ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. X, 3 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr K. Tatarkiewicz

ŚWIATOMIR ZĄBEK

Sur la périodicité modulo m des suites de nombres $\binom{n}{k}$

O okresowości modulo m ciągów liczb $\binom{n}{k}$

О периодичности по модулю m последовательностей чисел $\binom{n}{k}$

§ 1. Soient un nombre naturel m et une suite infinie de nombres entiers $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. S'il existe deux nombres naturels q et N tels que

$$a_{n+q} \equiv a_n \pmod m \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant N,$$

nous dirons que la suite $\{a_n\}$ est périodique modulo m et que le nombre q est une période de cette suite. On prouve aisément que tout multiple entier d'une période modulo m d'une suite donnée est aussi une période modulo m de cette suite. On peut aussi démontrer que toute période modulo m d'une suite donnée doit être un multiple entier de *la plus courte période* modulo m de cette suite. La plus courte période permet donc de trouver toutes les périodes modulo m de la suite. Plusieurs théorèmes généraux sur les suites périodiques modulo m ont été démontrés par W. Sierpiński [1] à qui l'on doit les premières recherches sur ce sujet. Au cours des quelques dernières années on a établi des résultats relatifs à la plus courte période modulo m de certaines suites particulières.

Le but de ce travail (dont le sujet m'a été proposé par M. K. Tatarkiewicz), est de trouver la plus courte période modulo m des suites de nombres

$$a_n = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

où k est un nombre naturel fixe.

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont évidemment entiers lorsque k est naturel (si $n<k$ ils sont nuls, si $n \geqslant k$ ce sont simplement les coefficients binomiaux de Newton).

Dans le dernier paragraphe je donne une application du résultat obtenu aux valeurs particulières $m = 10^{\mu}$.

§ 2. Dans ce paragraphe je vais établir quelques lemmes dont je vais profiter dans la suite.

Désignons par $W(n)$ un polynôme de la forme

$$(1) \qquad W(n) = \sum_{i=0}^{a} a_i n^i = a_a n^a + a_{a-1} n^{a-1} + \ldots + a_1 n + a_0,$$

où a est un nombre naturel, $a_i \, (i = 0, 1, 2 \ldots, a)$ sont entiers, $a_a \neq 0$.

Lemme 1. *Si m est un nombre naturel arbitraire et $W(n)$ est le polynôme (1), la suite infinie des nombres $W(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est périodique modulo m pour $n \geqslant 0$ et une de ses périodes est égale à m.*

Démonstration. On a évidemment

$$n + m \equiv n \pmod{m} \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Donc

$$W(n+m) = \sum_{i=0}^{a} a_i (n+m)^i \equiv \sum_{i=0}^{a} a_i n^i \pmod{m} \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots .$$

Par conséquent

$$W(n+m) \equiv W(n) \pmod{m} \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

c. q. f. d.

Supposons que pour le polynôme $W(n)$ de la forme (1) il existe un nombre entier s tel que $W(n)/s$ admette des valeurs entières pour tout n naturel, à partir d'un certain indice $n = N_s$. L'expression $W(n)/s$ est donc un polynôme de degré a à coefficients rationnels, admettant pour $a+1$ nombres entiers consécutifs, par exemple pour $n = N_s, N_s+1, \ldots, N_s+a$, des valeurs entières. A. Wakulicz [2], p. 110, lemme 2, a démontré qu'un tel polynôme admet des valeurs entières pour tout n entier. Donc, en particulier, l'expression $W(n)/s$ a une valeur entière pour $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Lemme 2. *Si $W(n)$ est un polynôme de la forme (1) et si s est un nombre entier tel que $W(n)/s$ admette des valeurs entières pour $n = 0$, 1, 2, ..., alors la suite $\{W(n)/s\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est périodique modulo m pour tout nombre naturel $n \geqslant 0$ et une de ses périodes est égale à ms.*

D é m o n s t r a t i o n. En posant, dans le lemme 1, ms au lieu de m, nous avons

$$W(n+ms) \equiv W(n) \pmod{ms} \quad \text{pour} \quad n=0,1,2\ldots .$$

En divisant les deux membres de cette congruence par s nous obtenons

$$\frac{W(n+ms)}{s} \equiv \frac{W(n)}{s} \pmod{m} \quad \text{pour} \quad n=0,1,2,\ldots ,$$

c. q. f. d.

Lemme 3. *Si $W(n)$ est le polynôme (1) et si s est un nombre entier tel que $W(n)/s$ admette des valeurs entières pour $n=0, 1, 2, \ldots$, alors pour que le nombre naturel q soit une période modulo m de la suite $\{W(n)/s\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, m étant un nombre naturel quelconque, il faut que la congruence*

$$\frac{W(q)-a_0}{s} \equiv 0 \pmod{m} \tag{2}$$

soit satisfaite.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que q soit une période modulo m de la suite $\{W(n)/s\}$. On a donc

$$\frac{W(n+q)}{s} \equiv \frac{W(n)}{s} \pmod{m} \qquad n=0,1,2\ldots .$$

En particulier pour $n=0$

$$\frac{W(q)}{s} \equiv \frac{W(0)}{s} \pmod{m}.$$

Mais

$$W(0)=a_0 .$$

De là

$$\frac{W(q)}{s} \equiv \frac{a_0}{s} \pmod{m}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{W(q)-a_0}{s} \equiv 0 \pmod{m}$$

c. q. f. d.

Je dois cette démonstration, beaucoup plus courte que la mienne, à M. A. S c h i n z e l.

Remarque. La condition (2) n'est pas suffisante. Par exemple, pour $W(n)=n^4+2n^3+n^2$, $s=4$, $m=10$, le nombre $q=4$ satisfait à la condition (2), on voit pourtant aisément qu'il n'est pas une période modulo 10 de la suite $\{(n^4+2n^3+n^2)/4\}$.

§ 3. Dans ce paragraphe j'étudierai la périodicité et les propriétés des périodes modulo m des suites des nombres $a_n = \binom{n}{k}$.

Théorème 1. *Pour m naturel quelconque la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ (k naturel fixe, $n = 0, 1, 2, \ldots$) est périodique modulo m pour $n \geqslant 0$.*

Démonstration. En effet, on a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. En effectuant la multiplication dans le numérateur de cette expression on obtient un polynôme du type considéré dans le § 2. Les nombres $\binom{n}{k}$ étant tous entiers pour k et n naturels, le lemme 2 entraîne la conclusion du théorème.

c. q. f. d.

Je vais énoncer encore deux lemmes.

Lemme 4. *Toute période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) est une période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{\varkappa}\right\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), où $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$.*

Démonstration. Soit q une période quelconque modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Son existence est assurée par le théorème 1. On aura donc

$$\binom{n+q}{k} \equiv \binom{n}{k} \pmod{m}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

et

$$\binom{n+q+1}{k} \equiv \binom{n+1}{k} \pmod{m}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

En vertu de la propriété bien connue des nombres $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ on a

$$\binom{n+q+1}{k} = \binom{n+q}{k} + \binom{n+q}{k-1} \tag{5}$$

et

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{6}$$

Des formules (4), (5) et (6) il vient

$$\binom{n+q}{k} + \binom{n+q}{k-1} \equiv \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \pmod{m}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

De là et de (3) on tire

$$\binom{n+q}{k-1} \equiv \binom{n}{k-1} \pmod{m}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Donc q est une période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k-1}\right\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$.
En raisonnant par récurrence on obtient l'énoncé du lemme.

c. q. f. d.

Comme conséquence immédiate du lemme 4 nous obtenons:

Lemme 5. *Toute période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ est un multiple entier de la plus courte période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k-1}\right\}$.*

Je vais établir maintenant le

Théorème 2. *Pour que le nombre naturel q soit une période modulc m de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, il faut et il suffit:*

1° que q soit un multiple entier de la plus courte période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k-1}\right\}$,

2° que l'on ait $\binom{q}{k}\equiv 0 \pmod{m}$.

Démonstration. I. La condition est nécessaire. Pour la première partie de la condition, cela résulte du lemme 5. Pour la seconde, c'est une conséquence du lemme 3. En effet, posons dans la formule (2)

$$W(n)=n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

$$s=k!$$

la condition (2) deviendra alors $\binom{q}{k}\equiv 0 \pmod{m}$.

II. La condition est suffisante. On sait que

$$\binom{n+q}{k}=\binom{n}{k}\binom{q}{0}+\binom{n}{k-1}\binom{q}{1}+\ldots+\binom{n}{1}\binom{q}{k-1}+\binom{n}{0}\binom{q}{k}. \tag{7}$$

Supposons que q satisfasse à la condition de l'énoncé. Etant un multiple entier de la plus courte période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k-1}\right\}$, q est aussi une période modulo m de cette suite; en vertu du lemme 4, q est une période modulo m de toutes les suites $\left\{\binom{n}{\varkappa}\right\}$ pour $\varkappa=1,2,\ldots,k-1$.
Donc, d'après le lemme 3,

$$\binom{q}{\varkappa}\equiv 0 \pmod{m} \qquad \text{pour} \qquad \varkappa=1,2,\ldots,k-1.$$

De plus, puisque la condition 2° est vérifiée par hypothèse, nous avons finalement

$$\binom{q}{\varkappa}\equiv 0 \pmod{m} \qquad \text{pour} \qquad \varkappa=1,2,\ldots,k.$$

De là et de (7) on tire

$$\binom{n+q}{k}=\binom{n}{k}\binom{q}{0}+\binom{n}{k-1}\binom{q}{1}+\ldots+\binom{n}{1}\binom{q}{k-1}+\binom{n}{0}\binom{q}{k}\equiv$$

$$\equiv\binom{n}{k}\binom{q}{0}\equiv\binom{n}{k}(\operatorname{mod} m)\quad \text{pour } n=0,1,2,\ldots;$$

q est donc une période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ et la condition est bien suffisante.

c. q. f. d.

§ 4. Je vais démontrer encore un lemme.

Lemme 6. *Si p est un nombre premier et si α, β et t sont des nombres naturels, $\beta \geqslant \alpha-1$, alors*

$$\sim p \left| \binom{tp^\beta-1}{p^\alpha-1}\right..$$

Démonstration. On a

$$\binom{tp^\beta-1}{p^\alpha-1}=\frac{(tp^\beta-1)(tp^\beta-2)\ldots(tp^\beta-p^\alpha+1)}{1\cdot 2\ldots(p^\alpha-1)}=\prod_{\lambda=1}^{p^\alpha-1}\frac{tp^\beta-\lambda}{\lambda}.$$

Soit $1\leqslant\lambda\leqslant p^\alpha-1$. Si $\sim p\,|\,\lambda$, on a évidemment $\sim p\,|\,tp^\beta-\lambda$. Si $p^\Theta|\,\lambda$ (Θ naturel) et $\sim p^{\Theta+1}|\,\lambda$, alors $1\leqslant\Theta\leqslant\alpha-1$ et, de plus $p^\Theta|\,tp^\beta-\lambda$ et $\sim p^{\Theta+1}\,|\,tp^\beta-\lambda$. Par conséquent

$$\binom{tp^\beta-1}{p^\alpha-1}=\frac{ap\gamma}{bp\gamma}=\frac{a}{b},$$

où $(a,p)=(b,p)=1$. On ne saurait donc avoir $p \left| \binom{tp^\beta-1}{p^\alpha-1}\right.$.

c. q. f. d.

§ 5. Voici maintenant le théorème principal de ce travail.

Théorème 3. *Soit m un nombre naturel quelconque admettant la décomposition en facteurs premiers*

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_l^{\alpha_l},$$

où p_i sont des nombres premiers différents et α_i des nombres naturels. La plus courte période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ est

$$q_k=mp_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_l^{\beta_l},$$

où $\beta_i=\beta_i(k)$ est le plus grand des nombres entiers non négatifs tels que $p_i^{\beta_i}\leqslant k$, $(i=1,2,\ldots,l)$ (ce qui peut aussi s'exprimer par la formule: $\beta_i=E(\log_{p_i}k)$, pour $i=1,2,\ldots,l$).

D é m o n s t r a t i o n. Procédons par récurrence:

1° $k=1$, $\beta_i(1)=0$, $i=1,2,\ldots l$.

On a $\left\{\binom{n}{1}\right\}=\{n\}$. Il est facile de voir que la plus courte période modulo m de la suite naturelle $\{n\}=0,1,2,\ldots$ est égale à m. Donc $q_1=m$. Puisque $p_i^{\beta_i(1)}=1$ $(i=1,2,\ldots,l)$, le théorème est bien vrai pour $k=1$.

2° Admettons que le théorème soit vrai pour $k=\varkappa$ c'est-à-dire que si q_k est la plus courte période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ alors

$$q_\varkappa = m p_1^{\beta_1(\varkappa)} p_2^{\beta_2(\varkappa)} \ldots p_l^{\beta_l(\varkappa)}$$

Posons $\beta_i(\varkappa)=b_i$. De là $q_\varkappa = m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}$. En vertu de la définition des nombres b_i on a évidemment $\varkappa < p_i^{b_i+1}$ pour $i=1,2,\ldots,l$. On en conclut:

ou bien que $\varkappa+1<p_i^{b_i+1}$ pour $i=1,2,\ldots,l$,

ou bien qu'il existe un $i=j$ tel que $\varkappa+1=p_j^{b_j+1}$. Considerons deux cas.

Cas I. Il est $\varkappa+1<p_i^{b_i+1}$ pour $i=1,2,\ldots,l$.

Evidemment on peut mettre $\varkappa+1$ sous la forme

$$\varkappa+1 = t p_1^{u_1} p_2^{u_2}\ldots p_l^{u_l},$$

où $(t,p_i)=1$ et $0\leqslant u_i\leqslant b_i+1$ pour $i=1,2,\ldots,l$. De la définition des nombres β_i il résulte

$$\beta_i(\varkappa+1)=\beta_i(\varkappa)=b_i.$$

Je dis que

$$q_{\varkappa+1} = m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l} = q_\varkappa.$$

En effet,

$$\binom{m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}}{\varkappa+1} = \binom{m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}}{t p_1^{u_1} p_2^{u_2}\ldots p_l^{u_l}} =$$

$$= \frac{m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}(m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}-1)\ldots(m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l} - t p_1^{u_1} p_2^{u_2}\ldots p_l^{u_l}+1)}{1\cdot 2\ldots(t p_1^{u_1} p_2^{u_2}\ldots p_l^{u_l}-1)\, t p_1^{u_1} p_2^{u_2}\ldots p_l^{u_l}} =$$

$$= m p_1^{b_1-u_1} p_2^{b_2-u_2}\ldots p_l^{b_l-u_l}\,\frac{1}{t}\binom{m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}-1}{t p_1^{u_1} p_2^{u_2}\ldots p_l^{u_l}-1} \equiv 0 \pmod{m},$$

car on a, par hypothèse, $(t,p_i)=1$ et $\binom{m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}}{\varkappa+1}$ doit être un nombre entier; par suite

$$t \,\Big|\, \binom{m p_1^{b_1} p_2^{b_2}\ldots p_l^{b_l}-1}{t p_1^{u_1} p_2^{u_2}\ldots p_l^{u_l}-1}.$$

De plus $mp_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_l^{b_l}$, étant un multiple de $q_\varkappa$, est en vertu du théoreme 2 une période modulo m de la suite

$$\left\{\binom{n}{\varkappa+1}\right\} \quad \text{pour} \quad \varkappa+1 < p_i^{b_i+1} \qquad i=1,2,\dots,l$$

cette période est la plus courte, puisqu'elle est le plus petit multiple de $q_\varkappa$ On a donc bien dans ce cas

$$q_{\varkappa+1} = mp_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_l^{b_l} = mp_1^{\beta_1(\varkappa+1)} p_2^{\beta_2(\varkappa+1)} \dots p_l^{\beta_l(\varkappa+1)}.$$

Cas II. Il existe un $i=j$ tel que $\varkappa+1 = p_j^{b_j+1}$. Pour $i \neq j$ on ne peut avoir $\varkappa+1 = p_i^{b_i+1}$, car il en résulterait $p_i^{b_i+1} = p_j^{b_j+1}$, contrairement à l'hypothèse que p_i sont des nombres premiers différents. On ne peut avoir non plus $\varkappa+1 > p_i^{b_i+1}$, car $\varkappa < p_i^{b_i+1}$.

Donc

$$\varkappa+1 < p_i^{b_i+1} \quad \text{pour } i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant 1.$$

Par conséquent

$$\beta_i(\varkappa+1) = b_i \quad \text{pour } i \neq j,$$
$$\beta_j(\varkappa+1) = b_j + 1.$$

Je dis que

$$q_{\varkappa+1} = mp_1^{b_1} \dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_j^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}} \dots p_l^{b_l}.$$

En effet, de même que dans le cas précédent on trouve:

$$\binom{mp_1^{b_1} \dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_j^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}} \dots p_l^{b_l}}{\varkappa+1} = \binom{mp_1^{b_1} \dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_j^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}} \dots p_l^{b_l}}{p_j^{b_j+1}} =$$

$$= mp_1^{b_1} \dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_{j+1}^{b_{j+1}} \dots p_l^{b_l} \binom{mp_1^{b_1} \dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_j^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}} \dots p_l^{b_l}}{p_j^{b_j+1}-1} \equiv 0 \pmod{m}.$$

De plus, comme

$$mp_1^{b_1} \dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_j^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}} \dots p_l^{b_l} = p_j \cdot q_\varkappa,$$

ce nombre est, en vertu du théorème 2, une période modulo m de la suite $\left\{\binom{n}{\varkappa+1}\right\}$ $(n=1,2,\dots)$ pour $\varkappa+1 = p_j^{b_j+1}$.

Supposons $q_{\varkappa+1} < mp_1^{b_1} \dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_j^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}} \dots p_l^{b_l}$.

Puisque $q_{\varkappa+1}$ doit être (en vertu du théoreme 2) un multiple entier de $q_\varkappa$, on a donc nécessairement

$$q_{\varkappa+1} = mp_1^{b_1} \dots p_l^{b_l} = q_\varkappa$$

et

$$\binom{mp_1^{b_1} \dots p_j^{b_j} \dots p_l^{b_l}}{\varkappa+1} = \binom{mp_1^{b_1} \dots p_j^{b_j} \dots p_l^{b_l}}{p_j^{b_j+1}} \equiv 0 \pmod{m}. \tag{8}$$

De même que précédemment on prouve que

$$\binom{mp_1^{b_1}\dots p_j^{b_j}\dots p_l^{b_l}}{p_j^{b_j+1}} = mp_1^{b_1}\dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_{j+1}^{b_{j+1}}\dots p_l^{b_l}\cdot\frac{1}{p_j}\binom{mp_1^{b_1}\dots p_j^{b_j}\dots p_l^{b_l}-1}{p_j^{b_j+1}-1}$$

De là et de (8) on déduit

$$p_j \,\Big|\, \binom{mp_1^{b_1}\dots p_j^{b_j}\dots p_l^{b_l}-1}{p_j^{b_j+1}-1},$$

ce qui est absurde en vertu du lemme 6. Il y a donc contradiction et on ne peut avoir $q_{\varkappa+1} < mp_1^{b_1}\dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_j^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}}\dots p_l^{b_l}$.

Par conséquent

$$q_{\varkappa+1} = mp_1^{b_1}\dots p_{j-1}^{b_{j-1}} p_{j+1}^{b_j+1} p_{j+1}^{b_{j+1}}\dots p_l^{b_l} = mp_1^{\beta_1(\varkappa+1)}\dots p_j^{\beta_j(\varkappa+1)}\dots p_l^{\beta_l(\varkappa+1)}$$

pour $\varkappa+1 = p_j^{b_j+1}$.

Nous avons ainsi prouvé, dans les deux cas possibles, que si le théorème est vrai pour $k=\varkappa$ il l'est aussi pour $k=\varkappa+1$. Il est donc pour k naturel quelconque.

c.q.f.d.

§ 6. En particulier, pour $m=10^{\mu}$ nous obtenos:

Corollaire. *La plus courte période modulo 10^{μ} de la suite $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ $(n=0,1,2,\dots)$ est égale à $\varrho_{\mu,k}=2^{a_k}5^{b_k}10^{\mu}$, où a_k et b_k sont les plus grands nombres entièrs non négatifs tels que $2^{a_k}\leq k$ et $5^{b_k}\leq k$.*

Voici, à titre d'exemple, quelques valeurs de $\varrho_{\mu,k}$:

k	ϱ_{μ}, k
1	10^{μ}
2, 3	2.10^{μ}
4	4.10^{μ}
5, 6, 7	20.11^{μ}
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	40.10^{μ}
16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24	80.10^{μ}
25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	400.10^{μ}

BIBLIOGRAPHIE

[1] Sierpiński W., *Sur la périodicité modulo m de certaines suites infinies d'entiers*. Ann. Soc. Pol. Math. **23** (1950), p. 252—258.

[2] Wakulicz A., *Sur les polynômes en x ne prenant que des valeurs entières pour x entiers*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III **2** (1954), p. 109—111.

Streszczenie

Niech będzie dana liczba naturalna m i ciąg nieskończony liczb całkowitych $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Jeśli istnieją takie dwie liczby naturalne q i N, że

$$a_{n+q} \equiv a_n \pmod m) \text{ dla } n \geqslant N$$

wówczas mówimy, że ciąg ten jest periodyczny modulo m, zaś liczbę q nazywamy okresem (periodem) tegoż ciągu. Badanie okresowości modulo m danego ciągu sprowadza się do znalezienia jego najkrótszego okresu modulo m. W niniejszej pracy zajmuję się znalezieniem najkrótszych okresów modulo m ciągów liczb

$$a_n = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną.

Opierając się na udowodnionych na wstępie kilku ogólniejszych lematach, dowodzę, że:

1° Dla dowolnych naturalnych ustalonych m i k ciąg $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ jest periodyczny modulo m dla $n \geqslant 0$.

2° Jeśli m jest dowolną liczbą naturalną o rozkładzie na czynniki pierwsze

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}$$

gdzie p_i są różnymi liczbami pierwszymi, α_i są liczbami naturalnymi; wówczas najkrótszy okres modulo m ciągu $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ wynosi $q_k = m p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_l^{\beta_l}$ gdzie $\beta_i = \beta_i(k)$ jest największą spośród liczb całkowitych nieujemnych takich, że $p_i^{\beta_i} \leqslant k$ $(i = 1, 2, \ldots l)$.

Na końcu podaję w szczególności wartości okresów dla $m = 10^\mu$, $k = 1, 2, \ldots 31$.

Резюме

Пусть дано натуральное число m и бесконечная последовательность целых чисел $\{a_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$. Если существуют такие два натуральные числа q и N, что

$$a_{n+q} \equiv a_n \pmod m) \text{ для } n \geqslant N.$$

то говорим, что эта последовательность периодическая по модулю m, а число q называем периодом этой последовательности. Исследование периодичности по модулю m данной последовательности сводится

к нахождению его кратчайшего периода по модулю m. В этой работе я занимаюсь нахождением кратчайших периодов по модулю m последовательности чисел

$$a_n = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

где k натуральное постоянное.

Опираясь на нескольких общих леммах, доказанных во вступлении, я доказываю, что:

1^0 Для произвольных натуральных m и k последовательность $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ периодическая по модулю m при $n \geqslant 0$.

2^0 Если m произвольное натуральное число с разложением на первоначальные числа

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$$

где p_i различные первоначальные числа, α_i натуральные числа; то кратчайший период по модулю m в последоватеьности $\left\{\binom{n}{k}\right\}$ равняется

$$q_k = m p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_l^{\beta_l}$$

где $\beta_i = \beta_i(k)$ самое большое среди целых не отрицательных чисел таких, что $p_i^{\beta_i} \leqslant k$ $(i = 1, 2, \dots, l)$.

В конце я привожу значения периодов для $m = 10^{\mu}$, $k = 1, 2, \dots, 31$.