ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXII/XXIII/XXIV, 15 SECTIO A 1968/1969/1970

Mathematisches Institut der Universität, Halle (Saale), DDR

REINER KÜHNAU

Koeffizientenbedingungen bei quasikonformen Abbildungen

Warunki na współczynniki dla odwzorowań quasikonforemnych

Условия для коэффициентов квазиконформных отображений

I. Ist eine schlichte stetig differenzierbare und mit positiver Funktionaldeterminante versehene Abbildung $w = w(z)$ eines Gebietes G der z-Ebene gegeben, so gehen zu einem Punkt z konzentrische infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen mit einem gewissen Hauptachsenverhältnis $p(z) \geqslant 1$ über. Erfüllt diese "Dilatation" der Abbildung überall in G die Ungleichung

(1) $$p(z) \leqslant Q$$

mit einem $Q \geqslant 1$, so nennt man die Abbildung heute [1] bekanntlich Q-quasikonform im Sinne von Grötzsch. Die Voraussetzung der Differenzierbarkeit läßt sich dabei noch durch neuere Definitionen stark abschwächen. Für $Q = 1$ erhält man die konformen Abbildungen.

Wie schon von H. Grötzsch in Beispielen durchgeführt, lassen sich zahlreiche Extremalprobleme bei konformen Abbildungen auch bei Q-quasikonformen Abbildungen betrachten, und die Lösung besitzt sogar eine analoge Gestalt und wird fast durch die gleiche Schlußweise gewonnen wie im konformen Falle. Man denke z.B. an die bekannte Aufgabe von H. Grötzsch, unter allen Q-quasikonformen Abbildungen $w = w(z)$ eines außen vom Einheitskreis und innen von endlich vielen weiteren Randkomponenten berandeten Gebietes G auf ein ebensolches diejenigen zu bestimmen, für die in der hyperbolischen Ausmessung der Einheitskreisscheibe der Abstand zwischen $w(z_1)$ und $w(z_2)$ bei in G fixierten Punkten z_1 und z_2 maximal bzw. minimal ausfällt. Bis auf noch mögliche anschließende lineare Transformation des Einheitskreises in sich gibt es jeweils genau eine Extremalfunktion. Bei dieser sind die Bildrandkomponenten Schlitze auf der Schar der zu $w(z_1)$ und $w(z_2)$

konfokalen Ellipsen (im Maximalfalle) bzw. (konvexen) Hyperbeln (im Minimalfalle) der hyperbolischen Geometrie, und es ist $p(z) \equiv Q$, wobei die großen Achsen der in der w-Ebene als Bilder infinitesimaler Kreise erscheinenden infinitesimalen Ellipsen ebenfalls auf dieser Schar liegen [7].

II. Es gibt jedoch viele Extremalprobleme der konformen Abbildung, die sich in dieser Weise nicht auf quasikonforme Abbildungen übertragen lassen. Man denke hierbei allgemein an Koeffizientenprobleme, z.B. an das folgende bekannte von H. Grötzsch und R. de Possel gelöste. Unter allen durch

$$w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \tag{2}$$

hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen eines $z = \infty$ enthaltenden endlich vielfach zusammenhängenden Gebietes G sind diejenigen gesucht, für die

$$\operatorname{Re} a_1 = \text{maximal} \tag{3}$$

ausfällt. Eine Betrachtung einer solchen Aufgabe für Q-quasikonforme Abbildungen scheitert natürlich schon einfach daran, daß bei Q-quasikonformen Abbildungen i. allg. überhaupt keine Koeffizienten auftreten, da ja Potenz— oder Laurentreihenentwicklungen nicht möglich sind. Unter anderem aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, die Dilatationsbeschränkung der Form (1) zu ersetzen durch eine allgemeinere der Form

$$p(z) \leqslant p_0(z), \tag{4}$$

wobei $p_0(z)$ eine geeignete (z.B. stückweise glatte) vorgegebene Ortsfunktion ist. Auf die bei diesen — etwa „$p_0(z)$—quasikonform" zu nennenden — Abbildungen anfallenden Extremalprobleme hat wohl zuerst O. Teichmüller [9] explizit hingewiesen. In einer Reihe von Arbeiten [4], [5], [6] (vgl. auch die dort zitierten Arbeiten verwandter Tendenz von C. Andreian Cazacu) wurde nun gezeigt, daß sich durch eine einfache Ausgestaltung der auf H. Grötzsch zurückgehenden Methode der Extremalmetrik auch diese Extremalprobleme behandeln lassen. Koeffizientenprobleme sind einfach dadurch jetzt mit erfaßbar, daß man bei der Dilatationsbeschränkung (4) die Möglichkeit hat, in geeigneten Teilgebieten $p_0(z) \equiv 1$ zu setzen, so daß dort die zur Konkurrenz zugelassenen Abbildungen notwendig konform sind, also Potenz— bzw. Laurentreihenentwicklungen möglich werden. Zum Beispiel lautet die Lösung von Extremalproblem (3), wenn man jetzt von den zur Konkurrenz zugelassenen Abbildungen von G nicht Konformität, sondern schwächer (4) verlangt mit einer in G definierten Ortsfunktion, wobei $p_0(z) \equiv 1$

sei in einer Umgebung von $z = \infty$ [6]: *Es gibt genau eine Extremalfunktion $w(z) = u + iv$, und bei dieser (und nur bei dieser) sind die Bildrandkomponenten zur reellen Achse parallele Schlitze, und es ist das elliptische System* ($z = x + iy$)

$$u_x = p_0 v_y, \quad u_y = -p_0 v_x \tag{5}$$

erfüllt.

Bei allgemeineren Extremalproblemen ist dieses System (5) von einer mit einem geeigneten quadratischen Differential gebildeten Hilfsfunktion erfüllt. Man kann dann auch z.B. das General Coefficient Theorem von J. A. Jenkins für derartige $p_0(z)$-quasikonforme Abbildungen verallgemeinern [6], und überhaupt kann man vermuten, daß das bekannte Teichmüllersche Prinzip über die Beschreibung der Lösungen von Extremalproblemen bei konformen und Q-quasikonformen Abbildungen auch für $p_0(z)$-quasikonforme Abbildungen richtig bleibt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß eine Behandlung von Extremalproblemen bei $p_0(z)$-quasikonformen Abbildungen auch durch die Variationsmethoden von P. P. Belinskii und M. Schiffer möglich ist.

III. Schließlich sei bemerkt, daß sich hier auch die Klasse der konformen Abbildungen eines von endlich vielen geschlossenen und etwa analytischen Jordankurven berandeten Gebietes G, für die eine Q-quasikonforme Fortsetzung in das Komplement von G möglich ist (so daß insgesamt eine stetige schlichte Abbildung der Vollebene erscheint), einordnen läßt. Dazu wird $p_0(z) \equiv 1$ in G und $p_0(z) \equiv Q$ im Komplement gesetzt. Da sich jede gegebene konforme Abbildung von G durch eine solche mit einer Q-quasikonformen Fortsetzung beliebig gut approximieren läßt, indem man Q hinreichend groß wählt, erhält man die Lösung von Extremalproblemen bei konformer Abbildung von G (bis auf die Diskussion des Gleichheitszeichens bei der Ungleichung für das zugehörige Funktional) durch folgenden Grenzübergang [6, Seite 5]. Man löst zunächst das gleiche Extremalproblem bei den $p_0(z)$ — quasikonformen Abbildungen der Vollebene, wobei $p_0(z) \equiv 1$ in G und $p_0(z) \equiv Q$ im Komplement gesetzt wird, und führt anschließend bei den Extremalfunktionen bzw. den Ungleichungen für das Funktional den Grenzübergang $Q \to \infty$ durch. (Durch einen analogen Grenzübergang lassen sich übrigens allgemeiner Extremalprobleme bei konformer Abbildung eines Gebietssystems auf nicht überlappende Gebiete behandeln).

Dabei treten interessante Grenzübergangsphänomene auf. So kann es vorkommen [5b], daß bei gewissen Normierungen zu jedem (endlichen) Q genau eine Extremalfunktion existiert, dagegen im Grenzfalle unendlich viele. Ein anderes Grenzübergangsphänomen besteht — an einem Beispiel erläutert — in folgendem. Sei $\Sigma(Q)$ die Klasse der durch (2) normierten schlichten konformen Abbildungen von $|z| > 1$, die sich zu einer Q-quasikonformen Abbildung der Vollebene jeweils fortsetzen lassen. Nach [6] ist der genaue Wertebereich der Bilder $w(z_1)$ eines fixierten Punktes z_1 auf $|z| = 1$ eine abgeschlossene Kreisscheibe. Dagegen ist der genaue Wertebereich im Grenzfalle $Q \to \infty$, wobei dann also die bekannte Klasse Σ der schlichten konformen und durch (2) normierten Abbildungen von $|z| > 1$ vorliegt, eine offene Kreisscheibe unter Hinzunahme nur eines einzigen Randpunktes (vgl. hierzu [2]).

IV. Da sich die Notwendigkeit der klassischen Grunskyschen Koeffizientenbedingungen auch mit der Methode der Extremalmetrik beweisen läßt, ist es natürlich, daß eine Verallgemeinerung auf $p_0(z)$-quasikonforme Abbildungen möglich ist, was in [8] durchgeführt wurde. In dem Spezialfalle, in dem $p_0(z) \equiv 1$ für $|z| > 1$ und $p_0(z) \equiv Q$ für $|z| < 1$ und also das abzubildende Gebiet die ganze z-Ebene ist, lautet das Ergebnis so: *Notwendig für $w(z) \epsilon \Sigma(Q)$ ist das Erfülltsein der Bedingungen*

$$\left|\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l\right| \leqslant q \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{k} \quad mit \quad q = \frac{Q-1}{Q+1} \tag{6}$$

für alle $n \geqslant 1$ und alle Systeme komplexer Zahlen x_k. Dabei werden die Hilfskoeffizienten a_{kl} wie üblich gemäß

$$\log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta} = - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_{kl}}{z^k \zeta^l}$$

gebildet. Ungleichung (6) ist scharf (mit explizit angebbaren Extremalfunktionen), d.h. der genaue Wertebereich des Funktionals $\sum a_{kl} x_k x_l$ ist bei fixierten x_k die durch (6) gegebene abgeschlossene Kreisscheibe. Im Grenzfalle $Q \to \infty$ erhält man die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen wieder (vgl. die Bemerkungen unter III).

Aus (6) erhält man für $w(z) \epsilon \Sigma(Q)$ z. B. die konkreten scharfen Koeffizientenabschätzungen bei der Entwicklung (2)

$$|a_1| \leqslant q, \quad |a_2| \leqslant \tfrac{2}{3} q. \tag{7}$$

Das Gleichheitszeichen steht z.B. im Falle $|a_1| \leqslant q$ genau dann, wenn $w(z)$ mit reellem θ von der Form

$$w(z) = \begin{cases} z + q e^{2i\theta} z^{-1} & \text{für} \quad |z| \geqslant 1 \\ z + q e^{2i\theta} \bar{z} & \text{für} \quad |z| \leqslant 1 \end{cases} \tag{8}$$

ist. Dabei geht $|z| = 1$ in eine gewisse zu $w = 0$ konzentrische Ellipse über.

Ferner folgt für $w(z)\in\Sigma(Q)$ die asymptotische scharfe Abschätzung

$$(9)\qquad |a_n|\leqslant\frac{2}{n+1}\,q+O(q^2),$$

wobei $O(q^2)/q^2$ beschränkt bleibt für $q\to 0$, d.h. $Q\to 1$.

Analoges ergibt sich für die Klasse $S(Q)$ der für $|z|<1$ schlichten konformen und in $z=0$ durch $w(z)=z+A_2z^2+\ldots$ normierten Abbildungen $w(z)$, die sich zu einer Q-quasikonformen Abbildung der Vollebene mit $w(\infty)=\infty$ fortsetzen lassen. Zum Beispiel gilt dann die scharfe Abschätzung [6], [8]: $|A_2|\leqslant 2q$. Jedoch lautet die analoge scharfe Abschätzung für den n-ten Koeffizienten nicht einfach $|A_n|\leqslant nq$. Das ergibt sich schon aus der asymptotisch scharfen Abschätzung

$$|A_n|\leqslant\frac{2}{n-1}\,q+O(q^2)\quad\text{für}\quad q\to 0.$$

V. Ob jedoch (6) umgekehrt auch hinreichend dafür ist, daß sich die Abbildung $w(z)\in\sum$ zu einer Q-quasikonformen Abbildung der Vollebene fortsetzen läßt, bleibt eine offene Frage. Jedoch ergibt sich in dieser Richtung das folgende schwächere Resultat: *Ist für $w(z)\in\sum$ stets (d.h. für alle Systeme x_k) die Ungleichung* (6) *mit einem $Q<2$ (d.h. $q<1/3$) erfüllt, dann ist zumindest*

$$w(z)\in\sum\left(\frac{2Q-1}{2-Q}\right).$$

Zum Beweis folgt nach [8], falls stets (6) erfüllt ist, zunächst $|\{w,z\}|\leqslant 6q/(|z|^2-1)^2$ für $|z|>1$, da sich diese Ungleichung in [8] aus (20), diese aus (84), (81) und damit (62) ergibt. Also ist sicher $|\{w,z\}|\leqslant 2q^*/(|z|^2-1)^2$ mit $q^*=3q<1$ bei $q<1/3$. Dann ist aber in der Tat [1, Seite 128 ff.] $w(z)\in\Sigma(Q^*)$ mit $q^*=\dfrac{Q^*-1}{Q^*+1}$.

Wir formulieren als Nebenergebnis: *Dafür, daß die für $|z|>1$ mit Ausnahme von $z=\infty$ reguläre Funktion $w(z)$ mit der Entwicklung* (2) *in $z=\infty$ zu $\Sigma(Q)$ gehört, ist notwendig die Bedingung*

$$(10)\qquad |\{w,z\}|\leqslant\frac{6q}{(|z|^2-1)^2}\quad\textit{für alle } z \textit{ mit } |z|>1,$$

hinreichend dagegen

$$(11)\qquad |\{w,z\}|\leqslant\frac{2q}{(|z|^2-1)^2}\quad\textit{für alle } z \textit{ mit } |z|>1$$

mit q gemäß (6).

Der Grenzfall $q\to 1$ von (11) stammt bekanntlich von Z. Nehari, der Grenzfall von (10) von W. Kraus [3] (und nicht von Nehari, wie in der neueren Literatur meistens irrtümlich angegeben).

Ferner zielt noch in diese Richtung die Bemerkung [8, Satz 21]: *Ist für $w(z)\in\sum$ stets die Ungleichung* (6) *erfüllt, dann gilt für den (äußeren) Inhalt* I *des Komplementes des Bildgebietes*

$$I \geqslant \pi(1-q^2) \tag{12}$$

(so daß $w(z)$ jedenfalls keine Schlitzabbildung sein kann). Diese Ungleichung ist scharf, wie die Abbildung (8) zeigt.

LITERATUR

[1] Ahlfors, L. V., *Lectures on quasiconformal mappings*, Manuscript prepared with the assistance of C. J. Earle, jr., Princeton 1966.

[2] Grötzsch, H., *Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche*, Berichte d. Math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 83, (1931), 254–279.

[3] Kraus, W., *Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung*, Mitt. math. Semin. Gießen, H. 21 (1932), 1–28.

[4] Kühnau, R., *Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung*, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math. — Nat. Reihe 13 (1964), 35–40.

[5] —, *Einige Extremalprobleme bei differentialgeometrischen und quasikonformen Abbildungen*, I und II. Math. Z. 94 (1966), 178–192.

[6] —, *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*, Math. Nachr. 40 (1969), 1–11.

[7] —, *Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen Ebene*, Math. Nachr. 43 (1970), 239–280.

[8] —, *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr. 48(1971), 77-105.

[9] Teichmüller, O., *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl., Jg. 1939, Nr 22, (1940), 1–197, (hier Seite 15, Zeilen 16–20).

STRESZCZENIE

Autor podaje dla odwzorowań quasi-konforemnych, które są w otoczeniu punktu z_0 odwzorowaniami konforemnymi, warunki typu Grunsky'ego na współczynniki. W szczególności, dla odwzorowań jednolistnych postaci $w(z) = z+a_1/z+a_2/z^2+\ldots$, $|z|>1$, wzgl. $w(z) = z+A_2z^2+\ldots$, $|z|<1$, mających Q-quasikonforemne rozszerzenie na całą płaszczyznę domkniętą, przy czym $w(\infty)=\infty$, otrzymuje on następujące dokładne oszacowania: $|a_1|\leqslant q$, $|a_2|\leqslant 2/3\,q$, $|A_2|\leqslant 2q$, $|A_2^2-A_3|\leqslant q$, gdzie $q = (Q-1)/(Q+1)$. Jednakże dla wyższych współczynników nie mają już miejsca oszacowania otrzymane z przypadku konforemnego przez przemnożenie przez q.

РЕЗЮМЕ

Даны условия типа Грунского для коэффициентов квазиконформных отображений, которые в окрестности точки z_0 являются конформными. Особенно для однолистных отображений вида $w(z) = z+a_1/z+a_2/z^2+\ldots$, $|z|>1$ или $w(z) = z+A_2z^2+\ldots$, $|z|<1$, имеющих Q-квазиконформное расширение на целую замкнутую плоскость и, если $w(\infty) = \infty$, то получаются точные оценки $|a_1|\leqslant q$, $|a_2|\leqslant 2/3q$, $|A_2|\leqslant 2q$, $|A_2^2-A_3|\leqslant q$ где $q = (Q-1)/(Q+1)$. Однако для более высоких коэффициентов нельзя получить оценку из конформного случая путем множения на q.