ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXII/XXIII/XXIV, 1 SECTIO A 1968/1969/1970

Донецкий вычислительный центр АН УССР, Донецк, СССР

ИГОРЬ А. АЛЕКСАНДРОВ, ВЛАДИМИР И. ПОПОВ

Оптимальные управления и однолистные функции

Optymalne sterowanie i funkcje jednolistne

Optimal Control and Univalent Functions

1. Основные проблемы теории однолистных функций формулируются как экстремальные задачи об областях значений непрерывных функционалов или сводятся к таким задачам. Их исследование потребовало создания новых вариационных методов, поскольку даже необходимое условие экстремальности в семействе однолистных в данной области функций классическими приемами получить не удается из-за нелинейности этого семейства. Для большинства задач, включая все рассматриваемые нами далее, вариационные методы М. А. Лаврентьева, М. Шиффера и Г. М. Голузина приводят к важным теоремам о том, что решения задач содержатся среди функций, отображающих данную область на фиксированную область с кусочно-аналитическими разрезами. В тех случаях, когда такие отображения удается представить интегралами некоторого дифференциального уравнения с параметрами, зависящими от разрезов, значительное продвижение исследования экстремальной задачи, нередко вплоть до ее полного решения, обеспечивается принципом максимума Л. С. Понтрягина. Цель нашей работы состоит в том, чтобы обратить внимание на это обстоятельство. Мы кратко продемонстрируем развитую нами методику и приведем результаты исследования ряда задач на абсолютный и относительный экстремум, ограничиваясь классом S голоморфных и однолистных в области $E: |z| < 1$ функций $f(z) = z + cz^2 + c_3z^3 + \ldots$, являющимся одним из центральных объектов изучения в теории однолистных функций.

2. Функции класса S, отображающие круг E на плоскость с кусочно-аналитическими разрезами, при соответствующей их параметризации могут быть представлены в виде $f(z) = \omega(z, \infty)$, где $\omega(z, t) = e^{-t}w(z, t)$, $w(z, t)$ — интеграл уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w\frac{\mu+w}{\mu-w}, \quad 0 < t < \infty, \tag{1}$$

с начальным условием $w(z, 0) = z \in E$ и кусочно-аналитической управляющей функцией $\mu = \mu(t)$, $|\mu| = 1$.

Фиксируем точку z_0, $0 < |z_0| < 1$, и обозначим через D множество тех точек (w_1, w_2) комплексного пространства C^2, которые определяются функциями $f(z)$ класса S по правилу: $w_1 = \ln[f(z_0)(z_0^{-1} - \bar{z}_0)]$, $w_2 = \ln[f(z_0)/z_0 f'(z_0)]$. Ставится задача о нахождении D и тех функций в S, которые вносят в D граничные точки. Можно доказать, что D выпукло, замкнуто, ограничено, зависит только от $|z_0|$ и вместе с каждой точкой (w_1, w_2) содержит точки $(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$, (w_2, w_1), $(\overline{w}_2, \overline{w}_1)$.

Полагая $w(z_0, t) = \varrho\mu y$, $0 < \varrho < 1$, $|y| = 1$, из уравнения (1) имеем $d\varrho/dt = (\varrho^3 - \varrho)|y - \varrho|^{-2} < 0$. Это неравенство позволяет ввести вместо t новое независимое переменное ϱ. Простые вычисления дают

$$w_k = \int_{\sigma}^{1} p(i\theta^k/u\theta)\, d\ln\theta, \quad k = 1, 2, \tag{2}$$

где $\sigma = p(|z_0|)$, $\theta = p(\varrho)$, $u = ip(y)$, $p(z) = (1-z)(1+z)^{-1}$, и роль управляющего параметра выполняет вещественная функция $u = u(\theta)$. Рассматривая C^2 как вещественное евклидово пространство R^4, построим опорную плоскость $T(\psi)$, ортогональную вектору $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, направленному в полупространство, не содержащее D. Тогда общая точка множества D и плоскости $T(\psi)$ доставляет максимум функционалу $\varphi = \mathrm{Re}[\psi_1 w_1 + \psi_2 w_2]$ по всем $(w_1, w_2) \in D$. Введем функцию $H(\psi, u) = \mathrm{Re}[\psi_1 p(i/u) + \psi_2 p(i\tau/u)]$. По принципу максимума Л. С. Понтрягина условие

$$H(\psi, u(\tau)) = \max_{-\infty \leqslant \nu \leqslant \infty} H(\psi, \nu), \quad \sigma \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{3}$$

необходимо и достаточно для оптимальности управления $u(\theta)$. Отсюда вытекает уравнение $\mathrm{Im}[\psi_1(u-i)^{-2} + \psi_2\theta(u-i\theta)^{-2}] = 0$, определяющее $u(\theta)$ как неявную функцию. Выделением ветвей этой функции с помощью критерия (3) и подсчетом для них интегралов (2) завершается нахождение ∂D. Полное описание ∂D, данное в [4], связано с разделением ∂D на 55 множеств, каждое из которых имеет свое аналитическое задание. Ограничимся здесь теоремой качественного характера и только для отдельных подмножеств ∂D дадим полное описание.

Теорема 1. *Граница множества* D *состоит из* *а) угловых точек* $w^{0,1} = (\pm 2i\arcsin|z_0|, \mp 2i\arcsin|z_0|)$ *и* $(\pm\ln\sigma, \mp\ln\sigma)$, *через каждую из которых проходит определенное однопараметрическое семейство опорных плоскостей. В частности, для точки* w^1 *это семейство образовано теми* $T(\psi)$, *для которых* $\psi_1 = \overline{\psi}_2$, $\sigma \geqslant \nu = (\beta_1 + |\psi_1^+|)(\beta_2 + |\psi_2^+|)^{-1} u\beta_2 > 0$ $(\psi_k^+ = \overline{\psi}_k + |\psi_k|, \beta_k = \operatorname{Im}\psi_k)$;

б) одно- и двупараметрических семейств прямолинейных отрезков, направление, длина и середина которых выражается довольно простыми формулами. Например, при $\sigma < \nu$, $|\beta_1| \leqslant \beta_2$, $\beta_2 > 0$ *и* $h_1^+ = h_2^+$ $(h_k^{+-} = \operatorname{Re}\psi_k \pm |\psi_k|)$ *плоскость* $T(\psi)$ *касается* ∂D *по прямолинейному отрезку с направлением* $\varphi = (-1/\psi_1^+, 1/\psi_2^+)$, *длиной* $a = 2|\varphi| \times \int\limits_\sigma^\nu \sqrt{(h_1^+)^2 + 4\tau(\beta_1 - \beta_2\tau)(\beta_2 - \beta_1\tau)(1-\tau^2)^{-2}}\, d\ln\tau$ *и серединой в точке* (w_1, w_2), $w_k = w_k(\psi) + (\beta_{3-k}\ln\sigma - \beta_k \ln(\sigma^{-1} - \sigma) i/\psi_k^+)$;

в) точек округления, в которых $T(\psi)$ *касается* ∂D *и не имеет с* D *других общих точек. К точкам округления относятся, в частности, все точки* ∂D, *в которых* $h_1^\pm = h_2^\pm$. *За исключением точек, указанных в а), граница множества* D *гладкая.*

3. Для функционала

$$I = I\left(f(z_0), \overline{f(z_0)}, f'(z_0), \overline{f'(z_0)}\right), \tag{4}$$

аналитически зависящего от значения функции класса S, ее производной и сопряженных к ним значений, вычисленных в фиксированной точке $z_0 \in E$, рассуждения, основывающиеся на теории К. Левнера и принципе максимума Л. С. Понтрягина, приводят к следующей теореме, ранее доказанной другим методом [1].

Теорема 2. *Граничные точки* $I(b, \overline{b}, c, \overline{c})$ *области значений функционала (4) на классе* S *получаются при*

$$b = z_0 \exp\left\{2\int\limits_0^{|z_0|} \frac{\varrho - y}{1-\varrho^2}\, d\varrho\right\}, \quad c = \exp\left\{2\int\limits_0^{|z_0|} \frac{(y-\varrho)(\varrho y - 2)}{(1-\varrho y)(1-\varrho^2)}\, d\varrho\right\}.$$

Здесь $y = y(\varrho)$ — *равное по модулю единице решение уравнения* $\operatorname{Im}[\psi_2 y - \psi_1 y(1-\varrho^2)(y-\varrho)^{-2}] = 0$, *имеющее на* $(0, |z_0|)$ *не более одной точки разрыва,* $\psi_1 = \overline{c}(xI_{\overline{f}'} + \overline{x}\overline{I_{f'}})$, $\psi_2 = \psi_1 + \overline{b}(xI_{\overline{f}} + \overline{x}\overline{I_f})$, $x = e^{-i\alpha}$, α — *параметр,* $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Интегрирование уравнения (1) с управлением, соответствующим указанному в теореме решению $y = y(\varrho)$, позволяет найти функции, граничные относительно функционала (4). Полная граница образа единичного круга при отображении его граничной функцией состоит либо из одного аналитического разреза, уходящего на бесконечность, либо из двух таких разрезов, либо из трех аналитических дуг (одна из которых уходит на бесконечность), имеющих лишь одну общую точку. В этой точке граничные дуги попарно образуют равные углы.

4. Остановимся на двух следствиях теорем 1,2.

Следствие 1. Пусть Γ — граница множества значений функционала $I = \ln f'(z_0), 0 < r = |z_0|^2 < 1$, на классе S.

Если $r \leqslant 1/2$, то Γ представляет собой гладкую, выпуклую, замкнутую кривую с уравнением

$$I = \pi(e^{i\alpha} - \operatorname{sign}\cos\alpha) - \ln(1-r) - i\sin\alpha P(ax) +$$
$$+ iP\left(\frac{\sin\alpha}{a}\right) - \frac{\cos\alpha}{2} P\left(\frac{2a}{a^2+\sin^2\alpha}\right) - \frac{1}{2} P\left(\frac{2a}{a^2-\sin^2\alpha}\right) +$$
$$+ 2Q(1-\cos\alpha) - (e^{i\alpha}-1)Q(\sin\alpha) + (e^{i\alpha}+i)Q(-\sin\alpha), \tag{5}$$

где α — параметр, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$,

$$P(z) = \ln\frac{1-z}{1+z}, Q(z) = \operatorname{arctg}\frac{a(1-x)}{1-z}, a = \sqrt{\frac{1-x\sin^2\alpha}{x-x^2}},$$

и x — наименьший положительный корень уравнения

$$[(1-r)x + r - 2]x^2\sin^2\alpha + (1+r)x - r = 0.$$

Если же $r > 1/2$, то Γ состоит из двух дуг кривой (5) при $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ и $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ и двух гладко соединенных с ними прямолинейных отрезков

$$c_0 \leqslant \operatorname{Re} I \leqslant c_1, \qquad \operatorname{Im} I = \pm(\pi + \ln r - \ln(1-r)),$$

где

$$c_{0,1} = \pm\arccos(-1+r^{-1}) - \ln(r \pm \sqrt{2r-1}).$$

Задачей об определении Γ, обобщающей проблемы искажения и вращения на классе S, ранее занимались А. Град, П. П. Куфарев, Дж. Дженкинс и другие авторы. Следствие 1 содержит новое решение этой задачи и впервые дает конечное описание Γ.

Следствие 2. Пусть D_p — множество значений функционала $I = \ln|f(z_0)/z_0| + i\ln|f'(z_0)|$, $0 < r = |z_0|^p < 1$, на подклассе $S_p (p = 1, 2, \ldots)$ класса S с p-кратной симметрией вращения относительно начала координат, $S_1 = S$.

Тогда D_p выпукло, замкнуто и ограничено кривой, состоящей из двух угловых точек $i\ln(1\pm r) - [i + (2i+2)/p]\ln(1\pm r)$, соединяющего их прямолинейного отрезка и двух гладко соединенных в точке

$-i\ln(1-r)$ аналитических дуг с уравнением

$$I = p^{-1}(t-1)(1+i+ip/t)\ln r + 2i\ln t - i\ln(1-r) + \\ + \frac{1+i-ip}{p}\ln\left|\frac{1-t^2}{4}\right| + \frac{1}{p}\left(\frac{ip}{t} - it - t\right)\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|$$

при $1 < t < (1+r)(1-r)^{-1}$ и $(1-r)(1+r)^{-1} < t < 1$. Здесь $t = \sqrt{p\cos(3\pi/4)\sin\alpha\sec(\alpha-\pi/4)}$, α — угол, образованный внешней нормалью к ∂D_p и положительным направлением вещественной оси.

Из следствия 2 легко выводятся различные теоремы об относительном росте модуля функции и модуля ее производной на классах однолистных функций (Г. М. Голузин, Дж. Дженкинс, Гун Шэн и др.).

5. Пусть $L(f, r)$ — линия уровня функции $f(z) \in S$, то есть образ окружности $|z| = r < 1$ при отображении $w = f(z)$. Хорошо известно, что $L(f, r)$ лежит в кольце $R_0 \leqslant |w| \leqslant R_1$, где $R_{0,1} = r(1 \pm r)^{-2}$. И. Е. Базилевич и Г. В. Корицкий установили существование абсолютной постоянной a_*, $0{,}1005 < a_* < 0{,}134$, такой, что любая дуга линии $L(f, r), f \in S$, $\operatorname{th}(\pi/4) = r_* < r < 1$, лежащая в кольце $a_* R_1 \leqslant |w| \leqslant R_1$ звездна (относительно начала координат), но для некоторых $r < 1$ и $f \in S$ в более широком кольце $(a_* - \varepsilon) R_1 \leqslant |w| \leqslant R_1$, $\varepsilon > 0$, на $L(f, r)$ найдется не звездная дуга. Одновременно они поставили задачу о нахождении максимально широких подколец кольца $R_0 \leqslant |w| \leqslant R_1$, в которых звездные дуги линий уровня всех функций класса S. Полное решение этой задачи выводится [3] из теорем 1,2.

Для записи результата введем функции

$$C_1(u) = A(u) + B(1/u), \; C_2(u) = A(u) + 2|\lambda| B(u),$$

$$D_1(u) = \operatorname{arctg}\frac{\lambda+u}{1-\lambda u}, D_2(u) = \ln\frac{(\lambda^2+1)u}{\lambda(1+u^2)(1-r^2)^2},$$

где λ — вещественный параметр,

$$A(u) = \frac{\sqrt{2|\lambda|}}{2\lambda}\left[\operatorname{arctg}\frac{U(u)\sqrt{2|\lambda|}}{|u|+1} - \ln\frac{|U(u)\sqrt{2|\lambda|} - |u| + 1|}{\sqrt{2|\lambda|(u^2+1)}}\right],$$

$$B(u) = (1/2\lambda)\ln(U(u) + u - 1/2\lambda), \; U(u) = \sqrt{u^2 + 1 - u/\lambda},$$

с помощью которых зададим функции

$$\Phi_k(\lambda) = C_k(u_0) - C_k(\lambda) + D_k(u_0),$$

$$\psi_k(\lambda) = C_k(u^0) - 2C_k(v) + C_k(\lambda) + D_k(u^0),$$

где u_0, u^0 — корни уравнения

$$(1+r)(\sqrt{u^2+1}-U(u))-(1-r)(\sqrt{u^2+1}+u)\sqrt{u/\lambda}=0,$$

$\lambda < u_0 < 0, u^0 < v = (1-\sqrt{1-4\lambda^2})/2\lambda$, $k=1,2$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть K_* — кольцо: $\Phi_* < |w| < \Psi_*$, где $\Phi_* = r\exp\Phi_2(\lambda_0)$ при $r_* < r < 1$, $\Psi_* = r\exp\psi_2(\lambda^0) < \gamma R_0 R_1$ при $r_* < r < r_0$, $\Psi_* = \gamma R_0 R_1$ при $r_0 \leqslant r < 1$, λ_0 — корень уравнения $2\Phi_1(\lambda) = \pi$, λ^0 — корень уравнения $2\Psi_1(\lambda) = \pi$, $\gamma = (5\sqrt{5}/4)\exp(-4\operatorname{arcctg}2)$, $a = \sqrt{2}-1$, $r_0 = 0{,}709\ldots$ — корень уравнения*

$$\arcsin\frac{1+r^2}{2r\sqrt{2}}-\ln\frac{(\sqrt{1-a^2r^2}-\sqrt{r^2-a^2})^2}{4ar\sqrt{5}}=3\operatorname{arctg}3.$$

Тогда всякая лежащая вне кольца K_* дуга линии уровня $L(f, r)$ для всякой функции класса S звездна, но для любой точки $w_* \in K_*$ в классе S найдется функция f с не звездной в точке w_* линией уровня $L(f, r)$.

Следствие. $a_* = \gamma/4 = 0{,}109\ldots$.

6. Остановимся в заключение на задаче о коэффициентах функций класса S. Пусть n — натуральное число, $G(z)$ — функция, регулярная в начале координат. Символом $\{\}_n$ обозначим коэффициент при z^n в разложении в ряд Маклорена функции, стоящей в фигурных скобках. Требуется найти минимум функционала $J = \operatorname{Re}\{G(f(z))\}_n$ по всем $f \in S$. Согласно рассуждениям п.п. 1,2 достаточно найти $\min J$ по всем $f(z) = \omega(z, \infty)$,

$$\partial\omega/\partial t = -\omega K(\omega, \mu e^t), \quad K(z, \zeta) = 2z(\zeta - z)^{-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при z^n в правой и левой частях равенства

$$\partial G(\omega)/\partial t = -\omega G'(\omega) K(\omega, \mu e^t),$$

получим

$$G\dot{x} = -GDK(F, \mu e^t)x,$$

где G, D, F, x — матрицы размеров соотвественно $1\times(n+1)$, $(n+1)\times(n+1)$, $(n+1)\times(n+1)$, $(n+1)\times 1$ с элементами $g_s = \{G(z)\}_s$, $d_{s,r} = 0$ при $s \neq r$, $d_{ss} = s$, $f_{s,r} = 0$ при $s \neq r-1$, $f_{s,s+1} = 1$, $x_s = \{\omega^s(z, t)\}_n$; $r, s = 0, 1, \ldots, n$.

Поставленная задача сведена к следующей задаче оптимального управления.

Задача В. Среди всех кусочно-аналитических управлений $\mu(t)$,

$|\mu|=1, 0\leqslant t\leqslant\infty$, требуется найти управление, дающее минимум функционалу $J(\mu)=\operatorname{Re}[Gx(\infty)]$, где $x(t)$ определяется из условий

$$\dot{x}=-DK(F,\mu e^{\xi})x,\ \xi=1,$$

$$x_0=\ldots=x_{n-1}=x_n-1=\xi=0 \quad \text{при} \quad t=0.$$

Принцип максимума для оптимального управления $\mu(t)$ запишется в виде

$$H(\mu(t),t)=\max_{|\nu|=1}H(\nu,t)=0, \quad 0\leqslant t<\infty,$$

где

$$H(\nu,t)=\varphi(t)-\operatorname{Re}[\psi(t)DK(F,\nu e^{\xi(t)})x(t)]$$

и φ,ψ — интегралы уравнений

$$\dot{\varphi}=-\partial H(\mu,t)/\partial\xi,\ \dot{\psi}=\psi DK(F,\mu e^{\xi})$$

с граничными условиями $\varphi=0, \psi=G$ при $t=\infty$.

Исследуя производные по t функции $h(t)=H(\nu(t),t)$, можно показать, что если на некотором интервале (t',t'') наряду с функцией $\mu(t)$ принципу максимума удовлетворяет и функция $\nu(t)\neq\mu(t)$, то эта функция $\nu(t)$ является интегралом уравнения (1). Поэтому особый интерес приобретает изучение функции $h(t)$ для интегралов $\nu(t)$, $|\nu|=1$, уравнения (1). Установлено, что

$$dh/dt=4\mu\nu h(\mu-\nu)^{-2}$$

и если $\varkappa(t)$ какой-либо интеграл уравнения $\dot{\varkappa}=-4\mu\nu\varkappa(\mu-\nu)^{-2}$, то $\varkappa(t)h(t)=\text{const}$, что в подробной записи совпадает с уравнением Шиффера. В частности, если $h(t)=0$ в некоторой точке отрезка $[t',t'']$, на котором $\nu(t)\neq\mu(t)$, то $h(t)=0$ на $[t',t'']$. Отсюда выводится следующее предложение. Пусть функции $\varphi(t),\psi(t)$ таковы, что $H(\nu,0)$ достигает максимума сразу в нескольких точках $\mu(0),\nu_1^0,\ldots,\nu_m^0$, $m<n$. Обозначив через $\nu_k(t)$, $|\nu_k|=1$, интегралы уравнения (1) с начальными условиями $\nu_k(0)=\nu_k^0$, будем иметь $H(\nu_k(t),t)\equiv 0$ всюду, где $\nu_k(t)\neq\mu(t)$.

Таким образом, для появления оптимальных скользящих режимов в задаче B достаточно выполнения простых начальных условий, для функций $\varphi(t),\psi(t)$. Это является характерной особенностью задач оптимального управления, возникающих при рассмотрении экстремальных проблем теории однолистных функций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров И. А., *Граничные значения функционала $I(f,\bar{f},f',\bar{f}')$ на классе голоморфных однолистных в круге функций.* Сиб. матем. ж., 4, № I, 17 (1963).

[2] Александров И. А., Копанев С. В., *О взаимном росте модуля однолистной функции и модуля ее производной.* Сиб. матем. ж., № I, 23 (1966).

[3] Александров И. А., Попов В. И., *Решение задачи И. Е. Базилевича и Г. В. Корицкого о звездообразных дугах линий уровня.* Сиб. матем. ж., 6, № I, 16 (1965).

[4] Попов В. И., *Область значений одной системы функционалов на классе S.* Тр. Томск. ун-та, 182, вып. 3, 106 (1965).

STRESZCZENIE

Celem artykułu jest zwrócenie uwagi na możliwość wykorzystania zasady Pontriagina do rozwiązywania problemów ekstremalnych dla funkcji jednolistnych.

W omówionych tutaj przykładach zasada ta doprowadziła do pełnego rozwiązania problemów.

SUMMARY

The authors point out that the Pontryagin's principle may be applied in solving extremal problems for univalent functions. In some cases considered in the paper the method yields the complete solution of the problem.