerons par $H(K_1)$, contenue dans le demi-plan droit, est un domaine univalent et simplement connexe qui contient le point $w = 1$.

Désignerons maintenant par $S^*(H)$ la classe des fonctions $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ telles que l'expression $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ appartient au domaine $H(K_1)$ pour $z \in K_1$.

Si l'on désigne par $\varphi(z) \dashv \Phi(z)$ la subordination en domaine des fonctions $\varphi(z)$ à la majorante $\Phi(z)$ dans le cercle K_1 (c'est-à-dire que $\varphi(0) = \Phi(0)$ et qu'il existe $\omega(z) \in \Omega$ tel que $\varphi(z) = \Phi(\omega(z))$) alors nous pouvons définir la classe $S^*(H)$ de la manière suivante

$$(2,1) \qquad f(z) \in S^*(H) . \equiv . \frac{zf'(z)}{f(z)} \dashv_1 H(z),\ z \in K_1.$$

Si nous admettons dans la définition ci-dessus que $H(z)$ est une fonction, qui transforme d'une manière univalente le cercle K_1 sur le demi-plan $\operatorname{Re} w \geqslant \alpha$ ou sur l'angle $|\arg w| < \gamma\,\frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma \leqslant 1$, alors la classe $S^*(H)$ se confondra avec la classe S_α^*, ou avec la classe S_γ.

Il résulte de la définition (2,1) la formule structurale pour la classe $S^*(H)$:

$$(2,2) \qquad f(z) = z \exp\left\{\int_0^z \frac{1}{z}\left[H\left(\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\right) - 1\right] dz\right\}$$

où $p(z) \in P$.

3. Soit $q(z) \dashv_1 Q(z)$, où $q(z)$ est une fonction holomorphe dans K_1 $Q(z) = A_1z + A_2z^2 + \ldots$ est une fonction holomorphe et univalente dans K_1.

Supposons ensuite que

$$3,1) \qquad p^*(z) = p(z) + A(z, z_0, p(z), p(z_0), e^{i\theta}, e^{-i\theta}) + o(\varrho_0)$$

appartient à la classe P pour des nombres positifs ϱ_0 suffisamment petits, pour $z_0 \in K_1$ arbitrairement fixé et tout $p(z) \in P$.

L'expression $o(\varrho_0)$ est une fonction holomorphe par rapport à z telle que $\lim_{\varrho_0\to 0}\frac{o(\varrho_0)}{\varrho_0}=0$, où la convergence est presque uniforme dans K_1.

Alors on a le theorème suivant

Theorème 3.1. *Dans les hypothèses ci-dessus la fonction*

$$(3,2)\quad q^*(z)=q(z)+\varrho_0\frac{|1-\Phi(q(z))|^2}{2\Phi'(q(z))}\cdot A(z,z_0,p(z),p(z_0),e^{i\theta},e^{-i\theta})+o(\varrho_0)$$

où $p(z)=\dfrac{1+\Phi(q(z))}{1-\Phi(q(z))}$, *$\Phi$ est la fonction inverse de la fonction $Q(z)$, est aussi subordonnée à la fonction $Q(z)$.*

On connait entre autre deux formules variationnelles du type de la formule (3,1) dans la classe P, où la fonction $A(z,z_0,p(z),p(z_0),e^{i\theta},e^{-i\theta})$ est spécialement choisie: la formule de M. S. Robertson [3]

$$(3,3)\quad A(z,z_0,p(z),p(z_0),e^{i\theta},e^{-i\theta})=A_R(z)$$

$$=-(1-|z_0|^2)z\left[\frac{ze^{i\theta}}{z_0(z-z_0)}+\frac{ze^{-i\theta}}{1-\bar{z}_0z}-\frac{e^{i\theta}p(z)}{p(z_0)(z-z_0)}+\frac{e^{-i\theta}zp(z)}{\overline{p}(z_0)(1-\bar{z}_0z)}\right]'$$

où ϱ_0 est remplacé par ϱ^2, et la formule de K. Sakaguchi [4]

$$(3,4)\quad A(z,z_0,p(z),p(z_0),e^{i\theta},e^{-i\theta})=A_S(z)$$

$$=e^{i\theta}\left\{p(z)\frac{1+\bar{z}_0z}{1-\bar{z}_0z}-\overline{p}(z_0)\left[p(z)-\frac{1+\bar{z}_0z}{1-\bar{z}_0z}\right]-1\right\}+$$

$$-e^{-i\theta}\left\{p(z)\frac{z_0+z}{z_0-z}+p(z_0)\left[p(z)-\frac{z_0+z}{z_0-z}\right]-1\right\}$$

où ϱ_0 est remplacé par $\dfrac{\varrho}{2}$.

En admettant dans le theorème 3,1, (3,3) ou (3,4) et les relations:
$p(z)=\dfrac{1+\Phi(q(z))}{1-\Phi(q(z))}$, $(p(z)+1)^2=4\big(1-\Phi(q(z))\big)^{-2}$ et $p'(z)=\dfrac{2\cdot\Phi'(q(z))\cdot q'(z)}{|1-\Phi(q(z))|^2}$, nous obtenons deux formules variationnelles pour la fonction subordonnée:

$$(3,5)\quad q^*(z)=q(z)-\varrho^2\frac{[1-\Phi(q(z))]^2}{2\Phi'(q(z))}\cdot A_R(z)+o(\varrho^2)$$

et

$$(3,6)\quad q^*(z)=q(z)+\varrho\frac{[1-\Phi(q(z))]^2}{4\Phi'(q(z))}\cdot A_S(z)+o(\varrho).$$

La formule variationnelle (3,5) a été démontrée pour la première fois par M. S. Robertson [3]. La formule (3,6) est une nouvelle formule variationnelle pour la fonction subordonnée et diffère essentiellement de la formule (3,5).

4. Soit $f(z)\epsilon S^*(H)$ et posons

$$(4,1)\qquad q(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}-1,\ w=Q(z)=H(z)-1,\quad \text{pour } z\epsilon K_1.$$

Evidemment, pour $q(z)$ et $Q(z)$ ainsi choisis les hypothèses du theorème (3,1) sont remplies.

Nous obtenons donc la formule variationnelle générale dans la classe $S^*(H)$

(4,2)

$$f^*(z)=f(z)\left\{1+\varrho\int\limits_0^z\frac{1}{z}\,\frac{\big(1-\Phi(q(z))\big)^2}{2\Phi'\big(q(z)\big)}A\big(z,z_0,p(z),p(z_0)e^{i\theta},e^{-i\theta}\big)dz\right\}+s(\varrho)$$

où il faut admettre les relations correspondantes entre $p(z)$, $\Phi(z)$ $H(z)$ et $f(z)$.

En mettant dans (4,2) au lieu de $A\big(z,z_0,p(z),p(z_0),e^{i\theta},e^{-i\theta}\big)$ A_R ou A_S nous obtenons deux formules variationnelles dans la classe $S^*(H)$.

5. Nous allons appliquer les considerations générales antérieures jusqu'aux certains problemes extremaux dans la classe $S^*(a,\beta)$ que nous définissons de la manière suivante:

$$(5,1)\qquad S^*(a,\beta)=S^*(H),\ \text{où } H=H(z,a,\beta)=\left[(1-a)\frac{1+z}{1-z}+a\right]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

$$z\epsilon K_1,\ 0\leqslant a<1,\ 0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

L'étude de cette classe, au moins partielle, joue un certain rôle, car dans les cas limités cette classe se confond avec les classes des fonctions étudiées dans la littérature mathematique, par exemple:

$$S^*\left(a,\frac{\pi}{2}\right)=S^*_a,\ S^*\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=S^*_0,\ S^*(0,\beta)=S_\gamma\ \text{ où } \gamma=\frac{2\beta}{\pi}$$

Pour la fonction ainsi choisie $H=H(z,a,\beta)$ la formule structurale générale (2,2) passe dans la formule structurale pour la classe $S^*(a,\beta)$ à la forme

$$(5,2)\qquad f(z)=z\exp\left\{\int\limits_0^z\frac{[(1-a)p(z)+a]^{\frac{2\beta}{\pi}}-1}{z}\,dz\right\},\ p(z)\epsilon P.$$

En profitant des deux formules variationnelles, que résultent de (4,2) nous obtenons dans la classe $S^*(\alpha, \beta)$ deux formules variationnelles à la forme:

$$(5,3)\quad f^*(z) = f(z)\Bigg\{1-\varrho^2(1-|z_0|^2)(1-\alpha)\times$$

$$\times\int\limits_0^z\Bigg\{q'(z)\Bigg[\frac{e^{i\theta}}{[(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}}-\alpha](z_0-z)}+\frac{ze^{-i\theta}}{[(1+\bar{q}_0)^{\frac{\pi}{2\beta}}-\alpha](1-\bar{z}_0z)}\Bigg]+$$

$$+\frac{2\beta}{\pi}\frac{(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}}-\alpha}{(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}-1}}\Bigg[\frac{e^{i\theta}}{[(1+q_0)^{\frac{\pi}{2\beta}}-\alpha](z_0-z)^2}+\frac{e^{-i\theta}}{[(1+\bar{q}_0)^{\frac{\pi}{2\beta}}-\alpha](1-z_0z)^2}+$$

$$+\frac{2\beta}{\pi}\frac{1}{(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}-1}}\Bigg[\frac{e^{-i\theta}}{(1-\bar{z}_0z)^2}-\frac{ze^{i\theta}}{z_0(z_0-z)^2}-\frac{e^{i\theta}}{z_0(z_0-z)}\Bigg]\Bigg\}dz\Bigg\}+o(\varrho^2)$$

$$(5,4)\quad f^*(z) = f(z)\Bigg\{1+\varrho\cdot\frac{\beta}{\pi}\int\limits_0^z\Bigg\{\frac{(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}}-\alpha}{(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}-1}}\times$$

$$\times\Bigg[e^{i\theta}\frac{1+\bar{z}_0z}{1-\bar{z}_0z}-e^{-i\theta}\frac{z_0+z}{z_0-z}-\big(e^{i\theta}\bar{p}(z_0)+e^{-i\theta}p(z_0)\big)\Bigg]+$$

$$+\frac{1-\alpha}{(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}-1}}\Bigg[e^{i\theta}\Bigg(\bar{p}(z_0)\frac{1+\bar{z}_0z}{1-\bar{z}_0z}-1\Bigg)+e^{-i\theta}\Bigg(p(z_0)\frac{z_0+z}{z_0-z}+1\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\frac{dz}{z}\Bigg\}+o(\varrho)$$

$$\text{où } q = q(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}-1,\ p(z) = \frac{(1+q)^{\frac{\pi}{2\beta}}-\alpha}{1-\alpha},\ q_0 = q(z_0).$$

Il est un fait qu'il convient de souligner que dans le cas limite $\beta = \frac{\pi}{2}$ nous obtenons de la formule (5,3) la formule variationnelle pour la classe S^*_α qui ne contient pas l'integrale du côté droit. Cette formule, d'apres ma conviction, est une formule nouvelle jusqu'a present innconue dans la littérature.

Il vaut encore remarquer, que la même formule variationnelle dans la classe S^*_α on peut obtenir en profitant de la relation connue entre la classe S^*_0 et S^*_α, à la forme suivante

$$\varphi(z) = z\left(\frac{\psi(z)}{z}\right)^{1-\alpha}$$

où $\varphi(z)\in S^*_\alpha$ quand $\psi(z)\in S^*_0$.

En mettant ensuite $a = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ dans (5,3) nous obtenons la formule variationnelle connue de Hummel (regarde par example [3]) pour la classe des fonctions étoilées S_0^*.

Si nous mettons $a = 0$ dans la formule (5,3) nous obtenons alors la formule variationnelle pour la classe S_γ qui a été l'objet des examens de D. A. Brannan et W. E. Kirwan [1] et aussi indépendamment d'eux de J. Stankiewicz [5].

Cette formule donne à cause de cela une nouvelle manière de traiter les études de la classe des fonctions dont il est question.

Deuxième formule variationnelle (5,4) pour la classe $S^*(a, \beta)$ dans les cas limites dont il est question, donne un nouveau instrument à l'examen de ces classes et dans le cas limite important $a = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ une nouvelle jusqu'a present inconnue, la formule variationnelle pour la classe S_0^* des fonctions étoilées, qui est indépendante de la formule de Hummel.

De l'indépendance des formules (5,3) et (5,4) témoigne l'application de ces formules, par moi, pour trouver l'estimation exacte $|a_3|$ dans la classe des fonctions $S^*(a, \beta)$.

Theorème 5.1. *Si $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \in S^*(a, \beta)$ alors on a l'estimation exacte suivante:*

$$(5,5)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad |a_3| \leqslant \frac{2\beta}{\pi}(1-a) \quad \textit{pour} \quad 0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{6} \\ &\text{b)}\quad |a_3| \leqslant \frac{2\beta}{\pi}(1-a)\left[\frac{6\beta}{\pi}(1-a)+a\right] \quad \textit{pour} \quad \frac{\pi}{6} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Les fonctions extrémales sont respectivement dans les cas a) et b) les fonctions

$$f_a(z) = z\exp\left\{\int_0^z \left[\left(\frac{1+(1-2a)z^2}{1-z^2}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1\right]\frac{dz}{z}\right\}$$

$$f_b(z) = z\exp\left\{\int_0^z \left[\left(\frac{1+(1-2a)z}{1-z}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} - 1\right]\frac{dz}{z}\right\}$$

6. Dans la classe $S^*(a, \beta)$ en employant la formule structurale on a trouvé ente autres des estimations exactes $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$, $|a_2|$, et caetera, ainsi comme le rayon exact $r_0 \in \langle 0, 1)$ tel que chaque fonction de la classe S est une fonction de la classe $S^*(a, \beta)$. J'ai prouvé notamment le theorème suivant:

Theorème 6.1. *Si* $f(z) \in S$, *alors* $\frac{1}{r_0} \cdot f(r_0 z) \in S^*(\alpha, \beta)$, $0 \leq r_0 < 1$, *où* r_0 *est la racine de l'équation*

$$\frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}$$

pour t *remplissant la relation*

$$\ln \sqrt{a^2+t^2} + \frac{a}{t} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = 0.$$

Dans tous les cas limites dont il etait question les résultats ci-dessus passent dans les résultats connus dans les classes S^*_a, S^*_0 ou S^*_γ par example pour $a = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2} r_0 = \operatorname{th} \frac{\pi}{4} = 0{,}6558\ldots$ ce qui fait le résultat connu de Grunsky (regarde par example [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brannan D. A, and Kirwan, W. E., ***On some classes of bounded univalent functions***, Journal of the London Mathematical Society, Second series, Vol. 1 Part 3 July 1969, 431–443.

[2] Goluzin, G. M., ***Geometrische Funktionentheorie***, Berlin 1957.

[3] Robertson M. S., ***Variational methods for functions with positive real part***, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 102, No 1, January, 1962, p. 82–93.

[4] Koichi Sakaguchi, ***A variational method for functions with positive real part***, J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 287–297.

[5] Stankiewicz, J., ***Some remarks concerning starlike functions***, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences math., astr. et phys., Vol. XVIII, No 3(1970), 143–146.

STRESZCZENIE

W komunikacie podano wzory wariacyjne i dokładne oszacowania pewnych funkcjonałów w zdefiniowanych klasach funkcji $S^*(H)$ i $S^*(\alpha, \beta)$.

РЕЗЮМЕ

В коммюнике даны вариационные формулы и точные оценки некоторых функционалов в определенных классах функций $S^*(H)$ и $S^*(\alpha, \beta)$.