ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA

VOL. LVIII, 2004 SECTIO A 79–87

REINER KÜHNAU

Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ und Fredholmsche Eigenwerte

In Erinnerung an Helmut Grunsky
anläßlich seines 100. Geburtstages

Abstract. We give some remarks and supplements to an important new paper of D. Partyka concerning inequalities of Grunsky type for quasiconformal mappings.

1. Einleitung. In [6], [7], [16], [2] wurde ein System von Ungleichungen vom Grunskyschen Typ für die Q-quasikonform fortsetzbaren Abbildungen der Klasse Σ der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen des Äußeren des Einheitskreises angegeben. Diese Ungleichungen haben den Nachteil, daß sie kaum Ausssagen über die Abbildungen auf dem Rande der Einheitskreislinie gestatten (Ausnahme: Satz 4 in [7]). Unlängst wurde nun in der bedeutsamen Arbeit [15] von D. Partyka in etwas anderem Kontext ein System von Ungleichungen hergeleitet, das diesen Übelstand nicht aufweist. Im folgenden sollen hierzu einige einfache Bemerkungen und Ergänzungen dargeboten werden.

Sei $w = \gamma(z)$ in den Ebenen der komplexen Variablen z und w eine schlichte, orientierungserhaltende und quasisymmetrische Substitution von

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30C62, 30C75.
Key words and phrases. Grunsky type inequalities, quasiconformal reflection, quasicircle, reflection coefficient, Fredholm eigenvalue.

$|z| = 1$ auf $|w| = 1$. Dann existiert eine konforme Verheftung, d.h. ein Paar von schlichten konformen Abbildungen $\zeta(z)$ und $\zeta(w)$ in eine ζ-Ebene, wobei die eine Abbildung $|z| < 1$ auf das Innere eines gewisssen Quasikreises C transformiert, die andere Abbildung $|w| > 1$ auf das Äußere von C, dazu durch γ zugeordnete Punkte z und w der Einheitskreislinie stets in den gleichen Punkt auf C. Kann man an C nun Q-quasikonform spiegeln (orientierungsumkehrend), dann existiert eine (orientierungsumkehrende) Q-quasikonforme Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| > 1$, die auf der Einheitskreislinie mit der Substitution γ übereinstimmt, und umgekehrt [12]. Statt auf $|w| > 1$ abzubilden, kann man auch Q-quasikonform auf $|w| < 1$ abbilden, dann orientierungserhaltend.

Jedem Quasikreis C kann man nun einen Fredholmschen Eigenwert λ zuordnen, in der eleganten Form von G. Schober so :

$$\frac{1}{\lambda} = \sup \frac{|D[h_1] - D[h_2]|}{D[h_1] + D[h_2]} \quad (1 < \lambda \leq +\infty), \tag{1}$$

wobei bei "sup" betrachtet werden die Dirichletschen Integrale D von beliebigen Paaren von Funktionen h_1 und h_2 (nicht beide $\equiv 0$), h_1 harmonisch im Inneren von C und dort $D[h_1]$ betrachtet, h_2 harmonisch im Äußeren (mit Einschluß von ∞) und dort $D[h_2]$ betrachtet, mit noch Stetigkeit und Übereinstimmung von h_1 und h_2 auf C.

Wir setzen noch

$$\Lambda = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad (1 \leq \Lambda < \infty). \tag{2}$$

Diese Definition des Fredholmschen Eigenwertes λ überträgt sich wegen der Invarianz des Dirichletschen Integrals bei konformer Abbildung sofort auf die quasisymmetrische Substitution γ von $|z| = 1$ auf $|w| = 1$, so daß wir auch für unsere quasisymmetrischen Substitutionen γ einen Fredholmschen Eigenwert λ bekommen. Dann stellen in (1) h_1 und h_2 beliebige im Einheitskreis (bzw. im Äußeren des Einheitskreises) harmonische Funktionen dar, die noch auf der Einheitskreislinie stetig sind, wobei in durch γ zugordneten Punkten gleiche Werte vorliegen.

Bekanntlich gilt stets (vgl. z.B. [12]) entsprechend einer alten Ahlforsschen Ungleichung

$$\Lambda \leq Q\,. \tag{3}$$

Zur Diskussion des Gleichheitszeichens vgl. man [10], [1], [2], für analytische C etwas expliziter in [11]; vgl. auch [14].

2. Verschärfung der Partykaschen Ungleichungen. Wir wollen uns nun anheischig machen, die Partykaschen Ungleichungen leicht modifiziert anzuschreiben, und werden dann klären, ob diese "scharf" (bestmöglich) sind. Dazu definieren wir für beliebige ganze Zahlen $m, n \neq 0$

$$\tilde{\gamma}(m,n) = \frac{1}{\sqrt{|m||n|}} \frac{1}{2\pi i} \int w^m \overline{dz^n}. \tag{4}$$

Diese Stieltjes-Integrale sind aufzufassen längs C in positiver Orientierung, wobei in (4) die Substitution γ in w als Funktion von z steckt. In [15] wird statt dessen geringfügig anders

$$\hat{\gamma}(m,n) = -\frac{1}{n}\sqrt{|m||n|}\ \tilde{\gamma}(m,n)$$

betrachtet; die formal auch definierten $\hat{\gamma}(0,n)$ und $\hat{\gamma}(m,0)$ spielen im Resultate keine Rolle.

Aus (1) folgt für alle dort zulässigen Paare reeller harmonischer Funktionen h_1 und h_2

$$D[h_1] \ \leq\ \Lambda\ D[h_2]. \tag{5}$$

Entscheidend für das Weitere ist nun, daß (1) gültig bleibt für Paare komplexer harmonischer Funktionen $h_1 = h_1^* + ih_1^{**}$, $h_2 = h_2^* + ih_2^{**}$, wieder h_1 harmonisch im Innern von C (d.h. h_1^* und h_1^{**} harmonisch, aber nicht notwendig harmonisch konjugiert), h_2 harmonisch im Äußeren (mit Einschluß von ∞), mit noch Stetigkeit und Übereinstimmung von h_1 und h_2 auf C. Dabei wird z.B. das Dirichletsche Integral $D[h_1]$ aufgefaßt als

$$D[h_1] = \iint \left(\left|\frac{\partial h_1}{\partial \xi}\right|^2 + \left|\frac{\partial h_1}{\partial \eta}\right|^2 \right) dxdy \qquad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{6}$$

Nach konformer Übertragung gilt (5) natürlich auch für h_1 und h_2 innerhalb des Einheitskreises bei Übereinstimmung in durch γ zugeordneten Punkten. Die unveränderte Gültigkeit von (5) für solche komplexen harmonischen Funktionen h_1, h_2 ergibt sich durch folgende einfache Rechnung:

$$D[h_1] = D[h_1^*] + D[h_1^{**}] \leq \Lambda\ D[h_2^*] + \Lambda\ D[h_2^{**}] = \Lambda\ D[h_2],$$

wobei die Gültigkeit von (5) für die reellen h_1^* usw. benutzt wird.

Damit bleibt in [15] die entscheidende Ungleichung (1.3) gültig bei Ersetzung von K durch Λ, wobei Λ gemäß (2) aus dem Fredholmschen Eigenwert λ von γ entsteht. Eingedenk dessen liefert der Beweis des Theorems auf Seite 139 in [15] sofort auch den folgenden schärferen Satz.

Satz 1. *Sind ν_n beliebige komplexe Zahlen, die für alle ganzen Zahlen $n \neq 0$ erklärt sind, und für die $\sum_{n\neq 0} |\nu_n|^2$ konvergiert, dann konvergiert für alle festen $m \neq 0$ auch die mit den durch (4) definierten $\tilde{\gamma}(m,n)$ gebildete Reihe $\sum_{n\neq 0} \tilde{\gamma}(m,n)\nu_n$, und es gilt für die quasisymmetrischen Homöomorphismen γ mit dem Fredholmschen Eigenwert λ*

$$\frac{1}{\Lambda}\sum_{n\neq 0} |\nu_n|^2 \leq \sum_{m\neq 0}\left|\sum_{n\neq 0} \tilde{\gamma}(n,m)\nu_n\right|^2 \leq \Lambda \sum_{n\neq 0} |\nu_n|^2. \tag{7}$$

Immer wird hier und hinfürder aufgefaßt

$$\sum_{n\neq 0} = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=+1}^{+p} + \sum_{n=-1}^{-p}\right).$$

Die ursprüngliche Ungleichung von Herrn D. Partyka ((1.7) in [15]) folgt dann aus (7) wegen der Ungleichung (3).

Der Beweis des Corollary in [15] liefert weiter sofort die

Folgerung. *Sind ν_n, ν_n' beliebige komplexe Zahlen, die für alle ganzen Zahlen $n \neq 0$ erklärt sind und für die $\sum_{n\neq 0} |\nu_n|^2$ und $\sum_{n\neq 0} |\nu_n'|^2$ konvergieren, dann konvergiert für alle festen $m \neq 0$ auch die Reihe $\sum_{n\neq 0} \tilde{\gamma}(n,m)\nu_n$, und es gilt*

$$\begin{aligned} \left|\sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0} \tilde{\gamma}(n,m)\nu_n\nu_m'\right| &\leq \sum_{m\neq 0}\left|\sum_{n\neq 0} \tilde{\gamma}(n,m)\nu_n\nu_m'\right| \\ &\leq \sqrt{\Lambda}\sqrt{\sum_{n\neq 0} |\nu_n|^2 \sum_{m\neq 0} |\nu_m'|^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

3. Weitere Ungleichungen. Hinfürder sei $F(w)$ für $|w| \geq 1$ (d.h. für $|w| > \rho$ mit einem gewisssen $\rho < 1$) analytisch mit $F(\infty) = 0$, $G(z)$ für $|z| \leq 1$ analytisch mit $G(0) = 0$. Wir entwickeln für $|w| \geq 1$ bzw. $|z| \leq 1$

$$F(w) = \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{|m|}}\,\nu_m w^m\ ,\ G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\overline{\nu_n'}\, z^n \tag{9}$$

mit gewisssen komplexen ν_m, ν_n'. Es folgt bei Integration längs der positiv orientierten Einheitskreislinie

$$\int \bar{F} dF = -2\pi i \sum_{m=-1}^{-\infty} |\nu_m|^2\ ,\ \int \bar{G} dG = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n'|^2. \tag{10}$$

Legen wir wieder bei der folgenden Integration die zwischen w und z bestehende Substitution γ auf der Einheitskreislinie zugrunde und definieren noch

$$\nu_m = \alpha\, \overline{\nu_{-m}} \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \ldots \;,\; \nu_n^{'} = \beta\, \overline{\nu_{-n}^{'}} \quad \text{für} \quad n = -1, -2, \ldots,$$

wobei α und β fixierte komplexe Parameter sind, errechnen wir weiters

$$\begin{aligned}
&\int \Big(F(w) + \alpha\overline{F(w)}\Big)\overline{d\Big(G(z) + \beta\overline{G(z)}\Big)} \\
&\qquad = \int \left(\sum_{m\neq 0} \frac{1}{\sqrt{|m|}}\, \nu_m w^m\right)\, \overline{d\left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{\sqrt{|n|}}\, \nu_n^{'} z^n\right)} \\
&\qquad = 2\pi i \sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0} \tilde{\gamma}(m,n)\nu_m \nu_n^{'} \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m\neq 0} |\nu_m|^2 &= \sum_{m=-1}^{-\infty} |\nu_m|^2 + |\alpha|^2 \sum_{m=-1}^{-\infty} |\nu_m|^2 = -(1+|\alpha|^2)\frac{1}{2\pi i}\int \overline{F} dF \,, \\
\sum_{n\neq 0} |\nu_n^{'}|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n^{'}|^2 + |\beta|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n^{'}|^2 = (1+|\beta|^2)\frac{1}{2\pi i}\int \overline{G} dG \,.
\end{aligned}$$

Nach der Folgerung fließt daraus

Satz 2. *Ist $F(w)$ für $|w| \geq 1$ analytisch mit $F(\infty) = 0$, $G(z)$ analytisch für $|z| \leq 1$ mit $G(0) = 0$, sind α und β komplexe Konstanten, und ist $w = \gamma(z)$ unsere quasisymmetrische Substitution auf der Einheitskreislinie, dann gilt bei Integration dortselbst*

$$\begin{aligned}
&\left|\int \Big(F(w) + \alpha\overline{F(w)}\Big)\, \overline{d\Big(G(z) + \beta\overline{G(z)}\Big)}\right|^2 \\
&\qquad \leq \Lambda(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)\left|\int \bar{F} dF\right| \cdot \left|\int \bar{G} dG\right| .
\end{aligned} \tag{11}$$

Speziell für $\alpha = 1$, $\beta = -1$ heißt dies

$$4\left|\int (\mathfrak{Re}\; F) d(\mathfrak{Im}\; G)\right|^2 \leq \Lambda \left|\int \overline{F} dF\right| \left|\int \overline{G} dG\right| . \tag{12}$$

Da hier die Integrale auf der rechten Seite sich auch als Dirichlet-Integrale deuten lassen, kann man äquivalent zu (12) mit der für $|w| \geq 1$ harmonischen

Funktion $h_2(w) = \mathfrak{Re}\ F(w)$ und der für $|z| \leq 1$ harmonischen Funktion $h_1(z) = \mathfrak{Im}\ G(z)$ auch schreiben

$$\left| \int h_2 dh_1 \right|^2 \leq \Lambda\ D[h_1]D[h_2]. \tag{13}$$

Dabei ist bei $D[h_2]$ die Integration über $|w| \geq 1$ zu erstrecken, bei $D[h_1]$ über $|z| \leq 1$, und die Integration links erfolgt längs der Einheitskreislinie, wobei natürlich wieder h_2 und dh_1 in jeweils durch die Substitution γ zugeordneten Punkten zu nehmen sind. Und der gewiefte Leser bemerkt natürlich sofort, daß (13) nach konformer Übertragung äquivalent auch in der ζ-Ebene zu sehen ist: $D[h_2]$ dann außerhalb C zu nehmen, $D[h_1]$ innerhalb von C; die Integration links erfolgt längs C. Der Gewinst gegenüber (1) bzw. (5) ist jetzt der, daß h_1 und h_2 unabhängig voneinander wählbar sind, also nicht wie in (1), (5) längs C miteinander gekoppelt sein müssen.

Diese Ungleichungen (12) und (13) können auch zur Abschätzung von Λ benutzt werden, indem man konkrete Funktionen F und G einsetzt Wenn man die Integration in der ζ-Ebene bei (analytischem) Quasikreis C auffaßt, erhält man so Abschätzungen für den Fredholmschen Eigenwert dieses Quasikreises. Ist z.B. C in der ζ-Ebene mit innerem Punkt $\zeta = 0$ gegeben, wird dazu gewählt $F(w) = 1/\zeta(w)$, wobei $\zeta(w)$ eine schlichte konforme Abbildung von $|w| > 1$ auf das Äußere von C mit $\zeta(\infty] = \infty$ ist, ferner $G(z) = \zeta^*(z)$, wobei $\zeta^*(z)$ eine schlichte konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf das Innere von C mit $\zeta^*(0) = 0$ darstellt, dann folgt aus (12)

$$\left| \int_C (\mathfrak{Re} \frac{1}{\zeta})\ d(\mathfrak{Im}\ \zeta) \right|^2 \leq\ \ \Lambda \cdot I \cdot I^*. \tag{14}$$

Hier bezeichnet I den Flächeninhalt innerhalb C, I^* den Flächeninhalt innerhalb des Bildes von C nach "Stürzung", d.h. Übergang von ζ zu $1/\zeta$. Freilich kann (14) auch auf eine triviale Abschätzung für Λ führen, indem eine untere Schranke ≤ 1 entsteht. In (14) kann man übrigens die ursprüngliche quasisymmetrische Substitution γ vergesssen, sintemalen ja nur noch C auftritt.

4. Sind die Ungleichungen scharf, d.h. nicht verbesserungsfähig? Wir setzen jetzt C als analytische Jordankurve voraus, d.h. die Substitution γ sei analytisch mit Ableitung $\neq 0$. Umgekehrt führt eine jegliche solche analytische Substitution γ mit Ableitung $\neq 0$ durch konforme Verheftung zu einer analytischen Jordankurve C. Dann existiert nach [9] (Satz 5) eine im Äußeren und auf C analytische Funktion $F(\zeta) \not\equiv 0$ mit $F(\infty) = 0$, für die $F - \lambda\overline{F}$ (λ wieder Fredholmscher Eigenwert von C) die Randwerte einer innerhalb C analytischen Funktion G darstellt (in [3] wurde diese Eigenschaft für eine neue Eigenwert-Definition ausgenutzt; vgl. auch [14]).

Setzt man dieses Paar F, G in (12) ein, errechnet man elementar mit Benutzung dieser Randeigenschaft $G = F - \lambda\overline{F}$ auf der Einheitskreislinie, daß das Gleichheitszeichen steht. Das bedeutet folgende Extremalcharakterisierung von λ:

Fixiert man C bzw. die zugeordnete Substitution γ, dann ist in (12) $\sqrt{\Lambda}$ nicht bei allen zulässigen F, G durch einen kleineren Koeffizienten zu ersetzen. Damit ist auch in (7)(rechts) und (8) zu fixierter Substitution γ nicht Λ bzw. $\sqrt{\Lambda}$ zu allen Parametersystemen ν_n bzw. ν_n, ν'_m durch einen kleineren Koeffizienten zu ersetzen.

Übrigens bedeutet dies auch, daß bei solch analytischen Substitutionen $w = \gamma(z)$ von $|z| = 1$ auf $|w| = 1$ aus der Gültigkeit von (7) (rechts) für alle Wertesysteme ν_n mitnichten folgt, daß diese Substitution zu einer Λ-quasikonformen Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ stetig fortgesetzt werden kann. Dies zeigt schon das Beispiel in [10] (Seite 129). Für die dort konstruierte dreifach symmetrische Kurve C ist nämlich der Spiegelungskoeffizient größer als der zugehörige Λ-Wert. Immerhin existiert aber bei Gültigkeit von (7) (rechts) für alle Wertesysteme ν_n eine quasikonforme Fortsetzung mit einer nur von Λ abhängigen explizit angebbaren Dilatationsschranke; vgl. [13]. Der bestmögliche Wert für diese von Λ abhängige Dilatationsschranke ist noch unbekannt.

5. Verwandte Probleme. Entsprechend zu (1.13) in [15] ergibt sich aus (7)

$$\frac{1}{\Lambda} \leq \sum_{m \neq 0} |\tilde{\gamma}(1,m)|^2 \leq \Lambda, \tag{15}$$

und somit auch eine Abschätzung für $|\tilde{\gamma}(1,m)|$ in Abhängigkeit von Λ. Wir bemerken in diesem Zusammenhange, daß es nach [5] (Seite 178) sogar für diese $\tilde{\gamma}(1,m)$ eine Abschätzung gibt ohne eine Voraussetzung über Λ, mehr noch, nur bei Voraussetzung der Monotonie der Substitution γ auf der Einheitskreislinie (sogar ohne die Voraussetzung der Stetigkeit), welche also lautet:

$$|\tilde{\gamma}(1,m)| \leq \begin{cases} \frac{|m|+1}{\pi\sqrt{|m|}} \sin \frac{\pi}{|m|+1} & \text{für } m = -1, -2, \ldots, \\ \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & \text{für } m = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{16}$$

So liegt als *cura posterior* nahe, nach der Methode in [5] allgemeiner $\tilde{\gamma}(n,m)$ (oder sogar Funktionale in mehreren dieser Größen) abzuschätzen, zunächst wie in [5] ohne Voraussetzung der Quasisymmetrie von γ, dann aber auch unter Einbeziehung der Quasisymmetrie. Hierbei ist es wohl zweckmäßig, die Quasisymmetrie auf der Einheitskreislinie wie in [3] zu betrachten, was in diesem Falle natürlicher erscheint als — wie sonst üblich — die Quasisymmetrie auf der reellen Achse.

Ein weiteres *Desideratum*: Der geneigte Leser suche Abschätzungen für die $\tilde{\gamma}(n, m)$, wenn zusätzlich die Substitution in einem Streifen um die Einheitskreislinie konform ist, mit einer Q-quasikonformen Fortsetzung. Ohne solche quasikonforme Fortsetzung wurden Koeffizientenbedingungen von Grunskyschen Typ in [8] gewonnen.

Literatur

[1] Krushkal, S. L., *On the Grunsky coefficient conditions*, Siberian Math. J. **28** (1987), 104–110.

[2] Krushkal, S. L., *Univalent holomorphic functions with quasiconformal extensions (variational approach)*, Handbook of Complex Analysis - Geometric Function Theory, Vol. 2, Elsevier Science, Amsterdam, 2004.

[3] Krzyż, J.G., *Conjugate holomorphic eigenfunctions and extremal quasiconformal reflection*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **10** (1985), 305–311.

[4] Krzyż, J.G., *Quasicircles and harmonic measure*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **12** (1987), 19–24.

[5] Kühnau, R., *Schranken für die Koeffizienten schlicht abbildender Laurentscher Reihen*, Math. Nachr. **41** (1969), 177–183.

[6] Kühnau, R., *Koeffizientenbedingungen bei quasikonformen Abbildungen*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A, **22/23/24** (1968/1969/1970), 105–111.

[7] Kühnau, R., *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr. **48** (1971), 77–105.

[8] Kühnau, R., *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende Laurentsche Reihen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., Astronom., Phys. **20** (1972), 7–10.

[9] Kühnau, R., *Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*, Math. Nachr. **76** (1977), 139–152.

[10] Kühnau, R., *Zu den Grunskyschen Coeffizientenbedingungen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **6** (1981), 125–130.

[11] Kühnau, R., *Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit?*, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 290–307.

[12] Kühnau, R., *Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve*, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Verein. **90** (1988), 90–109.

[13] Kühnau, R., *Über die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect.A, **54** (2000), 53–60.

[14] Partyka, D., *The generalized Neumann–Poincaré operator and its spectrum*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **366** (1997), 125 pp.

[15] Partyka, D., *The Grunsky type inequalities for quasisymmetric automorphisms of the unit circle*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. **31** (2000), 135–142.

[16] Pommerenke, Chr., *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975.

Reiner Kühnau
FB Mathematik und Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
D-06099 Halle-Saale
Germany
e-mail: kuehnau@mathematik.uni-halle.de

Received June 2, 2004