ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VII, 5. SECTIO A 1953

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Matem.-Fiz.-Chem. UMCS w Lublinie
Kierownik: prof. dr Biernacki

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur des inégalités remplies par des expressions dont les termes ont des signes alternés

O nierównościach spełnionych przez wyrażenia o składnikach znaków naprzemiennych

О неравенствах которых члены имеют перемежающиеся знаки

§ 1. Le but de cet article est de montrer que si l'on remplace dans certaines inégalités classiques (p. ex. celle de Tchébycheff) des termes positifs par des termes à signes alternés, les inégalités obtenues restent valables, pourvu que les valeurs absolues des termes forment des suites décroissantes. D'ailleurs cette modification peut quelquefois changer le signe de l'inégalité (cf. les théorèmes II et IVa). Une inégalité de ce genre, qui a d'ailleurs trouvé des applications dans la physique mathématique cf. |4|[1]) a été déjà obtenue par H. Weinberger |5|. Cependant les inégalités classiques de Cauchy-Schwarz et de Minkowski ne se prêtent pas à des extensions de ce genre. Dans les §§ 4 et 5 j'étudie plus particulièrement des inégalités satisfaites par des fonctions convexes.

§ 2. Théorème I. *Supposons que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$ et que $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Supposons, en outre, que si l'on divise la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ en groupes de termes consécutifs, dont chacun comprend exclusivement les termes $+1$ ou exclusivement les termes -1, le premier groupe contient des $+1$ et que le nombre de termes d'un groupe composé de -1 ne dépasse jamais le nombre de termes du groupe (composé de $+1$) qui le précède. Dans ces conditions on a l'inégalité „à la Tchébycheff" suivante:*

$$\varepsilon_1 a_1 b_1 + \varepsilon_2 a_2 b_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n b_n \geqslant \frac{(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n)(\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \ldots + \varepsilon_n b_n)}{n} \text{ [2]}.$$

[1]) Les numéros renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

[2]) L'inégalité de Tchébycheff correspond au cas où tous les ε_i sont égaux à $+1$.

R e m a r q u e. Il est clair qu'en particulier nous aurons une inégalité relative aux expressions à signes alternés:

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 + \ldots \pm a_n b_n \geqslant \frac{(a_1 - a_2 + \ldots \pm a_n)(b_1 - b_2 + \ldots \pm b_n)}{n}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que le premier groupe, composé de $+1$, soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$. Posons

$$E(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = \varepsilon_1 a_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n b_n -$$
$$- \frac{1}{n}(\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n)(\varepsilon_1 b_1 + \ldots \varepsilon_n b_n).$$

Il faut montrer que $E \geqslant 0$. On a

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} + \frac{\partial E}{\partial a_2} + \ldots + \frac{\partial E}{\partial a_p} = b_1 + b_2 + \ldots + b_p - \frac{p}{n}(\varepsilon_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n b_n).$$

Or il résulte des hypothèses de l'énoncé que l'on a:

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_p}{p} \geqslant \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n},$$

donc $\frac{\partial E}{\partial a_1} + \frac{\partial E}{\partial a_2} + \ldots + \frac{\partial E}{\partial a_p} \geqslant 0$. Par suite on diminue E en diminuant les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$, tous d'une même quantité. On peut atteindre ainsi que $a_p = a_{p+1}$. On répète le même raisonnement en échangeant les rôles des a_i et des b_i; on diminuera encore E en supposant que $b_p = b_{p+1}$. Or ε_{p+1} appartient au deuxième groupe, composé de -1, il en résulte que lorsque $a_p = a_{p+1}$ et $b_p = b_{p+1}$, E devient une expression analogue à la primitive, où cependant les nombres des termes des deux premiers groupes sont diminués chacun d'une unité. On poursuit le mêmo raisonnement: si le deuxième groupe des ε_i, composé de -1, était $\varepsilon_{p+1}, \ldots, \varepsilon_{p+s}$ $(s \leqslant p)$, les nombres des termes des deux premiers groupes seront finalement diminués de s, c. à d. le deuxième groupe des ε_i va disparaître, tandis que le premier, s'il existe encore, se réunira avec le troisième. Les suites a_i, b_i, ε_i qui restent satisfont évidemment à toutes les conditions de l'énoncé, mais le nombre des groupes de termes négatifs de la suite ε_i sera diminué d'une unité. En procédant par induction on est donc réduit soit au cas où la suite ε_i est composée exclusivement des $+1$, c. à d. au cas classique de T c h é b y c h e f f, soit au cas où tous les termes disparaissent, dans ce cas l'on a $E = 0$. L'énoncé I est donc démontré.

§ 3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

ne peut être étendue d'une manière analogue. On a, en effet, si

$$a_1 > a_2 > 0 \quad \text{et} \quad b_1 > b_2 > 0 \quad (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2)(b_1^2 - b_2^2),$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; mais, d'autre part, l'on a $(a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 < (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 - b_2^2 + b_3^2)$, par exemple dans le cas où $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, tandis que l'inégalité change de signe lorque a_1, a_2, b_1, b_2 restent les mêmes, alors que a_3 et b_3 deviennent assez petits. On sait que si $a_1, \ldots, a_n$ et p sont positifs, alors $(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}$ est une fonction décroissante de p (cf. par exemple Hardy-Littlewood-Pólya, 3, theorem 19, p. 28). Or H. F. Weinberger a trouvé ([5] cf. aussi [4] et [1]) la propriété analogue suivante:

$(a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p)^{\frac{1}{p}}$ où $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$, $p > 0$, est une fonction croissante de p. Il en résulte que l'inégalité

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2 + \ldots \pm a_n b_n)^2 < (a_1^2 - a_2^2 + \ldots \pm a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 + \ldots \pm b_n^2)$$

est exacte dans le cas particulieur où $b_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dans le livre cité de Hardy-Littewood-Pólya on démontre aussi (theorem 18, p. 28) que $\log\,(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)$ est une fonction convexe de p. Il n'existe pas de proposition analogue relative à expression

$$\log\,(a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p), \quad a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0, \quad p > 0;$$

car si l'on constate aisément que $\log\,(a_1^p - a_2^p)$ est une fonction concave de p, il n'en est plus toujours de même de la fonction $\log\,(a_1^p - a_2^p + a_3^p)$. On le voit, par exemple, en posant $a_1 = 10$, $a_2 = 9$, $a_3 = 1$, car alors $(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)^2 < (a_1 - a_2 + a_3)(a_1^3 - a_2^3 + a_3^3)$.

§ 4. Dans le cas de quelques autres inégalités on obtient cependant des résultats positifs. Considérons l'inégalité appelée par Hardy-Littlewood-Pólya „a companion to Minkowski inequality" [3], theorem 27, p. 32):

On a

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^p + \ldots + (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)^p \geq \\ &\geq (a_1^p + b_1^p + \ldots + l_1^p) + (a_2^p + b_2^p + \ldots + l_2^p) + \ldots + (a_n^p + b_n^p + \ldots + l_n^p)) \end{aligned}$$

si $p > 1$, et l'inégalité contraire lorque $0 < p < 1$.

On a le

Théorème II. *Lorsque* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$; $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant 0$; $\ldots$; $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 2)$, *on a*

$$(a_1 - a_2 + \ldots \pm a_n)^p + (b_1 - b_2 + \ldots \pm b_n)^p + \ldots + (k_1 - k_2 + \ldots \pm k_n)^p \geqslant$$

$$(a_1^p + b_1^p + \ldots + k_1^p) - (a_2^p + b_2^p + \ldots + k_2^p) + \ldots \pm (a_n^p + b_n^p + \ldots + k_n^p)$$

lorsque $p > 1$, *et l'inégalité contraire lorsque* $0 < p < 1$.

Cette inégalité est une conséquence immédiate du théorème de H. F. Weinberger, cité au § 3, car l'expression $(a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p)^{\frac{1}{p}}$ étant une fonction croissante de p, on a, en effet, si $p > 1$, par exemple, $a_1 - a_2 + \ldots \pm a_n \geqslant (a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p)^{\frac{1}{p}}$ et l'inégalité contraire lorsque $0 < p < 1$.

Il existe cependant un autre énoncé analogue à l'énoncé (A), dans lequel le signe de cet énoncé est conservé.

Théorème III. *Lorsque* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$; $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant 0$; $\ldots$; $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$ *et* $n \geqslant 1$ *on a*

$$(a_1 + b_1 + \ldots + k_1)^p - (a_2 + b_2 + \ldots + k_2)^p + \ldots \pm (a_n + b_n + \ldots + k_n)^p \geqslant$$

$$\geqslant (a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p) + (b_1^p - b_2^p + \ldots \pm b_n^p) + \ldots \pm (k_1^p - k_2^p + \ldots \pm k_n^p)$$

lorsque $p > 1$ *et l'inégalité contraire lorsque* $0 < p < 1$.

En procédant par induction nous allons distinguer deux cas:

1° *n est impair.*

Désignons par E la différence entre le membre gauche et le membre droit de l'inégalité. On a

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = p(a_n + b_n + \ldots + k_n)^{p-1} - pa_n^{p-1},$$

donc $\frac{\partial E}{\partial a_n} > 0$ lorsque $p > 1$ et $\frac{\partial E}{\partial a_n} < 0$ lorsque $0 < p < 1$. Dans le premier cas, par exemple, l'expression E ne peut que diminuer lorsque l'on remplace a_n par 0, et puis, d'une manière analogue, $b_n, \ldots, k_n$ par 0. Mais alors on est réduit à l'inégalité de l'énoncé, dans laquelle n est remplacé par $n-1$, c. à d. par un nombre pair. Le raisonnement est tout pareil lorsque $0 < p < 1$.

2° *n est pair.*

Cette fois $\frac{\partial E}{\partial a_n} = -p(a_n + \ldots + k_n)^{p-1} + pa_n^{p-1}$, donc $\frac{\partial E}{\partial a_n} < 0$ lorsque $p > 1$ et $\frac{\partial E}{\partial a_n} > 0$ lorque $0 < p < 1$. Dans le premier cas, par exemple, l'expression E ne peut que diminuer lorsque l'on remplace a_n par a_{n-1}, et puis, d'une manière analogue, b_n par $b_{n-1}, \ldots, k_n$ par k_{n-1}. Mais alors on est réduit à l'inégalité de l'énoncé, dans laquelle n est remplacé par n-2. Finalement, on est ramené soit au cas $n=1$, dans lequel l'inégalité de l'énoncé est classique, soit au cas $n=2$ et puis au cas où $a_2 = a_1, \ldots, k_2 = k_1$, dans lequel l'inégalité devient une égalité.

Pour ce qui concerne l'inégalité de Minkowski proprement dite, c. à d. l'inégalité:

$$|(a_1 + \ldots + a_n)^p + (b_1 + \ldots + b_n)^p + \ldots + (k_1 + \ldots + k_n)^p|^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (a_1^p + b_1^p + \ldots + k_1^p)^{\frac{1}{p}} + (a_2^p + b_2^p + \ldots + k_2^p)^{\frac{1}{p}} + \ldots + (a_n^p + b_n^p + \ldots + k_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

lorsque $p > 1$, et l'inégalité contraire lorque $0 < p < 1$, des exemples simples montrent que des énoncés analogues aux énoncés II et III n'existent pas.

§ 5. Soit $\varphi(u)$ une fonction convexe pour $u > 0$ et s'annulant pour $u = 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des quantités positives. On a l'inégalité connue: $\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi(a_n) \leq \varphi(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Voici un énoncé analogue:

Théorème IV. *Soit $\varphi(u)$ une fonction convexe pour $u > 0$, s'annulant pour $u = 0$. Supposons que*

$$0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2, \quad b_2 \geq 0, \quad b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2,$$

alors on a l'inégalité: $\varphi(a_1) + \varphi(a_2) - \varphi(b_1) - \varphi(b_2) \geq \varphi(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$ (on peut évidemment échanger les indices 1 et 2 dans les a ou dans les b).

Nous supposerons dans la démonstration que $\varphi(u)$ est convexe au sens strict et que cette fonction possède partout une dérivée. Posons

$$E = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) - \varphi(b_1) - \varphi(b_2) - \varphi(a_1 + a_2 - b_1 - b_2),$$

et considérons b_1 et b_2 comme variables. L'on a

$$E_{b_1} = -\varphi'(b_1) + \varphi'(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) \quad \text{et} \quad E_{b_2} = -\varphi'(b_2) + \varphi'(a_1 + a_2 - b_1 - b_2),$$

donc si E atteint un minimum, on a, φ' étant croissante, $b_1 = b_2 = a_1 + a_2 - b_1 - b_2$, donc $b_1 = b_2 = \frac{a_1 + a_2}{3}$ et, par suite,

$$E = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) - 3\varphi\left(\frac{a_1 + a_2}{3}\right).$$

Or cette expression est non-négative, car $\frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2)}{2} \geqslant \varphi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ en vertu de la définition d'une fonction convexe, et, d'autre part, $\frac{\varphi(u)}{u}$ est une fonction croissante de u, en vertu des conditions de l'énoncé. Il faut encore étudier la frontière du domaine de variabilité. *Lorsque* $b_1 = a_1$, l'on a $E = \varphi(a_2) - \varphi(b_2) - \varphi(a_2 - b_2)$. Or $a_2 - b_2 \geqslant 0$, car autrement on aurait $b_1 + b_2 > a_1 + a_2$, donc $E \geqslant 0$ en vertu de l'inégalité classique $\varphi(x) + \varphi(y) \leqslant \varphi(x + y)\,(x > 0, y > 0)$. *Lorsque* $b_1 = a_2$, l'on a $E = \varphi(a_1) - \varphi(b_2) - \varphi(a_1 - b_2)$. Or $b_2 \leqslant a_1$ en vertu de la condition $b_1 + b_2 \leqslant a_1 + a_2$, donc on voit comme tout à l'heure que $E \geqslant 0$. *Lorsque* $b_2 = 0$, $E = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) - \varphi(b_1) - \varphi(a_1 + a_2 - b_1)$ et b_1 varie entre a_1 et a_2; lorsque $b_1 = a_1$ ou $b_1 = a_2$ E s'annule et d'autre part

$$\frac{d}{db_1}[\varphi(a_1) + \varphi(a_2) - \varphi(b_1) - \varphi(a_1 + a_2 - b_1)] = \varphi'(a_1 + a_2 - b_1) - \varphi'(b_1).$$

Si cette dérivée s'annule, l'on a $a_1 + a_2 - b_1 = b_1$ et l'inégalité à démontrer se réduit à

$$\frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2)}{2} \geqslant \varphi\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right).$$

Supposons enfin que $b_1 + b_2 = a_1 + a_2$. L'on a $E = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) - \varphi(b_1) - \varphi(a_1 + a_2 - b_1)$. Or nous avons déjà vu que cette expression est non-négative. L'énoncé IV est donc démontré.

Corollaire. Soit $f(x, y)$ une fonction définie pour $0 < x_0 < x < X$, $0 < y_0 < y < Y$, positive et ayant des dérivées partielles f_x, f_y, f_{xy} continues et positives, et $\varphi(u)$ une fonction s'annulant pour $u = 0$ et convexe pour $u > 0$. Si $x_0 < x < X$ et $y_0 < y < Y$ on a l'inégalité

$$\varphi\,|f(x, y) + f(X, Y) - f(x, Y) - f(y, X)| \leqslant \varphi\,|f(x, y)| + \varphi\,|f(X, Y)| - \varphi\,[f(x, Y)] - \varphi\,[f(y, X)].$$

Faisons voir que les conditions de l'énoncé IV sont remplies. Il est évident que les hypothèses du corollaire entraînent les inégalités

$0 \leqslant f(x,y) \leqslant f(x,Y) \leqslant f(X,Y)$ et $f(Y,x) \geqslant 0$. L'inégalité $f(x,Y)+f(y,X) \leqslant$ $\leqslant f(x,y)+f(X,Y)$ résulte du théorème de la moyenne bien connu:

$$f(x,y)+f(X,Y)-f(x,Y)-f(y,X)=(X-x)(Y-y)f_{xy}(\xi,\eta),$$

où $x<\xi<X$ et $y<\eta<Y$. L'énoncé IV peut être généralisé de la manière suivante.

Théorème IVa. *Soit $\varphi(u)$ une fonction convexe pour $u \geqslant 0$ et s'annulans pour $u=0$. Supposons que*

$$\begin{array}{l} 0<a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \\ 0<a_2<b_2<a_3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ 0<a_{n-1} \leqslant b_{n-1} < a_n \end{array} \qquad b_n \geqslant 0,\ b_1+\ldots+b_n \leqslant a_1+\ldots+a_n$$

Alors on a l'inégalité:

$$\varphi(a_1)+\varphi(a_2)+\ldots+\varphi(a_n)-\varphi(b_1)-\varphi(b_2)-\ldots-\varphi(b_n) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n).$$

Nous supposerons dans la démonstration que $\varphi(u)$ est convexe au sens strict et possède partout une dérivée. Pour $n=2$ l'énoncé IVa se réduit évidemment à l'énoncé IV, nous procéderons donc par récurrence. Posons

$$E=\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)-\varphi(b_1)-\ldots-\varphi(b_n)-\varphi(a_1+\ldots+a_n-b_1-\ldots-b_n).$$

Considérons les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ comme variables. On a $E_{b_i}=$ $-\varphi'(b_i)+\varphi'(a_1+\ldots+a_n-b_1-\ldots-b_n)$. Si donc $E_{b_i}=0\ (i=1,\ldots,n)$, on a $b_i=a_1+\ldots+a_n-b_1-\ldots-b_n$, donc $b_i=\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n+1}$ et par suite

$$\frac{1}{n+1}E=\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n+1}-\varphi\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n+1}\right).$$

On voit comme dans la démonstration du théorème IV que cette expression est non-négative.

Etudions maintenant E à la frontière du domaine de variabilité. *Lorsque* $b_i=a_i$ on obtient, en tenant compte de l'inégalité $a_{i-1} \leqslant a_i \leqslant a_{i+1}$, l'inégalité de l'énoncé, où les nombres des variables a et b sont diminués chacun d'une unité.

Lorsque $b_i=a_{i+1}$ (i est un des nombres $1,2,\ldots,n-1$), la conclusion est la même que dans le cas précédent.

Lorsque $b_n = 0$, on a $E = \varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n) - \varphi(b_1) - \ldots - \varphi(b_{n-1}) - \varphi(a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_{n-1})$. D'après ce qui précède on peut supposer que $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sont contenus à l'intérieur des intervalles $(a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$ respectivement. L'on a donc, dans le cas d'un minimum de E, $\varphi'(b_1) = \varphi'(b_{n-1}) = \varphi'(a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_{n-1})$ d'où $b_1 = \ldots = b_{n-1} = a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_{n-1}$ c. à d. $b_1 = \ldots = b_{n-1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. L'inégalité à démontrer se réduit à

$$\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)}{n} - \varphi\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geqslant 0 .$$

Lorsque $b_1 + \ldots + b_n = a_1 + \ldots + a_n$ l'on a $E = \varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n) - \varphi(b_1) - \ldots - \varphi(b_{n-1}) - \varphi(a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_{n-1})$, on obtient donc la même expression que dans le cas précédent.

§ 6. Voici une autre proposition relative aux fonction convexes, qui ressemble, dans un cas particulier, à l'énoncé IV a:

Théorème V. *Soient $\varphi(u)$ une fonction convexe et croissante pour $u > 0$, $\varphi(0) = 0$, et $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ un système d'intervalles situés sur l'axe $0x$, tel que tout point de cet axe appartienne à p de ces intervalles au plus. On a l'inégalité:*

$$\sum (b_i - a_i) \leqslant K(\varphi, p)\, \varphi^{-1}\Big\{ \sum |\varphi(b_i) - \varphi(a_i)| \Big\} .$$

où les sommes sont étendues à tous les intervalles (a_i, b_i), $K(\varphi, p)$ désigne un nombre qui ne dépend que de p et de $\varphi(x)$, et φ^{-1} la fonction inverse de $\varphi(x)$. On a d'ailleurs

$$K(\varphi, p) \leqslant \sup_{x > 0} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]} \leqslant p .$$

Si $\frac{x\varphi'}{\varphi}$ est non-décroissante, on peut remplacer $\sup\limits_{x>0}$ par $\lim\limits_{x \to +\infty}$

En particulier $K(\varphi, 1) = 1$.

Dans la démonstration on peut admettre que $\varphi(u)$ est une fonction convexe au sens strict et dérivable. Supposons d'abord que $p = 1$, on a $K(\varphi, p) = 1$. En procédant par induction supposons d'abord qu'il s'agit d'un seul intervalle (a, b). L'inégalité à démontrer pourra s'écrire: $\varphi(b - a) \leqslant \varphi(b) - \varphi(a)$ ou $\varphi(b) \geqslant \varphi(a) + \varphi(b - a)$; c'est une inégalité classique. Supposons le théorème établi pour n intervalles:

$$\varphi\left|\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\varphi(b_i) - \varphi(a_i)|$$

et faisons voir que cette inégalité subsiste lorsque l'on remplace n par $n+1$ (on peut supposer que $a_1 < b_1 \leqslant \ldots < a_n < b_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1}$. Si l'on a $a_{n+1} = b_n$ l'inégalité obtenue se réduit évidemment à celle relative à n intervalles, supposons maintenant que a_{n+1} croît, la différence $b_{n+1} - a_{n+1} = c$ restant constante, le premier membre de l'inégalité ne change pas, tandis que le second est une fonction croissante de a_{n+1}, car il en est de même de la différence $\varphi(b_{n+1}) - \varphi(a_{n+1})$. La proposition est donc établie pour $p=1$. On constate que dans ce cas l'énoncé V ressemble beaucoup à IV a.

L'extension au cas de p quelconque sera obtenue à l'aide du lemme suivant:

Lemme. *Etant donnée une suite finie d'intervalles ouverts situés sur une droite et tels que chaque point de la droite appartienne à p de ces intervalles au plus, il est possible de décomposer cette suite d'intervalles en p suites partelles telles que chaque point de la droite appartienne à un intervalle au plus de chaque suite.*

Désignons par $I_1, I_2, \ldots, I_n$ les intervalles de la suite considérée. Ces intervalles définissent une suite finie d'intervalles $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)$ tels que chaque point d'un intervalle (α_i, β_i) est couvert par exactemant p intervalles I (on suppose d'ailleurs que les intervalles (α_i, β_i) épuisent tous les intervalles ayant cette propriété). L'intérieur d'un intervalle (α_i, β_i) ne contient aucune extrémité d'un intervalle I, tandis que les points α_i et β_i en font partie. Choisissons un des intervalles I, soit J_1, qui couvrent l'intervalle (α_1, β_1). Supposons que l'intervalle J_1 couvre les intervalles $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \ldots, (\alpha_s, \beta_s)$, mais ne couvre plus l'intervalle $(\alpha_{s+1}, \beta_{s+1})$ $(s \geqslant 1)$. Parmi les p intervalles I qui couvrent $(\alpha_{s+1}, \beta_{s+1})$ choisissons celui, soit J_2, qui n'empiète pas sur J_1 (un tel intervalle existe, car autrement une partie de J_1 appartiendrait à $(p+1)$ intervalles I). Supposons que l'intervalle J_2 couvre les intervalles $(\alpha_{s+1}, \beta_{s+1}), (\alpha_{s+2}, \beta_{s+2}), \ldots, (\alpha_t, \beta_t)$, mais ne couvre plus l'intervalle $(\alpha_{t+1}, \beta_{t+1})$ $(t \geqslant s+1)$. Parmi les p intervalles qui couvrent $(\alpha_{t+1}, \beta_{t+1})$ choisissons celui, soit J_3, qui n'empiète pas sur J_2. En continuant ainsi on formera une suite partielle d'intervalles I, soit $J_1, J_2, J_3, \ldots$, telle que chaque point de la droite appartient à un des intervalles, au plus, de cette suite. Il est clair, en outre, que chaque point de la droite appartient à $(p-1)$, au plus, des intervalles I restants. En poursuivant le même raisonnement, où p serait remplacé par $(p-1), (p-2), \ldots 2$, on achève la décomposition de la suite des intervalles I dont il est question dans l'énoncé.

Remarque. Il est curieux que *le lemme qui vient d'être démontré ne s'étend pas au cas où l'on remplace les intervalles situés sur une droite* *par des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées.* A. Bielecki a, en effet, construit un exemple (simplifié par J. G. Mikusiński) d'une suite de 16 rectangles en question, telle que chaque point du plan appartient à deux rectangles, au plus, de la suite, tandis qu'il est impossible de décomposer cette suite en moins de 4 suites partielles, composées de rectangles non empiétants (voir A. Bielecki, [2]). Le problème suivant ne semble pas résolu: Etant donnée une suite finie de rectangles, dont les côtés sont parallèles aux axes, et telle que chaque point du plan appartient à p de ces rectangles au plus, peut-on toujours décomposer cette suite en m suites partielles de rectangles, telles que chaque point du plan appartienne à un rectangle au plus de chaque suite partielle, le nombre m étant fonction de p seulement $m=m(p)$?

Considérons la suite d'intervalles dont il est question dans l'énoncé V et les p suites partielles dont il est question dans le lemme. Posons

$$A_i=\varphi^{-1}\left\{\sum\left[\varphi(b_i)-\varphi(a_i)\right]\right\}, \qquad i=1,2,\dots,p,$$

chacune des p sommes étant étendue à l'une des p sommes partielles. En vertu des propriétés de ces sommes et des résultats déjà établis, l'on a

$$\sum(b_i-a_i)\leq A_1+A_2+\dots+A_p,$$

où la somme s'étend à tous les intervalles considérés. Pour obtenir l'énoncé V il suffit donc d'étudier *sup* de l'expression

$$(*)\qquad \frac{A_1+\dots+A_p}{\varphi^{-1}[\varphi(A_1)+\dots+\varphi(A_p)]},$$

où $A_1,\dots,A_p$ sont des quantités positives quelconques.

Supposons que $A_1+\dots+A_p=C$, C étant une quantité fixe positive quelconque. Si $A_i\neq 0$ $(i=1,\dots,p)$ on peut appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange et l'on trouve

$$\varphi^{-1}\left[\sum\varphi(A_i)\right]-\left(\sum A_i\right)\varphi^{-1'}\left[\sum\varphi(A_i)\right]\varphi'(A_i)+\lambda\left\{\varphi^{-1}\left[\sum\varphi(A_i)\right]\right\}^2=0$$

$$(i=1,\dots,p).$$

Il en résulte que $A_1=A_2=\dots=A_p=x$ et l'expression $(*)$ se réduit à

$$\frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]}.$$

Lorsque $A_i = 0$ on est ramené au même problème, où p est remplacé par $(p-1)$. On voit donc que *sup* de l'expression $(*)$ ne dépasse pas

$$\sup \frac{\lambda x}{\varphi^{-1}[\lambda\varphi(x)]}, \text{ où } x > 0 \text{ et } 1 \leqslant \lambda \leqslant p.$$

Or il est facile de constater que $\lambda x : \varphi^{-1}[\lambda\varphi(x)]$ est une fonction croissante de λ. En effet, ceci s'exprime par l'inégalité $x\varphi'(x) - \varphi(x) > 0$ $(x > 0)$, qui résulte du fait que $\frac{\varphi(x)}{x}$ est une fonction croissante de x. L'inégalité principale de l'énoncé V est donc établie.

L'inégalité $\sup\limits_{x>0} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]} \leqslant p$ est immédiate, car si $p > 1$ $p\varphi(x) > \varphi(x)$ et, φ^{-1} étant croissante, $\varphi^{-1}[p\varphi(x)] > \varphi^{-1}\varphi(x) = x$. D'ailleurs

$$\sup_{x>0} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]}$$

peut atteindre la valeur p: ceci a lieu, par exemple, lorsque $\varphi(x) = e^x - 1$. Par contre, lorque $\varphi(x) = x^k$ $(k > 1)$ la borne supérieure étudiée est égale à $p^{1-\frac{1}{k}}$. Il reste à établir la dernière partie de l'énoncé V, relative au cas où $\frac{x\varphi'}{\varphi}$ est croissante. Il suffit évidemment de montrer que l'expression

$$\frac{x}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]}$$

est dans ce cas une fonction croissante de x, c. à d. que l'on a $E = \varphi^{-1}[p\varphi(x)] - xp\varphi^{-1'}[p\varphi(x)]\varphi'(x) > 0$. Posons pour abréger $y = \varphi^{-1}[p\varphi(x)]$ (l'on a $y > x$), il faut donc établir que $y - xp\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)} > 0$ ou que $y\varphi'(y) > px\varphi'(x)$; or $\varphi(y) = p\varphi(x)$, donc la dernière inégalité équivaut à $\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} > \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, c'est ce qui résulte de l'hypothèse, car $y > x$.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Bellman. *On an inequality due to Weinberger*. Amer. Math. Monthly 60 (1953) p. 402.
2. A. Bielecki. *Problème P. 56*. Colloquium Mathematicum. 1 (1948), p. 333-4.
3. Hardy-Littlewood-Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1934.
4. L. E. Payne and A. Weinstein. *Capacity, virtual Mass, and generalized symmetrization*. Pacific Journal of Mathematics, 2 (1952), p. 633—643.
5. H. Weinberger. *An inequality with alterning signs*. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 38 (1952), p. 611—613.

Streszczenie

Udowadniam następujące nierówności:

I (analogon nierówności Czebyszewa).

Jeśli $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$ a $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, przyczem $\varepsilon_1 = 1$ a liczba kolejnych -1 w ciągu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ nie przekracza nigdy liczby kolejnych $+1$, poprzedzających wymienione -1, to zachodzi nierówność

$$\varepsilon_1 a_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n b_n \geqslant \frac{1}{n}(\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n)(\varepsilon_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n b_n).$$

II. Jeśli $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$, $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n > 0$, $n \geqslant 2$

to jest

$$(a_1 - a_2 + \ldots \pm a_n)^p + (b_1 - b_2 + \ldots \pm b_n)^p + \ldots + (k_1 - k_2 + \ldots \pm k_n)^p$$
$$\geqslant (a_1^p + b_1^p + \ldots + k_1^p) - (a_2^p + b_2^p + \ldots k_2^p) + \ldots \pm (a_n^p + b_n^p + \ldots + k_n^p)$$

o ile $p \geqslant 1$, nierówność przeciwna zachodzi gdy $0 < p \leqslant 1$.

III. Jeśli ciągi a_i, b_i, k_i spełniają te same założenia co w tw. II a $n \geqslant 1$, to jest

$$(a_1 + b_1 + \ldots + k_1)^p - (a_2 + b_2 + \ldots + k_2)^p + \ldots \pm (a_n + b_n + \ldots + k_n)^p$$
$$\geqslant (a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p) + (b_1^p - b_2^p + \ldots \pm b_n^p) + \ldots + (k_1^p - k_2^p + \ldots \pm k_n^p)$$

gdy $p > 0$, nierówność przeciwna zachodzi gdy $0 < p < 1$.

IVa. Jeśli $\varphi(u)$ jest funkcją wypukłą dla $u > 0$, $\varphi(0) = 0$, oraz $0 < a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2$, $0 < a_2 \leqslant b_2 \leqslant a_3, \ldots, 0 < a_{n-1} \leqslant b_{n-1} \leqslant a_n, b_n \geqslant 0$, $b_1 + \ldots + b_n \leqslant a_1 + \ldots + a_n$, to zachodzi nierówność

$$\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n) - \varphi(b_1) - \ldots - \varphi(b_n) \geqslant \varphi(a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_n).$$

V. Jeśli $\varphi(u)$ jest funkcją wypukłą dla $u \geqslant 0, \varphi(0) = 0$, zaś $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ jest układem przedziałów otwartych na osi $0x$, takich, że każdy punkt tej osi należy co najwyżej do p takich przedziałów, to zachodzi nierówność

$$\sum (b_i - a_i) \leqslant K(\varphi, p)\, \varphi^{-1}\left\{ \sum |\varphi(b_i) - \varphi(a_i)| \right\}.$$

w której sumowanie rozciąga się na wszystkie przedziały (a_i, b_i), φ^{-1} oznacza funkcję odwrotną do $\varphi(x)$, a

$$K(\varphi, p) \leqslant \sup_{x>0} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]} \leqslant p.$$

Jeśli pochodna $\frac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}$ jest niemalejąca dla $u > 0$, to

$$K(\varphi, p) = \lim_{x \to \infty} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]}.$$

Jest godnym uwagi, że podobne do poprzednich analogony nierówności Cauchy'ego-Schwarza i Minkowskiego nie istnieją.

Резюме

Доказаны следующие неравенства:

I. (аналог неравенства Чебышева).

Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$, а $\varepsilon_i = \pm 1\,(i = 1, \ldots, n)$, причём $\varepsilon_1 = 1$ и число последовательных -1 в последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ не превышает никогда числа последовательных $+1$, предшествующих упомянутым -1, то имеет место неравенство

$$\varepsilon_1 a_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n b_n \geqslant \frac{1}{n}(\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n)(\varepsilon_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n b_n)$$

II. Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots b_n > 0, \ldots, k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n > 0$, $n \geqslant 2$, то $(a_1 - a_2 + \ldots \pm a_n)^p + (b_1 - b_2 + \ldots \pm b_n)^p + \ldots + (k_1 - k_2 + \ldots \pm k_n)^p \leqslant$

$$\leqslant (a_1^p + b_1^p + \ldots + k_1^p) - (a_2^p + b_2^p + \ldots + k_2^p) + \ldots \pm (a_n^p + b_n^p + \ldots + k_n^p)$$

поскольку $p > 1$; противоположное неравенсто имеет место, когда $0 < p < 1$.

III. Если последовательности $a_i, b_i, \ldots, k_i$ подлежат тем же условиям, как в теореме II, а $n > 1$, то имеем

$$(a_1 + b_1 + \ldots + k_1)^p - (a_2 + b_2 + \ldots + k_2)^p + \ldots \pm (a_n + b_n + \ldots + k_n)^p \geqslant$$
$$\geqslant (a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p) + (b_1^p - b_2^p + \ldots \pm b_n^p) + \ldots + (k_1^p - k_2^p + \ldots \pm k_n^p)$$

поскольку $p > 1$; противоположое неравенство имеет место, когда $0 < p < 1$.

IV. Если $\varphi(u)$ функция выпуклая для $u > 0$, $\varphi(0) = 0$, притом

$$0 < a_1 < b_2 < a_2,\ 0 < a_2 < b_2 < a_3, \ldots,\ 0 < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n,\ b_n > 0,$$
$$b_1 + \ldots + b_n < a_1 + \ldots + a_n$$

то имеет место неравенство

$$\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n) - \varphi(b_1) - \ldots - \varphi(b_n) \geq \varphi(a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_n).$$

V. Если $\varphi(u)$ функция выпуклая для $u > 0$, $\varphi(0) = 0$, а $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ представляет систему открытых интервалов на оси $0x$ таких. что всякая точка этой оси принадлежит, самое большее, к числу p таких интервалов, то имеет место неравенство

$$\sum (b_i - a_i) \leq K(\varphi, p)\, \varphi^{-1}\left\{ \sum [\varphi(b_i) - \varphi(a_i)] \right\},$$

в котором суммирование распространяется на все интервалы $(a_i, - b_i)$; φ^{-1} обозначает функцию обратную к φ, а

$$K(\varphi, p) \leq \sup_{x>0} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]} \leq p.$$

Если производная функции $\dfrac{u\varphi'(u)}{\varphi(u)}$ неубывающая для $u > 0$, то

$$K(\varphi, p) = \lim_{x\to\infty} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]}.$$

Заслуживает внимания то, что не существует аналог неравенств Коши-Шварца и Минковского, похожий на предшествующий.