ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVIII, 8 SECTIO A 1964

Z Zakładu Geometrii Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik Zakładu: doc. dr Konstanty Radziszewski

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur une propriété des transformations isométriques

O pewnej własności przekształceń izometrycznych

Об одном свойстве изометрических отображений

Dans ce travail nous nous occupons du problème analogue à celui résolu dans [1]. Notamment, soient données deux surfaces n-dimensionnelles isométriques V_n et V_n^* contenues dans l'espace euclidien $(n+1)$-dimensionnel E_{n+1}. Nous allons démontrer que si l'application isométrique T de V_n sur V_n^* conserve les variétés planes, alors V_n et V_n^* sont congruentes.

Soient

(1) $$x^i = x^i(u) \text{ et } x^i = x^{*i}(u), \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

les équations des surfaces V_n et V_n^*, déterminées dans l'ensemble ouvert et connexe Δ, $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \Delta$. Admettons que les mêmes u^i déterminent les points $x^i(u)$ et $x^{*i}(u)$ correspondants par rapport à T. Plaçons V_n et V_n^* de telle façon qu'on a

(2) $$\begin{aligned} x^i(0) &= x^{*i}(0) = 0, & i &= 1, \ldots, n+1, \\ x^i_j(0) &= x^{*i}_j(0) = \delta^i_j x^{(j)}_{(j)}(0), & j &= 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

où $x^i_j = \partial x^i / \partial u^j$, δ^i_j est le symbole de Kronnecker, $0 = (0, \ldots, 0)$.

Soient

(3) $$A_i x^i = 0 \text{ et } A_i^* x^i = 0, \; i = 1, \ldots, n+1,$$

les équations des plans correspondants par rapport à T. Substituons (1) dans (3)

(4) $$A_i x^i(u) = 0, \; A_i^* x^{*i}(u) = 0$$

et résoudrons les équations obtenues par rapport à u^1

(5) $$\begin{aligned} u^1 &= u^1(u^2, \ldots, n^n, A_1, \ldots, A_{n+1}) \\ u^1 &= u^{*1}(u^2, \ldots, u^n, A_1^*, \ldots, A_{n+1}^*), \quad u^1 = u^{*1}. \end{aligned}$$

Dans la suite de ce travail nous écrirons presque exclusivement les expressions concernant la surface V_n; les analogues pour V_n^* peuvent être obtenues en mettant le signe* en haut des lettres correspondantes.

Substituons (5) dans (4) et dérivons ces identités par rapport à u^p et A_Q. Désignons $u_Q^1 = \partial u^1/\partial A_Q$.

$$A_i(x_1^i u_p^1 + x_p^i) = 0 \tag{6}$$

$$x^Q + A_i x_1^i u_Q^1 = 0. \tag{7}$$

En vertu de (2) ces identités prennent au point 0 la forme suivante:

$$A_1 x_1^1 u_p^1 + A_p x_{(p)}^{(p)} = 0, \quad u_p^1 = -A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1, \qquad u_Q^1 = 0. \tag{8}$$

Si nous posons $A_1 \neq A_1^* = 0$, alors de (8) il résulte

$$A_i = A_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8_1}$$

De (6) et (7) par la dérivation nous obtenons au point 0

$$\begin{aligned} G_1(x, A) = -A_1 x_1^1 u_{Ipp}^1 = x_{11}^1 (A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1)^2 - 2x_{1p}^1 A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1 + x_{pp}^1 - \\ -A_i[3x_{11}^i (A_p x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3 (x_1^1)^2 - 4x_{1p}^i A_p x_{(p)}^{(p)}/(A_1)^2 x_1^1 + x_{pp}^i/A_1]; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} G_2(x, A) = -A_1 x_1^1 u_{Ppp}^1 = x_{11}^p (A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1)^2 - 2x_{1p}^{(p)} A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1 + x_{pp}^{(p)} - \\ -2A_i[-x_{11}^i A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1 + x_{1p}^i] x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1; \end{aligned} \tag{10}$$

$$F(x, A) = -A_1 x_1^1 u_{pp}^1 = A_i[x_{11}^i (A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1)^2 - 2x_{1p}^i A_p x_{(p)}^{(p)}/A_1 x_1^1 + x_{pp}^i]. \tag{11}$$

$$G_1(x, A) = G_1(x^*, A^*); \tag{12}$$

$$G_2(x, A) = G_2(x^*, A^*); \tag{13}$$

$$F(x, A) = F(x^*, A^*). \tag{14}$$

Les raisonnements précedents ont été abrégés, parce que leurs détails nous avons donnés dans [1].

De la condition de l'isométrie:

$$\sum_r^{n+1} x_i^r x_j^r = \sum_r^{n+1} x_i^{*r} x_j^{*r}$$

nous obtenons au point u

$$\sum_r^{n+1} (x_{ip}^r x_j^r + x_i^r x_{jp}^r) = \sum_r^{n+1} (x_{ip}^{*r} x_j^{*r} + x_i^{*r} x_{jp}^{r})$$

ce que donne au point 0

$$x_{ip}^j x_{(j)}^{(j)} + x_{jp}^i x_{(i)}^{(i)} = x_{ip}^{*j} x_{(j)}^{*(j)} + x_{jp}^{*i} x_{(i)}^{*(i)}.$$

Donc pour $j = i$ nous obtenons

(15) $$x_{ip}^{(i)} = x_{ip}^{*(i)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

et pour $p = i$

$$x_{ii}^{j} x_{(j)}^{(i)} + x_{ji}^{(i)} x_{(i)}^{(i)} = x_{ii}^{*j} x_{(j)}^{*(i)} + x_{ji}^{*(i)} x_{(i)}^{*(i)},$$

d'où d'apres (15)

(16) $$x_{ii}^{j} = x_{ii}^{*j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Si $n = 2$, alors de (15) et (16) on a $x_{11}^{i} = x_{11}^{*1}$, $x_{1p}^{i} = x_{1p}^{*i}$, $x_{pp}^{i} = x_{pp}^{*i}$ pour $i = 1, 2$ et en vertu de (8_1) et (2) les identités (12) — (14) contiennent seulement les membres avec A_{n+1} et A_{n+1}^{*}.

Si $n > 2$, alors (12) — (14) donnent deux équations p.ex. pour $p = s$ et $p = q$, $s \neq q$, $s \geqslant 2$, $q \geqslant 2$. Pour $p = s$ l'équation (14), en vertu de (15), (16), ne contient pas de membres avec x_{11}^{i}, x_{1s}^{1}, $x_{1s}^{(s)}$, x_{ss}^{i}, $i = 1, \ldots, n$, donc

$$A_{n+1}^{*} = \{A_i(-\Delta x_{1p}^{i} A_p x_{(p)}^{(p)} A_1 x_1^1 + A_{n+1}[x_{11}^{n+1}(A_p x_{(p)}^{(p)})^2 - 2x_{1p}^{n+1} A_p x_{(p)}^{(p)} A_1 x_1^1 +$$
$$+ x_{pp}^{n+1}(A_1 x_1^1)^2]\}/[x_{11}^{*n+1}(A_p x_{(p)}^{(p)})^2 - 2x_{1p}^{*n+1} A_p x_{(p)}^{(p)} A_1 x_1^1 + x_{pp}^{*n+1}(A_1 x_1^1)^2],$$

où $\Delta x_{rp}^{i} = x_{rp}^{i} - x_{rp}^{*i}$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq 1$, p. C'est-á-dire A_{n+1}^{*} est une fonction linéaire de A_i, $i \neq 1, p$, $i = 1, \ldots, n+1$. Si nous posons $p = s$ et $p = q$, $p \leqslant 2$, on obtient deux expressions pour A_{n+1}^{*}, dans la première de lesquelles $(p = s)$ A_{n+1}^{*} est une fonction linéaire de A_q et dans la deuxième de A_s (et non linéaire de A_s et A_q respectivement). Comme A_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n+1$, sont indépendants, donc $\Delta x_{1q}^{s} = 0$. C'est-à-dire $x_{1q}^{s} = x_{1q}^{*s}$, $s, q = 1, \ldots, n$, (en profitant de (15) et (16)). On peut obtenir le même résultat par la comparaison de coefficients après l'élimination A_{n+1}^{*} de deux équations (14) pour $p = s$ et $p = q$, $p \geqslant 2$; notamment en comparant les parties ne contenant pas de A_{n+1}^{*} nous avons

$$A_i \Delta x_{1s}^{i} A_s x_{(s)}^{(s)}[x_{11}^{*n+1}(A_q x_{(q)}^{(q)})^2 - 2x_{1q}^{*n+1} A_q x_{(q)}^{(q)} A_1 x_1^1 + x_{qq}^{*n+1}(A_1 x_1^1)^2]$$
$$= A_j x_{1q}^{i} A_q x_{(q)}^{(q)}[x_{11}^{*n+1}(A_s x_{(s)}^{(s)})^2 - 2x_{1s}^{*n+1} A_s x_{(s)}^{(s)} A_1 x_1^1 + x_{ss}^{*n+1}(A_1 x_1^1)^2],$$
$$i \neq 1, s; j \neq 1, q.$$

Parce que le coefficient de $A_s(A_q)^3$ doit être ègal à zèro, donc

$$\Delta x_{1s}^{q} = 0 \text{ ou } x_{1s}^{q} = x_{1s}^{*q} \quad \text{pour } q, s = 1, \ldots, n,$$

(y comprenant (15) et (16)). C'est-à-dire dans le cas $n < 2$ les identitès (12) — (14) contiennet exclusivement les membres avec A_{n+1} et A_{n+1}^{*}.

Par la division de (12) par (13) nous obtenons $G_1(x, A)/G_2(x, A) = G_1(x^*, A^*)/G_2(x^*, A^*)$, où, en vertu des résultats précedents il n'y a plus de coefficients A_{n+1} et A_{n+1}^{*}. Donc l'identité $G_1(x, A)G_2(x^*, A^*)$

$= G_1(x^*, A^*)G_2(x, A)$ se présentera sous la forme suivante:

$$-3x_{11}^{n+1}x_{11}^{*n+1}(A_p)^3(x_{(p)}^{(p)})^4/(A_1)^3(x_1^1)^4+4x_{1p}^{n+1}x_{11}^{*n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3-$$
$$-x_{pp}^{n+1}x_{11}^{*n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2+3x_{11}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3-$$
$$-4x_{1p}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2+x_{pp}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}x_{(p)}^{(p)}/(A_1)^2x_1^1$$
$$=-3x_{11}^{*n+1}x_{11}^{n+1}(A_p)^3(x_{(p)}^{(p)})^4/(A_1)^5(x_1^1)^4+4x_{1p}^{*n+1}x_{11}^{n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3-$$
$$-x_{pp}^{*n+1}x_{11}^{n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2+3x_{11}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}(A_p)^2(x_{(p)}^{(p)})^3/(A_1)^4(x_1^1)^3-$$
$$-4x_{1p}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}A_p(x_{(p)}^{(p)})^2/(A_1)^3(x_1^1)^2+x_{pp}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}x_{(p)}^{(p)}/(A_1)^2x_1^1.$$

Par la comparaison des coefficients, si A_i sont variés, nous avons

$$4x_{1p}^{n+1}x_{11}^{*n+1}+3x_{11}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}=4x_{1p}^{*n+1}x_{11}^{n+1}+3x_{11}^{*n+1}x_{1p}^{n+1},$$
$$x_{pp}^{n+1}x_{11}^{*n+1}+4x_{1p}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}=x_{pp}^{*n+1}x_{11}^{n+1}+4x_{1p}^{*n+1}x_{1p}^{n+1},$$

d'où, si $x_{11}^{n+1}(0)\neq 0$,

$$x_{1p}^{n+1}x_{11}^{*n+1}=x_{1p}^{*n+1}x_{11}^{n+1},$$
(17) $$x_{pp}^{n+1}x_{11}^{*n+1}=x_{pp}^{*n+1}x_{11}^{n+1},$$
$$x_{pp}^{n+1}x_{1p}^{*n+1}=x_{pp}^{*n+1}x_{1p}^{n+1}.$$

Posons au point 0:

(18$_1$) $$x_{11}^{n+1}=ax_{11}^{*n+1},$$

alors de (17) il résulte

(18$_2$) $$x_{1p}^{n+1}=ax_{1p}^{*n+1},$$

(18$_3$) $$x_{pp}^{n+1}=ax_{pp}^{*n+1},$$

d'où en vertu de (12) ou (13) nous obtenons

(19) $$A_{n+1}^*=aA_{n+1},\quad a=\text{const}.$$

Fixons maintenant les points $M(z^1,\ldots,z^{n+1})\in V_n$ et $M^*(z^{*1},\ldots,z^{*n+1})\in V_n^*$ correspondants par rapport à la transformation T. Alors, pour les plans correspondants contenant $0, M$ et $0, M^*$ respectivement, nous avons $A_iz^i=0$ et $A_i^*z^{*i}=0$. Ainsi, A_{n+1} et A_{n+1}^* sont déterminés par les autres A_i et M, M^*:

(20) $$A_{n+1}=A_jz^j/z^{n+1},\ A_{n+1}^*=-A_jz^{*j}/z^{*n+1}=aA_{n+1},\ j=1,\ldots,n.$$

De (20) nous avons identiquement $aA_jz^j/z^{n+1}=A_jz^{*j}/z^{*n+1}$, d'où, par la comparaison des coefficients, si A_j sont variés,

$$az^j/z^{n+1}=z^{*j}/z^{*n+1}.$$

Posons $z^{*n+1} = bz^{n+1}$, alors $z^{*j} = abz^j$, $j = 1, \dots, n$, $z^{*n+1} = bz^{n+1}$, ou brievèment

$$(21) \qquad z^{*i} = a^i bz^i,\; a^i = a = \text{const, pour } i = 1, \dots, n,\; a^{n+1} = 1,$$

pour tous les points z^i et z^{*i} correspondants par rapport à T.

Par la dérivation de (21) nous obtenons

$$(22) \qquad z_p^{*i} = a^i b_p z^i + a^i b z_p^i,\quad p = 1, \dots, n.$$

Si la tenseur de courbure $R_{kj,is} = \pi_{ik}\pi_{js} - \pi_{ij}\pi_{sk}$, $\pi_{ij} = r_{ij}n$, où n est vecteur normal, r rayon-vecteur de la surface, π_{ij} coefficients de deuxième forme fondamentale, n'est pas égale à zéro au point 0, alors de (18) résulte $a^2 = 1$, parce que $R_{kj,is} = R^*_{kj,is}$ et $r_{ij}(0)n(0) = x_{ij}^{n+1}(0) = \pi_{ij}(0)$. Par le déplacement de V_n^* nous pouvons obtenir (p. ex. $x^{i'} = x^i, i = 1, \dots \dots, n, -x^{n+1'} = x^{n+1}$), $a = 1$ et $A_i = A_i^*$, $i = 1, \dots, n+1$.

Comme le point 0 était arbitraire, donc nous avons démontré que $\pi_{ij} = \pi_{ij}^*$ pour tous les points correspondants de V_n et V_n^*. Ainsi les surfaces V_n et V_n^* admettent les mêmes I et II formes fondamentales en tous les points correspondants, donc elles sont congruentes dans un entourage de 0.

Si $R_{ij,ks} = 0$ au point 0, mais il existe un point où $R_{ij,ks} \neq 0$, alors nous prenons ce point et leur entourage en cosidération.

Admettons donc que $R_{ij,ks} = 0$ dans un entourage de 0, mais $\pi_{11} \neq 0$ au point 0. Introduisons les lignes de courbure comme les lignes de coordonnées. Alors $\pi_{ij}(u) = 0$ pour $i \neq j$ et comme $R_{1p,1p} = \pi_{11}\pi_{pp} - (\pi_{1p})^2 = 0$, donc $\pi_{pp}(u) = 0$ pour $p > 1$. (18) peut être écrit sous la forme $\pi_{ij} = b\pi_{ij}^*$, donc $\pi_{11} = b\pi_{11}^*$, $\pi_{ij} = \pi_{ij}^* = 0$ pour $ij \neq 1$, au point u.

Les équations de Gauss prennent maintenant au point u la forme suivante:

$$(23) \qquad \begin{aligned} r_{11} &= \Gamma_{11}^k r_k + \pi_{11} n, & r_{11}^* &= \Gamma_{11}^k r_k^* + c\pi_{11} n^* \\ r_{ij} &= \Gamma_{ij}^k r_k, & r_{ij}^* &= \Gamma_{ij}^k r_k^* \quad \text{pour } ij \neq 1, \end{aligned}$$

où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel. L'identité $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^{*k}$ rèsulte de l'isométrie.

De (22) nous avons

$$(24) \qquad x_p^{*i} = a^i(b_p x^i + bx_p^i)$$

$$(25) \qquad x_{pq}^{*i} = a^i(b_{pq}x^i + b_p x_q^i + b_q x_p^i + bx_{pq}^i).$$

Posons

$$(26) \qquad r = s^k r_k + sn.$$

Substituons (24) — (26) dans (23), alors

$$x^{*i}_{pq} = a^i(b_{pq}x^i + b_p x^i_q + b_q x^i_p + b x^i_{pq}) = \Gamma^k_{pq} a^i (b x^i + b x^i_k),\ pq \neq 1,$$

$$b_{pq}(s^k x^i_k + s n^i) + b_p x^i_q + b_q x^i_p + b\Gamma^k_{pq} x^i_k = \Gamma^r_{pq} b_r (s^k x^i_k + s n^i) + \Gamma^k_{pq} x^i_k b;$$

ou

$$b_{pq}(s^k x^i_k + s n^i) + b_p x^i_k \delta^k_q + b_q x^i_k \delta^k_p + b\Gamma^k_{pq} x^i_k = \Gamma^r_{pq} b_r (s^k x^i_k + s n^i) + \Gamma^k_{pq} x^i_k b.$$

Comme les vecteurs x^i_k et n^i sont linéairement indépendants, donc

$$b_{pq}s^k + b_p \delta^k_q + b_q \delta^k_p + b\Gamma^k_{pq} = \Gamma^r_{pq} b_r s^k + \Gamma^k_{pq} b,\quad k = 1, \ldots, n,\quad b_{pq} s = \Gamma^r_{pq} b_r s,$$

d'où $b_p \delta^k_q + b_q \delta^k_p = 0$, $pq \neq 1$, donc $b_p = 0$, $p = 1, \ldots, n$, au point u.

En profitant de l'isométrie, de coordonnées rectangulaires et de (24) nous avons au point u

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x^{*i}_p x^{*i}_q) = \sum_{i=1}^{n+1} (a^i b)^2 x^i_p x^i_q = \sum_{i=1}^{n} (ab)^2 x^i_p x^i_q + b^2 x^{n+1}_p x^{n+1}_q = 0, \text{ is } p \neq q.$$

D'autre part

$$\sum_{i=1}^{n} x^i_p x^i_q = - x^{n+1}_p x^{n+1}_q,\quad p \neq q,$$

donc $-(ab)^2 x^{n+1}_p x^{n+1}_q + b^2 x^{n+1}_p x^{n+1}_q = 0$, d'où, parce que on peut introduire les coordonnées orthogonales telles que $x^{n+1}_p \neq 0$ et $x^{n+1}_q \neq 0$, $p \neq q$, au point u(c'est-à-dire il existe tel u) donc $a^2 = 1$ et nous pouvons situer V^*_n tellement que $a = 1$.

De (2) et (22) nous obtenons $b = 1$.

Ces resultats ont été obtenus sous la supposition $x^{n+1}(u) \neq 0$, mais de la contituité ils résultent pour tous les points d'un entourage du point 0. Ainsi nous avons démontré que

$$r^*(u) = r(u)$$

dans un entourage du point 0.

Naturellement les plans correspondants par rapport à T sont identiques dans un entourage de 0. Considérons les points M et M^* correspondants par rapport à T, où M est arbitraire de V_n. Le point M est déterminé par $n+1$ plans coupant cet entourage, c'est-à-dire nous prenons $n+1$ plans différents contenant un seul point M de V_n en commun. Mais le point M^* se trouve dans chaque de ces plans, parce que les plans correspondants par rapport à T sont identiques dans cet entourage de 0. Dons nous avons $M = M^*$ pour tous les points correspondants des surfaces V_n et V^*_n.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème. *Si deux surfaces n-dimensionnelles isométriques V_n et V_n^*, régulières de classe $C^{(3)}$, contenues dans l'espace euclidien $(n+1)$-dimensionnel E_{n+1}, sont telles que l'image par l'isométrie de chaque variété $(n-1)$-dimensionnelle V_{n-1}, $V_{n-1} \subset V_n$, contenue dans un plan n-dimensionnel P_n, est une variété $(n-1)$-dimensionnelle V_{n-1}^*, $V_{n-1}^* \subset V_n^*$, contenue aussi dans un plan n-dimensionnel P_n^*, alors V_n et V_n^* sont congruentes.*

Ce théorème a été démontré pour les surfaces n'étant pas des ensembles plans. Si les surfaces sont planes, alors le théorème résulte immédiatement. Si les surfaces ne sont pas des ensembles plans, alors les conditions (2) et le choix de a déterminent la transformation orthogonale de E_{n+1} de la manière univoque, car les points correspondants de E_{n+1} sont déterminés par l'intersection de $(n+1)$ plans correspondants par rapport à T et coupant V_n ou V_n^* respectivement. Cela peut être exprimé sous la forme suivante:

La transformation isométrique de la surfaces n-dimensionnelle non plane, contenue dans l'espace euclidien $(n+1)$-dimensionnel, qui transforme ses sous-variétés $(n-1)$-dimensionnelles planes en des variétés planes $(n-1)$-dimensionnells, est une transformation orthogonale de E_{n+1}.

Ici nous appelons un groupe de transformations orthogonale s'il est sous-groupe du groupe affin, conservant les longueurs des vecteurs. Nous disons qu'une transformation g de sous-ensemble $V_n \subset E_{n+1}$ sur l'ensemble $V_n^* \subset E_{n+1}$ appartient à un groupe de transformations G de E_{n+1}, s'il existe une transformation $g' \in G$ identique à g sur V_n (autrement dit si g peut être prolongée à une transformation appartenant à G).

Les résultats de ce travail et de [1] ont été publiés, sans démonstrations, dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Radziszewski, K., *Sur la coincidence des surfaces dans l'espace projectif*. Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska. Vol. XVIII, (1964).

[2] Fichtenholc, J. M. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Vol. I. Moskwa-Leningrad, (1948).

[3] Norden, A. P., *Пространства аффинной связности*, Moskwa-Leningrad, 1950.

[4] Radziszewski, K., *Sur une condition de coincidence des surfaces*. Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences, Série Mathématique et Astronomique, vol.

Streszczenie

W pracy dowodzi się następującego twierdzenia:

Jeśli dwie powierzchnie V_n i V_n^*, n-wymiarowe, izometryczne, klasy $C^{(3)}$ i zawarte w przestrzeni euklidesowej $(n+1)$-wymiarowej, są takie, że obrazami przez izometrię rozmaitości płaskich $(n-1)$-wymiarowych

$V_{n-1} \subset V_n$, $V_{n+1} \subset P_n$, są rozmaitości $(n-1)$-wymiarowe płaskie $V_{n+1}^* \subset V_n^*$, $V_{n-1}^* \subset P_n^*$, gdzie P_n i P_n^* są n-wymiarowymi płaszczyznami, to V_n i V_n^* są przystające.

Резюме

В работе доказывается следующая теорема.
Если две n-мерные изометрические поверхности V_n и V_n^* класса $C^{(3)}$, содержащиеся в евклидовом $(n+1)$-мерном пространстве E_{n+1}, являются такими, что плоским $(n$-$1)$ — мерным многообразиям $V_{n-1} \subset V_n$, $V_{n-1} \subset P_n$ соответствуют через изометрию тоже $(n-1)$-мерные плоские многообразия $V_{n-1}^* \subset V_n^*$, $V_{n-1}^* \subset P_n^*$ (где P_n и P_n^* — n-мерные плоскости), то V_n и V_n^* конгруэнтны.