ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLAND

VOL. XVIII, 10 SECTIO A 1964

Z Zakładu Geometrii Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik Zakładu: doc. dr Konstanty Radziszewski

KONSTANTY RADZISZEWSKI i JANUSZ SOWIŃSKI

Quelques remarques sur les plans osculateurs orientés

Kilka uwag o zorientowanych płaszczyznach ściśle stycznych

Несколько замечаний относительно соприкасающихся оретируемых плоскостей

Introduction.

Dans le travail [7] van der Waag a donné huit définitions des plans osculateurs. L'auteur des travaux [1], [2] a introduit la notion d'orientation des plans osculateurs des types I-VIII. Dans les travaux [2], [4] ont été définis huit types de plans osculateurs orientés, ces définitions étant basées soit sur le vecteur paratingent, soit sur le vecteur contingent. Dans le travail [3] ont été établies certaines propriétés des courbes qui admettent des plans osculateurs orientés de l'un des types I-VIII définis au moyen du vecteur paratingent. Nous nous proposons, dans le présent travail, d'étudier les propriétés analogues des courbes qui admettent des plans osculateurs orientés de l'un des types I-VIII définis au moyen du vecteur contingent.

Bouligand, le premier, a établi dans le travail [6], pour les plans osculateurs du type I, des conditions analogues à celles qui font l'objet du travail [3] et du nôtre. Ces deux travaux développent donc des idées dues à Bouligand.

Notations. Définitions.

Nous nous occuperons des courbes orientées définies par l'application biunivoque de l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$ dans E_3:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

te nous écrirons simplement $\langle A * B \rangle$, où les valeurs $t = a$ et $t = b$ correspondent respectivement aux points A et B.

Nous dirons que le point M sur la courbe précède le point N, si la valeur de t correspondant au point M est inférieure à celle qui correspond au point N.

La suite de points $M_n \to M$, $M_n \in \langle A*B\rangle$, si la suite des valeurs du paramétre t_n qui correspondent aux points M_n tend vers la valeur t correspondant au point M.

Définition 1. Le vecteur contingent d'une courbe orientée $\langle A*B\rangle$ au point M sera par définition la limite

$$\bar{c}(M) = \lim_{P_n\to M} \frac{\overline{MP_n}}{|\overline{MP_n}|}, \text{ si } P_n \in (M*B)$$

$$\bar{c}(M) = \lim_{P_n\to M} \frac{\overline{P_nM}}{|\overline{P_nM}|}, \text{ si } P_n \in (A*M)$$

où P_n est une suite de points de la courbe $\langle A*B\rangle$ qui tend vers la point M.

L'ensemble de tous les $\bar{c}(M)$ d'une courbe au point M sera dit contingent des vecteurs et noté $\overline{C}(M)$.

Définition 2. Nous appellerons plan osculateur orienté de la courbe $\langle A*B\rangle$ au point M du type I-VIII le plan passant par le point M et admettant un vecteur normal défini comme il suit:

$$N_1 = \lim_{P\to M} \frac{\bar{c}(M)\times\overline{MP}}{|\bar{c}(M)\times\overline{MP}|}$$

$$N_2 = \lim_{P',P''\to M} \frac{\overline{P'M}\times\overline{MP''}}{|\overline{P'M}\times\overline{MP''}|}, \; P'\in\langle A*M), \; P''\in(M*B\rangle$$

$$N_3 = \varepsilon\lim_{P\to M} \frac{\bar{c}(M)\times\bar{c}(P)}{|\bar{c}(M)\times\bar{c}(P)|}, \; \varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ si } P\in(M*B\rangle \\ -1 \text{ si } P\in\langle A*M) \end{cases}$$

$$N_4 = \varepsilon\lim_{P',P''\to M} \frac{\overline{MP'}\times\overline{P'P''}}{|\overline{MP'}\times\overline{P'P''}|}, \; \varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ si } P',P''\in\langle A*M) \text{ ou } P',P''\in(M*B\rangle \\ -1 \text{ si } P'\in\langle A*M), P''\in(M*B\rangle \end{cases}$$

$$N_5 = \lim_{P\to M} \frac{\overline{MP}\times\bar{c}(P)}{|\overline{MP}\times\bar{c}(P)|}$$

$$\overline{N}_6 = \lim_{P',P'',P'''\to M} \frac{\overline{P'P''}\times\overline{P''P'''}}{|\overline{P'P''}\times\overline{P''P'''}|}, \; P''\in(P'*P'')$$

$$\overline{N}_7 = \lim_{P',P''\to M} \frac{\overline{P'P''}\times\bar{c}(P'')}{|\overline{P'P''}\times\bar{c}(P'')|}, \; P' \text{ précède } P''$$

$$\overline{N}_8 = \lim_{P',P''\to M} \frac{\bar{c}(P')\times\bar{c}(P'')}{|\bar{c}(P')\times\bar{c}(P'')|}, \; P' \text{ précède } P''$$

où les limites ne dépendent pas du choix des vecteurs contingents $\bar{c}(X)$ de la courbe $\langle A * B \rangle$ au point X, et les points P', P'', P''', ainsi que les vecteurs $\bar{c}(X)$, sont tels que les expressions précédentes ont un sens.

Les plans osculateurs orientés des différents types d'une courbe orientée $\langle A * B \rangle$ au point M seront désignés par $\bar{a}_i(M)$, $i = \mathrm{I}, \ldots \mathrm{VIII}$.

Définition 3. Si les droites l_i passant par le point M et ayant la direction des vecteurs qui figurent au second membre des formules de la définition 2 pour $i = \mathrm{I}, \ldots \mathrm{VIII}$, ont une limite, nous dirons que la courbe admet un plan osculateur du type i et nous le désignerons par $a_i(M)$.

Par $t^+(M)$ resp. $t^-(M)$ nous désignerons les vecteurs unités demi-tangents à la courbe $\langle A * B \rangle$ au point M.

Nous introduirons encore la notion de dièdre $[a_1^+, \beta_1^+, \varepsilon]$. Etant donné le plan a et la droite $l \subset a$, cette droite partage le plan a en deux demi-plans a_1^+ et a_1^-. Les deux demi-plans a_1^+ et β_1^+, faisant un angle $\varepsilon < \pi$, limitent un ensemble de l'espace, convexe et fermé, que nous désignerons par $[a_1^+, \beta_1^+, \varepsilon]$.

L'intérieur de cet ensemble sera noté $(a_1^+, \beta_1^+, \varepsilon)$.

Définition 4. On dira que le vecteur $\overline{MN}$ est contenu dans le dièdre $[a_1^+, \beta_1^+, \varepsilon]$, si l'extrémité N' du vecteur $\overline{M'N'} = \overline{MN}$, $M' \epsilon l$ appartient à l'ensemble $[a_1^+, \beta_1^+, \varepsilon]$.

D'une façon analogue, on dira que le vecteur $\overline{MN}$ est situé du côté positif du plan γ si l'extrémité N' du vecteur $\overline{M'N'} = \overline{MN}$, $M' \epsilon \gamma$ est située du côté positif du plan γ.

Définition 5. Nous appellerons voisinage $U(M)$ du point M un ensemble ouvert, connexe sur la courbe $\langle A * B \rangle$, contenant le point M, la notation $U(M, \varepsilon)$ indiquera que ce voisinage dépend du nombre ε.

Par $U^+(M)$ nous désignerons un arc sur $\langle A * B \rangle$ fermé à gauche et ouvert à droite, tel que $M \epsilon U^+(M)$, c'est-à-dire $U^+(M) = \langle M * X \rangle \subset \langle M * B \rangle$

On définit de façon analogue $U^-(M) \subset \langle A * M \rangle$.

Toutes les autres notations et définitions seront les mêmes que dans les travaux [2], [3], et [4].

Remarque: Par théorèmes analogues à ceux du travail [3] nous entendrons les théorèmes correspondants du travail [3], à cela près que la vecteur paratingent y est à remplacer par le vecteur contingent.

Propriétés des courbes

Théorème 1. *Pour que la courbe $\langle A * B \rangle$ admette un plan osculateur $\bar{a}_{\mathrm{I}}$ au point M il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U(M, \varepsilon)$ $\subset \langle A * B \rangle$ et un dièdre $[a_{c(M)}^+, \beta_{c(M)}^+, \varepsilon]$ tels que $U(M, \varepsilon) \subset [a_{c(M)}^+, \beta_{c(M)}^+, \varepsilon]$*

pour tous les vecteurs contingents $\bar{c}(M)$ au point M (c'est-à-dire $U(M, \varepsilon)$ est independant du choix de $\bar{c}(M)$) et qu'il n'existe pas au point M de vecteurs contingents $\bar{c}_1(M), \bar{c}_2(M)$ tels que $\bar{c}_1(M) = -\bar{c}_2(M)$.

Démonstration. Observons que l'existence de $\bar{a}_I$ entraine l'existence des demi-tengentes au point M. L'ensemble de tous les vecteurs contingents $\bar{C}(M)$ se réduit donc à deux vecteurs demi-tengents t^+ et t^- au point M [4].

La condition est nécessaire:

Soit $\bar{a}_I$ le plan osculateur de la courbe au point M. Supposons qu'il existe un $0 < \varepsilon < \pi$ tel qu'aucun voisinage $U(M)$ du point M de la courbe $\langle A*B\rangle$ ne soit contenu dans aucun $[a_l^+ +, \beta_l^+ +, \varepsilon]$. Divisons l'espace autour de la droite t^+ en k dièdres $D_1, D_2, \ldots, D_k$ d'angle $2\pi/k < \varepsilon/2$ et d'arête t^+. Par hypothèse aucun voisinage $U(M)$ n'est contenu dans aucun de ces dièdres, et même dans aucune somme de deux dièdres adjacents. Quel que soit le voisinage $U(M)$ considèré, il doit donc avoir des points à l'intérieur de deux dièdres non adjacents. Nous allons prouver qu'il existe deux dièdres non adjacents contenant respectivement les suites de points P_n et $Q_n \to M$, $P_n, Q_n \epsilon \langle A*B\rangle$. Il existe un dièdre, soit D_1, contenant la suite $P_n \epsilon D_1$, $P_n \epsilon \langle A*B\rangle$, $P_n \to M$. Comme aucun voisinage du point M n'est contenu dans $D_1 + D_2$ ou dans $D_1 + D_k$, deux cas peuvent se présenter: a) Il existe une suite de points Q_j et un dièdre $D_l, l \neq 1, 2, k$, $Q_j \to M$, $Q_j \epsilon D_1$ au bien:
b) Il existe deux suites Q_j', Q_j'', $Q_j' \epsilon D_k$, $Q_j'' \epsilon D_2$, $Q_j', Q_j'' \to M$.
Si aucun de ces deux cas n'avait lieu, le nombre D_k étant fini, il existerait sur $\langle A*B\rangle$ un voisinage $U(M)$ du point M n'ayant aucun point dans aucun des $D_l, l \neq 1, 2, k$ et en même temps aucun point dans D_k et D_2; alors $U(M)$ serait contenu dans $D_1 + D_k$ ou dans $D_1 + D_2$, contrairement à l'hypothèse. Nous avons ainsi prouvé qu'il existe deux dièdres non adjacents qui contiennent les suites de points P_n et $Q_n \to M$, $P_n, Q_n \epsilon \langle A*B\rangle$.

Soint, pour fixer les idées, $P_n, Q_n \epsilon (M*B\rangle$ (dans les autres cas le raisonnement est analogue). Alors les suites $\bar{t}^+ \times \overline{MP_n}/|\bar{t}^+ \times \overline{MP_n}|$ et $\bar{t}^+ \times \overline{MQ_n}/|\bar{t}^+ \times \overline{MQ_n}|$ auront des limites différentes, donc $\bar{a}_I$ n'existe pas. Le contradiction ainsi obtenue prouve que notre condition est nécessaire. Si l'on avait $\bar{c}_1(M) = -\bar{c}_2(M)$, les vecteurs $\bar{c}_1(M) \times \overline{MP}/|\bar{c}_1(M) \times \overline{MP}|$ et $\bar{c}_2(M) \times \overline{MP}/|\bar{c}_2(M) \times \overline{MP}|$ auraient des limites differentes et $\bar{a}_I$ n'existerait pas non plus.

La condition est suffisante.

Supposons remplies les conditions du théorème. Il en résulte immédiatement l'existence des vecteurs demi-tangents $\bar{t}^+(M)$ et $\bar{t}^-(M)$.

Supposons qu'il existe des suites Q_n' et $Q_n'' \epsilon (M*B\rangle$ (ce qui ne nuit pas à la généralité du raisonnement, puisque les autres cas s'étudient en changeant simplement les notations) et $Q'_n, Q''_n \to M$, telles que $(t^+(M), MQ'_n) \to a', (t^+(M), MQ''_n) \to a'', a' \neq a''$.

Par hypothèse il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un dièdre et un voisinage $U(M, \varepsilon)$ tels que $Q'_n, Q''_n \in [a^+_{t+}, \beta^+_{t+}, \varepsilon]$, pour $Q'_n, Q''_n \in U(M, \varepsilon)$. Donc $a', a'' \subset [a^+_{t+}, \beta^+_{t+}, \varepsilon] + [a^-_{t+}, \beta^-_{t+}, \varepsilon]$.

Si l'on pose $\delta = \sphericalangle(a', a'')$ on a $0 < \varepsilon < \delta$. On arrive ainsi à une contradiction, ce qui prouve que $a' = a'' = a_{\mathrm{I}}$.

Nous allons démontrer que a_{I} est orienté. Observons, dans ce but, que les suites $\bar{t}^+(M) \times \overline{MP}_n$, $P_n \in \langle M * B \rangle$, ne peuvent avoir des limites différentes. Si non, P_n serait situé de part et d'autre du plan γ passant par t^+ et perpendiculaire à a_{I}, et alors $U(M, \varepsilon)$ ne serait contenu dans aucun $[a^+_{t+}, \beta^+_{t+}, \varepsilon]$. Il reste encore à prouver que les suites $\bar{t}^+(M) \times \overline{MP}_n$ et $\bar{t}^-(M) \times \overline{MP}_n$, $P_n \in \langle M * B \rangle$ tendent vers la même limite lorsque $\bar{t}^+(M) \neq \bar{t}^-(M)$.

Dans ce cas $a_{\mathrm{I}} = (t^+(M), t^-(M))$. Si les limites de ces suites étaient différentes, $\bar{N}_1$ et $\bar{N}_2 = -\bar{N}_1$, les points P_n seraient contenus dans l'angle formé par les plans perpendiculaires à a_{I} et passant par $t^+(M)$ et $t^-(M)$. Le dièdre $[a^+_{t+}, \beta^+_{t+}, \varepsilon]$ contenant P_n ne contiendrait donc pas le voisinage gauche du point M de la courbe. La contradiction ainsi obtenue prouve notre conclusion.

Théorème II. — Le théorème est identique à celui du travail [3].

Théorème III. — Le théorème est analogue à celui du travail [3].

Remarquons que $\langle A * B \rangle$ admet au point M des vecteurs demitangents (puisque $\bar{a}_{\mathrm{III}} \to \bar{a}_{\mathrm{I}}$, [4]).

La démonstration du théorème III se fait comme pour les paratingents dans le travail [3].

Théorème IV. — Le théorème est identique à celui du travail [3].

Théorème V. *Pour que la courbe $\langle A * B \rangle$ admette au point M un a_{V}, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient simultanément remplies:* a) *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U(M, \varepsilon)$ et pour tout $P \in U(M, \varepsilon)$ un dièdre $[a^+_{PM}, \beta^+_{PM}, \varepsilon]$ tels que $\bar{c}(P) \subset [a^+_{PM}, \beta^+_{PM}, \varepsilon] + [a^-_{PM}, \beta^-_{PM}, \varepsilon]$.* b) *Il existe un plan γ, $M \in \gamma$ tle que $\sup\limits_{P \in U(M, \varepsilon)} \sphericalangle(\gamma, \delta_{\varepsilon, P}) = \eta(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$, où $\delta_{\varepsilon, P}$ est le plan bissecteur de $[a^+_{PM}, \beta^+_{PM}, \varepsilon]$.*

La condition est nécessaire.

Si la condition a) n'était pas remplie, il existerait une suite $P_n \to M$ telle que les $\bar{c}(P_n)$ ne seraient contenus dans aucun dièdre $[a^+_{PM}, \beta^+_{PM}, \varepsilon] + [a^-_{PM}, \beta^-_{PM}, \varepsilon]$, il existerait donc au point M deux ou plusieurs plans osculateurs.

S'il n'existait pas de plan γ tel que $\eta(\varepsilon) \to 0$ pour $P \to M$, on pourrait choisir des suites de points $P'_n \to M$, $P''_n \to M$ telles que les plans bissecteurs des dièdres construits respectivement sur les cordes MP'_n et MP''_n tendraient vers des limites différentes; donc la condition b) doit être remplie.

La condition est suffisante.

Supposons qu'il existe au point M deux plans a'_V et a''_V, $a'_V \neq a''_V$, vers lesquels tendent les plans $(\bar{c}(P'_n), MP'_n)$ et $(\bar{c}(P''_n), MP''_n)$ lorsque les suites $P'_n, P''_n \to M$; alors ni la condition a), ni la condition b) ne seraient remplies.

Théorème Va. *Pour que la courbe* $\langle A*M)$, *qui admet au point* M *un vecteur demi-tangent à gauche au sens strict* $t^-(M)$, *ait en ce point un plan osculateur orienté* $\bar{a}_V$, *il faut et suffit que soient remplies les conditions* a) *et* b) *du théorème* V *ainsi que la condition:* c) *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $U^-(M, \varepsilon)$ *et pour tout* $P' \in U^-(M, \varepsilon)$ *un* $[\alpha^+_{P'M}, \beta^+_{P'M}, \varepsilon]$ *tel que* $\bar{c}(P') \subset [\alpha^+_{P'M}, \beta^+_{P'M}, \varepsilon]$, *où* $[\alpha^-_{P'M}, \beta^-_{P'M}, \varepsilon]$, *est le dièdre situé du même côté du plan* $\gamma_{P'M}$ *que* $\bar{t}^-(M)$ *et* $\gamma_{P'M}$ *est le plan passant par* $P'M$ *et perpendiculaire à* a_V.

Lemme. Si $\bar{a}_V$ existe pour les courbes du théorème Va, il existe un voisinage gauche $U^-(M) \subset \langle A*M)$ du point M tel que pour tout $P' \in U^-(M)$ l'arc $(P'*M)$ est situé d'un côté du plan $\gamma_{P'M}$ parpendiculaire à a_V et passant par la droite $P'M$.

Démonstration du lemme. Si pour tout $U^-(M)$ il existait un P' tel que l'arc $(P'*M)$ couperait le plan $\gamma_{P'M}$ aux points S', S'', N (où il peut arriver que $S' = S''$ et $N = M$) il existerait des point $Q', Q'' \in (P'*S')$ et $R', R'' \in (S''*N)$ tels que les $\bar{c}(Q')$ et $\bar{c}(R'')$ seraient situés, par exemple du côté positif du plan $\gamma_{P'M}$, les $\bar{c}(Q'')$ et $\bar{c}(R')$ du côté négatif du plan $\gamma_{P'M}$ l'arc $(P'*S')$ serait situé du côté positif de $\gamma_{P'M}$ et l'arc $(S''*N)$ du côté négatif de ce plan. Alors, à plus forte raison, $\bar{c}(Q'')$ serait situé du côté négatif du plan $\gamma_{Q''M}$ et $\bar{c}(R'')$ du côté positif du plan $\gamma_{R''M}$. (Le côté positif et le côté négatif du plan $\gamma_{P'M}$ se déterminent en fixant le signe pour un point et, pour les autres, en tenant compte de la continuté du plan $\gamma_{P'M}$). Par conséquent les vecteurs $\lim \bar{c}(Q'') \times \overline{Q''M} / |\bar{c}(Q'') \times \overline{Q''M}|$ et $\lim \bar{c}(R'') \times \overline{R''M} / |\bar{c}(R'') \times \overline{R''M}|$ auraient des sens différents, donc $\bar{a}_V$ n'existerait pas.

Démonstration du théorème Va. $\gamma_{P'M}$ dépend d'une manière continue de $P' \in \langle A*M)$, on peut donc déterminer les côtés positif et négatif du plan $\gamma_{P'M}$. La condition est nécessaire.

Supposons que $\bar{a}_V$ existe. Nous allons prouver qu'il existe un voisinage $U^-(M)$ tel que $\bar{t}^-(M) \subset \gamma_{P'M}, P' \in U^-(M)$. Si pour une suite $P'_n \to M$, $P_n \in \langle A*M)$ on avait $\bar{t}^-(M) \subset \gamma_{P'_nM}$ alors $\gamma_{P'_nM}$ serait un plan fixé, identique à un $\gamma_{P'M}$, où P' est arbitrairement proche du point M, et la courbe le couperait aux points P'_n.

Il résulte du lemme que $(P' * M)$ est situé d'un côté de $\gamma_{P'M}$ si le point P' sont contenus dans un voisinage $U^-(M)$. Mais si la courbe $\langle P' * M \rangle$ coupe le plan fixé $\gamma_{P'M}$ aux points $P'_n \to M$ elle n'est pas entièrement contenue dans $\gamma_{P'M}$ et est située d'un côté du plan $\gamma_{P'M}$, donc elle sera située de part et d'autre du plan $\gamma(\delta)$ obtenu de $\gamma_{P'_n M}$ par une rotation d'angle δ autour de la droite l perpendiculaire à a_{V} au point M.

Comme $P'_n \to M$ il n'existerait donc pas de voisinage $U^-(M)$ tel que $(Q'_n * M)$ (où Q'_n sont les points d'intersection de $\gamma(\delta)$ avec $(P * M)$) serait situé d'un côté de $\gamma_{Q'_n M}$. Par conséquent, en vertu du lemme, il n'existe pas de plan osculateur orienté demi-tangent au point M. Donc $\bar{t}^-$ est toujours situé du côté du plan $\gamma_{P'M}$ que nous considérons comme négatif et $\bar{t}^-(M) \not\subset \gamma_{P'M}$. Si $\bar{C}(P') \not\subset [a^+_{P'M}, \beta^+_{P'M}, \varepsilon]$, les vecteurs contingents devraient être situés de part et d'autre de $\gamma_{P'M}$ ou $\bar{c}(P') \subset [a_{P'M}, \beta_{\overline{P'M}}, \varepsilon]$. Alors dans le premier cas, $\bar{c}_1(P') \times \overline{P'M} / |\bar{c}_1(P) \times \overline{PM}|$ et $\bar{c}_2(P') \times \overline{P'M} / |\bar{c}_2(P') \times \overline{P'M}|$ par exemple auraient des limites différentes et a_{V} n'existerait pas.

D'autre part, si $\bar{c}(P') \subset (a^-_{P'M}, \beta^-_{P'M}, \varepsilon)$, il devrait exister des points de la courbe $\langle A * M \rangle$ appartenant à $U^-(M)$ et situés du côté négatif de $\gamma_{P'M}$, c'est-à-dire du côté qui cotient $\bar{t}^-(M)$. On sait que $\bar{t}^-(M)$ est situé du même côté du plan $\gamma_{P'M}$ que $[a^-_{P'M}, \beta^-_{P'M}, \varepsilon]$ et $\bar{t}^-(M) \not\subset \gamma_{P'M}$, il doit donc exister des points de la courbe, appartenant au voisinage $U^-(M)$, situés du côté positif de $\gamma_{P'M}$. Par conséquent la courbe $\langle A * M \rangle$ dans le voisinage du point M couperait le plan $\gamma_{P'M}$, en contradiction avec le lemme, la condition c) est bien nécessaire.

La suffisance des conditions du Va est évidente.

Théorème VI. *Pour que la courbe $\langle A * B \rangle$ admette au point $M \subset \langle A * B \rangle$ un plan osculateur orienté $\bar{a}_{\mathrm{VI}}$, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $U(M, \varepsilon) \in \langle A * B \rangle$ du point M et pour tout couple de points $P', P'' \in U(M, \varepsilon)$ il existe un dièdre $[a^+_{P'P''}, \beta^+_{P'P''}, \varepsilon]$ satisfaisant à la condition $U(M, \varepsilon) - \langle P' * P'' \rangle \subset [a^+_{P'P''}, \beta^+_{P'P''}, \varepsilon]$.*

Démonstration. Admettons que $\bar{a}_{\mathrm{VI}}$ existe. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que dans tout voisinage du point M il existe des points P'_n, P''_n tels que l'arc $U(M, \varepsilon) - \langle P'_n * P''_n \rangle$ ne soit contenu dans aucun dièdre $[a^+_{P'_n P''_n}, \beta^+_{P'_n P''_n}, \varepsilon]$. De même que dans le théorème I on démontre qu'alors $U(M, \varepsilon) - \langle P' * P'' \rangle$ coupe les deux faces a, β du dièdres ou contient simultanément des points interieurs des dièdres $(a^+_{P'P''}, \beta^+_{P'P''}, \varepsilon)$ et $(a^-_{P'P''}, \beta^-_{P'P''}, \varepsilon)$. Alors, de même que dans le théorème I, il n'existerait pas de plan osculateur orienté du type VI.

Inversement, supposons que les conditions de ce théorème sont remplies et qu'il existe des suites de plans $(P'_n, P''_n, P'''_n) \to a'_{\mathrm{IV}}$ et $(Q'_n, Q''_n, Q'''_n) \to a''_{\mathrm{VI}}$ telles que $a'_{\mathrm{VI}} \neq a''_{\mathrm{VI}}$, $P''_n \in (P'_n * P'''_n)$, $Q''_n \in (Q'_n * Q'''_n)$, où P'_n, P''_n, P'''_n,

Q'_n, Q''_n, Q'''_n sont des points de la courbe $\langle A * B \rangle$ qui tendent vers M lorsque $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon_i = \frac{1}{i} \sphericalangle (a'_{\mathrm{VI}}, a''_{\mathrm{VI}})$ pour $i = 1, 2, \ldots$

Par hypothèse il existe un voisinage $U(M, \varepsilon_i)$ et un dièdre $[a^+_{P'P''}, \beta^+_{P'P''}, \varepsilon_i]$ tels que $U(M, \varepsilon_i) - \langle P' * P'' \rangle \subset [a^+_{P'P''}, \beta^+_{P'P''}, \varepsilon_i]$ pour $P', P'' \in U(M, \varepsilon_i)$. Choisissons n assez grand pour que $P'_n, P''_n, P'''_n, Q'_n, Q''_n, Q'''_n \in U(M, \varepsilon_i)$. Alors $U(M, \varepsilon_i) - \langle P'_n * P'''_n \rangle \subset [a^+_{P'_nP''_n}, \beta^+_{P'_nP''_n}, \varepsilon_i]$, $U(M, \varepsilon_i) - \langle Q'_n * Q''_n \rangle \subset$ $\subset [a^+_{Q'_nQ''_n}, \beta^+_{Q'_nQ''_n}, \varepsilon_i]$ (puisque ces dièdres existent par hypothèse), d'où $P'''_n \subset [a^+_{P'_nP''_n}, \beta^+_{P'_nP''_n}, \varepsilon_i]$ En passant à la limite avec $n \to \infty$ on a donc $a'_{\mathrm{VI}} \subset D_P = [a^+_{t_P}, \beta^+_{t_P}, \varepsilon_i] + [a^-_{t_P}, \beta^-_{t_P}, \varepsilon_i]$, $a''_{\mathrm{VI}} \subset D_Q = [a^+_{t_Q}, \beta^+_{t_Q}, \varepsilon_i] + [a^-_{t_Q}, \beta^-_{t_Q}, \varepsilon_i]$ où t_P et t_Q ainsi que les dièdres précédents construits sur t_P et t_Q sont les limites de suites partielles correspondantes extraites des suites de droites $P'_nP''_n$ et $Q'_nQ''_n$ et des dièdres construits sur elles. Si $t_P = t_Q$, on arrive à une contradiction, puisque $U(M, \varepsilon_i)$ appartiendrait alors en même temps à D_P et à D_Q (les $U(M, \varepsilon_i) - M$ étant par hypothèse contenus dans ces dièdres), qui ont en commun pour $i > 2$ seulement la droite $t_P = t_Q$. Si $t_P \neq t_Q$, en passant à la limite avec $\varepsilon_i \to 0$ et en tenant compte du fait que à D_P et D_Q contiennent $U(M, \varepsilon_i)$, on conclut qu'ils contiennent en même temps les demi-tangentes $t^+(M)$ et $t^-(M)$ (l'existence résulte de la démonstration du théorème I). Lorsque $\varepsilon_i \to 0$ on a $D_P - a'_{\mathrm{VI}}$, $D_Q \to a''_{\mathrm{VI}}$. Donc $t = t^+(M) = t^-(M)$ est l'arête d'intesection de a'_{VI} et a''_{VI}. Par conséquent D_P contient t et t_P, et D_Q contient les droites t et t_Q. Soit $t_Q \neq t$. Comme t_Q coupe t, la courbe $\langle A * B \rangle$ coupe t_Q sous un angle déterminé et aucun voisinage du point M de la courbe ne peut être entièrement contenu dans $[a^+_{t_Q}, \beta^+_{t_Q}, \varepsilon_i]$ pour $\varepsilon_i < \frac{\pi}{2}$. La contradiction ainsi obtenue prouve que l'on a $t = t_Q = t_P$, et ce cas a été étudié précédemment. Donc $a'_{\mathrm{VI}} = a''_{\mathrm{VI}}$. L'orientabilité du plan osculateur du type VI résulte immédiatement de l'hypothèse.

Dans le travail [4] il a été démontré que les plans $\bar{a}_{\mathrm{VI}}, \bar{a}_{\mathrm{VII}}, \bar{a}_{\mathrm{VIII}}$ définis au moyen des vecteurs contingents, sont équivalents. Les cas VII et VIII se trouvent donc compris dans notre théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Radziszewski, K., *Sur les plans osculateurs orientés*, Annales Pol. Math. T.XII, (1962).

[2] Radziszewski, K., *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés*, Annales UMCS T. XVII, (1963).

[3] Radziszewski, K., *Sur certaines proprietés des courbes admettant les plans osculateurs orientés*, Annales T. XVII, (1963).

[4] Maksym, M., *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés de courbe*, Annales UMCS T. XVII, (1963).
[5] Radziszewski, K., *Sur un théorème de l'Hospital*, Bulletin de l'Académie Pol. des Sciences. Vol. XI, No **12**, (1963).
[6] Bouligand, G., *Introduction à la géometrie infinitésimale directe*, Paris, (1932).
[7] Van der Waag, *Sur les plans osculateurs I, II*, Indagationes Mathematicae **14**, (1952), p. 41-62.

Streszczenie

W pracy podaje się warunki konieczne i wystarczające na istnienie płaszczyzn ściśle stycznych zorientowanych, określonych przy pomocy wektorów kontyngensowych krzywej w przestrzeni euklidesowej E_3. Warunki te wyrażają zachowanie się krzywej w otoczeniu jej punktu względem rodziny dwuścianów.

Резюме

В работе приводятся необходимые и достаточные условия существования ориентируемых соприкасающихся плоскостей, определенных с помощью контингентных векторов кривой в E_3. Эти условия выражают поведение кривой в окрестности ее точки в отношении к некоторому множеству двугранников.