ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXII/XXIII/XXIV, 22 SECTIO A 1968/1969/1970

Mathematisches Institut der Universität, Halle (Saale), DDR

HEINRICH RENELT

Über quasikonforme Abbildungen mehrfach zusammenhängender Gebiete durch Lösungen elliptischer Differentialgleichungssysteme

O odwzorowaniach quasikonforemnych obszarów wielospójnych przy pomocy rozwiązań układów eliptycznych równań różniczkowych

Квазиконформные отображения многосвязных областей решениями эллиптических систем

1. Einleitung

In einem k-fach zusammenhängenden Gebiet G der z-Ebene ($z = x+iy$) seien reelle beschränkte meßbare Funktionen $A_{ij}(x,y)$, $i,j = 1,2$ gegeben mit

$$A_{11} \geqslant k_0 > 0,\ |A_{ij}| \leqslant K_0,\ A_{11}A_{22}-(A_{12}+A_{21})^2/4 \geqslant k_1$$

k_0, k_1, K_0 reelle positive Konstanten.

Gesucht ist ein Homöomorphismus $w(z) = u(z)+iv(z)$ von G auf ein Exemplar einer gewissen noch genauer zu definierenden Klasse von Normalgebieten, z.B. Kreisbereichen, der Lösung des gleichmäßig elliptischen Systems

$$\begin{aligned} v_y &= A_{11}u_x + A_{12}u_y \\ -v_x &= A_{21}u_x + A_{22}u_y \end{aligned} \tag{1}$$

ist. Die Existenz einer solchen Abbildung wurde von S. V. Parter [6] mit Hilfe von Fixpunktmethoden bewiesen. Die Eindeutigkeitsfrage blieb offen. Im Falle des Beltrami-Systems, d.h. für $A_{12} = A_{21}$, $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 1$ ergibt sich die Lösung der hier betrachteten Abbildungsaufgabe aus bekannten Ergebnissen über die Existenz eines Beltramihomöomorphismus für einfach zusammenhängende Gebiete und einem Abbildungssatz für den konformen Fall von R. Courant ([1], S. 178 und S. 187); dieser Courantsche Satz ergibt sich auch durch Grenzübergang aus einem Satz von H. Grötzsch [3]. Hier soll gezeigt werden, wie die Abbildungsaufgabe für das Beltramisystem mittels direkter Variationsmethoden unmittelbar, d.h. ohne Verwendung von Abbildungssätzen der konformen Abbildung für mehrfach zusammenhängende Gebiete, gelöst werden kann. Danach wird kurz auf das allgemeine gleichmäßig elliptische System (1) eingegangen. Zum Schluß werden die Lösungen des Abbildungsproblems im allgemeinen Fall (1) durch eine Extremaleigenschaft charakterisiert. Die Gültigkeit des Riemannschen Abbildungssatzes und des Darstellungstheorems (= similarity principle) werden vorausgesetzt. Um unwesentliche Erörterungen zu vermeiden, sei G durch k analytische geschlossene disjunkte Jordankurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ berandet, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ innerhalb γ_1.

2. Der Fall des Beltrami-Systems

Die Normalgebiete könnten wie bei R. Courant [1], S. 178 (Klasse $\mathcal{N}_a$) gewählt werden. Jedoch um einen Umstand (siehe Satz 2 und die daran anschließende Bemerkung) leichter hervortreten zu lassen, definieren wir die Normalgebiete etwas weniger allgemein: B_0 sei Gebiet der w-Ebene. Sein Rand bestehe aus den k analytischen geschlossenen paarweise disjunkten Jordankurven $\beta_{01}, \ldots, \beta_{0k}$; $\beta_{02}, \ldots, \beta_{0k}$ liege innerhalb β_{01}. Die Gestalt von β_{01} sei beliebig, $\beta_{02}, \ldots, \beta_{0k}$ seien konvex. $\mathcal{N}$ sei die Klasse aller Gebiete B, $\partial B = \{\beta_1, \ldots, \beta_k)\}$, so daß gilt:

1. $\beta_1 = \beta_{01}$,
2. β_j ist Bild von β_{0j} bei einer Abbildung der Form $w' = \tau w + a$ mit $\tau > 0$ reell, a komplex, $j = 2, \ldots, k$,
3. $\beta_1, \ldots, \beta_k$ paarweise disjunkt, $\beta_2, \ldots, \beta_k$ innerhalb β_1,
4. ein fester Punkt P_I innerhalb β_{01} ist innerer Punkt von B.

Dann gilt

Satz 1: *Es gibt genau eine Funktion $w(z)$, die*

1. *G umkehrbar eindeutig auf ein $B \in \mathcal{N}$ abbildet,*
2. *Lösung von (1) für $A_{12} = A_{21}$, $A_{11}A_{22} - A_{12} \equiv 1$ ist,*
3. *einen willkürlich vorgegebenen Punkt $Q_R \in \gamma_1$ auf einen willkürlich vorgegebenen Punkt $P_R \in \beta_1$ und einen willkürlich vorgegebenen Punkt $Q_I \in G$ auf P_I abbildet.*

Zum Beweis: Die A_{ij} seien stetig in $\bar{G}$. Für nur meßbare beschränkte A_{ij} folgt der Satz durch Approximation aus der Gültigkeit des Satzes für stetige A_{ij}.

Durch formale Umkehrung erhält man aus (1)

$$y_u = \beta x_u - \alpha x_v \tag{2}$$
$$y_v = \alpha x_u + \beta x_v$$

mit $\alpha(x, y) = 1/A_{11}(x, y)$, $\beta(x, y) = A_{12}(x, y)/A_{11}(x, y)$.

Satz 1 ist bewiesen, wenn man einen Homöomorphismus $z(w)$ gefunden hat, der ein $B \in \mathcal{N}$ auf G abbildet und Lösung von (2) ist.

Sei

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} (\alpha^2+\beta^2)/\alpha & 0 & -\beta/\alpha & 0 \\ . & (\alpha^2+\beta^2)/\alpha & 0 & -\beta/\alpha \\ . & . & 1/\alpha & 0 \\ . & . & . & 1/\alpha \end{pmatrix},$$

$\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{A}$ sei symmetrisch,

$$p^T = (x_u, x_v, y_u, y_v), \vartheta(z(w), B) = \int_B p^T \mathcal{A} p \, du\, dv.$$

Dieses Funktional tritt formal gesehen bereits in [2] auf. Allerdings sind dort (sinngemäß) α, β Funktionen von w, und nicht von $z(w)$.

Es sei $B \in \mathcal{N}$. Das Funktional $\vartheta(z(w), B)$ wird in der Funktionenklasse $Q(K, B)$ betrachtet, die folgendermaßen definiert ist: $z(w) \in Q(K, B)$ genau dann, wenn gilt

1. $z(w)$ stetig in $\overline{B}$, $z(w)$ aus $W_2^1(B)$, $z(B) \subseteq \overline{G}$, $z(\partial B) = \partial G$, die Abbildung von $\partial B \to \partial G$ durch $z(w)$ sei monoton.
2. $x_u y_v - x_v y_u \geqslant 0$.
3. $\vartheta(z(w), B) \leqslant K < \infty$, K eine genügend große positive reelle Konstante.
4. $z(P_R) = Q_R$, $z(P_I) = Q_I$.
5. Für irgend zwei stückweise analytische geschlossene Jordankurven δ_1, δ_2, die in $\overline{B}$ enthalten sind und für deren Innengebiete D_1, D_2 die Bedingung $D_1 \subseteq D_2$ erfüllt ist, gilt $\max_{w \in \delta_2} |z(w) - z(w_1)| \leqslant \max_{w \in \delta_1} |z(w) - z(w_1)|$ für beliebiges $w_1 \in D_1 \cap B$.

Durch 5. wird die gleichgradige Stetigkeit in $Q(K, B)$ gesichert. Außerdem wird die Degeneration von Gebietsfolgen $B_n \in \mathcal{N}$ in Zusammenhang mit Variationsproblem 2 (siehe unten) verhindert. $Q(K, B)$ ist nicht leer. Zum Beispiel ist die möglichst konforme Abbildung im Sinne von Grötzsch (= extremal quasikonforme Abbildung im Sinne von Teichmüller) von B auf G in $Q(K, B)$ enthalten, wenn K hinreichend groß ist.

Variationsproblem 1: *Gesucht ist ein $z^*(w) \in Q(K, B)$, für das $\vartheta(z^*(w), B) = \inf_{z \in Q(K,B)} \vartheta(z, B)$ ist.*

Es existiert mindestens eine Lösung. Für e i n e solche Lösung schreiben wir $z(w, B)$.

Variationsproblem 2: *Gesucht ist ein* $B^* \in \mathcal{N}$, *so daß* $\vartheta(z(w, B^*), B^*) = \inf\limits_{B \in \mathcal{N}} \vartheta(z(w, B), B)$ *ist.*

Es existiert mindestens eine Lösung von VP 2 (VP = Variationsproblem). Nun kann man genau so vorgehen, wie es in [1] vorgezeichnet ist, um nachzuweisen, daß die Lösung von VP 2 Lösung von (2) ist:

Bei Courantscher Variation des Parameterbereichs B erhält man für die 1. Variation V

$$V = \int\limits_B \varphi(w)(\lambda + i\mu)_{\bar{w}}\,du\,dv, \tag{3}$$

wobei $\varphi(w)$ ein Ausdruck in $x_u, x_v, y_u, y_v, \alpha, \beta$ ist.

Für dieses $\varphi(w)$ ergibt sich: Ist $z(w)$ Lösung von VP 1, so ist $\varphi(w)dw^2$ ein auf $\partial B \setminus P_R$ reelles, in $B \setminus P_I$ analytisches quadratisches Differential. In P_R, P_I können höchstens Pole 1. Ordnung vorliegen.

Für die Lösung von VP 2 ist $\varphi(w) = 0$, was äquivalent mit (2) ist. Es bleibt Schlichtheit und eindeutige Bestimmtheit der Abbildung zu zeigen. Beides gelingt mit Hilfe des im konformen Fall in diesem Zusammenhang erstmalig von T. Carleman (vgl. [1], [3]) angewendeten Argumentprinzips in Verbindung mit dem Darstellungstheorem ([4] S. 273).

In Zusammenhang mit VP 1 ergibt sich noch etwas allgemeiner folgender

Satz 2: *Schreibt man statt für einen einzigen Punkt* P_I *für endlich viele verschiedene Punkte* $P_1, \ldots, P_m \in B$ *die Bildpunkte* $z(P_1), \ldots, z(P_m)$, $z(P_i)$ *sämtlich verschieden, vor, so hat VP 1 ebenfalls mindestens eine Lösung. Das dabei entstehende* $\varphi(w)dw^2$ *ist reell auf* ∂B *und analytisch in* $B \setminus \{P_1, \ldots, P_m\}$. *In den* $P_1, \ldots, P_m$ *können höchstens Pole 1. Ordnung vorliegen.*

Die Lösungen von VP 1 haben damit eine gewisse Ähnlichkeit mit den möglichst konformen Abbildungen im Sinne von Grötzsch. Es erhebt sich die Frage — worauf mich Herr R. Kühnau hinwies — ob sich die möglichst konformen Abbildungen im Sinne von Grötzsch unter die Lösungen von VP 1 bei passenden α, β einordnen lassen. Für den Rechtecksfall vgl. [5].

3. Das allgemeine gleichmäßig elliptische System

Im allgemeinen gleichmäßig elliptischen Fall (1) lautet das analoge Gleichungssystem zu (2)

$$\begin{aligned} y_u &= -\gamma x_u - \delta x_v \\ y_v &= \alpha x_u + \beta x_v \end{aligned} \tag{2'}$$

mit $\alpha = 1/A_{11}$, $\beta = A_{12}/A_{11}$, $\gamma = -A_{21}/A_{11}$, $\delta = (A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})/A_{11}$ und

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \alpha D/D_0 & (\beta+\gamma)D/2D_0 & -(\beta-\gamma)\alpha/2D_0 & -(\beta^2-\gamma^2)/4D_0 \\ \cdot & \delta D/D_0 & -(\beta^2-\gamma^2)/4D_0 & -(\beta-\gamma)\delta/2D_0 \\ \cdot & \cdot & \alpha/D_0 & (\beta+\gamma)/2D_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \delta/D_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{A}^T = \mathscr{A},\ D = \alpha\delta-\beta\gamma,\ D_0 = \alpha\delta-(\beta+\gamma)^2/4.$$

Mit diesem $\mathscr{A}$ definieren wir wieder $\vartheta(z(w), B) = \int_B p^T \mathscr{A} p\, du\, dv$, $z(w) \in Q(K, B)$. VP 1 und VP 2 sind wieder lösbar. Für die 1. Variation erhält man

$$V = \int_B [\varphi_1(w)(\lambda+i\mu)_{\bar{w}} + \varphi_2(w)(\lambda+i\mu)_w]\,du\,dv, \tag{3'}$$

wobei φ_1, φ_2 Ausdrücke in $x_u, x_v, y_u, y_v, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind. (2′) ist äquivalent mit $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Der Nachweis von $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ für die Lösung von VP 2 macht indes erhebliche Schwierigkeiten. Er gelingt unter der Voraussetzung, daß VP 1 bei genügend oft stetig differenzierbaren Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine stetig differenzierbare Lösung $z(w)$ in $Q(K, B)$ besitzt. Letzteres muß jedoch noch offen bleiben. Wenn man weiß, daß die Lösung von VP 2 (2′) erfüllt, folgt die Homöomorphieeigenschaft und die Eindeutigkeit wie im Beltrami-Fall.

4. Eine Extremaleigenschaft

$\vartheta(z(w), B)$ sei wie in 3. definiert. Dann gilt

Satz 3: *Für jeden orientierungserhaltenden Homöomorphismus $w(z)$ von G auf ein $B \in \mathscr{N}$, dessen Umkehrung $z(w) \in W_2^1(B)$ ist, gilt*

$$\vartheta(z(w), B) \geqslant 2|G|,$$

$|G|$ das Lebesgue-Maß von G, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $w(z)$ Lösung von (1) ist.

Den Beweis erhält man durch Betrachtung der positiv semidefiniten quadratischen Form $p^T \mathscr{A} p - 2(x_u y_v - x_v y_u)$ in x_u, x_v, y_u, y_v.

LITERATUR

[1] Courant, R., *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, New York 1950.

[2] Gergen, J. J. and Dressel, F. G., *Mapping for elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 151–178.

[3] Grötzsch, H., a) *Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche*, 1, und 2, Mitteilung, Leipz. Ber. 87 (1935), 145–158 und 159–167.
b) *Zur Geometrie der konformen Abbildung*, Hallische Monographien Nr. 16 (1950), 5–11.

[4] Kühnau, R., *Herleitung einiger Verzerrungseigenschaften konformer und allgemeinerer Abbildungen mit Hilfe des Argumentprinzips*, Math. Nachr. 39 (1969), 249–275.

[5] Ozawa, M., *On Grötzsch's extremal affine mapping*, Kōdai Math. Sem. Rep. 8 (1956), 112–114.

[6] Parter, S. V., *On mappings of multiply connected domains by solutions of partial differential equations*, Comm. pure appl. Math. 13 (1960), 167–182.

STRESZCZENIE

Autor rozważa układ

$$-v_x = a_{21} u_x + a_{22} u_y$$

$$v_y = a_{11} u_x + a_{12} u_y$$

jednostajnie eliptyczny o współczynnikach a_{ij} mierzalnych i ograniczonych w obszarze k-spójnym G. Wykazuje istnienie i jednoznaczność homeomorfizmów odwzorowujących G quasikonforemnie na pewne obszary kanoniczne, scharakteryzowane przez pewne własności ekstremalne.

РЕЗЮМЕ

Автор рассматривает равномерно эллиптическую систему

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} -v_x &= a_{21} u_x + a_{22} u_y \\ v_y &= a_{11} u_x + a_{12} u_y \end{aligned}$$

с измеримыми и ограниченными коэффициентами a_{ij} в κ-связной области G. Доказано существование и однозначность гомеоморфизмов, отображающих G квазиконформно на некоторые канонические области, охарактеризованные некоторыми экстремальными свойствами.