ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXII/XXIII/XXIV, 11 SECTIO A 1968/1969/1970

Zespół Matematyki, Wyższa Szkoła Inżynierska, Lublin

FILIP FRANCISZEK JABŁOŃSKI

Sur la subordination en module et en domaine des fonctions holomorphes

O podporządkowaniu modułowym i obszarowym funkcji holomorficznych

О модульном и областном подчинении голоморфных функций

Soit $K_\varrho = \{z: |z| < \varrho\}$. Désignons par S la classe des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphes et univalentes dans le cercle K_1 par $S_\alpha^* \subset S$ la classe des fonctions α-étoilées c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\mathrm{re}\{zf'(z)/f(z)\} > \alpha; 0 \leqslant \alpha < 1 \text{ pour } z \in K_1.$$

Soient H la classe des fonctions $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, $b_1 \geqslant 0$, holomorphes dans le cercle K_1, $H_0 \subset H$ la classe des fonctions $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, telles que $b_1 > 0$ et $f(z)/z \neq 0$ pour $z \in K_1$, $H_s \subset H_0$ la classe des fonctions univalentes et enfin $H_{S_\alpha^*} \subset H_S$, $0 \leqslant \alpha < 1$ la classe des fonctions α-étoilées.

Supposons que les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ sont holomorphes dans le cercle K_1, et satisfont à la condition $f(0) = F(0) = 0$.

On dit que la fonction $f(z)$ est subordonnée en domaine à la fonction $F(z)$ dans le cercle K_r, $0 \leqslant r \leqslant 1$, ce qu'on note (f, F, r), s'il existe une fonction $\omega(z)$ holomorphe dans K_r telle que $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < r$ et $f(z) = F(\omega(z))$ pour $z \in K_r$. La fonction $F(z)$ est appelée majorante en domaine de la fonction $f(z)$ dans le cercle K_r.

Si les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ vérifient l'inégalité $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour $z \in K_r$, on dit que la fonction $f(z)$ est subordonnée en module à la fonction $F(z)$ dans le cercle K_r, ce qu'on écrit $|f, F, r|$. Dans ce cas la fonction $F(z)$ est dite majorante en module de la fonction $f(z)$ dans le cercle K_r.

Soient M une sous-classe fixée, mais quelconque, de la classe H, et K une sous-classe fixée, aussi quelconque, de la classe S. Nous désignerons par $r_B(M, K)$ le plus grand nombre r, $r \in \langle 0, 1\rangle$ pour lequel on à l'implication $(f, F, 1) \Rightarrow |f, F, r|$ où $f \in M$, $F \in K$ et r ne dépend pas du choix des fonctions f et F dans les classes considérées.

Par $r_L(M, K)$ nous désignerons le plus grand nombre r, $r \in \langle 0, 1\rangle$, pour lequel on a l'implication $|f, F, 1| \Rightarrow (f, F, r)$ où les fonctions f et F parcourent respectivement les classes de fonctions M et K et r ne dépend pas du choix de ces fonctions dans les classes considérées.

Biernacki [5], [6], a étudié en 1935-36 l'implication $(f, F, 1) \Rightarrow |f, F, r|$ et établi, entre autres, les théorèmes suivants:

Théorème 1.

$$r_B(H_s, S) = 0{,}39\ldots,$$

où $r_B(H_s, S)$ est la racine unique de l'équation

$$\ln\frac{1+x}{1-x} + 2\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Cette constante est exacte.

Théorème 2.

$$r_B(H_{s_0^*}, S_0) = \sqrt{2}-1$$

ce nombre ne pouvant être remplacé par un nombre plus grand.

Théorème 3.

$$r_B(H_{s_{\frac{1}{2}}^*}, S_{\frac{1}{2}}^*) = 0{,}543\ldots,$$

où $r_B(H_{s_{\frac{1}{2}}^*}, S_{\frac{1}{2}}^*)$ est la racine unique de l'équation

$$\arcsin x + 2\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat est exact.

Théorème 4.

$$r_B(H, S) \geqslant \tfrac{1}{4}.$$

En rapport avec le théorème 4, Goluzin [7] a démontré que $0{,}35\ldots \leqslant r_B(H, S) \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et trouvé que $r_B(H, S_0^*) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, tandis que Shah-Tao-shing [10] a établi l'égalité $r_B(H, S) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Les théorèmes 1,2 et 3 ont été généralisés par A. Bielecki et Z. Lewandowski [3] qui ont obtenu les même constantes que Biernacki en supposant uniquement que les minorantes $f(z)$ sont holomorphes et que $f'(0) > 0$, $f(z)/z \neq 0$.

Z. Lewandowski [8] a posé et partiellement résolu le problème, en quelque sorte inverse de celui de Biernacki, relatif à l'implication inverse, c'est-à-dire, $|f, F, 1| \Rightarrow (f, F, r)$.

Dans le travail [8] Z. Lewandowski a utilisé comme classe des majorantes la classe S, tandis que dans [9], ainsi que dans les travaux [3] et [4] publiés en commun avec A. Bielecki, le problème a été étudié pour les majorantes appartenant à certaines classes de fonctions qui sont des sous classes de la classe S.

Les résultats ainsi obtenus sont les suivants:

Théorème 5.

$$0{,}21\ldots \leqslant r_L(H, S) \leqslant R$$

où $R = 0{,}29\ldots$ est la racine positive unique de l'équation $x^3+x^2+3x-1 = 0$.

Théorème 6.

$$r_L(H, S_0^*) = R = 0{,}29\ldots$$

où R est le nombre déterminé dans le théorème précédent.

Théorème 7.

$$r_L(H_s, S) = 0{,}39\ldots,$$

où $r_L(H_s, S) = r_B(H_s, S)$ est le nombre déterminé dans le théorème 1.

Théorème 8.

$$r_L(H_{s^*_a}, S_a^*) = r_a$$

où r_a est la racine positive unique de l'équation

$$\arcsin \frac{2r}{1+r^2+\dfrac{a}{1-a}(1-r^2)} + 2\operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2}.$$

Puisque $S_c \subset S^*_{\frac{1}{2}}$, on constante que, dans le problème inverse de celui de Biernacki, si les minorantes sont du même genre que les majorantes, les rayons des cercles de subordination correspondants dans le problème inverse sont les mêmes que les constantes de Biernacki dans les théorèmes 1, 2 et 3. Il n'en est plus de mêm si les minorantes sont soumises à des hypothèses plus faibles que dans les théorèmes 5, 6 7 et 8. Pour cela il suffit de comparer les résultats du théorème 4, complétés par Goluzin et Shah-Tao-shing à celui du théorème 5.

Let problème de la détermination de la valeur exacte de la constante $r_L(H, S)$, posé dans le travail de Z. Lewandowski [8], n'a pas encore été résoln. Jusqu'à présent on ne connaît pas les rayons des cercles de subordination dans les cas où les majorantes ne parcourent que les classes S, S_0^*, $S^*_{\frac{1}{2}}$, tandis que pour les minorantes on suppose seulement qu'elles sont holomorphes dans le cercle K_1, que leur premier coefficient est positif et qu'elles ne s'annulent pas pour $z \neq 0$, c'est-à-dire, appartiennant à la classe H_0.

Dans ce travail je résous ces problèmes en établissant les théorèmes suivants:

Théorème 9.

$$r_L(H, S) = R = 0{,}29\ldots,$$

où R a été déterminé dans le théorème 5.

Théorème 10.

$$r_L(H_0, S) = 0{,}39\ldots,$$

où $r_L(H_0, S)$ a été déterminé dans le théorème 1.

Théorème 11.

$$r_L(H_0, S_0) = \sqrt{2}-1.$$

Théorème 12.

$$r_L(H_0, S_{\frac{1}{2}}^*) = 0{,}543\ldots,$$

où $r_L(H_0, S_{\frac{1}{2}}^*)$ a été déterminé dans le théorème 3.

Le théorème 9 généralise le théorème 6 de Z. Lewandowski, qui se rapportait uniquement aux majorantes de la classe S_0^*, tandis que pour les majorantes appartenant à la classe S Z. Lewandowski (théorème 5) a prouvé seulement que $0{,}21\ldots \leqslant r_L(H, S) \leqslant R$. Les théorèmes 10, 11, et 12 généralisent les théorèmes 7, 8 de A. Bielecki et Z. Lewandowski, dans lesquels les minorantes étaient supposées respectivement univalentes, univalentes étoilées et univalentes semi-étoilées ($a = 1/2$).

Les théorèmes 7, 8 ont été obtenus en utilisant la notion d'homotopie, tandis que les théorèmes 9, 10, 11 et 12 ont été démontrés par une méthode toute différente. Dans les démonstrations de ces théorèmes je me suis appuyé sur un théorème général de Z. Lewandowski [9], p. 79 un analogue de ce théorème établi à cet effet, enfin une inégalité de Bazilevič [1] p. 152.

TRAVAUX CITÉS

[1] Bazilevič, I. E., *О теоремах искарения и коэффициентах однолистных функций*, Математический сборник, 28 (1970), 147–164.

[2] Bielecki, A. et Lewandowski, Z., *Sur certaines familles de fonctions α-étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), 45–55.

[3] —, *Sur une généralisation de quelques théorèmes de M. Biernacki sur les fonctions analytiques*, Ann. Polon. Math. 12 (1962), 65–70.

[4] —, *Sur certaines majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle unité*, Coll. Math. 9 (1962), 299–303.

[5] Biernacki, M., *Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 201 (1935), 256–258.
[6] —, *Sur les fonctions univalentes*, Mathematica (Cluj), 12 (1936), 49–64.
[7] Goluzin, G. M., *Геометрическая теория функции комплексного переменного*, Москва 1966.
[8] Lewandowski, Z., *Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z| < 1$, Ann. Univ. Mariae Curie–Skłodowska, 15 (1961), 5–11.
[9] —, *Starlike majorants and subordination*, Ann. Univ. Mariae Curie–Skłodowska, 15 (1961), 79–84.
[10] Shah Tao-shing, *Goluzin's number* $(3-\sqrt{5})/2$ *is the radius of superiority in subordination*, Sci. Rec. 1 (1957), 258–261.

STRESZCZENIE

W komunikacie podano wyniki dotyczące problemu podporządkowania w przypadkach gdy majoranty zmieniają się w podklasach funkcji klasy S, a minoranty zmieniają się w podklasach funkcji holomorficznych, spełniających warunki $f(0) = 0, f'(0) \geqslant 0$ lub $f'(0) > 0$ i $f(z)/z \neq 0$ dla $|z| < 1$. Cytuje się wyniki M. Biernackiego, G. M. Gołuzina, Shah-Tao shing'a, A. Bieleckiego i Z. Lewandowskiego, Z. Lewandowskiego i wyniki własne, dotyczące problemu M. Biernackiego jak i problemu w pewnym sensie odwrotnego postawionego w latach 60-tych przez Z. Lewandowskiego.

РЕЗЮМЕ

В работе даны результаты, касающиеся проблемы подчинения в случаях, когда мажоранты изменяются в подклассах функций класса S, а миноранты изменяются в подклассах голоморфных функций, которые выполняют условия: $f(0) = 0, f'(0) \geqslant 0$; $f'(0) > 0$ и $f(z)/z \neq 0$ для $|z| < 1$. Приведены выводы Бернацкого, Голузина, Shah-Tao shing'a, Белецкого и Левандовского и выводы автора как относительно проблемы Бернацкого, так и обратной проблемы, в некотором смысле, представленной Левандовским в 60-ых годах.